

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра радиоэлектронных средств

*АВТОМАТИЗАЦИЯ КОНСТРУКТОРСКОГО
И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЭС*
методические указания к лабораторным работам
по курсу
для студентов специальности
1-39 02 01

Минск БГУИР 2008

Методические указания к лабораторным работам по курсу «Автоматизация конструкторского и технологического проектирования РЭС» для студентов специальности 1-39 02 01 / Сост. А.И. Толстая, И.Л. Селезнев, Т. В. Малышева, И.Н. Цырельчук. - Мн.: БГУИР, 2008. –с.44.

Методические указания являются составной частью учебно-методического комплекса, разрабатываемого и издаваемого авторами по дисциплине «Автоматизация конструкторского и технологического проектирования РЭС». Материал подготовлен на основе текстов лекций, читаемых авторами, и методических разработок, используемых при проведении лабораторных и практических занятий со студентами на протяжении последних 5 лет. Использование его будет способствовать углубленному изучению, закреплению теоретических знаний и приобретению практических навыков применения по двум важнейшим разделам указанной дисциплины: «Основы теории множеств» и «Основы теории графов».

Указания предназначены для студентов специальности 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование РЭС». Может быть рекомендовано студентам других радиоэлектронных специальностей при изучении курсов, связанных с автоматизацией проектирования РЭС и ЭВС.

Составители: А.И.Толстая
И.Л.Селезнев
Т.В. Малышева
И.Н.Цырельчук

© Коллектив авторов, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ	8
1.1 Множество, его элементы и способы задания	8
1.2 Операции над множествами.....	9
1.3 Разбиение множеств	13
2 ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ	14
2.1 Примеры решения задач.....	14
2.2 Задачи для самостоятельного решения	17
3 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ	19
3.1 Общие сведения о графах.....	19
3.2 Основные разновидности графов.....	20
3.3 Маршруты, цепи и циклы в графах	23
3.4 Матричное представление графов	25
3.5 Характеристические числа графов	27
3.6 Гиперграфы	28
4 ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ	27
4.1 Примеры решения задач.....	27
4.2 Задачи для самостоятельного решения	38
ЛИТЕРАТУРА.....	46

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших условий интегрирования Республики Беларусь в мировую экономическую систему является повышение эффективности производства за счет внедрения новых прогрессивных технологий, улучшения организации и повышения его производительности. Это невозможно осуществить без широкого внедрения различных систем автоматизированного инженерного труда.

В сфере разработки и производства радиоэлектронных средств (РЭС) можно выделить следующие основные системы автоматизации инженерного труда:

- автоматизированная система планирования (АСП);
- автоматизированная система научных исследований (АСНИ);
- система автоматизированного проектирования (САПР);
- автоматизированная система технологической подготовки производства (АСТПП);
- автоматизированная система управления производством (АСУП);
- гибкие автоматизированные производства (ГАП);
- автоматизированная система комплексных испытаний объекта (АСКИО);
- автоматизированная система статистических исследований (АССИ).

На основе использования перечисленных систем автоматизации целесообразным является создание интегрированных производственных комплексов.

Ключевая роль в цепочке указанных систем принадлежит САПР, так как именно на этапе проектирования формируется потенциальное качество и потребительская стоимость изделий, которые реализуются на этапе производства и используются в процессе эксплуатации. Для создания САПР и других систем автоматизации необходимо изучение и использование новейших достижений в целом ряде областей науки и техники. Для САПР РЭС это – математика, вычислительная техника, техническая кибернетика, программирование, физика, радиоэлектроника, теоретические основы конструирования и надежности, технология, организация производства.

Требования, предъявляемые к РЭС по точности, устойчивости к внешним факторам, чувствительности и надежности, постоянно ужесточаются, что неизбежно ведет к усложнению аппаратуры. В результате возникают противоречия между требованиями к РЭС и возможностями их удовлетворения. Основные противоречия заключаются в следующем:

- чем сложнее РЭС, тем она более трудоемка;
- увеличиваются сроки разработки сложной РЭС;
- возрастает вероятность получения отрицательного результата. При разработке РЭС из-за быстрого морального старения (изделие может отстать от требований, возникших к началу эксплуатации).

До недавнего времени сокращение сроков разработки достигалось путем увеличения численности разработчиков. Однако в современных условиях такой путь неприемлем по следующим причинам:

- количество специалистов в каждой области ограничено;
- уменьшается удельная производительность каждого работника из-за трудностей эффективного управления;
- увеличивается стоимость разработки;
- увеличивается количество ошибок (к числу ошибок, неизбежных при ручном проектировании, добавляются ошибки из-за неувязки составных частей проекта).

Радикальным средством разрешения указанных проблем является автоматизация проектирования. Таким образом, необходимость автоматизации обусловлена:

- необходимостью сокращения сроков проектирования изделий;
- повышением качества разработки;
- сокращением численности разработчиков;
- использованием современной элементной базы и технологий.

Знание математического аппарата, применяемого в инженерных исследованиях, умение пользоваться математическими моделями при оптимальном проектировании реальных объектов и систем, знание программных и технических средств САПР и умение пользоваться ими в качестве инструмента проектировщика позволит современным радиоинженерам, конструкторам и технологам ставить и решать задачи автоматизации проектирования по отраслям техники.

1 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

При решении задач автоматизированного проектирования исключительно широкое применение находит теория множеств. Ее понятия и математический аппарат используются как непосредственно, так и в качестве базы для теории графов, которая, в свою очередь, широко применяется при математическом моделировании структур и конструкций проектируемых объектов, а также технологических процессов их изготовления. На основе теории графов можно получить весьма наглядные модели схем, конструкций и технологических процессов изготовления радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) и электронно-вычислительной аппаратуры (ЭВА). Удобным также оказывается ее применение при реализации различных алгоритмов преобразования информации в САПР, связанных с осуществлением автоматизированных проектных процедур, организацией процессов ввода и вывода информации о проектируемом объекте. Поэтому здесь рассмотрены основные положения теории множеств применительно к задачам конструкторского и технологического проектирования РЭА.

1.1 Множество, его элементы и способы задания

Множество относится к числу наиболее общих, основополагающих понятий математики, не подлежащих строгому логическому определению,

Множество представляет собой совокупность элементов, обладающих некоторыми общими для данного множества свойствами и находящимися в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств. Элементами множества могут быть объекты любой природы, обладающие общим определяющим для данного множества свойством (множество конструктивных элементов, множество модулей, множество интегральных схем и т.д.).

Обозначают множества обычно прописными (заглавными) буквами латинского алфавита: A, B, C , а элементы множеств – строчными латинскими буквами (как правило, с индексами): a_1, a_2, a_3, \dots . Утверждение, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (и только из этих элементов), условно записывается $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Принадлежность элемента a множеству A обозначается как $a \in A$ (отношение принадлежности). То, что элемент b не принадлежит множеству A , записывают как $b \notin A$.

Число n элементов множества $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ называют *мощностью* данного множества и записывают как $|A| = n$. Множество с конечным числом элементов называют *конечным*; множество, содержащее бесконечное число элементов – *бесконечным*. Примером конечного множества является множество электрорадиоэлементов в функциональном узле РЭА, бесконечного – множества четных и нечетных чисел в натуральном ряду чисел. Множество A может состоять из одного элемента a , тогда его обозначают $A = \{a\}$ и называют

одноэлементным. Кроме того, в теории множеств существует понятие *пустого множества*, которое не содержит ни одного элемента. Так, если множество V пустое, то его обозначают $V = \emptyset$.

Если все элементы множества A принадлежат множеству V , то множество A называют *подмножеством* (частью) множества V . Отношение между множествами A и V в данном случае называют отношением включения и обозначают как $A \subset V$ (A включено в V), или $V \supset A$ (V включает A). Например, множество резисторов в схеме РЭА является подмножеством множества электрорадиоэлементов в схеме.

Если каждый элемент множества A является одновременно и элементом множества V , и наоборот (множества A и V состоят из одних и тех же элементов), то множества A и V *равны*, т.е. $A = V$. При одновременном выполнении соотношений $A \subset V$ и $V \subset A$ необходимо, чтобы $A = V$. И обратно, если $A = V$, то $A \subset V$ и $V \subset A$. Наряду со строгим включением $A \subset V$, не допускающим равенства A и V , используется также отношение нестрогого включения $A \subseteq V$, при котором допускается $A = V$,

Следует обратить внимание на различие между отношением принадлежности и отношением включения. Так, множество A одновременно может являться своим подмножеством, т.е. $A \subset A$, однако множество A не может входить в состав своих элементов, т.е. $A \notin A$. Отношение включения обладает свойством *транзитивности*, т.е. если $A \subset B$ и $B \subset C$, то и $A \subset C$. Отношение принадлежности таким свойством не обладает. Например, множество $A^1 = \{a_1, \{a_2, a_3\}, a_4\}$ содержит в числе своих элементов множество $A^1 = \{a_2, a_3\}$, поэтому можно записать $a_2, a_3 \subset A^1$ и $A^1 \subset A$. Однако из этого не следует, что элементы a_2 и a_3 принадлежат множеству A (действительно, среди элементов множества A нет a_2 и a_3), т.е. $a_2, a_3 \notin A$.

Задать множество можно либо путем *перечисления его элементов*, как например, спецификация задает множество составных частей сборочной единицы, либо путем *задания некоторого правила*, по которому элементы описываются определяющим свойством, общим для всех элементов. Это свойство характеризует принадлежность элементов к конкретному множеству и представляет собой утверждение или высказывание, справедливое для любого элемента множества.

1.2 Операции над множествами

С множествами, как и с другими математическими объектами, можно производить ряд операций. Определим основные из них.

Объединением (суммой, соединением) множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество C , состоящее из элементов, принадлежащих или множеству A , или множеству B (или обоим множествам одновременно). Одинаковые элементы множеств A и B во множестве C записываются один раз. Формально это определение можно записать так:

$$C = A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Наглядное представление об операциях над множествами дает графическая их иллюстрация с использованием кругов Эйлера. Множества при этом представляются в виде множеств точек данных кругов или их частей. Так, множества C , получаемые в результате операции объединения множеств A и B , изображены на рисунке 1.1 заштрихованными областями.

Объединение произвольного количества n множеств A_1, A_2, \dots, A_n запишется как

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Для операции объединения справедливы переместительный и сочетательный законы, т.е. $C = A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Объединение множества с самим собой дает то же множество $A \cup A = A$. Объединение некоторого непустого множества с пустым множеством дает то же множество, т.е. $A \cup \emptyset = A$. Операция объединения позволяет определить, например, множество электрорадиоэлементов по заданным множествам резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности, полупроводниковых элементов и микросхем в схеме конструктивного модуля РЭА.

Пересечением (логическим произведением) множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество C , состоящее из элементов, принадлежащих одновременно как множеству A , так и множеству B . Формально это определение можно записать как

$$C = A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Графически множество C , получаемое в результате операции пересечения множеств A и B , показано на рисунке 1.2, а. Множества A и B , не имеющие общих элементов, в результате операции пересечения образуют пустое множество ($A \cap B = \emptyset$) и называются *непересекающимися* (рисунок 1.2, б). Пересечение m множеств B_1, B_2, \dots, B_m запишется как

операциях над множествами дает

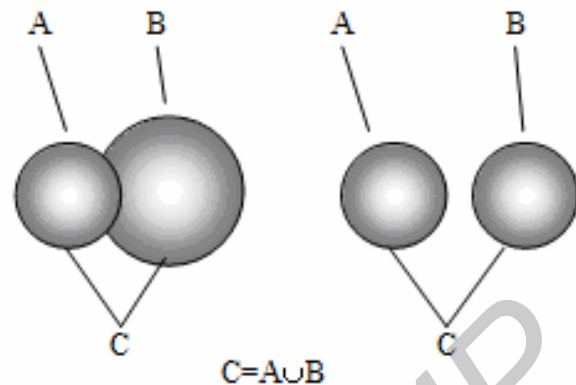


Рисунок 1.1 – Объединение множеств A и B

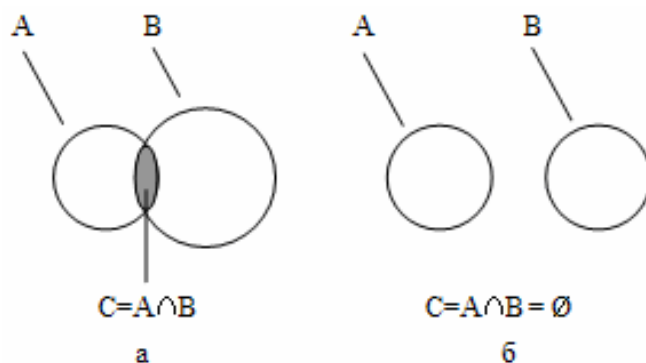


Рисунок 1.2 – Пересечение множеств A и B : а – пересекающихся; б – непересекающихся

$$B = \prod_{i=1}^m B_i$$

Для пересечения справедливы переместительный и сочетательный законы, т.е. $C = A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Пересечение множества с самим собой равно исходному множеству $A \cap A = A$. Пересечение непустого множества с пустым множеством дает пустое множество, т.е. $A \cap \emptyset = \emptyset$. С помощью операции пересечения можно определить, например, множество типов электрорадиоэлементов, являющихся общими для множеств электрорадиоэлементов различных функциональных узлов в электронном устройстве.

Для операций объединения и пересечения взаимно справедливы распределительный закон, т.е. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и наоборот, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Разность множеств А и В (обозначается $A \setminus B$ или $A - B$) называется множеством С, которое состоит из элементов, принадлежащих множеству А, и одновременно не принадлежащих множеству В:

$$C = A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Разность по своим свойствам отличается от объединения и пересечения тем, что она определена только для двух множеств, т.е. разность является двухместной операцией. Графическая иллюстрация разности С множеств А и В приведена на рисунке 1.3. Для разности не справедливы переместительный и сочетательный законы, т.е. $A \setminus B \neq B \setminus A$, $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.

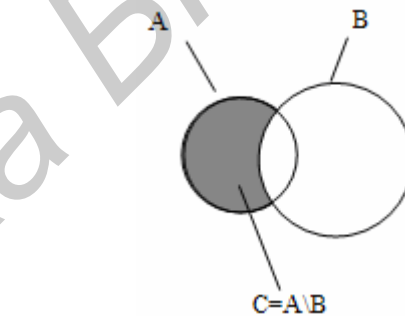


Рисунок 1.3 – Разность множеств А и В

Если множество А включает множество В, т.е. $A \supset B$, то можно определить *дополнение* множества В по отношению ко множеству А как множество \bar{B} , состоящее из элементов, принадлежащих множеству А, которые одновременно не принадлежат множеству В. Формальное определение дополнения В запишется так:

$$\bar{B} = A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

На рисунке 1.4 дополнение \bar{B} показано в виде заштрихованной области.

Обычно определение любого множества в явном или неявном виде ограничивает совокупность допустимых для данного множества объектов. Удобно совокупность объектов, допустимых для всех рассматриваемых множеств, зафиксировать явным образом и считать рассматриваемые

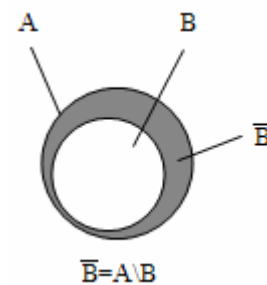


Рисунок 1.4 – Дополнение \bar{B} множества В до множества А

множества подмножествами данной совокупности. При этом, указанную совокупность называют *основным* или *универсальным* множеством (универсумом) и обозначают обычно I . Множество I должно быть либо задано явно, либо очевидно из контекста. В качестве универсального множества в конкретных случаях могут выступать различные общие множества. Так, например, для множеств электрорадиоэлементов, содержащихся в различных блоках РЭА, универсальным будет множество электрорадиоэлементов, использованных в данной РЭА в целом. Множество I обладает следующими свойствами:

- пересечение с I любого множества X дает то же самое множество X , т.е. $X \cap I = X$;
- объединение с I любого множества X дает в результате само универсальное множество I , т.е. $X \cup I = I$.

Дополнение X множества A до универсального множества I определяется отрицанием свойства $P(x)$, с помощью которого определяется A , т.е.

$$\bar{A} = I \setminus A = \{x \mid x \in I \text{ и } x \notin A\} = \{x \mid x \in I \text{ и } x \in \bar{A}\}$$

Очевидно, что с помощью операции дополнения разность множеств можно представить в виде: $A \setminus B = A \cap I$.

Операция разности двух множеств позволяет выделить индивидуальные признаки объекта, например, число электрорадиоэлементов, используемых только в данном блоке РЭА. С помощью операции дополнения можно выявить недостающие признаки проектируемого объекта.

Операции объединения, пересечения и дополнения часто называют *булевыми операциями* или *булевыми функциями* над множествами. Они лежат в основе булевой алгебры множеств. С помощью этих операций можно выражать одни множества через другие, т.е. осуществлять тождественные преобразования множеств. При этом в первую очередь выполняется операция дополнения, затем операция пересечения и лишь после нее – операция объединения. Для изменения естественной очередности выполнения операций в выражении используются скобки.

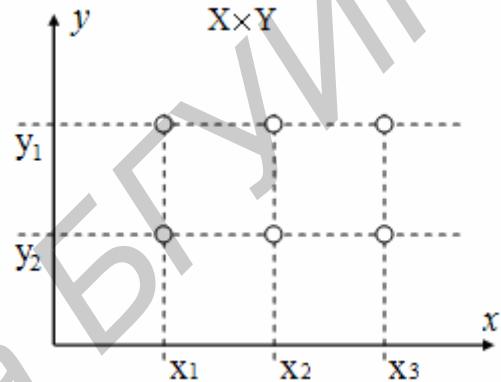
В отличие от предыдущих операций, в результате произведения множеств получается новое множество, элементы которого отличны от элементов множеств-операндов – они получаются в результате произведения, состоящего из упорядоченных элементов сомножителей. Такие последовательности называют *упорядоченными множествами* или *кортежами*.

Кортеж – это такая совокупность элементов, в которой каждый элемент занимает строго определённое место. Элементы, составляющие кортеж, называются его компонентами и имеют порядковые номера. Количество элементов в кортеже называют его длиной. В кортеже, в отличие от обычного множества, могут быть и одинаковые элементы. Кортежи длиной n , элементы которых представляют собой вещественные числа, называются точками n -мерного пространства или n -мерными векторами. Два кортежа будут равны, если у них одинаковая длина и их соответствующие компоненты равны.

Множество, состоящее из кортежей, называют *графиком*.

Произведением (*декартовым произведением*) множеств A и B называют операцию, в результате которой получается множество $A \times B$ состоящее из всех упорядоченных кортежей, первая компонента которых принадлежит множеству A , а вторая – множеству B . Математически эта операция может быть определена как $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Произведение двух множеств представляет собой граф, элементами которого являются кортежи длиной 1. Очерёдность следования кортежей в произведении может быть произвольной. Положение компонентов в каждом кортеже должно соответствовать порядку следования сомножителей. Пусть, например, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$. Тогда $X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_2)\}$.



На рисунке 1.5 дана графическая иллюстрация данного произведения в виде совокупности точек в двухмерном пространстве.

Рисунок 1.5 – Графическая иллюстрация произведения множеств

Для произведения множеств не справедлив переместительный закон: $A \times B \neq B \times A$, если $A \neq B$. Произведением любого числа n -множеств A_i будет множество, состоящее из всех кортежей длины n , в котором первая компонента принадлежит первому сомножителю, вторая – второму, n -я – n -му и т.д.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i.$$

Произведение одинаковых множеств называют степенью множества:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_n$$

n сомножителей

1.3 Разбиение множеств

Разбиением множества A называют операцию, в результате которой получают множество подмножеств $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

– любое из подмножеств A , не является пустым, т.е. любое из подмножеств должно содержать хотя бы один элемент множества:

$$(\forall A_i \in A) A_i \neq \emptyset, i = 1 \dots m;$$

– для всех A_i из множества подмножеств справедливо

$$(\forall A_i \in A) A_i \subseteq A, i = 1 \dots m;$$

– каждый элемент исходного множества A должен принадлежать только одному подмножеству A_i , т.е. любые два подмножества A_i, A_j будут не пересекающимися:

$$(\forall A_i, A_j \in A) A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i = 1 \dots m, j = 1 \dots m;$$

– каждый элемент исходного множества A должен войти в какое-либо подмножество A_i т.е. объединение всех подмножеств A_i , должно дать исходное множество A :

$$\bigcup_{i=1}^m A_i = A$$

2 ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1 Примеры решения задач

Пример 2.1 Дано: A – множество микросхем на плате, B – множество резисторов. Найти $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$. Рассмотреть также случаи, когда A или B пустые множества.

Решение

$A \cup B$ – операция объединения, она объединяет все элементы на плате. Следовательно, $A \cup B$ – множество всех элементов на плате.

$A \cap B$ – операция пересечения, выявляет общие свойства элементов. Множества A и B содержат разные элементы (микросхемы и резисторы), следовательно, операция $A \cap B$ выявляет общие свойства элементов платы. Так как множества A и B содержат разные элементы, то $A \cap B = \emptyset$.

$A \setminus B$ – операция разности двух множеств, в результате которой получается новое множество, содержащее только элементы множества A , одновременно не принадлежащие множеству B . В множествах A и B общих элементов нет, следовательно, $A \setminus B = A$.

Рассмотрим случаи с пустыми множествами:

<p>а) Случай, при $A = \emptyset$:</p> <p>$A \cup B = \emptyset \cup B = B$;</p> <p>$A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$;</p> <p>$A \setminus B = \emptyset \setminus B = \emptyset$.</p>	<p>б) Случай, при $B = \emptyset$:</p> <p>$A \cup B = A \cup \emptyset = A$;</p> <p>$A \cap B = A \cap \emptyset = \emptyset$;</p> <p>$A \setminus B = A \setminus \emptyset = A$.</p>
--	--

Пример 2.2 Даны множества $A = [2,5], B = (3,6)$.

Определить: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$.

Решение

Квадратные скобки обозначают, что множество имеет ограниченный замкнутый интервал: $A = [a, b]$, где $a \leq x \leq b$. Круглые скобки обозначают, что множество имеет ограниченный открытый интервал: $A = (a, b)$, $a < x < b$. Для нашего случая:

$A = [2, 5], 2 \leq x \leq 5$, т.е. $A = \{2, 3, 4, 5\}$;

$B = (3, 6), 3 < x < 6$, т.е. $B = \{4, 5\}$;

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$ или $A \cup B = [2, 5]$, т.е., равно A ;

$A \cap B = \{2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5\} = \{4, 5\}$ или $A \cap B = (3, 5] = (3, 6)$, т.е., равно B ;

$A \setminus B = \{2, 3, 4, 5\} \setminus \{4, 5\} = \{2, 3\} = [2, 3]$.

Пример 2.3 Доказать соотношение: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Решение

Допустим: $A = \{1 \dots k\}, |A| = k, B = \{1 \dots p\}, |B| = p$, где $k > p$.

Тогда $A \cup B = \{1 \dots k\} \cup \{1 \dots p\} = \{1 \dots k\}$, т.е. $|A \cup B| = k$;

$A \cap B = \{1 \dots k\} \cap \{1 \dots p\} = \{1 \dots p\}$, т.е. $|A \cap B| = p$.

Следовательно, для $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, k = k + p - p = k$, что и требовалось доказать.

Пример 2.4 Из определенного количества типовых элементов замены (ТЭЗ) 70% подходят для блока А, а 90% – подходят для блока В. Сколько одинаковых ТЭЗ имеют блоки А и В?

Решение

Задачу удобно решать с помощью кругов Эйлера (рисунок 2.1).

Количество всех ТЭЗ: $M = 100\%$, $A = 70\%$, $B = 90\%$; $A \cap B$ – одинаковые ТЭЗ. Тогда множество M запишется как;

$$M = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Следовательно, $100\% = 70\% + 90\% - |A \cap B|$. Отсюда $A \cap B = 60\%$.

Ответ: Два блока имеют 60% одинаковых ТЭЗ.

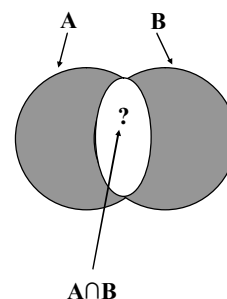


Рисунок 2.1 – Решение примера 2.4 с помощью кругов Эйлера

Пример 2.5 Доказать соотношение: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Решение

Допустим: $A = \{1 \dots k\}, |A| = k, B = \{1 \dots p\}, |B| = p$, где $k > p$.

Тогда $A \cup B = \{1 \dots k\} \cup \{1 \dots p\} = \{1 \dots k\}$, т.е. $|A \cup B| = k$.

$A \cap B = \{1 \dots k\} \cap \{1 \dots p\} = \{1 \dots p\}$, т.е. $|A \cap B| = p$.

Следовательно, для $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, k = k + p - p = k$, что и требовалось доказать.

Пример 2.6 Доказать, что операция взятия дополнения обладает свойством рефлексивности: $\overline{\overline{A}} = A$, а также связана с операциями объединения и пересечения следующими законами двойственности: если $A \subset B$, то

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ и } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Решение

Допустим $V \setminus A = \bar{A}$, где \bar{A} – дополнение, тогда $V \setminus \bar{A} = A$, а операция $V \setminus \bar{A}$ – это взятие дополнения от дополнения. Следовательно, свойство рефлексивности подтверждается, $\overline{\bar{A}} = A$. Если $A \subset B$, то $A \setminus B = \bar{B}$, где \bar{B} – дополнение B до A , равное пустому подмножеству ($\bar{B} = \emptyset$). $V \setminus A = \bar{A}$.

$$A \cup B = B, V \setminus (A \cup B) = \overline{(A \cup B)} = V \setminus B = \emptyset;$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} \cap \emptyset = \emptyset.$$

Следовательно, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

$$A \cap B = A, V \setminus (A \cap B) = \overline{(A \cap B)} = V \setminus A = \bar{A};$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \cup \emptyset = \bar{A}.$$

Следовательно, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Пример 2.7 Доказать, что операции объединения и пересечения связаны законами дистрибутивности:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Решение

Допустим, $A = \{1...n\}$; $B = \{1...m\}$; $C = \{1...k\}$, где $n > m > k$;

$$A \cup B = A, (A \cup B) \cap C = A \cap C = C;$$

$$B \cap C = C, (A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cup C = C.$$

Следовательно, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

$$A \cap B = B, (A \cap B) \cup C = B \cup C = B;$$

$$A \cup C = A, (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap B = B.$$

Следовательно, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = B$.

Пример 2.8 Истинны или ложны высказывания:

а) $\forall x \exists y (x + y = 3)$;

б) $\exists x, y (x + y = 3)$;

в) $\forall x (x > 2 \wedge \overline{(x > 3)}) \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$;

г) $\forall x \forall y (x - y = 1)$.

Решение

а) запись обозначает следующее, что для всех x существует хотя бы один элемент y , обладающий свойством $(x+y) = 3$. Это высказывание истинно;

б) Существуют хотя бы один элемент x и y , обладающие свойством $(x + y = 3)$. Высказывание истинно;

в) Все элементы x обладают свойством пересечения $x > 2$ с дополнением $\overline{(x > 3)}$. Так как дополнение до $x > 3$ – это числа $0 \leq x \leq 3$, то $(x > 2) \wedge (0 \leq x \leq 3) = (2 < x \leq 3)$. Следовательно, утверждение истинно;

г) Для любого x любой y обладает свойством $(x - y = 1)$. Это высказывание ложно.

2.2 Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1 A – множество простых делителей числа 30, B – множество простых делителей числа 42. Что собой представляет $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$? Запишите эти числа.

Задача 2.2 Пусть $A \subset B$. Чему равно $A \cup B$, $A \cap B$? В каком отношении находятся дополнения \bar{A} и \bar{B} ?

Задача 2.3 Доказать соотношение:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Записать это соотношение для случая, когда A , B и C – попарно непересекающиеся множества (непересекающиеся множества – это такие множества, у которых нет общих элементов).

Задача 2.4 Указать, какие из нижеследующих пар множеств являются пересекающимися и записать их пересечения:

а) множество гибридных интегральных схем (ГИС) и множество больших интегральных схем (БИС);

б) $M_x[(x \in N) \wedge (x < 5)]$ и $M_x[(x \in N) \wedge (x > 3)]$, где $|N| = 20$;

в) $M_x[(x \in C) \wedge (x \leq 4)]$ и $M_x[(x \in C) \wedge (x > 4)]$, где $|C| = 15$.

Задача 2.5 Определить декартово произведение $A = \{0,1\}$; $B = \{3,4\}$.

Задача 2.6 Из 800 интегральных микросхем (ИС) различных серий 430 ИС подходят для блока A , 220 ИС – для блока B и 180 ИС подходят как для блока A , так и для блока B . Определить, сколько ИС подходит для блока C .

Задача 2.7 Разбить множество A на 3 подмножества A_1, A_2, A_3 , если известно, что $A = \{3,5,12,17,20,25,30\}$, $|A_1| = 3$, элементами подмножества A_2 являются простые делители числа 15.

Задача 2.8 Из 73 ИС различных серий 26 ИС подходят для блока A , 18 ИС – для блока B , 24 ИС – для блока C и 23 ИС не подходят ни для одного из этих блоков. Из 24 ИС, которые подходят для блока C , 10 ИС могут быть использованы в блоке B и 6 ИС – в блоке A . Есть только одна ИС, которая подходит во все три блока. Определить, сколько еще ИС подходят и для блока A и для блока B .

Задача 2.9 Доказать, что:

а) равенство $A \cap B = B$ верно только в том случае, если $B \subset A$;

б) равенство $A \cup B = B$ верно, если $A \subset B$.

Задача 2.10 Даны множества: $A = [4,10)$; $B = [4,8]$ и $C = (4,10]$.
 Определить $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $C \setminus A$.

Задача 2.11 Разбить множество $B = \{3,7,21,15,8,10,23\}$ на 4 подмножества, где подмножество B_1 – простые делители числа 21, B_2 – числа, имеющие делитель 2, $|B_3| = 2$.

Задача 2.12 Доказать, что $\overline{A \setminus B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$, если $B \subset A$.

Задача 2.13 Доказать утверждения, если $A \subset B$:

- а) $A \setminus B \Leftrightarrow B \cap \overline{B}$; в) $A \cap (\overline{A \setminus B}) \Leftrightarrow A \cap B$.
 б) $\overline{A \setminus B} \Leftrightarrow \overline{A} \cup B$;

Задача 2.14 Истинны или ложны высказывания:

- а) $\exists y \forall x (x + y = 4)$; д) $\forall x, y (x^2 \neq 2y^2)$;
 б) $\forall x, y (x + y = 4)$; е) $\forall x (x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0)$;
 в) $\exists x, y (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$; ж) $\exists x (\sqrt{x^2} < x)$.
 г) $\forall x, y (x < y) \Leftrightarrow \exists z (x < z < y)$;

Задача 2.15 Дано множество: $A = \{8,10,7,3,5,15,11,23,14\}$. Составить кортеж из значений в убывающем порядке.

Задача 2.16 Какие из данных кортежей равны между собой:

- $\alpha = \langle 3,5,8,12,15,17,21,25 \rangle$; $\delta = \langle 25,21,17,15,12,8,5,3 \rangle$;
 $\beta = \langle 3,5,8,15,17,21,25 \rangle$; $\xi = \langle 35,8,12,15,17,21,25 \rangle$.
 $\gamma = \langle 3,5,8,12,15,17,25 \rangle$;

Определить длину каждого кортежа.

Задача 2.17 Указать, какие из нижеследующих пар множеств являются пересекающимися и записать их пересечения:

- а) $M_x[(x \in N) \vee (x < 5)]$ и $M_x[(x \in N) \wedge \overline{(x > 5)}]$, где $|N| = 7$;
 б) $M_x[(x \in C) \wedge \overline{(x < 4)}]$ и $M_x[(x \in C) \wedge (x < 4)]$, где $|C| = 8$;
 в) $M_x[(x \in A) \wedge (x = 3)]$ и $M_x[(x \in A) \wedge \overline{(x > 3)}]$, где $|A| = 5$.

Задача 2.18 Определить декартово произведение множеств $M = \{a,b,c\}$ и $N = \{e,d\}$.

Задача 2.19 Из имеющихся на складе 250 модулей 180 могут применяться в стойке А, 150 – в стойке В.

Сколько процентов одинаковых модулей в стойках А и В?

Задача 2.20 Разбить исходное множество натуральных чисел $A = [1,50]$ на 5 подмножеств A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , выделяя подмножества в указанной последовательности.

Определяющие свойства для элементов каждого из подмножеств следующие:

- элементы A_1 кратны 7;
- элементы A_2 кратны 5;
- элементы A_3 кратны 3;
- элементы A_4 – четные числа;
- элементы A_5 – простые числа.

Определить мощность $|A_i|$ каждого из полученных подмножеств.

3 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ

3.1 Общие сведения о графах

При решении многих конструкторских задач оказывается удобным представлять реальные объекты моделями в виде графов. При этом вершинам графов могут соответствовать составные части (элементы) объекта, а ребрам – соединения или связи между этими элементами.

Графом $G(X, Y)$ будем называть совокупность непустого множества вершин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и изолированного от него множества рёбер $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ (возможно пустого), представляющего собой подмножество всех пар, соединённых рёбрами вершин. Ребра обозначаются, либо однозначным индексом, равным номеру ребра u_k , либо двойным индексом, состоящим из номеров, соединённых ребром вершин $u_{ij} = (x_i, x_j)$.

Две вершины x_i и x_j , между которыми существует ребро, называются *смежными*. Ребро, соединяющее между собой две вершины, инцидентно каждой из них, а вершины *инцидентны* ребру. Вершина, не имеющая инцидентных ребер – *изолированная* (вершина x_6 на рисунке 3.1). Рёбра, у которых обе концевые вершины совпадают, называются *петлями* (ребро при вершине x_5 на рисунке 3.1). Вершина, имеющая одно инцидентное ребро, называется *висячей* (вершина x_8 на рисунке 3.1).

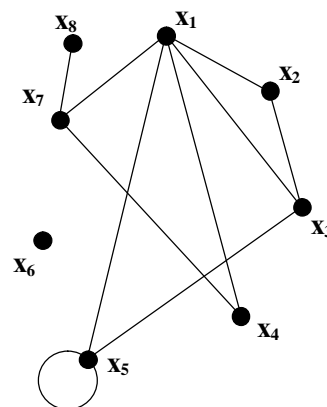


Рисунок 3.1 – Граф $G(X, U)$

Задать граф можно различными способами.

Из определения графа вытекает способ задания его с помощью множества вершин X и подмножества ребер U тех пар его вершин, между которыми существуют рёбра. Например, граф $G(X, Y)$: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$, $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_1, x_7), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_4, x_7), (x_5, x_5), (x_7, x_8)\}$.

При графическом или визуальном задании граф представляется геометрической фигурой, на которой вершины представлены точками, а рёбра – линиями, соединяющими эти точки. На рисунке 3.1 представлен граф $G(X,U)$ в виде геометрической фигуры из ранее приведенного примера.

Следующий способ задания графа основывается на том, что для каждой из его вершин указывается подмножество вершин, смежных с ней. Например:

x_1 смежны $\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}$;	x_5 смежны $\{x_1, x_3, x_5\}$;
x_2 смежны $\{x_1, x_3\}$;	x_6 смежны $\{ \} = \emptyset$;
x_3 смежны $\{x_1, x_2, x_5\}$;	x_7 смежны $\{x_1, x_4, x_8\}$;
x_4 смежны $\{x_1, x_7\}$;	x_8 смежна $\{x_7\}$.

Более рационально задавать граф данным способом, используя отображение смежности (или отображение не смежных вершин) на множестве вершин графа. Отображение Γ ставит в соответствие каждой вершине $x \in X$ подмножество смежных вершин $\Gamma(x) \subseteq X$. Например:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$;	$\Gamma(x_4) = \{x_1, x_7\}$;
$\Gamma(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}$;	$\Gamma(x_5) = \{x_1, x_3, x_5\}$;
$\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3\}$;	$\Gamma(x_6) = \{ \} = \emptyset$;
$\Gamma(x_3) = \{x_1, x_2, x_5\}$;	$\Gamma(x_7) = \{x_1, x_4, x_8\}$;
	$\Gamma(x_8) = \{x_7\}$.

Иногда граф предпочтительнее задавать в виде матрицы, а также с помощью 2-местных предикатов, называемых *инциденторами*.

Если пара «вершина – ребро» – инциденты, то инцидентор $R(x_i, u_{ij})$ равен 1, если пара «вершина – ребро» не инциденты, то инцидентор $R(x_i, u_{ik})$ равен 0. Например, на рисунке 3.1 вершина x_1 и ребро u_{12} инциденты, следовательно, $R(x_1, u_{12}) = 1$.

Количество инциденторов, равных нулю, считается по формуле

$$R(0) = n \cdot k - R(1), \quad (3.1)$$

где n – количество вершин;

k – количество ребер;

$R(1)$ – число инциденторов, равных 1.

3.2 Основные разновидности графов

Все графы можно разделить на неориентированные и ориентированные. *Неориентированные* – графы, у которых порядок следования концевых вершин x_i и x_j , определяющих все их ребра, не является существенным, т.е. $u_{ij} = u_{ji}$ (рисунок 3.1). У *ориентированного* графа все ребра имеют строго определенное направление. Их называют ориентированными рёбрами, или дугами (рисунок 3.2). У *смешанных* графов могут быть как ориентированные, так и неориентированные рёбра (рисунок 3.3).

Неориентированные графы, у которых есть пары вершин, соединённых более чем одним ребром, называют *мультиграфами* (рисунок 3.4). Рёбра,

соединяющие одну и ту же пару вершин, называют *кратными*. Наибольшее число кратных ребер в мультиграфе называют *мультичислом* ($m=4$, рисунок 3.4). Граф, содержащий и петли, и кратные рёбра, называется *псевдографом* (рисунок 3.5). Граф без петель и кратных рёбер – *простой граф* (рисунок 3.6). Число ребер, инцидентных вершине x_i , называют *степенью* вершины $p(x_i)$. У неориентированных графов число рёбер и степени вершин связаны равенством:

$$|U| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p(x_i), \quad (3.2)$$

где n – количество вершин.

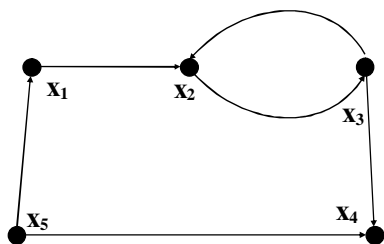


Рисунок 3.2 – Ориентированный граф

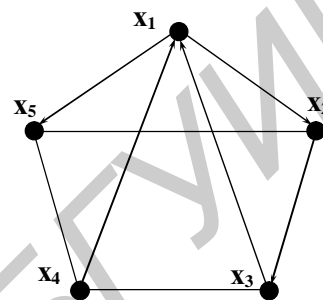


Рисунок 3.3 – Смешанный граф

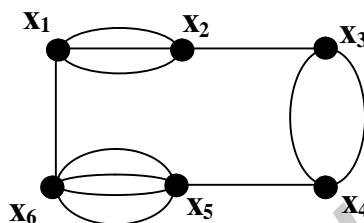


Рисунок 3.4 – Мультиграф

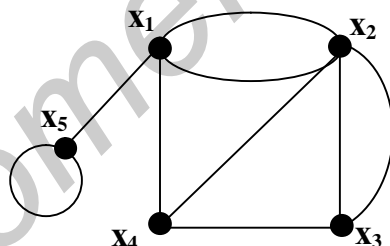


Рисунок 3.5 – Псевдограф

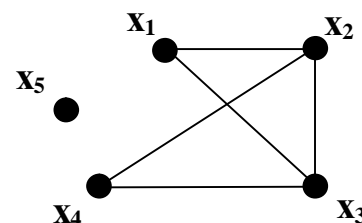


Рисунок 3.6 – Простой граф

Граф, состоящий только из изолированных вершин, – *безрёберный*, или *нуль-граф* G_0 (рисунок 3.7). *Конечным* графом называют такой граф, у которого число рёбер и вершин конечно. У *бесконечного* графа число рёбер и/или вершин бесконечно. Конечный граф без петель и изолированных вершин называется *регулярным* (рисунок 3.8). Граф, у которого степени всех вершин одинаковы и равны некоторому числу t , называется *однородным графом степени t* (рисунок 3.9).

Противоположностью нуль-графу является *полный* граф, у которого существуют рёбра между любыми парами вершин (рисунок 3.10). Это регулярный граф с попарно смежными вершинами, для которых $p(x_i) = n-1$.

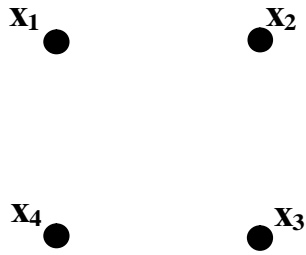


Рисунок 3.7 – Нуль-граф G_0

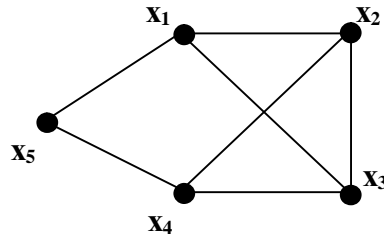


Рисунок 3.8 – Регулярный граф

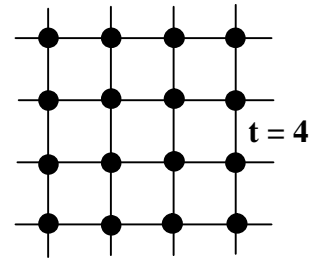


Рисунок 3.9 – Однородный граф

Граф $\bar{G}(\bar{X}, \bar{U})$ называется *дополнительным* или *дополнением* к $G(X, U)$, если он состоит из того же множества вершин X и рёбер \bar{U} , которыми необходимо дополнить граф $G(X, U)$. чтобы получить полный граф (рисунок 3.11).

Граф называют *связным*, если, перемещаясь по его рёбрам от вершины к вершине можно обойти все вершины в графе. *Несвязный* граф тот, у которого это условие не выполняется. Для несвязного графа всегда можно выделить p связных частей, называемых *компонентами связности*. Разность между количеством вершин и компонент связности называется *рангом графа* (рисунок 3.12):

$$R(G) = n - p. \quad (3.3)$$

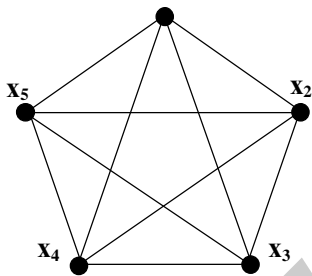


Рисунок 3.10 – Полный граф

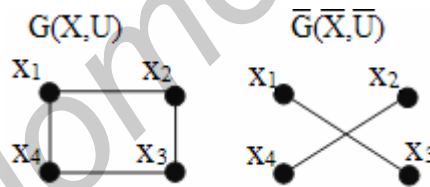
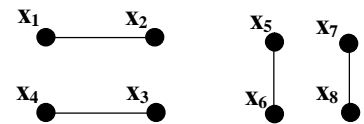


Рисунок 3.11 – Дополнительный граф



$$n = 8, p = 4, R(G) = 8 - 4 = 4$$

Рисунок 3.12 – Граф, имеющий $p = 4$ компонент связности

Один и тот же граф может быть изображен графически по-разному, т.е. иметь различные геометрические реализации. Два графа G и G' *изоморфны*, если они имеют одно и то же множество вершин, и если каждой паре вершин, соединенных ребром в одном графе, соответствует точно такая же пара в другом графе (рисунок 3.13).

Если в графе $G(X, U)$ опустить некоторые рёбра, а множество вершин оставить без изменений, то получим граф $G(X, U_s)$, называемый *частичным графом* или *суграфом* (рисунок 3.14). Если в графе $G(X, U)$ опустить некоторые вершины и инцидентные им рёбра, то получим граф $G(X, U_p)$, называемый

подграф (рисунок 3.15). Если в исходном графе осуществить преобразование, приводящее к появлению частичного графа и подграфа одновременно, то получим *частичный подграф*.

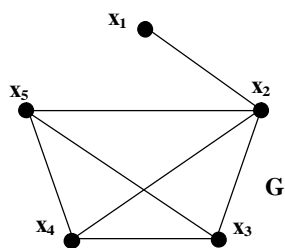


Рисунок 3.13 – Изоморфный граф

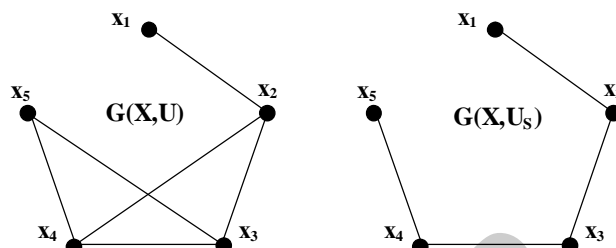


Рисунок 3.14 – Частичный граф

Планарный граф – граф, который можно изобразить на плоскости таким образом, чтобы ребра не пересекались (т.е. построить изоморфный граф с непересекающимися ребрами). На рисунке 3.16, а показан исходный граф, а на рисунке 3.16, б – изоморфный планарный граф.

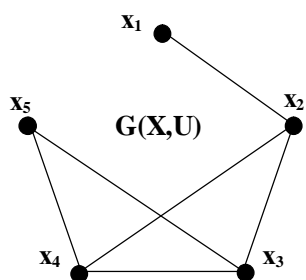


Рисунок 3.15 – Подграф

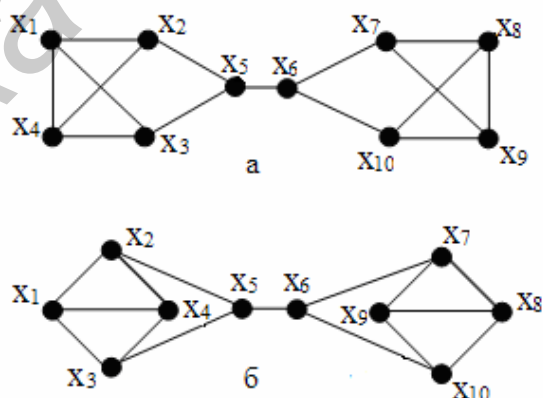


Рисунок 3.16 – Графы:
а – исходный граф; б – изоморфный планарный граф.

3.3 Маршруты, цепи и циклы в графах

При проектировании возникает необходимость оперировать не только отдельными вершинами или рёбрами в графе, но и совокупностями элементов графа. Наиболее часто при этом применяются такие совокупности, как маршруты, цепи и циклы.

Маршрутом в графе $G(X,U)$ будем называть некоторую конечную последовательность рёбер $u_i \in U$, заданных своими граничными вершинами

$(x_1, x_i), (x_i, x_j), \dots, (x_{k-1}, x_k)$, в которой любые два соседних ребра – смежные. Вершины x_1 и x_k являются, соответственно, началом и концом маршрута. *Длина маршрута* определяется числом рёбер, входящих в него. Повторяющиеся рёбра учитываются в длине маршрута столько раз, сколько они встречаются в маршруте. Маршрут, не содержащий повторяющихся ребер, называется *цепью*. Цепь может быть *простой* и *сложной*. Простая цепь не содержит повторяющихся вершин. В сложной цепи вершины могут повторяться.

Цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают, называется *циклом*, т.е. цикл – это замкнутая цепь. Циклы, как и цепи, могут быть простыми и сложными. Простые циклы не содержат повторяющихся вершин, сложные могут содержать.

При решении конструкторских задач большой практический интерес представляют некоторые предельные циклы, получившие название *Эйлера* и *Гамильтона*. Для конечных связных графов эти циклы можно определить следующим образом:

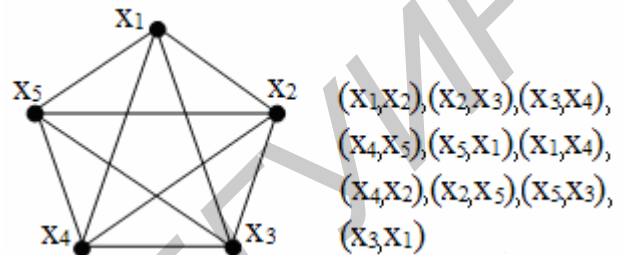


Рисунок 3.17 – Эйлеров граф

Эйлеров цикл – это сложный цикл, в котором содержатся все рёбра графа. Граф, имеющий такой цикл, называют *Эйлеровым* (рисунок 3.17). Известно необходимое и достаточное условие существования Эйлерова цикла в конечном связном графе: степени всех вершин графа должны быть чётными.

Гамильтонов цикл – это простой цикл, проходящий через все вершины графа. Граф, в котором имеется такой цикл – *Гамильтонов граф* (рисунок 3.18). Для Гамильтонова цикла известны лишь теоремы, задающие достаточное условие существования или отсутствия данного условия в графе (критерий Дирака и т.п.). Общий критерий существования данного цикла неизвестен.

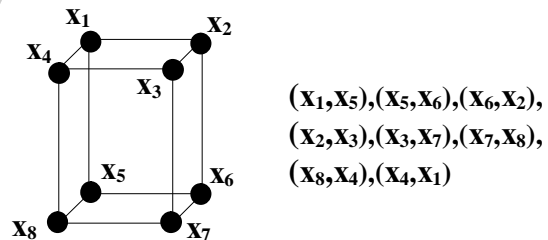


Рисунок 3.18– Гамильтонов граф

Связный неориентированный граф, не содержащий циклов, называют *деревом* (рисунок 3.19). Несвязный граф без циклов, отдельные компоненты связности являются деревьями, называют *лесом* (рисунок 3.20). Дерево, построенное на n вершинах, содержит $r_t = n - 1$ рёбер. Лес, состоящий из p компонент связности, содержит $r_f = n - p$ рёбер. Любой граф с числом рёбер $r_f > n - p$ будет

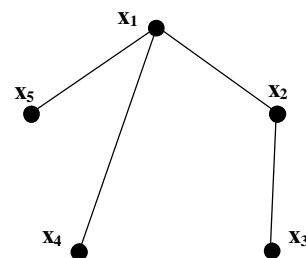


Рисунок 3.19 – Дерево

содержать циклы.

В любом связном графе можно выделить некоторое число деревьев. При решении задач конструирования наибольший интерес представляют деревья, у которых число вершин равно числу вершин графа, из которого это дерево выделено. Такие деревья – *покрывающие*. На n вершинах в связном графе

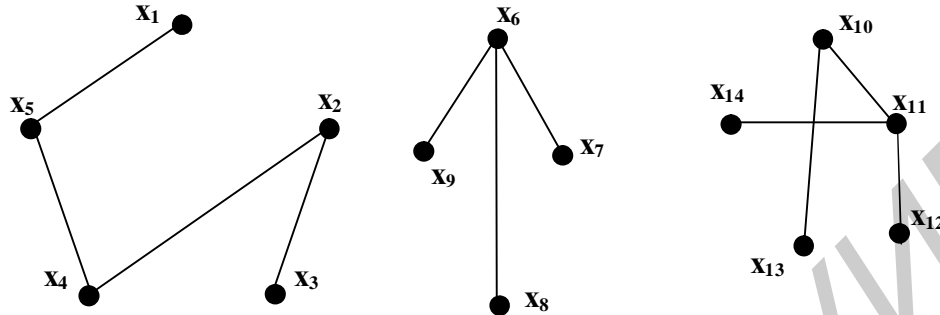


Рисунок. 3.20 – Лес, состоящий из трех компонент связности $p = 3$

можно построить n^{p-2} деревьев, часть из которых будут являться изоморфными.

3.4 Матричное представление графов

Одной из наиболее удобных форм задания графов является *матричная*. Это связано с тем, что для матриц хорошо отработана методика их формальной обработки и существует обширное программное обеспечение для этих цепей.

Матрицей смежности (связности) графа $G(X,U)$ называют квадратную матрицу $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$, $n = |X|$, общий элемент которой определяется как;

$$a_{ij} = \begin{cases} m(x_i, x_j) & \text{при } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{при } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

где $m(x_i, x_j)$ – кратность ребер между вершинами x_i и x_j . Элементы a_{ij} в строках матрицы смежности представляют собой число ребер между вершинами, номера которых определяются, соответственно, номером строки и номером столбца (рисунок 3.21).

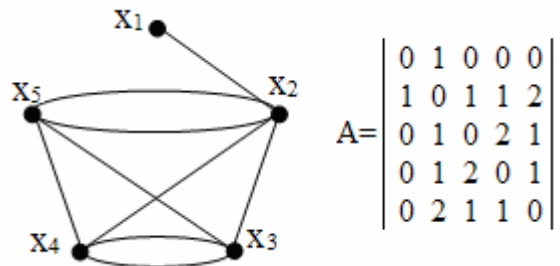


Рисунок 3.21 – Граф $G(X,U)$ и матрица смежности

Матрица смежности является не только одним из удобных способов аналитического задания графов, но также позволяет просто определять ряд характеристик графа путём несложных преобразований самой матрицы. Например, возведя матрицу смежности в степень g , можно определить число маршрутов длины g в графе.

Матрица весовых соотношений $C = \|c_{ij}\|_{n \times n}$, $n = |X|$, строится аналогично матрице смежности, однако здесь элементы определяются весами рёбер графа. Матрица весовых соотношений – квадратная матрица, строки и столбцы которой соответствуют номерам вершин графа:

$$c_{ij} = \begin{cases} T_{ij} & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны;} \\ 0 & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны,} \end{cases}$$

где T_{ij} – вес связи (ребра x_i, x_j).

При моделировании монтажных пространств возникает необходимость отображения длины путей (расстояния) между множеством точек в рассматриваемом объекте. Для монтажных пространств, к примеру, – это множество центров установочных мест для размещения элементов схемы на плате. В таких случаях могут применяться модели в виде матрицы длин или матриц расстояний.

Матрица длин – квадратная матрица $D = \|d_{ij}\|_{n \times n}$, $n = |X|$, строки и столбцы которой соответствуют номерам вершин графа, а общий элемент – длине ребра между вершинами x_i и x_j :

$$d_{ij} = \begin{cases} l_{ij} & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны;} \\ 0 & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны.} \end{cases}$$

где l_{ij} – длина ребра (x_i, x_j).

При евклидовой метрике расстояние между двумя точками на плоскости определяется выражением:

$$l_{ij} = \sqrt{(s_i - s_j)^2 + (t_i - t_j)^2}$$

– координаты вершин x_i и x_j соответственно.

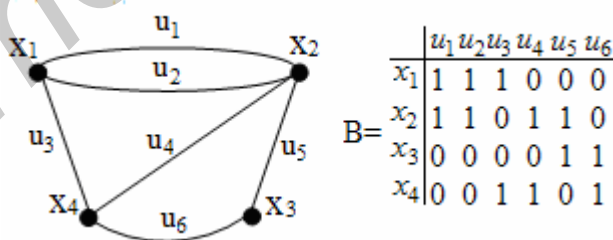


Рисунок 3.22 – Граф $G(X,U)$ и матрица инцидентности

При использовании линейной метрики расстояние между точками на плоскости (манхэттеново расстояние) определяется как $l_{ij} = |s_i - s_j| + |t_i - t_j|$.

Матрица инцидентности B (рисунок 3.22) – прямоугольная матрица $B = \|b_{ij}\|_{n \times r}$, строки которой соответствуют номерам вершин графа ($n = |X|$), а столбцы – номерам ребер ($r = |U|$), общий элемент:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } u_i \in U \text{ инцидентно } x_j; \\ 0 & \text{если } u_i \text{ не инцидентно } x_j. \end{cases}$$

3.5 Характеристические числа графов

Решение задач проектирования с моделями объектов в виде графов существенно упрощается при использовании некоторых числовых характеристик, получивших название *характеристических чисел графа*. Эти числа являются инвариантными характеристиками графа (остаются постоянными при изоморфных преобразованиях). Важнейшими из характеристических чисел являются цикломатическое и хроматическое число.

Цикломатическим числом $\nu(G)$ графа $G(X,U)$, у которого n вершин, r рёбер и p компонент связности, называют минимальное количество рёбер, которое необходимо удалить, чтобы в графе не было циклов, т.е., чтобы граф стал ациклическим (деревом рисунок 3.23, а, или лесом рисунок 3.23, б):

$$\nu(G) = r - n + p. \quad (3.4)$$

Для того чтобы определить, какие именно рёбра надо удалить в графе, можно руководствоваться правилом: удалять каждый раз то ребро, которое устраняет хотя бы один цикл.

Хроматическим числом $K(G)$ графа $G(X,U)$ без петель, называют наименьшее число непересекающихся подмножеств смежных между собой вершин (наименьшее число красок), на которое можно разбить множество вершин графа. В результате такого разбиения любое ребро $u_0 \in U$ должно соединять только вершины, принадлежащие разным подмножествам. Сам процесс разбиения множества X вершин графа на k непересекающихся подмножеств X_1, X_2, \dots, X_k , таких, что каждое подмножество не содержит смежных между собой вершин, называют *раскраской* графа.

Граф, у которого все вершины можно раскрасить k цветами так, чтобы любые две смежные вершины отличались по цвету, называют *k -хроматическим графом*. Методы линейного программирования позволяют определить хроматическое число графа аналитически. Для полного графа $G(X,U)$, $K(G)=n=|X|$. Любой планарный граф, который может быть сведен к плоскому графу, можно раскрасить 5 цветами ($K(G)=5$).

Большой практический интерес представляют собой графы с $k = 2$ (бихроматические, или двудольные графы). Для таких графов множество вершин X можно разбить на два непересекающихся подмножества не смежных между собой вершин. Двудольный граф можно

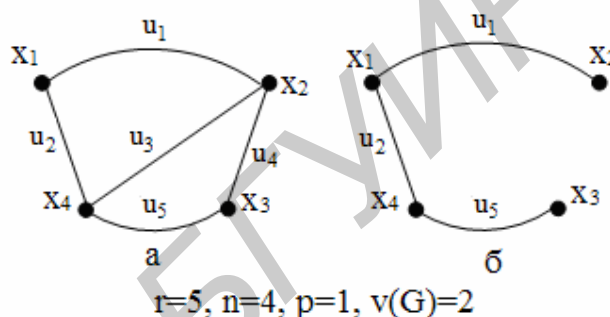


Рисунок 3.23 – Графы:
а – исходный; б – дерево, построенное из графа

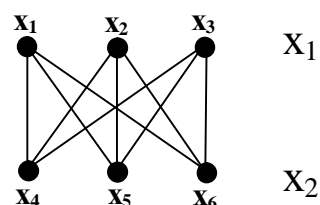


Рисунок 3.24 – Граф Кенига

обозначить как $G(X_1, X_2; U)$. Его рёбра соединяют только вершины подмножеств X_1 и X_2 . В качестве признака бихроматичности произвольного графа можно использовать *теорему Кенига*. Она гласит, что граф $G(X, U)$ бихроматичен, если он не содержит циклов нечётной длины. Исходя из данной теоремы, любой граф, не содержащий циклов, (т.е. любое дерево), представляет собой бихроматический граф или граф Кенига (рисунок 3.24).

Нахождение хроматического числа графов позволяет оптимизировать алгоритмы решения задач конструкторского проектирования РЭС. Например, при топологическом проектировании многослойных печатных плат для распределения вершин графа по слоям печатной платы используют раскраску вершин графа.

3.6 Гиперграфы

Более универсальными математическими моделями для решения задач проектирования могут быть модели на основе *гиперграфов*. Если обычный граф можно однозначно задать бинарными отношениями на множестве вершин X , то гиперграф представляет собой обобщение графа для случая, когда отношение между его элементами является n -арным.

Элементами гиперграфов, как и обычных графов, являются вершины и рёбра. Отличие состоит в том, что ребро в обычном графе может соединять только две вершины, а в гиперграфе – любое подмножество вершин. Задать гиперграф можно различными способами. Основываясь на понятиях теории множеств, под гиперграфом $H(X, U, R)$ понимается совокупность множества вершин $X = \{x_i\}$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ и множества рёбер $U = \{u_j\}$, $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$, парные отношения между которыми заданы двуместным предикатом R . Этот предикат называется *инцидентором*, и определяется на множестве всех пар (x_i, u_j) , $x_i \in X$, $u_j \in U$. Инцидентор R может принимать два значения: 1 (истинно), 0 (ложно) для всех пар (x_i, u_j) , $x_i \in X$, $u_j \in U$.

Множество пар $F(x, u)$, состоящих только из тех пар (x_i, u_j) , для которых $R(x_i, u_j) = 1$, называется *областью истинности инцидентора (предиката)*:

$$F(x, u) = \{(x, u) | R(x, u) = 1, x \in X, u \in U\}.$$

Между одноименными элементами возможны отношения смежности, а между разноимёнными – инцидентности:

- x_i и u_j – инцидентны, если $R(x_i, u_j) = 1$, т.е. $(x_i, u_j) \in F(x, u)$;
- x_i, x_k, \dots, x_l – смежны, если существует $u_j \in U$, инцидентное им;
- u_i, u_k, \dots, u_l – смежны, если существует $x_j \in X$, инцидентное им.

Геометрически гиперграф можно задать, изобразив его вершины точками на плоскости, а ребра – замкнутыми линиями, охватывающими инцидентные данному ребру вершины (рисунок 3.25, а). Однозначно задать гиперграф можно

также его *матрицей инцидентности* $R(H) = \|r_{ij}\|_{n \times m}$, строки которой соответствуют номерам вершин графа ($n = |X|$), а столбцы – номерам ребер ($m = |U|$), (рисунок 3.25, б) общий элемент:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } x_i \text{ инцидентно } u_j \in U; \\ 0 & \text{если } x_i \text{ не инцидентно } u_j. \end{cases}$$

Существует и другой способ задания гиперграфа – каждой вершине $x_i \in X$ гиперграфа H нужно сопоставить подмножество $U(x)$ инцидентных данной вершине ребер:

$$U(x) = \{u \in U \mid (x, u) \in F(x, u)\}.$$

Аналогично, каждому ребру u_j из множества U нужно сопоставить подмножество $X(u)$ вершин, инцидентных данному ребру:

$$X(u) = \{x \in X \mid (x, u) \in F(x, u)\}.$$

Мощность подмножества $U(x)$ называют локальной степенью $\rho(x)$ вершин

$$\rho(x) = |U(x)|.$$

Степенью $\rho(u)$ ребра u называется мощность подмножества $X(u)$ инцидентных ребру u -вершин:

$$\rho(u) = |X(u)|.$$

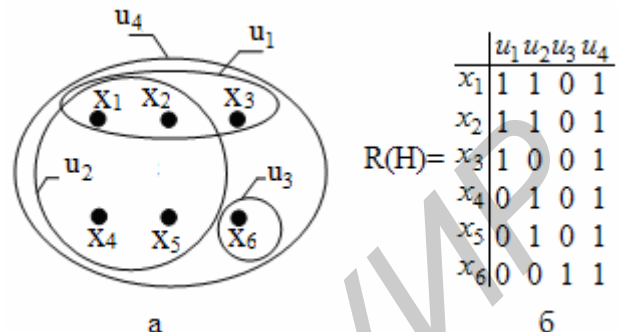


Рисунок 3.25 – Способы задания гиперграфов: а – геометрический; б – матрица инцидентности

4 ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

4.1 Примеры решения задач

Пример 4.1 Дано множество вершин $X = \{x_1 \dots x_5\}$ и множество ребер $U = \{u_{15}, u_{14}, u_{23}, u_{12}, u_{34}, u_{45}, u_{24}\}$ графа.

- 1 Представить граф графически.
- 2 Записать аналитическое представление графа с помощью: а) линейных уравнений: б) отображением смежных вершин: в) при помощи инциденторов, равных 1.

- 3 Определить степени вершин.

Решение.

1. Графическое представление графа (рисунок 4.1):

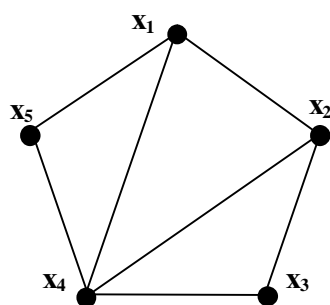


Рисунок 4.1 – Графическое представление графа, к примеру 4.1.

2 Представление графа с помощью:

а) линейных алгебраических уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 = u_{12}x_2 + u_{14}x_4 + u_{15}x_5, \\ x_2 = u_{12}x_1 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4, \\ x_3 = u_{23}x_2 + u_{34}x_4, \\ x_4 = u_{14}x_1 + u_{24}x_2 + u_{34}x_3 + u_{45}x_5, \\ x_5 = u_{15}x_1 + u_{45}x_4; \end{cases}$$

б) отображения смежных вершин:

$$\text{б) } \begin{cases} \Gamma x_1 = \{x_2, x_4, x_5\}, \\ \Gamma x_2 = \{x_1, x_3, x_4\}, \\ \Gamma x_3 = \{x_2, x_4\}, \\ \Gamma x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \\ \Gamma x_5 = \{x_1, x_4\}; \end{cases}$$

в) с помощью инцидентора, равного 1:

$$\begin{aligned} R(x_1, u_{12})=1; & \quad R(x_2, u_{24})=1; & \quad R(x_4, u_{34})=1; \\ R(x_1, u_{14})=1; & \quad R(x_3, u_{23})=1; & \quad R(x_4, u_{45})=1; \\ R(x_1, u_{15})=1; & \quad R(x_3, u_{34})=1; & \quad R(x_5, u_{15})=1; \\ R(x_2, u_{12})=1; & \quad R(x_4, u_{14})=1; & \quad R(x_5, u_{45})=1. \\ R(x_2, u_{23})=1; & \quad R(x_4, u_{24})=1; \end{aligned}$$

Количество инциденторов, равных 0, считается по формуле:

$$R(0) = n \times k - R(1),$$

где $R(0)$ – число инциденторов, равных 0; n – количество вершин;

k – количество ребер; $R(1)$ – число инциденторов, равных 1. Для нашего случая $R(0) = 5 \times 7 - 14 = 21$.

3. Степени вершин равны: $p(x_1) = 3$, $p(x_2) = 3$, $p(x_3) = 2$, $p(x_4) = 4$, $p(x_5) = 2$.

Пример 4.2 Дано: множество вершин $X = \{x_1 \dots x_4\}$ и множество дуг $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{32}, u_{24}, u_{43}\}$.

Построить граф и определить степени вершин.

Решение

Графическое представление графа (рисунок 4.2):

Степени вершин графа:

$$p(x_1)=2;$$

$$p(x_2)=3;$$

$$p(x_3)=2;$$

$$p(x_4)=3;$$

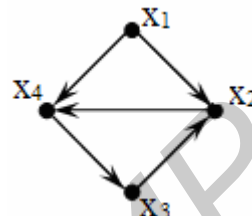


Рисунок 4.2. – Графическое представление графа, к примеру 4.2

Пример 4.3 Для графа $G(X, U)$, представленного на рисунке 4.3:

1) Определить:

а) все разновидности графа $G(X, U)$;

б) сумму степеней вершин.

2) Построить дополнение \bar{G} , частичный граф, подграф, убрав вершину x_1 .

Решение

1 а) граф $G(X, U)$ является неографом, так как все связи являются ребрами. Это конечный, регулярный, обыкновенный, связный граф;

б) сумма степеней вершин

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 2 |U| = 2k = 2 \cdot 8 = 16,$$

где k – количество ребер.

2 Дополнение \bar{G} – рисунок 4.4; частичный граф – рисунок 4.5; подграф – рисунок 4.6:

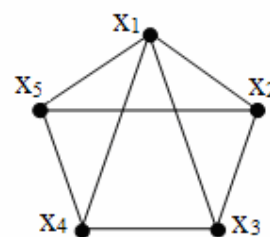


Рисунок 4.3 – Граф $G(X, U)$

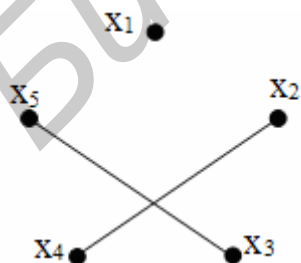


Рисунок 4.4 – Дополнение \bar{G}

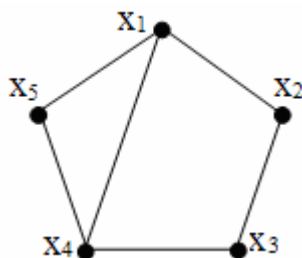


Рисунок 4.5 – Одна из разновидностей частичного графа $G(X, U')$

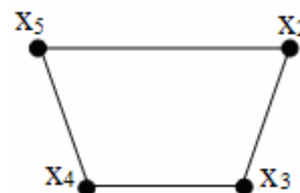


Рисунок 4.6 – Подграф $G(X', U'')$ без вершины x_1

Пример 4.4 Построить орграф, определить полустепени исхода и захода и построить граф, изоморфный данному: $X = \{x_1, \dots, x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{13}, u_{24}, u_{36}, u_{34}, u_{43}, u_{45}, u_{52}, u_{61}\}$

Решение

Орграф (рисунок 4.7) и полустепени исхода и захода:

$$\begin{aligned} p^+(x_1) &= 1 & p^-(x_1) &= 2 \\ p^+(x_2) &= 2 & p^-(x_2) &= 1 \\ p^+(x_3) &= 2 & p^-(x_3) &= 2 \\ p^+(x_4) &= 2 & p^-(x_4) &= 2 \\ p^+(x_5) &= 1 & p^-(x_5) &= 1 \\ p^+(x_6) &= 1 & p^-(x_6) &= 1 \end{aligned}$$

Граф, изоморфный данному (рисунок 4.8):

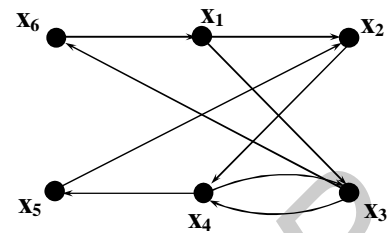


Рисунок 4.7 – Орграф

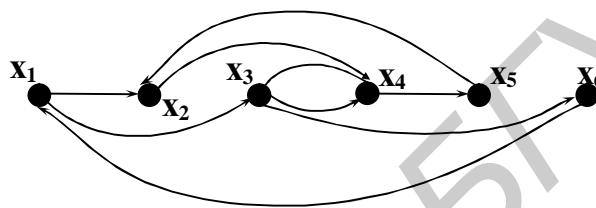


Рисунок 4.8 – Изоморфный граф

Пример 4.5 Для графа $G(X,U)$ (рисунок 4.9):

- 1 Записать все замкнутые маршруты из вершины x_1 через вершину x_5 и определить их длину.
- 2 Определить, какие из найденных маршрутов являются циклами.
- 3 Определить наличие Эйлера цикла.

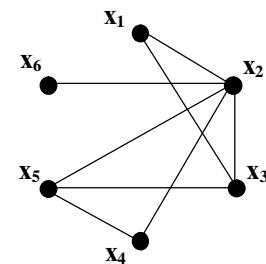


Рисунок 4.9 – Граф

Решение

1 Замкнутые маршруты из вершины x_1 через вершину x_5 :

- | | |
|---|---|
| а) $x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_1$, длина $n = 5$; | г) x_1, x_2, x_5, x_3, x_1 , $n = 4$; |
| б) $x_1, x_2, x_3, x_5, x_4, x_2, x_1$, $n = 6$; | д) $x_1, x_2, x_5, x_3, x_2, x_1$, $n = 5$; |
| в) $x_1, x_2, x_5, x_4, x_2, x_1$, $n = 5$; | е) $x_1, x_3, x_5, x_4, x_2, x_1$, $n = 5$. |

2 Маршруты а), г), е) являются простыми циклами.

3 В данном графе Эйлера цикла нет, т.к. есть вершины нечетной степени.

Пример 4.6 Для графа $G(X,U)$ (рисунок 4.10) записать:

- а) Эйлера цикл.
- б) 3 элементарных цикла.
- в) Построить дерево.

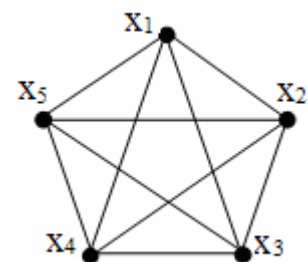


Рисунок 4.10 – Граф $G(X,U)$ к примеру 4.6

Решение

а) Эйлеров цикл:

а) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_3, x_1, x_4, x_2, x_5, x_1$;

б) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_1$ и т.д.

б) Элементарные циклы:

а) x_1, x_2, x_5, x_1 ;

б) x_2, x_5, x_3, x_2 ;

в) x_5, x_3, x_4, x_5 .

в) В графе, содержащем 5 вершин, для построения дерева нужно взять число ребер $k = 5 - 1 = 4$. В результате получим дерево (рисунок 4.11).

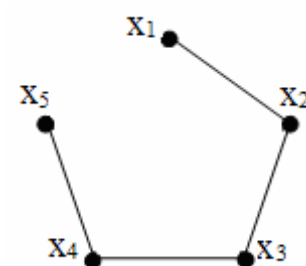


Рисунок 4.11 – Дерево

Пример 4.7 Дано: $X = \{x_1, \dots, x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{23}, u_{26}, u_{34}, u_{45}, u_{56}\}$.

1 Построить неограф.

2 Построить планарный граф.

3 Записать матрицу смежности, инцидентности.

Решение

1 Неограф представлен на рисунке 4.12, а.

2 Планарный граф представлен на рисунке 4.12, б.

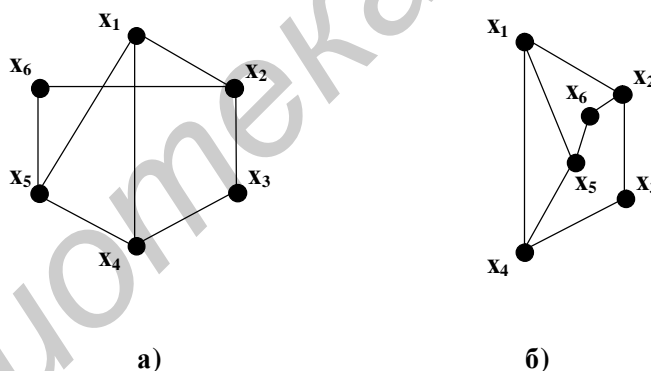


Рисунок 4.12 – Графы:
а – неограф; б – планарный граф

Матрица смежности

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	0	1	1	0
x_2	1	0	1	0	0	1
x_3	0	1	0	1	0	0
x_4	1	0	1	0	1	0
x_5	1	0	0	1	0	1
x_6	0	1	0	0	1	0

Матрица инцидентности

	u_{12}	u_{14}	u_{15}	u_{23}	u_{26}	u_{34}	u_{45}	u_{56}
x_1	1	1	1	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	1	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1	0	1	0	0
x_4	0	1	0	0	0	1	1	0
x_5	0	0	1	0	0	0	1	1
x_6	0	0	0	0	1	0	0	1

Пример 4.8 Разбить граф на плоские суграфы и определить толщину графа (рисунок 4.13).

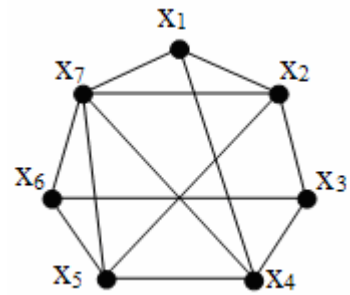


Рисунок 4.13 – Граф

Решение

Первый шаг: удаляем из графа ребра на другую плоскость (рисунок 4.14, б) для получения его плоского изображения (рисунок 4.14, а).

Второй шаг: из суграфа (рисунок 4.14, б) удаляем ребра на следующую плоскость для получения плоского изображения. Окончательный вариант разбиения графа на плоские суграфы – на рисунках 4.15 а, б. Толщина графа $m = 3$.

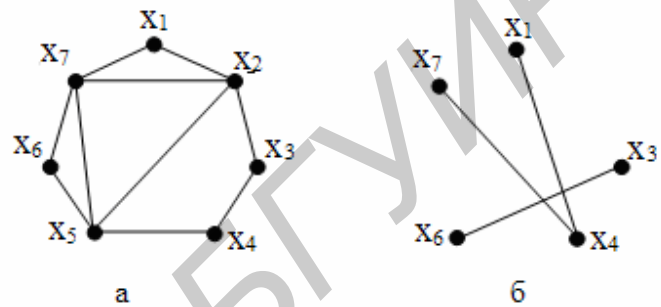


Рисунок 4.14 – Первый шаг разбиения графа на плоские суграфы: а – плоское изображение; б – удаленные ребра

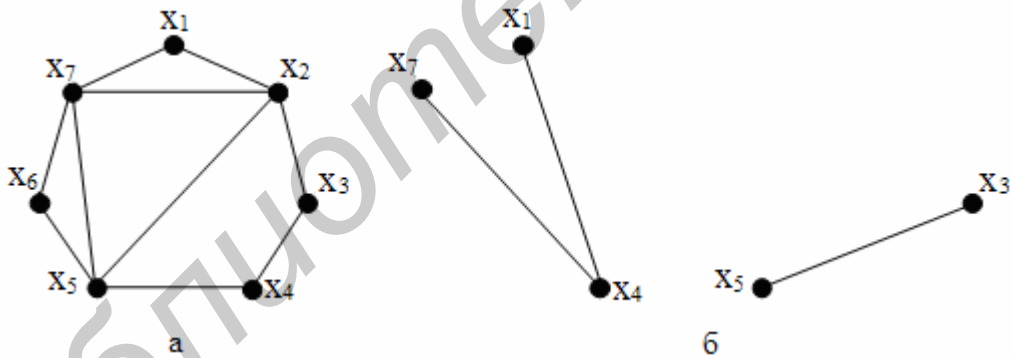


Рисунок 4.15 – Окончательный вариант разбиения графа на плоские суграфы

Пример 4.9 Для орграфа $G(X,U)$ (рисунок 4.16):

- 1 Определить связность графа.
- 2 Записать матрицу длин.

Решение

1 Граф несвязный, т.к. в вершину x_6 попасть невозможно и нет выхода из вершины x_5 .

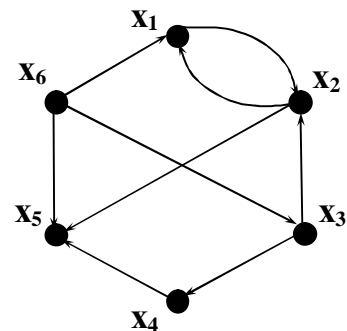


Рисунок 4.16 – Орграф

2 Матрица длин D имеет следующий вид:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	∞	∞	2	∞
x_2	1	0	∞	∞	1	∞
x_3	2	1	0	1	2	∞
x_4	∞	∞	∞	0	1	∞
x_5	∞	∞	∞	∞	0	∞
x_6	1	2	1	2	1	0

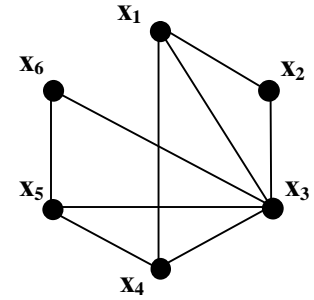


Рисунок 4.17 – Граф $G(X,U)$

Пример 4.10 Для графа $G(X,U)$ (рисунок 4.17) провести операцию сжатия и расширения.

Решение.

Операция расширения производится на ребрах, соединяющих вершины нечетной степени. Нечетную степень имеют вершины x_1, x_3, x_4, x_5 . Операцию расширения производим на ребре, соединяющем вершины x_1 и x_3 , и на ребре, соединяющем вершины x_4 и x_5 (рисунок 4.18, а). Операция сжатия производится с вершинами степени 2, т.е. вершины x_2 и x_6 убираются и заменяются ребрами (рисунок 4.18, б).

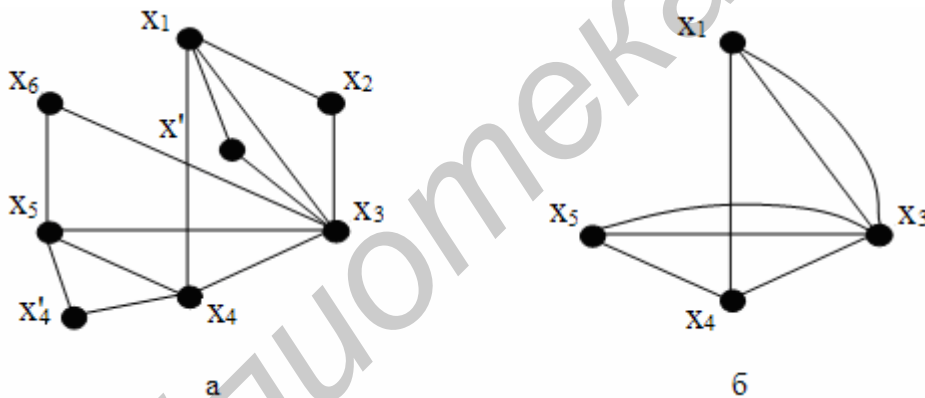


Рисунок 4.18 – Операции над графом:
а – операция расширения; б – операции сжатия

Пример 4.11 Для графа $G(X,U)$ (рисунок 4.19):

1 Определить

- Цикломатическое число и построить дерево;
- Хроматическое число;
- Число внутренней устойчивости;
- Число внешней устойчивости;

2 Записать Гамильтонов цикл.

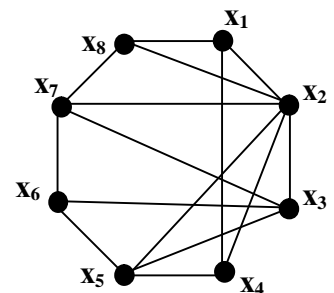


Рисунок 4.19 – Граф $G(X,U)$ к примеру 4.11

Решение

Гиперграф приведен на рисунке 4.21, а, граф Кенига – на рисунке 4.21,б.

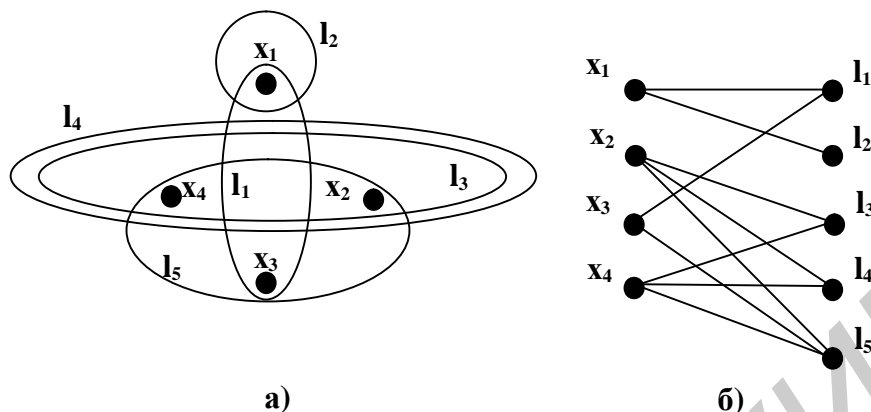


Рисунок 4.21 – Решение примера 4.12
а – гиперграф; б – граф Кенига

Пример 4.13 Для графов $G_1(X_1, U_1)$ и $G_2(X_2, U_2)$ (рисунок 4.22) определить:

- объединение;
- пересечение;
- вычитание графов.

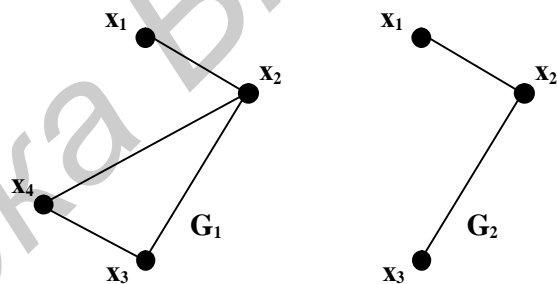


Рисунок 4.22 – Графы к примеру 4.13

Решение

Записываем отображение смежных вершин для каждого графа:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x_1 &= \{x_2\}; & \Gamma_2 x_1 &= \{x_2\}; \\ \Gamma_1 x_2 &= \{x_1, x_3, x_4\}; & \Gamma_2 x_2 &= \{x_1, x_3\}; \\ \Gamma_1 x_3 &= \{x_2, x_4\}; & \Gamma_2 x_3 &= \{x_2\}; \\ \Gamma_1 x_4 &= \{x_2, x_3\}; & & \end{aligned}$$

- Объединение вершин и отображений двух графов:
 $X = X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};$
 $\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cup \Gamma_2 x_1 = \{x_2\} \cup \{x_2\} = \{x_2\};$
 $\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cup \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_3, x_4\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3, x_4\};$
 $\Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 \cup \Gamma_2 x_3 = \{x_2, x_4\} \cup \{x_2\} = \{x_2, x_4\};$
 $\Gamma x_4 = \Gamma_1 x_4 \cup \Gamma_2 x_4 = \{x_2, x_3\} \cup \emptyset = \{x_2, x_3\};$

Объединение двух графов показано на рисунке 4.23, а

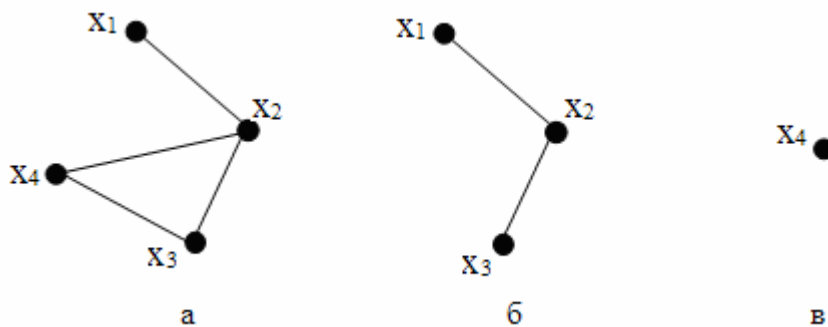


Рисунок 4.23 – Действия над графами:
 а – объединение; б – пересечение; в – вычитание

2. Пересечение вершин и отображений двух графов:

$$X = X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\};$$

$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cap \Gamma_2 x_1 = \{x_2\} \cap \{x_2\} = \{x_2\};$$

$$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cap \Gamma_2 x_2 = \{x_2, x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3\};$$

$$\Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 \cap \Gamma_2 x_3 = \{x_2, x_4\} \cap \{x_2\} = \{x_2\};$$

Пересечение графов показано на рисунке 4.23, б.

3. Вычитание графов:

$$X = X_1 \setminus X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_4\};$$

$$\Gamma x_4 = X \cap \Gamma_1 x_4 = \{x_4\} \cap \{x_2, x_3\} = \emptyset$$

В результате вычитания получается нуль-граф с вершиной x_4 (рисунок 4.23, в).

4.2 Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1 Дано: множество вершин $X = \{x_1 \dots x_7\}$ и множество ребер $U = \{u_{12}, u_{15}, u_{17}, u_{23}, u_{24}, u_{26}, u_{34}, u_{45}, u_{47}, u_{56}, u_{57}, u_{67}\}$.

1 Представить граф:

- а) графически;
- б) с помощью линейных алгебраических уравнений;
- в) отображением смежных вершин;
- г) с помощью инциденторов, равных 1.

2 Подсчитать количество инциденторов, равных 0, и определить степени всех вершин.

Задача 4.2 Дано: множество вершин $X = \{x_1 \dots x_5\}$ и множество дуг $U = \{u_{12}, u_{23}, u_{43}, u_{45}, u_{51}, u_{52}, u_{53}\}$. Построить граф, записать отображение смежных вершин и степени всех вершин.

Задача 4.3 Дано множество вершин $X = \{x_1 \dots x_3\}$ и множество ребер $U = \{u_{12}, u_{23}, u_{13}\}$. Записать инциденторы, равные 1 и равные 0.

Задача 4.4 Для графа (рисунок 4.24) записать:

- а) систему линейных алгебраических уравнений;
- б) отображение смежных вершин;
- в) инциденторы, равные 1;
- г) степени вершин.

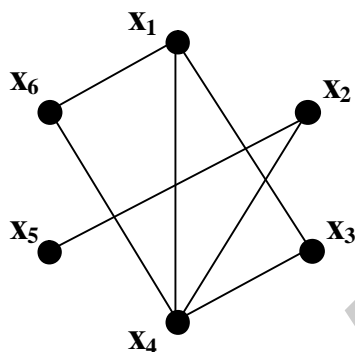


Рисунок 4.24 – Граф к задаче 4.4

Задача 4.5 По заданной системе алгебраических уравнений построить неограф:

$$\begin{cases} x_1 = u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{16}x_6, \\ x_2 = u_{12}x_1 + u_{23}x_3 + u_{25}x_5, \\ x_3 = u_{13}x_1 + u_{23}x_2 + u_{34}x_4 + u_{36}x_6, \\ x_4 = u_{34}x_3 + u_{45}x_5 + u_{46}x_6, \\ x_5 = u_{25}x_2 + u_{45}x_4 + u_{56}x_6, \\ x_6 = u_{16}x_1 + u_{36}x_3 + u_{46}x_4 + u_{56}x_5. \end{cases}$$

Задача 4.6 Составить неограф по заданному отображению смежных вершин:

$$\begin{cases} \Gamma x_1 = \{x_2, x_3, x_4\}, \\ \Gamma x_2 = \{x_1, x_3\}, \\ \Gamma x_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \\ \Gamma x_4 = \{x_1, x_3, x_5\}, \\ \Gamma x_5 = \{x_3, x_4\}. \end{cases}$$

Задача 4.7 Составить неограф по заданным инциденторам, равным 1:

$R(x_1, u_{12}); R(x_1, u_{13}); R(x_1, u_{15});$

$R(x_2, u_{12}); R(x_2, u_{23});$

$R(x_3, u_{13}); R(x_3, u_{23}); R(x_3, u_{34}); R(x_3, u_{35});$

$R(x_4, u_{34}); R(x_4, u_{45});$

$R(x_5, u_{15}); R(x_5, u_{35}); R(x_5, u_{45}).$

Задача 4.8 Построить граф, однородный степени 3, при количестве вершин $n = 6$ и дополнение \bar{G} к этому графу.

Задача 4.9 Для графа $G(X, U)$ (рисунок 4.25):

1 Определить:

а) Разновидности графа.

б) Сумму степеней вершин.

2 Построить дополнение \bar{G} и подграф, убрав вершины x_1 и x_2 .

3 Построить граф, изоморфный заданному.

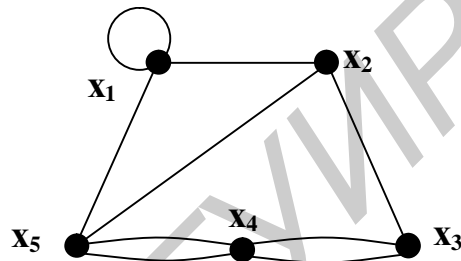


Рисунок 4.25 – Граф к задаче 4.9

Задача 4.10 Задан неограф:

$X = \{x_1, \dots, x_7\}; U = \{u_{12}, u_{17}, u_{24}, u_{25}, u_{13}, u_{35}, u_{36}, u_{47}, u_{57}, u_{67}\}.$

Построить граф Кенига и граф, изоморфный заданному.

Задача 4.11 Дано: $X = \{x_1, \dots, x_9\}; U = \{u_{12}, u_{13}, u_{23}, u_{45}, u_{46}, u_{56}, u_{67}, u_{89}\}.$

Построить неограф и определить:

а) Разновидности данного графа.

б) Ранг графа.

Задача 4.12 Для графа $G(X, U)$ (рисунок 4.26) определить:

а) разновидности графа;

б) полустепень захода и исхода всех вершин;

в) мультичисло.

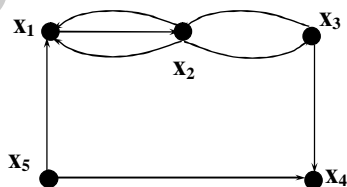


Рисунок 4.26 – Граф к задаче 4.12

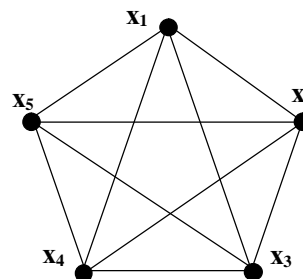


Рисунок 4.27 – Граф к задаче 4.13

Задача 4.13 Для графа $G(X,U)$ (рисунок 4.27):

1 Определить:

а) Разновидности графа;

б) Что представляет собой дополнение \bar{G} для данного графа.

2 Построить граф, изоморфный данному.

Задача 4.14 Построить все деревья для количества вершин $n = 4$.

Задача 4.15 Дано: $X = \{x_1 \dots x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{16}, u_{13}, u_{25}, u_{34}, u_{46}, u_{56}\}$.

1 Построить неограф.

2 Записать Гамильтонов цикл.

3 Построить изоморфный граф и дополнение \bar{G} к данному графу.

Задача 4.16 Для графа $G(X,U)$

(рисунок 4.28):

1 Записать Эйлеров цикл.

2 Построить подграф, убрав

вершины x_1, x_2, x_3 .

3 Построить дерево.

4 Записать открытый маршрут, сложную цепь, два элементарных цикла.

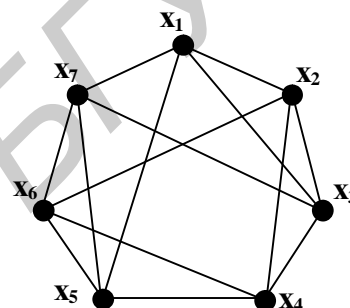


Рисунок 4.28 – Граф к задаче 4.16

Задача 4.17 Дано: $X = \{x_1 \dots x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{16}, u_{25}, u_{36}, u_{35}, u_{34}, u_{45}\}$.

1 Построить неограф и дополнение \bar{G} к данному графу.

2 Записать Гамильтонов цикл.

3 Записать элементарный цикл и простую цепь, длина которой равна 5.

Задача 4.18 Для графа $G(X,U)$ (рисунок 4.29) построить лес:

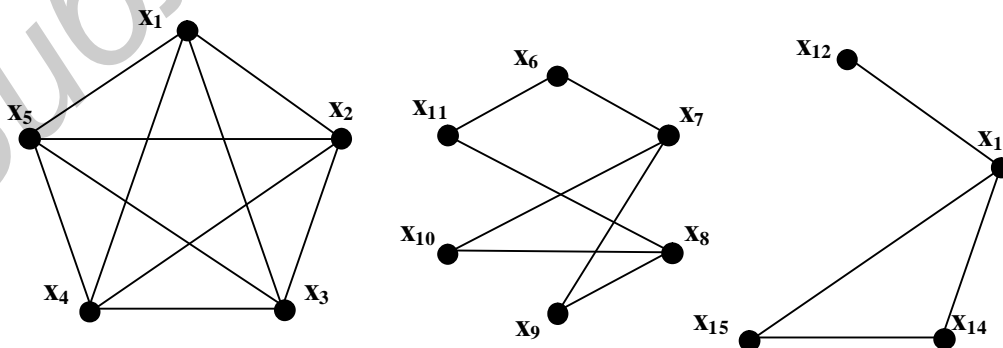


Рисунок 4.29 – Граф к задаче 4.18

Задача 4.19 Для графа $G(X,U)$ (рисунок 4.30):

- 1 Построить планарный граф.
- 2 Записать Гамильтонов цикл.
- 3 Построить матрицу длин.

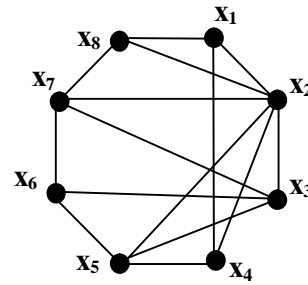


Рисунок 4.30– Граф к задаче 4.19

Задача 4.20 Дано: $X = \{x_1 \dots x_6\}$;
 $U = \{u_{12}, u_{13}, u_{23}, u_{34}, u_{36}, u_{45}, u_{46}, u_{56}\}$.
 Построить неограф и произвести операцию сжатия и расширения.

Задача 4.21 Дано: $X = \{x_1 \dots x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{16}, u_{23}, u_{25}, u_{34}, u_{36}, u_{45}, u_{46}\}$.

- 1 Построить неограф.
- 2 Определить наличие Гамильтонова и Эйлера цикла (при наличии – записать).
- 3 Записать матрицу смежности и инцидентности.
- 4 Построить планарный граф.

Задача 4.22 Разбить граф $G(X,U)$ (рисунок 4.31) на плоские суграфы и определить толщину графа.

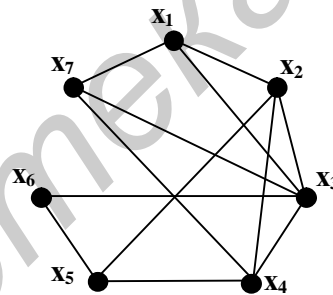


Рисунок 4.31 – граф к задаче 4.22

Задача 4.23 Дано: $X = \{x_1 \dots x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{16}, u_{23}, u_{34}, u_{35}, u_{36}, u_{45}, u_{46}\}$.

- 1 Построить неограф, изоморфный планарный граф.
- 2 Произвести операцию расширения.
- 3 Записать матрицу длин и смежности.

Задача 4.24 Для орграфа $G(X,U)$ (рисунок 4.32) записать:

- а) Матрицу длин;
- б) Маршруты из вершины x_1 , в вершину x_5 ;
- в) Элементарный цикл.

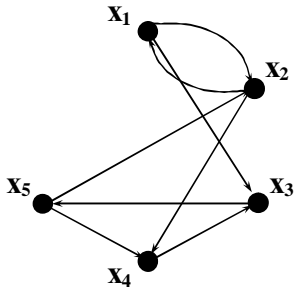


Рисунок 4.32 – Орграф

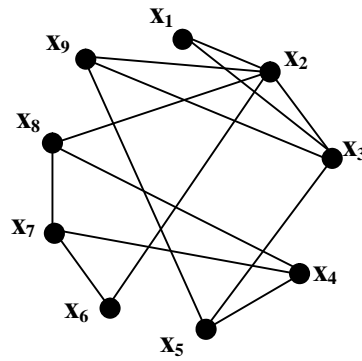


Рисунок 4.33. – Граф к задаче 4.25

Задача 4.25 Разбить граф (рисунок 4.33) на плоские суграфы.

Задача 4.26 Дано: $X = \{x_1 \dots x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{23}, u_{26}, u_{34}, u_{45}, u_{56}\}$:

1 Определить:

- а) Цикломатическое число и построить дерево;
- б) Хроматическое число;
- в) Число внутренней устойчивости;
- г) Число внешней устойчивости;
- д) Ядро графа.

2 Записать Гамильтонов цикл.

Задача 4.27 Дано: $X = \{x_1 \dots x_7\}$, $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{23}, u_{25}, u_{37}, u_{46}, u_{47}, u_{56}\}$.

Построить неограф и определить:

1. Цикломатическое число и построить дерево;
2. Хроматическое число;
3. Число внутренней устойчивости;
4. Число внешней устойчивости;
5. Ядро графа.

Задача 4.28 Определить цикломатическое число и построить лес для графа $G(X, U)$ (рисунок 4.34):

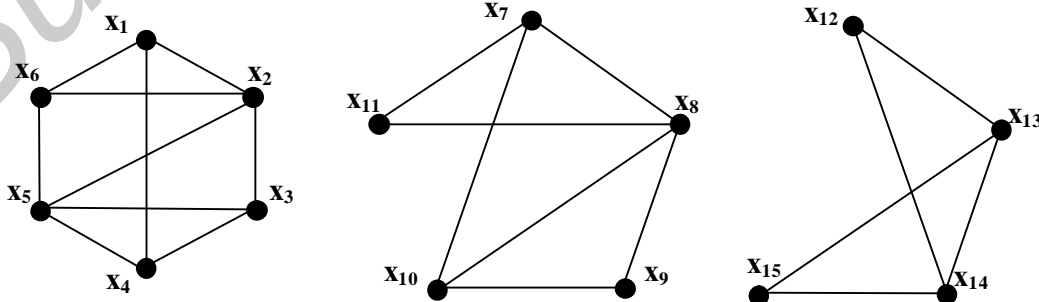


Рисунок 4.34 – Граф к задаче 4.28

Задача 4.29 Для графа (рисунок 4.35) определить:

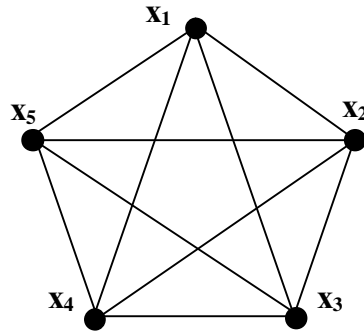


Рисунок 4.35 – Граф к задаче 4.29

- а) Хроматическое число;
- б) Число внутренней и внешней устойчивости.

Задача 4.30 Построить гиперграф $H(X, L, R)$ и граф Кенига $K(H)$:

$$X = \{x_1 \dots x_7\}, L = \{l_1 \dots l_8\}.$$

$$R(x, l) = 1 : R(x_1, l_1); R(x_2, l_1); R(x_3, l_2); R(x_4, l_5); R(x_7, l_2); R(x_2, l_8); R(x_5, l_6); \\ R(x_6, l_7); R(x_7, l_8); R(x_5, l_3); R(x_6, l_3); R(x_1, l_7); R(x_3, l_4); R(x_6, l_4)$$

Задача 4.31 Найти и построить объединение, пересечение и вычитание графов $G_1(X_1, U_1)$ и $G_2(X_2, U_2)$ (рисунок 4.36).

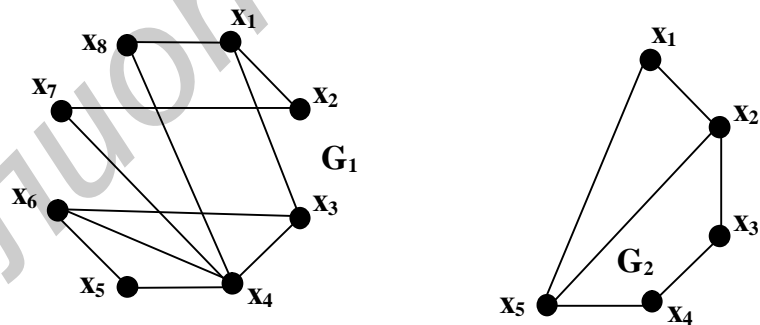


Рисунок 4.36 – Граф к задаче 4.31

Задача 4.32 Определить пересечение и вычитание графов и построить их:

$$G_1 : X_1 = \{x_1 \dots x_6\}, U_1 = \{u_{12}, u_{14}, u_{23}, u_{25}, u_{36}, u_{45}, u_{56}\};$$

$$G_2 : X_2 = \{x_1 \dots x_4\}, U_2 = \{u_{12}, u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{34}\}.$$

Задача 4.33 Найти и построить объединение, пересечение и вычитание графов $G_1(X_1, U_1)$ и $G_2(X_2, U_2)$ (рисунок 4.37).

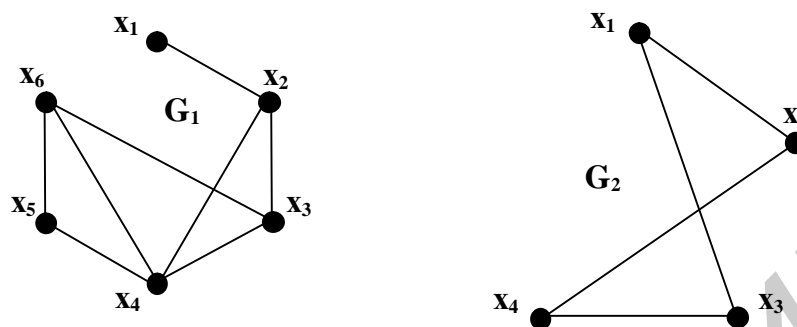


Рисунок 4.37 – Граф к задаче 4.33

Задача 4.34 Построить гиперграф $H(X, L, R)$ и граф Кенига $K(H)$:
 $X = \{x_1 \dots x_7\}$, $L = \{l_1 \dots l_{10}\}$
 $R(x, l) = 1$: $R(x_1, l_2)$; $R(x_1, l_1)$; $R(x_2, l_3)$; $R(x_5, l_4)$; $R(x_3, l_1)$; $R(x_4, l_6)$; $R(x_3, l_4)$;
 $R(x_6, l_3)$; $R(x_5, l_7)$; $R(x_2, l_6)$; $R(x_3, l_5)$; $R(x_6, l_7)$; $R(x_4, l_5)$; $R(x_2, l_8)$; $R(x_3, l_8)$;
 $R(x_7, l_8)$; $R(x_7, l_9)$; $R(x_7, l_{10})$; $R(x_1, l_{10})$; $R(x_3, l_{10})$; $R(x_4, l_8)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деньдобренко, Б. Н. Автоматизация конструирования РЭА: Учебник для вузов / Б. Н. Деньдобренко, А. С. Малика. – М.: Высш. шк., 1980.
2. Корячко, В. П. Теоретические основы САПР: Учебник для вузов / В.П. Корячко, В.М. Курейчик, И.П. Норенков – М.: Энергоатомиздат, 1987.
3. Оре, О. Теория графов. / О.Оре. – М.: Наука, 1980.
4. САПР. Система автоматизированного проектирования: Учеб. пособие для технических вузов. В 9 кн. / под ред. И. П. Норенкова. – М.: Высш. шк., 1986.
5. Селезнёв, И. Л., Теоретические основы САПР: Учеб. пособие для студентов факультета компьютерного проектирования. В 3 ч. Ч. 1 Математические методы в проектировании // И Л. Селезнёв, И. И. Шпак – Минск: БГУИР, 1997.
6. Селезнёв, И. Л., Теоретические основы САПР: Учеб. пособие для студентов факультета компьютерного проектирования. В 3 ч. Ч. 2 "Элементы информационного обеспечения" // И. Л. Селезнёв, И. И. Шпак. – Минск: БГУИР, 1998.
7. Шпак, И. И., Математические методы моделирования конструкций и технологических процессов в САПР: Учеб. пособие по курсу "Математическое обеспечение конструкторского и технологического проектирования с применением САПР" для студентов специальностей "Конструирование и производство РЭА" и "Конструирование и производство ЭВА" // И. И Шпак, и др. – Минск: МРТИ, 1989.
8. Методические указания к практическим занятиям по курсу "Автоматизация конструкторского и технологического проектирования РЭС" для студентов специальности "Конструирование и технология РЭС" Ч. 1 / И. И. Шпак, и др.; под ред. И. И. Шпака.– Минск: МРТИ, 1990.
9. Системы автоматизированного проектирования в радиоэлектронике: Справочник /Е.В. Авдеев, и др.; под ред. И. П. Норенкова. – М.: Радио и связь, 1986.

Учебное издание

**АВТОМАТИЗАЦИЯ КОНСТРУКТОРСКОГО
И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЭС**

Методические указания к лабораторным работам
для студентов специальности 1-39 02 01

Составители:

Толстая Алла Ивановна
Селезнев Игорь Львович
Малышева Тамара Владимировна
Цырельчук Игорь Николаевич

Редактор Корбут Г.С.
Корректор

Подписано в печать
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л.2,3.

Формат 60x84 1/16
Печать ризографическая
Тираж 100 экз.

Бумага офсетная
Усл. печ.л.
Заказ 436

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6