Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра радиоэлектронных средств

Методические указания
к лабораторным и практическим занятиям по курсу

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ САПР

для студентов специальности Т08.01.00

Минск 1998

УДК 621.396.6.002

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям по курсу "Теоретические основы САПР" для студентов специальности Т08.01.00 / Сост. И.Л. Селезнёв, И.И. Шпак, А.И. Толстая и др. Мн.: БГУИР, 1998. - 43 с.

Методические указания являются составной частью учебно-методического комплекса, разрабатываемого и издаваемого авторами по дисциплине "Теоретические основы систем автоматизированного проектирования (САПР)". Материал подготовлен на основе текстов лекций, читаемых авторами, и методических разработок, используемых при проведении лабораторных и практических занятий со студентами на протяжении последних 5 лет. Использование его будет способствовать углубленному изучению, закреплению теоретических знаний и приобретению практических навыков применения по двум важнейшим разделам указанной дисциплины: "Основы теории множеств" и "Основы теории графов".

Указания предназначены для студентов специальности Т08.01.00 "Проектирование и производство РЭС" и Т08.02.00 "Проектирование и технология ЭВС". Может быть рекомендовано студентам других радиоэлектронных специальностей при изучении курсов, связанных с автоматизацией проектирования РЭС и ЭВС.

Составители: И.Л. Селезнёв,
И.И. Шпак,
А.И. Толстая,
Е.Н. Полещук

СОДЕРЖАНИЕ

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

При решении задач автоматизированного проектирования исключительно широкое применение находит теория множеств. Ее понятия и математический аппарат используются как непосредственно, так и в качестве базы для теории графов, которая в свою очередь широко применяется при математическом моделировании структур и конструкций проектируемых объектов, а также технологических процессов их изготовления. На основе теории графов можно получить весьма наглядные модели схем, конструкций и технологических процессов изготовления РЭА и ЭВА. Удобным также оказывается ее применение при реализации различных алгоритмов преобразования информации в САПР, связанных с осуществлением автоматизированных проектных процедур, организацией процессов ввода и вывода информации о проектируемом объекте. Поэтому здесь рассмотрены основные положения теории множеств применительно к задачам конструкторского и технологического проектирования РЭА.

1.1. МНОЖЕСТВО, ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

Множество относится к числу наиболее общих, основополагающих понятий математики, не подлежащих строгому логическому определению.

Множество представляет собой совокупность элементов, обладающих некоторыми общими для данного множества свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств. Элементами множества могут быть объекты любой природы, обладающие общим определяющим для данного множества свойством (множество конструктивных элементов, множество модулей, множество интегральных схем и т.д.).

Обозначают множества обычно прописными (заглавными) буквами латинского алфавита: A,B,C, а элементы множеств - строчными латинскими буквами (как правило, с индексами): a_1, a_2, a_3, ... Утверждение, что множество A состоит из элементов $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ (и только из этих элементов), условно записывается $A = \{a_1,a_2,a_3,\ldots a_n\}$. Принадлежность элемента a_i множеству A обозначается как $a_i \in A$ (отношение принадлежности). То, что элемент b не принадлежит множеству A, записывают как $b \notin A$.

Число n элементов множества $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ называют *мощностью* данного множества и записывают как $|A| = n$. Множество с конечным числом элементов называют *конечным*, а множество, содержащее бесконечное число элементов - *бесконечным*. Примером конечного множества является множество электрорадиоэлементов в функциональном узле РЭА, бесконечного множества - множества четных и нечетных чисел в натуральном ряду чисел. Множество A может состоять из одного элемента a, тогда его обозначают $A=\{a\}$, и называют одноэлементным. Кроме того, в теории множеств существует понятие *пустого множества*, которое не содержит ни одного элемента. Так, если множество B пустое, то его обозначают $B = \varnothing$.

Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то множество A называют *подмножеством* (частью) множества B. Отношение между множествами A и B в данном случае называют отношением включения и обозначают как $A \subset B$ (A включено в B), или $B \supset A$ (B включает A). Например, множество резисторов в схеме РЭА является подмножеством множества электрорадиоэлементов в схеме.

Если каждый элемент множества A является одновременно и элементом множества B и наоборот (множества A и B состоят из одних и тех же элементов), то множества A и B *равны*, т.е. $A = B$. При одновременном выполнении соотношений $A \subset B$ и $B \subset A$ необходимо, чтобы $A = B$. И обратно, если $A = B$, то $A \subset B$ и $B \subset A$. Наряду со строгим включением $A \subset B$, не допускающим равенства A и B, используется также отношение нестрогого включения $A \subseteq B$, при котором допускается $A = B$.

Следует обратить внимание на различие между отношением принадлежности и отношением включения. Так, множество A может быть своим подмножеством, т.е. $A \subset A$, однако множество A не может входить в состав своих элементов, т.е. $A \notin A$. Отношение включения обладает свойством транзитивности, т.е. если $A \subset B$ и $B \subset C$, то и $A \subset C$. Отношение принадлежности таким свойством не обладает. Например, множество $A = \{a_1, \{a_2, a_3\}, a_4\}$ содержит в числе своих элементов множество $A^1 = \{a_2, a_3\}$ и поэтому можно записать $a_2, a_3 \in A^1$ и $A^1 \in A$. Однако из этого не следует, что элементы a_2 и a_3

принадлежат множеству А (действительно, среди элементов множества А нет a_2 и a_3), т.е. $a_2, a_3 \notin A$.

Задать множество можно либо *путем перечисления его элементов*, как например, спецификация задает множество составных частей сборочной единицы, либо *путем задания некоторого правила*, по которому элементы описываются определяющим свойством, общим для всех элементов. Это свойство характеризует принадлежность элементов к конкретному множеству и представляет собой утверждение или высказывание, справедливое для любого элемента множества.

Задавать определяющее свойство элементов множества можно различными способами, например, словесным описанием. Так, множество резисторов R, содержащееся в множестве электрорадиоэлементов E электронного усилителя, можно задать следующим образом: $R = \{e \in E | e$ *- резистор*$\}$, т.е. множество состоит из элементов e множества E, которые обладают свойством быть резисторами. Однако наиболее удобным способом задания определяющего свойства множества является запись его с помощью логических функций-предикатов (в данном пособии не рассматриваются).

Множество, заданное с помощью предиката $P(x)$ условно обозначается как $X = \{x \mid P(x)\}$, $X = \{x : P(x)\}$, или $X = \{x ; P(x)\}$, т.е. X есть множество всех x, для которых $P(x) = 1$.

Если множество выделяется с помощью предиката $P(x)$ из другого множества (например, множество резисторов R с помощью предиката $P(x)$:"*x - резистор*" выделяется из множества E электрорадиоэлементов), то записывают его следующим образом: $R = \{e | e \in E, P(e)\}$, или $R = \{e \in E | P(e)\}$. Множество Y, заданное в виде $Y = \{f(x) | P(x)\}$, означает множество всех $y = f(x)$, для которых имеется x, удовлетворяющий условию истинности предиката $P(x)$.

Еще одним способом задания множеств можно считать образование их при помощи операций над некоторыми другими множествами.

1.2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

С множествами, как и с другими математическими объектами, можно производить ряд операций. Определим основные из них.

Объединением (суммой, соединением) множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих или множеству A, или множеству B (или обоим множествам одновременно). Формально это определение можно записать как

$C = A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Наглядное представление об операциях над множествами дает графическая иллюстрация их с использованием кругов Эйлера. Множества при этом представляются в виде множеств точек данных кругов или их частей. Так, множества C, получаемые в результате операции объединения множеств A и B, изображены на Рис. 1.1. заштрихованными областями.

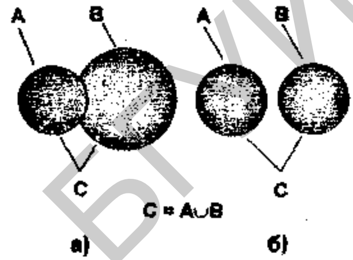


Рис. 1.1. Объединение множеств A и B

Объединение произвольного количества n множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ запишется как

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Для операции объединения справедливы переместительный и сочетательный законы, т.е. $C = A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Объединение множества с самим собой дает то же множество $A \cup A = A$. Объединение некоторого непустого множества с пустым множеством дает то же множество, т.е. $A \cup \varnothing = A$. Операция объединения позволяет определить, например, множество электрорадиоэлементов по заданным множествам резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности, полупроводниковых элементов и микросхем в схеме конструктивного модуля РЭА.

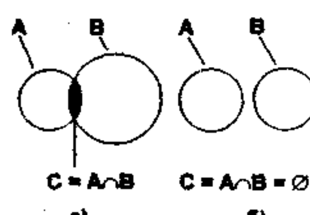


Рис. 1.2. Пересечение множеств A и B

Пересечением (логическим произведением) множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно как множеству A, так и множеству B. Формально это определение можно записать как

$C = A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

Графически множество C, получаемое в результате операции пересечения множеств A и B, показано на Рис. 1.2,а заштрихованной областью. Множества A и B, не имеющие общих элементов, в результате операции пересечения образуют пустое множество ($A \cap B = \varnothing$) и называются *непересекающимися* (Рис. 1.2, б). Пересечение m множеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$ запишется аналогично выражению, приведенному ранее для операции объединения

$$B = \bigcap_{i=1}^{m} B_i.$$

Для пересечения справедливы переместительний и сочетательный законы, т.е, $C = A \cap B = B \cap B$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Пересечение множества с самим собой равно исходному множеству $A \cap A = A$. Пересечение непустого множества с пустым множеством дает пустое множество, т.е. $A \cap \varnothing = \varnothing$. С помощью операции пересечения можно определить, например, множество типов электрорадиоэлементов, являющихся общими для множеств электрорадиоэлементов различных функциональных узлов в электронном устройстве.

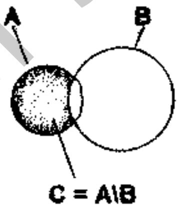


Рис. 1.3. Разность множеств A и B

Для операций объединения и пересечения взаимно справедлив распределительный закон*, т.е. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и наоборот, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Разностью множеств A и B (обозначается A\B или A-B) называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A, которые одновременно не принадлежат множеству B:

$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Разность по своим свойствам отличается от объединения и пересечения тем, что она определена только для двух множеств, т.е. разность является двухместной операцией. Кроме того, для разности не справедливы переместительный и сочетательный законы, т.е. $A \setminus B \neq B \setminus A$, $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$. Графическая иллюстрация разности C множеств A и B приведена на Рис. 1.3.

---

* В высшей математике и в математической логике, в частности, переместительный, сочетательный и распределительный законы часто называют законами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности соответственно.

Если множество A включает множество B, т.е. $A \supset B$, то можно определить дополнение множества B по отношению к множеству A, как множество $\overline{B}$, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A, которые одновременно не принадлежат множеству B. Формальное определение дополнения B запишется

$$\overline{B} = A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

На Рис. 1.4 дополнение $\overline{B}$ показано в виде заштрихованной области.

Рис. 1.4. Дополнение $\overline{B}$ множества B до множества A

Обычно определение любого конкретного множества в явном или неявном виде ограничивает совокупность допустимых для данного множества объектов. Удобно совокупность объектов, допустимых для всех рассматриваемых множеств, зафиксировать явным образом и считать рассматриваемые множества подмножествами данной совокупности. При этим указанную совокупность называют основным или универсальным множеством (универсумом) и обозначают обычно I. Множество I должно быть либо задано явно, либо очевидно из контекста. В качестве универсального множества в конкретных случаях могут выступать различные общие множества. Так, например, для множеств электрорадиоэлементов, содержащихся в различных блоках РЭА, универсальным будет множество электрорадиоэлементов, использованных во всей данной РЭА в целом. Множество I обладает следующими свойствами:

- пересечение с I любого множества X дает то же самое множество X, т.е. $X \cap I = X$;
- объединение с I любого множества X дает в результате само универсальное множество I, т.е. $X \cup I = I$.

Дополнение X множества A до универсального множества I определяется отрицанием свойства P(x), с помощью которого определяется A, т.е.

$$\overline{A} = I \backslash A = \{x \mid x \in I \text{ и } x \notin A\} = \{x \mid x \in I \text{ и } x \in \overline{A}\}.$$

Очевидно, что с помощью операции дополнения разность множеств можно представить в виде: $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

Операция разности двух множеств позволяет выделить индивидуальные признаки объекта, например, число электрорадиоэлементов, используемых только в данном блоке РЭА. С помощью операции дополнения можно, например, выявить недостающие признаки проектируемого объекта.

Операции объединения, пересечения и дополнения часто называют булевыми операциями или булевыми функциями над множествами. Они лежат в основе булевой алгебры множеств. С помощью этих операций можно выражать одни множества через другие, т.е. осуществлять тождественные преобразования множеств. При этом в первую очередь выполняется операция *дополнения*, затем *операция пересечения и лишь после нее операция* объединения. Для изменения естественной очередности выполнения операций в выражении используются скобки.

В отличие от предыдущих операций, в результате **произведения** множеств получается новое множество, элементы которого отличны от элементов множеств-операндов - они получаются в результате произведения, состоящего из упорядоченных элементов сомножителей. Такие последовательности называют *упорядоченными множествами* или *кортежами. Кортеж* - это такая совокупность элементов, в которой каждый элемент занимает строго определённое место. Элементы, составляющие кортеж, называются его компонентами и имеют порядковые номера. Количество элементов в кортеже называют его длиной. В кортеже, в отличие от обычного множества, могут быть и одинаковые элементы. Кортежи длиной n, элементы которых представляют собой вещественные числа, называются точками n-мерного пространства или n-мерными векторами .Два кортежа будут равны, если у них одинаковая длина и их соответствующие компоненты равны. Множество, которое состоит из кортежей, называют графиком.

Произведением (декартовым произведением) *множеств А и В* называют операцию, в результате которой получается множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных кортежей, первая компонента которых принадлежит множеству А, а вторая - множеству В. Математически эта операция может быть определена как

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Произведение двух множеств представляет собой граф, элементами которого являются кортежи длиной 1. Очерёдность следования кортежей в произведении может быть произвольной. Положение компонентов в каждом кортеже должно соответствовать порядку следования сомножителей. Пусть, например, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$. Тогда $X \times Y = \{(x_1,y_1), (x_2,y_1), (x_3,y_1), (x_1,y_2), (x_2,y_2), (x_3,y_2)\}$. На Рис. 1.5 дана графическая иллюстрация данного произведения в виде совокупности точек в двухмерном пространстве.

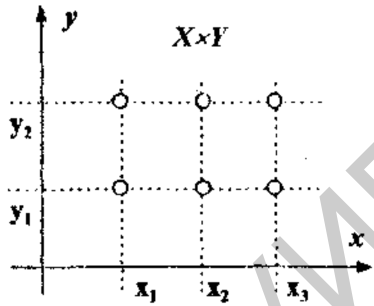


Рис. 1.6. Графическая иллюстрация произведения множеств

Для произведения множеств не справедлив переместительный закон: $A \times B \neq B \times A$, если $A \neq B$. Произведением любого числа n-множеств a_i будет множество, состоящее из всех кортежей длины m, в котором первая компонента принадлежит первому сомножителю, вторая - второму, n-я n-му и т.д.

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i .$$

Произведение одинаковых множеств называют степенью множества:

$$A^n = \underbrace{A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n}_{\textit{n сомножителей}} .$$

1.3. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Разбиением множества A называют операцию, в результате которой получают множество подмножеств $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- любое из подмножеств A_i не является пустым:

$$(\forall A_i \in A)\ A_i \neq 0,\ i = 1..m;$$

- для всех A_i из множества подмножеств справедливо:

$$(\forall A_i \in A)\ A_i \subseteq A,\ i = 1..m;$$

- каждый элемент исходного множества A должен принадлежать только одному подмножеству A_i, т.е. любые два подмножества A_i, A_j будут не пересекающимися:

$$(\forall A_i, A_j \in A)\ A_i \wedge A_j = \varnothing,\ j \neq i,\ i = 1..m,\ j = 1..m;$$

- каждый элемент исходного множества A должен войти в какое-либо подмножество A_i, т.е. объединение всех подмножеств A_i должно дать исходное множество A:

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A.$$

Разбиение множества на заданное число подмножеств можно осуществить разными способами. Определяющими при делении являются признаки, по которым осуществляется эта операция.

2. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Дано: А - множество микросхем на плате, В - множество резисторов. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$. Рассмотреть также случаи, когда А или В пустые множества.

Решение

$A \cup B$ - операция объединения, она объединяет все элементы на плате. Следовательно, $A \cup B$ - множество всех элементов на плате.

$A \cap B$ - операция пересечения, выявляет общие свойства элементов. Множества А и В содержат разные элементы (микросхемы и резисторы), следовательно, *операция* $A \cap B$ выявляет общие свойства элементов платы. Так как множества А и В содержат разные элементы, то $A \cap B = \varnothing$.

$A \setminus B$ - операция разности двух множеств, в результате которой получается новое множество, содержащее только элементы множества А, одновременно не принадлежащие множеству В. В множествах А и В общих элементов нет, следовательно, $A \setminus B = A$.

Случай, когда $A = \varnothing$:
$A \cup B = \varnothing \cup B = B$
$A \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$
$A \setminus B = \varnothing \setminus B = \varnothing$

Случай, когда $B = \varnothing$:
$A \cup B = A \cup \varnothing = A$
$A \cap B = A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \setminus B = A \setminus \varnothing = A$

Пример 2. Даны множества $A = [2,5]$, $B = (3,6)$. Определить: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

Решение

Квадратные скобки обозначают, что множество имеет ограниченный замкнутый интервал: $A = [a, b]$, где $a \le x \le b$. Круглые скобки обозначают, что множество имеет ограниченный открытый интервал: $A = (a, b)$, $a < x < b$.

Для нашего случая:

$A = [2,5]$, $2 \le x \le 5$, т.е. $A = \{2, 3, 4, 5\}$

$B = (3,6)$, $3 < x < 6$, т.е. $B = \{4, 5\}$

$A \cup B = \{2,3,4,5\} \cup \{4,5\} = \{2,3,4,5\}$ или $A \cup B = [2,5]$, т.е. равно А.

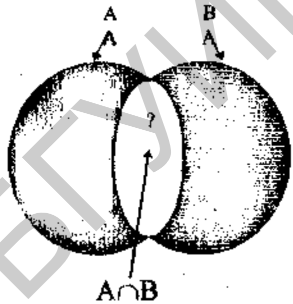
$A \cap B = \{2,3,4,5\} \cap \{4,5\} = \{4,5\}$ или $A \cap B = (3,5] = (3,6)$, т.е. равно B.

$A \setminus B = \{2,3,4,5\} \setminus \{4,5\} = \{2,3\} = [2,3]$

Пример 3. Из определенного количества типовых элементов замены (ТЭЗ) 70% подходят для блока A, а 90% - подходят для блока B. Сколько одинаковых ТЭЗ имеют блоки A и B?

Решение

Задачу удобно решать с помощью кругов Эйлера.



Количество всех ТЭЗ: M = 100%, A = 70%, B = 90%, $A \cap B$ - одинаковые ТЭЗ. Тогда множество M запишется как: $M = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Следовательно, $100\% = 70\% + 90\% - |A \cap B|$. Отсюда AB = 60%.

Ответ: Два блока имеют 60% одинаковых ТЭЗ.

Пример 4. Доказать соотношение: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Решение

Допустим: $A = \{1...k\}$, $|A| = k$, $B = \{1...p\}$, $|B| = p$, где $k > p$.

Тогда: $A \cup B = \{1...k\} \cup \{1...p\} = \{1...k\}$, т.е. $|A \cup B| = k$.

$A \cap B = \{1...k\} \cap \{1...p\} = \{1...p\}$, т.е. $|A \cap B| = p$.

Следовательно, для $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $k = k + p - p = k$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Доказать, что операция взятия дополнения обладает свойством рефлексивности: $\overline{(\overline{A})} = A$, а также связана с операциями $\cup$ и $\cap$ следующими законами двойственности: если $A \subset B$, то $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Решение

Допустим $B \setminus A = \overline{A}$, где $\overline{A}$ - дополнение, то $B \setminus \overline{A} = A$, а операция $B \setminus \overline{A}$ - это взятие дополнения от дополнения. Следовательно, свойство рефлексивности подтверждается $\overline{(\overline{A})} = A$. Если $A \subset B$, то $A \setminus B = \overline{B}$, где $\overline{B}$ - дополнение B до A, равное пустому подмножеству ($\overline{B} = \varnothing$). $B \setminus A = \overline{A}$.

$A \cup B = B$, $B \setminus (A \cup B) = (\overline{A \cup B}) = B \setminus B = \varnothing$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A} \cap \varnothing = \varnothing$.

Следовательно, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$A \cap B = A,\ B \setminus (A \cap B) = (\overline{A \cap B}) = B \setminus A = \overline{A}$;

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cup \varnothing = \overline{A}$.

Следовательно, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Пример 6. Доказать, что операции $\cup$ и $\cap$ связаны законами дистрибутивности:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Решение

Допустим $A = \{1 \ldots n\}$; $B = \{1 \ldots m\}$; $C = \{1 \ldots k\}$, где $n>m>k$.

$A \cup B = A$, $(A \cup B) \cap C = A \cap C = C$.

$B \cap C = C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cup C = C$.

Следовательно, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

$A \cap B = B$, $(A \cap B) \cup C = B \cup C = B$;

$A \cup C = A$, $(A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cap B = B$.

Следовательно, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = B$.

Пример 7. Истинны или ложны высказывания:

а) $\forall x\ \exists y\ (x+y = 3)$;

б) $\exists x,y\ (x+y = 3)$;

в) $\forall x\ (x>2 \wedge (\overline{x>3}) \Leftrightarrow 2<x \leq 3)$.

Решение

а) запись обозначает, что если существует хотя бы один элемент y обладающий свойством $(x+y) = 3$, то все элементы x будут обладать этим свойством. Это высказывание ложно;

б) запись обозначает, что существует хотя бы один элемент x и y, обладающие свойством $(x+y = 3)$. Высказывание истинно;

в) запись обозначает, что все элементы x обладают свойством пересечения $x>2$ с дополнением $(\overline{x>3})$. Так как дополнение до $x>3$ - это числа $0 \leq x \leq 3$, то $(x>2) \wedge (0 \leq x \leq 3) = (2<x \leq 3)$. Следовательно, утверждение истинно.

2.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. A - множество простых делителей числа 30, B - множество простых делителей числа 42. Что собой представляет $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$? Запишите эти числа.

Задача 2. Пусть $A \subset B$. Чему равно $A \cup B$, $A \cap B$? В каком отношении находятся дополнения $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

Задача 3. Доказать соотношение:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Записать это соотношение для случая, когда A, B и C - попарно непересекающиеся множества (непересекающиеся множества - это такие множества, у которых нет общих элементов).

Задача 4. Указать, какие из нижеследующих пар множеств являются пересекающимися, и записать их пересечения:

а) множество гибридных интегральных схем (ГИС) и множество больших интегральных схем (БИС);

б) $M_x\,[(x \in N) \wedge (x < 5)]$ и $M_x\,[(x \in N) \wedge (x > 3)]$, где $|N| = 20$;

в) $M_x\,[(x \in C) \wedge (x \leq 4)]$ и $M_x\,[(x \in C) \wedge (x > 4)]$, где $|C| = 15$.

Задача 5. Определить декартово произведение $A = \{0,1\}$; $B = \{3,4\}$.

Задача 6. Из 800 интегральных микросхем (ИС) различных серий 430 ИС подходят для блока A, 220 ИС подходят для блока B и 180 ИС подходят как для блока A, так и для блока B. Определить, сколько ИС подходит для блока C.

Задача 7. Разбить множество $A = \{3,5,12,17,20,25,30\}$ на 3 подмножества A_1, A_2 и A_3, если известно, что $|A_1| = 3$, а элементами подмножества A_2 являются простые делители числа 15.

Задача 8. Из 73 ИС различных серий 26 ИС подходят для блока A, 18 ИС - для блока B, 24 ИС - для блока C и 23 ИС не подходят ни в один из этих блоков. Из 24 ИС, которые подходят для блока C, 10 ИС могут быть использованы в блоке B и 6 ИС в блоке A. Есть только одна ИС, которая подходит во все три блока. Определить, сколько еще ИС подходят и в блок A и в блок B, т.е. $(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Задача 9. Доказать, что:

а) равенство $A \cap B = B$ верно только в том случае, если $B \subset A$;

б) равенство $A \cup B = B$ верно, если $A \subset B$.

Задача 10. Даны множества: $A = [4,10)$; $B = [4,8]$ и $C = (4,10]$.

Определить $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \backslash A$, $A \backslash C$, $B \backslash C$, $C \backslash A$.

Задача 11. Разбить множество $B = \{3,7,21,15,8,10,23\}$ на 4 подмножества, где подмножество B_1 - простые делители числа 21, B_2 - числа, имеющие делитель 2, $|B_3| = 2$.

Задача 12. Доказать, что $\overline{\overline{A} \backslash \overline{B}} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$, если $B \subset A$.

Задача 13. Доказать утверждения, если $A \subset B$:

а) $A \backslash B \Leftrightarrow B \cap \overline{B}$;

б) $\overline{\overline{A} \backslash B} \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \cup B$;

в) $A \cap (\overline{\overline{A} \backslash \overline{B}}) \Leftrightarrow A \cap B$.

Задача 14. Истинны или ложны высказывания:

а) $\exists y \forall x\ (x+y = 4)$;

б) $\forall x,y\ (x+y = 4)$;

в) $\exists x,y\ (x>y>0 \wedge x+y = 0)$;

г) $\forall x,y\ (x<y) \Leftrightarrow \exists z\ (x<z<y)$;

д) $\forall x,y\ (x^2 \neq 2y^2)$;

е) $\forall x\ (x^2>x \Leftrightarrow x>1 \vee x<0)$;

ж) $\exists x\ (\sqrt{x^2} < x)$.

Задача 15. Дано множество: $A = \{8,10,7,3,5,15,11,23,14\}$. Составить кортеж из значений в убывающем порядке.

Задача 16. Какие из данных кортежей равны между собой:

$\alpha = <3,5,8,12,15,17,21,25>$;

$\beta = <3,5,8,15,17,21,25>$;

$\gamma = <3,5,8,12,15,17,25>$;

$\delta = <25,21,17,15,12,8,5,3>$;

$\xi = <3,5,8,12,15,17,21,25>$.

Определить длину каждого кортежа.

Задача 17. Указать, какие из нижеследующих пар множеств являются пересекающимися и записать их пересечения:

а) $M_x[(x \in N) \vee (x<5)]$ и $M_x[(x \in N) \wedge (\overline{x>5})]$, где $|N| = 7$;

б) $M_x[(x \in C) \wedge (\overline{x<4})]$ и $M_x[(x \in C) \wedge (x<4)]$, где $|C| = 8$;

в) $M_x[(x \in A) \wedge (x=3)]$ и $M_x[(x \in A) \wedge (\overline{x>3})]$, где $|A| = 5$.

Задача 18. Определить декартово произведение множеств $M = \{a,b,c\}$ и $N = \{e,d\}$.

3. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ

3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГРАФАХ

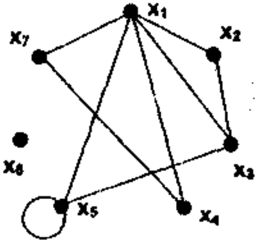
При решении многих конструкторских задач оказывается удобным представлять реальные объекты моделями в виде графов. При этом вершинам графов могут соответствовать составные части (элементы) объекта, а ребрам - соединения или связи между этими элементами.

Графом G(X,Y) будем называть совокупность не пустого множества вершин $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и изолированного от него множества рёбер $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ (возможно пустого), представляющего собой подмножество всех пар соединенных рёбрами вершин. Ребра обозначаются, используя либо однозначный индекс, равный номеру ребра u_k, либо двойной индекс, состоящий из номеров соединенных ребром вершин $u_{ij} = (x_i, x_j)$.

Две вершины x_i и x_j, между которыми существует ребро, называются *смежными*. Ребро, соединяющее между собой две вершины, *инцидентно* каждой из них, а вершины *инцидентны* ребру. Вершина, не имеющая инцидентных ребер - *изолированная*. Рёбра, у которых обе концевые вершины совпадают, называются *петлями*.

Задать граф можно различными способами. Из определения графа вытекает способ задания его с помощью множества вершин X и подмножества U тех пар его вершин, между которыми существуют рёбра. Например, граф G(X,U): $X = \{x_1, x_2, ..., x_7\}$, $U = \{(x_1,x_2), (x_1,x_3), (x_1,x_4), (x_1,x_5), (x_1,x_7), (x_2,x_3), (x_3,x_5), (x_4,x_7), (x_5,x_5)\}$.

При графическом или визуальном задании граф представляется геометрической фигурой, на которой вершины представлены точками, а рёбра - линиями, соединяющими эти точки. На рисунке представлен граф G(X,U) в виде геометрической фигуры из ранее приведенного примера.



Следующий способ задания графа основывается на том, что для каждой из его вершин указывается подмножество вершин, смежных с ней. Например:

x_1 смежны $\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}$,
x_2 смежны $\{x_1, x_3\}$,
x_3 смежны $\{x_1, x_2, x_5\}$,
x_4 смежны $\{x_1, x_7\}$,
x_5 смежны $\{x_1, x_3, x_5\}$,
x_6 смежны $\{\ \} = \varnothing$,
x_7 смежны $\{x_1, x_4\}$.

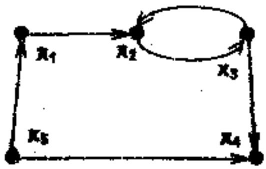
Более рационально задавать граф данным способом, используя отображение смежности (или отображение не смежных вершин) на множестве вершин графа. Отображение Г ставит в соответствие каждой вершине $x \in X$ подмножество смежных вершин $\Gamma(x) \subseteq X$. Например:

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$;
$\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}$;
$\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3\}$;
$\Gamma(x_3) = \{x_1, x_2, x_5\}$;
$\Gamma(x_4) = \{x_1, x_7\}$;
$\Gamma(x_5) = \{x_1, x_3, x_5\}$;
$\Gamma(x_6) = \{\ \} = \varnothing$;
$\Gamma(x_7) = \{x_1, x_4\}$.

Иногда граф предпочтительнее задавать в виде матрицы, а так же с помощью 2-местных предикатов, называемых инциденторами.

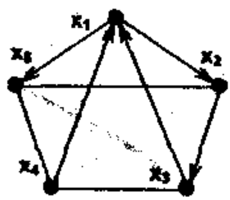
3.2. ОСНОВНЫЕ РАЗНОВИДНОСТИ ГРАФОВ

Все графы можно разделить на неориентированные и ориентированные. *Неориентированные* - графы, у которых порядок следования концевых вершин x_i и x_j, определяющих все их рёбра, не являются существенными, $u_{ij} = u_{ji}$. У *ориентированного* графа все рёбра имеют строго определённое направление. Их называют ориентированными рёбрами или дугами. У *смешанных* графов могут быть как ориентированные, так и неориентированные рёбра.



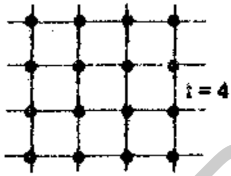
Ориентированный граф

Неориентированные графы, у которых есть пары вершин, соединённых более чем одним ребром, называют *мультиграфами*. Рёбра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называют *кратными*. Наибольшее число кратных рёбер в мультиграфе называют *мультичислом*. Граф, содержащий и петли и кратные рёбра, называется *псевдографом*. Граф без петель и кратных рёбер - *простой граф*. Число рёбер, инцидентных вершине x_i, называют *степенью* вершины $\rho(x_i)$. У неориентированных графов число рёбер и степени вершин связаны равенством: $|U| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i)$, где n - количество вершин.



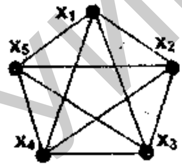
Смешанный граф

Граф, состоящий только из изолированных вершин - *безрёберный* или *нуль-граф* G_0. *Конечным* графом называют такой граф, у которого число рёбер и вершин конечно. У *бесконечного* графа число рёбер и/или вершин бесконечны. Конечный граф без петель и изолированных вершин называется *регулярным*. Граф, у которого степени всех вершин одинаковы и равны некоторому числу t, называется *однородным графом степени t*.



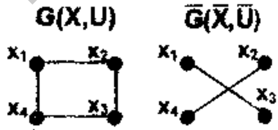
Однородный граф

Противоположностью нуль-графу является *полный* граф, у которого существуют рёбра между любыми парами вершин. Это регулярный граф с попарно смежными вершинами, для которых $\rho(x_i) = n-1$. Граф $\overline{G}(\overline{X},\overline{U})$ называется *дополнительным* или *дополнением* к G(X,U), если он состоит из того же множества вершин X и рёбер $\overline{U}$, которыми необходимо дополнить граф G(X,U), чтобы получить полный граф.

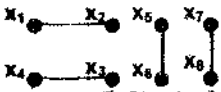


Полный граф

Граф называют *связным*, если перемещаясь по его рёбрам от вершины к вершине можно обойти все вершины в графе. *Несвязный* - граф, у которого это условие не выполняется. Для несвязного графа всегда можно выделить *p* связных частей, называемых *компонентами связности*. Разность между количеством вершин и компонент связности называется *рангом графа*: *R(G) = n - p*.

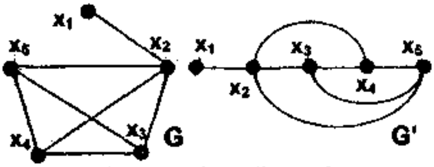


Дополнительный граф



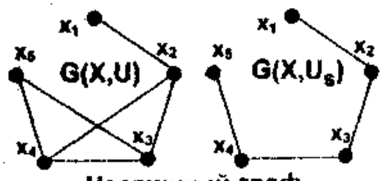
n = 8, p = 4, R(G) = 8 - 4 = 4

Один и тот же граф может быть изображен графически по-разному, т.е. иметь различные геометрические реализации. Два графа G и G' *изоморфны*, если они имеют одно и то же множество вершин, и если каждой паре вершин, соединенных ребром в одном графе, соответствует точно такая же пара в другом графе.



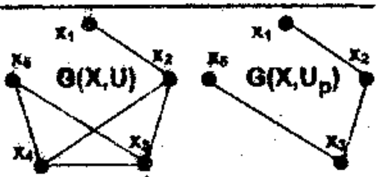
Изоморфный граф

Если в графе G(X,U) опустить некоторые рёбра, а множество вершин оставить без изменений, то получим граф



Частичный граф

$G(X,U_s)$, называемый *частичным графом* или *суграфом*. Если в графе $G(X,U)$ опустить некоторые вершины и инцидентные им рёбра, то получим граф $G(X,U_p)$, называемый *подграф*. Если в исходном графе осуществить преобразование, приводящее к появлению частичного графа и подграфа одновременно, то получим *частичный подграф*.



Подграф

3.3. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ И ЦИКЛЫ В ГРАФАХ

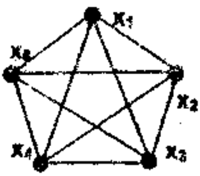
При проектировании возникает необходимость оперировать не только отдельными вершинами или рёбрами в графе, но и совокупностями элементов графа. Наиболее часто при этом применяются такие совокупности как маршруты, цепи и циклы.

Маршрутом в графе $G(X,U)$ будем называть некоторую конечную последовательность рёбер $u_i \in U$, заданных своими граничными вершинами (x_1,x_j), (x_i,x_j),...,(x_{k-1},x_k), в которой любые два соседних ребра - смежные. Вершины x_1 и x_k являются, соответственно, началом и концом маршрута. *Длина маршрута* определяется числом рёбер, входящих в него. Повторяющиеся рёбра учитываются в длине маршрута столько раз, сколько они встречаются в маршруте. Маршрут, не содержащий повторяющихся рёбер, называется *цепью*. Цепь может быть *простой* и *сложной*. Простая цепь не содержит повторяющихся вершин. В сложной цепи вершины могут повторяться.

Цепь, в которой начальная и конечная вершины совпадают, называется *циклом*. Циклы, как и цепи, могут быть простыми и сложными. Простые не содержат повторяющихся вершин, сложные могут содержать.

При решении конструкторских задач большой практический интерес представляют некоторые предельные циклы в графах, получившие название Эйлера и Гамильтона. Для конечных связных графов эти циклы можно определить следующим образом.

Эйлеров цикл - это цикл, в котором содержатся все рёбра графа. Граф, имеющий такой цикл, называют Эйлеровым. Известно необходимое и достаточное условие суще-

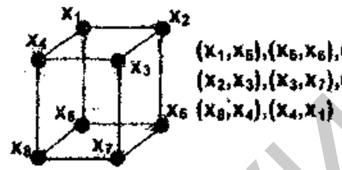


$(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),$
$(x_4,x_5),(x_5,x_1),(x_1,x_4),$
$(x_4,x_2),(x_2,x_5),(x_5,x_3),$
(x_3,x_1)

Эйлеров граф

ствования Эйлерова цикла в конечном связном графе - степени всех вершин графа должны быть чётными.

Гамильтонов цикл - это цикл, проходящий через все вершины графа. Граф, в котором имеется такой цикл - *Гамильтонов граф. Для Гамильтонова* цикла известны лишь теоремы, задающие достаточное условие существования или отсутствия данного условия в графе (критерий Дирака и т.п.). Общий критерий существования данного цикла неизвестен.



Гамильтонов граф

Связный неориентированный граф, не содержащий циклов, называют *деревом*. Несвязный граф без циклов, отдельные компоненты связности которого являются деревьями, называют *лесом*. Дерево, построенное на n вершинах, содержит $r_t = n - 1$ рёбер. Лес, состоящий из p компонент связности, содержит $r_f = n - p$ рёбер. Любой граф с числом рёбер $r_f > n - p$ будет содержать циклы.

В любом связном графе можно выделить некоторое число деревьев. При решении задач конструирования наибольший интерес представляют деревья, у которых число вершин равно числу вершин графа, из которого это дерево выделено. Такие деревья - *покрывающие*. На n вершинах в связном графе можно построить n^{n-1} деревьев, часть из которых будут являться изоморфными.

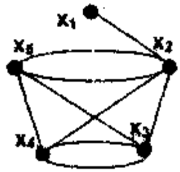
3.4. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ

Одной из наиболее удобных форм задания графов является матричная. Это связано с тем, что для матриц хорошо отработана методика их формальной обработки и существует обширное программное обеспечение для этих целей.

Матрицей смежности (связности) графа G(X,U) называют квадратную матрицу $A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$, n = |X|, общий элемент которой определяется как:

$$a_{ij} = \begin{cases} m(x_i, x_j) & \text{при } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{при } (x_i, x_j) \notin U \end{cases},$$

где $m(x_i,x_j)$ - кратность ребер между вершинами x_i и x_j. Элементы в строках матрицы смежности представляют собой число ребер между вершинами, номера которых определяются, соответственно, номером строки и номером столбца.



$$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Матрица смежности

Матрица смежности является не только одним из удобных способов аналитического задания графов, но также позволяет просто определять ряд характеристик графа путём несложных преобразований самой матрицы. Например, возведя матрицу смежности в степень g можно определить число маршрутов длины g в графе.

Матрица весовых соотношений $C=\left\|c_{ij}\right\|_{n\times n}$, n = |X|, строится аналогично матрице смежности, однако элементы определяются весами рёбер графа. Матрица весовых соотношений - квадратная матрица, строки и столбцы которой соответствуют номерам вершин графа.

$$C_{ij}=\begin{cases} T_{ij} & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны} \\ 0 & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны} \end{cases}$$, где T_{ij} - вес связи (ребра x_i,x_j).

При моделировании монтажных пространств возникает необходимость отображения длины путей (расстояния) между множеством точек в рассматриваемом объекте. Для монтажных пространств, к примеру, - это множество центров установочных мест для размещения элементов схемы на плате. В таких случаях могут применяться модели в виде матрицы длин или матриц расстояний.

Матрица длин - квадратная матрица $D=\left\|d_{ij}\right\|_{n\times n}$, n = |X|, строки и столбцы которой соответствуют номерам вершин графа, а общий элемент - длине ребра между вершинами x_i и x_j:

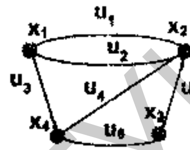
$$d_{ij}=\begin{cases} l_{ij} & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны} \\ 0 & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны} \end{cases}$$, где l_{ij} - длина ребра (x_i, x_j).

При эвклидовой метрике расстояние между двумя точками на плоскости определяется выражением: $l_{ij} = \sqrt{(s_i - s_j)^2 + (t_i - t_j)^2}$, где s_i, s_j, t_i, t_j - координаты вершин x_i и x_j соответственно.

При использовании линейной метрики расстояние между точками на плоскости (манхеттеново расстояние) определяется как $l_{ij} = |s_i - s_j| + |t_i - t_j|$.

Матрица инцидентности - прямоугольная матрица $B = \|b_{ij}\|_{n \times r}$, строки которой соответствуют номерам вершин графа ($n = |X|$), а столбцы - номерам ребер ($r = |U|$), общий элемент:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } u_j \in U, \text{ инцидентно } x_i, \\ 0, \text{ если } u_j \text{ не инцидентно } x_i \end{cases}.$$



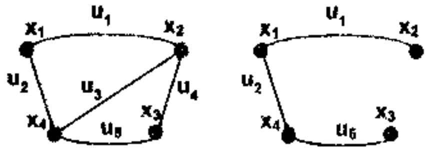
$$B = \begin{array}{c|cccccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Матрица инцидентности

3.5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ГРАФОВ

Решение задач проектирования с моделями объектов в виде графов существенно упрощается при использовании некоторых числовые характеристик, получивших название *характеристических чисел графа*. Эти числа являются инвариантными характеристиками графа (остаются постоянными при изоморфных преобразованиях). Важнейшими из характеристических чисел являются цикломатическое и хроматическое число.

Цикломатическим числом $\nu(G)$ графа G(X,U), у которого n вершин, r рёбер и p компонент связности, называют минимальное количество рёбер, которое необходимо удалить, чтобы в графе не было циклов, т.е., чтобы граф стал ациклическим (деревом или лесом):



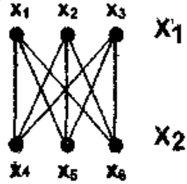
r = 5, n = 4, p = 1, ν(G) = 2

$$\nu(G) = r - n + p .$$

Для того чтобы определить, какие именно рёбра надо удалить в графе, можно руководствоваться правилом: удалять каждый раз то ребро, которое устраняет хоть один цикл.

Хроматическим числом K(G) графа G(X,U) без петель, называют наименьшее число пересекающихся подмножеств не смежных между собой вершин (наименьшее число красок), на которое можно разбить множество вершин графа. В результате такого разбиения любое ребро $u_{ij} \in U$ должно соединять только вершины, принадлежащие разным подмножествам. Сам процесс разбиения множества X вершин графа на k непересекающихся подмножеств $x_1, x_2, \dots, x_k$, таких, то каждое подмножество не содержит смежных между собой вершин, называют раскраской графа.

Граф, у которого все вершины можно раскрасить k цветами так, чтобы любые две смежные вершины отличались по цвету, называют *k-хроматическим* графом. Методы линейного программирования позволяют определить хроматическое число графа аналитически. Для полного графа G(X,U), K(G)=n=|X|. Любой планарный граф, который может быть сведен к плоскому, можно раскрасить 5 цветами (K(G)=5).



Большой практический интерес представляют собой графы с k = 2 - бихроматические или двудольные графы. Для таких графов множество вершин X можно разбить на два непересекающихся подмножества не смежных между собой вершин. Двудольный граф можно обозначить как G(X1,X2; U). Его рёбра соединяют только вершины подмножеств X1 и X2. В качестве признака бихроматичности произвольного графа можно использовать *теорему Кенига*. Она гласит, что граф G(X,U) бихроматичен, если он не содержит циклов нечётной длины. Исходя из данной теоремы любой граф, не содержащий циклов, т.е. любое дерево - бихроматический граф или граф Кенига.

Нахождение хроматического числа графов позволяет оптимизировать алгоритмы решения задач конструкторского проектирования РЭС. Например, при топологическом проектировании многослойных печатных плат для распределения вершин графа, являющегося моделью электрической схемы, по слоям печатной платы используют раскраску вершин графа.

3.6. ГИПЕРГРАФЫ

Более универсальными математическими моделями для решения задач проектирования могут быть модели на основе *гиперграфов*. Если обычный граф можно однозначно задать бинарными отношениями на множестве вершин X, то гиперграф представляет собой обобщение графа для случая, когда отношение между его элементами является n-арным.

Элементами гиперграфов, как и обычных графов, являются вершины и рёбра. Отличие состоит в том, что ребро в обычном графе может соединять только две вершины, а в гиперграфе - любое подмножество вершин. Задать гиперграф можно различными способами. Основываясь на понятиях теории множеств, под гиперграфом H(X,U,R) понимается совокупность множества вершин $X = \{x_i\}, i \in I = \{1,2,..n\}$ и множества рёбер $U = \{u_j\}, j \in J = \{1,2,..m\}$, парные отношения между которыми заданы двуместным предикатом R, называемым *инцидентором*, и определённым на множестве всех пар (x_i, u_j), $x_i \in X$, $u_j \in U$. Инцидентор R может принимать 2 значения: 1 (истинно), 0 (ложно) для всех пар (x_i,u_j) , $x_i \in X, u_j \in U$.

Множество пар F(x,u), состоящих только из тех пар (x_i,u_j), для которых $R(x_i,u_j) = 1$, называется *областью истинности инцидентора (предиката)*:

$F(x,u) = \{(x,u)|R(x,u)=1, x \in X, u \in U\}$.

Между одноименными элементами возможны отношения смежности, а между разноимёнными - инцидентности:

- x_i и u_j - инцидентны, если $R(x_i,u_j) = 1$, т.е. $(x_i,u_j) \in F(x,u)$;
- $x_i,x_k,...,x_l$ - смежны, если существует $u_j \in U$, инцидентное им;
- $u_i,u_k,...,u_l$ - смежны, если существует $x_t \in X$, инцидентное им.

Геометрически гиперграф можно задать, изобразив его вершины точками на плоскости, а рёбра - замкнутыми линиями, охватывающими инцидентные данному ребру вершины. Однозначно задать гиперграф можно также его *матрицей инцидентности* $R(H) = \left\| r_{ij} \right\|_{n \times m}$, строки которой соответствуют номерам вершин графа (n = |X|), а столбцы - номерам ребер (m = |U|), общий элемент:

$$R(H) = \begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ инцидентно } u_j \in U, \\ 0, & \text{если } x_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}.$$

Существует и другой способ задания гиперграфа - каждой вершине $x_i \in X$ гиперграфа H нужно сопоставить подмножество U(x) инцидентных данной вершине рёбер:

$U(x) = \{u \in | (x,u) \in F(x,u)\}$.

Аналогично, каждому ребру u_i из множества U нужно сопоставить подмножество X(u) вершин, инцидентных данному ребру:

$X(u) = \{x \in X | (x,u) \in F(x,u)\}$.

Мощность подмножества U(x) называют локальной степенью $\rho(x)$ вершин x:

$\rho(x) = |U(x)|$.

Степенью $\rho(u)$ ребра u называется мощность подмножества X(u) инцидентных ребру u-вершин :

$\rho(u) = |X(u)|$.

4. ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

4.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Дано множество вершин $X = \{x_1 ... x_5\}$ и множество ребер $U = \{u_{15}, u_{14}, u_{23}, u_{12}, u_{34}, u_{45}, u_{24}\}$ графа.

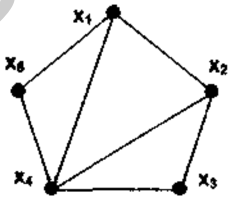
1. Представить граф графически.

2. Записать аналитическое представление графа с помощью линейных уравнений, отображением смежных вершин и при помощи инцидентора, равного 1.

3. Определить степени вершин.

Решение

1. Графическое представление графа:



2. Представление графа с помощью:

а) линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = u_{12}x_2 + u_{14}x_4 + u_{15}x_5 \\ x_2 = u_{12}x_1 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 \\ x_3 = u_{23}x_2 + u_{34}x_4 \\ x_4 = u_{14}x_1 + u_{24}x_2 + u_{34}x_3 + u_{45}x_5 \\ x_5 = u_{15}x_1 + u_{45}x_4 \end{cases};$$

б) отображения смежных вершин:

$$\begin{cases} \Gamma x_1 = \{x_2, x_4, x_5\} \\ \Gamma x_2 = \{x_1, x_3, x_4\} \\ \Gamma x_3 = \{x_2, x_4\} \\ \Gamma x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} \\ \Gamma x_5 = \{x_1, x_4\} \end{cases};$$

в) с помощью инцидентора, равного 1:

$R(x_1,u_{12}) = 1$; $R(x_2,u_{24}) = 1$; $R(x_4,u_{34}) = 1$;
$R(x_1,u_{14}) = 1$; $R(x_3,u_{23}) = 1$; $R(x_4,u_{45}) = 1$;
$R(x_1,u_{15}) = 1$; $R(x_3,u_{34}) = 1$; $R(x_5,u_{15}) = 1$;
$R(x_2,u_{12}) = 1$; $R(x_4,u_{14}) = 1$; $R(x_5,u_{45}) = 1$.
$R(x_2,u_{23}) = 1$; $R(x_4,u_{24}) = 1$;

Количество инциденторов, равных 0, считается по формуле:

$R(0) = n \times k - R(1)$,

где $R(0)$ - число инциденторов, равных 0; n - количество вершин; k - количество ребер; $R(1)$ - число инциденторов, равных 1.

Для нашего случая $R(0) = 5\times 7 - 14 = 21$.

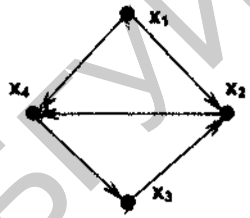
3. Степени вершин равны: $p(x_1) = 3$, $p(x_2) = 3$, $p(x_3) = 2$, $p(x_4) = 4$, $p(x_5) = 2$.

Пример 2. Дано: множество вершин $X = \{x_1 ... x_4\}$ и множество дуг $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{32}, u_{24}, u_{43}\}$.

Построить граф и определить степени вершин.

Решение

Графическое представление графа:



Степени вершин графа:

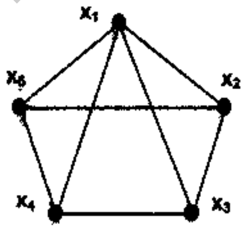
$p(x_1) = 2$;

$p(x_2) = 3$;

$p(x_3) = 2$;

$p(x_4) = 3$.

Пример 3. Для графа G(X, U) определить:



1) все разновидности графа G(X, U);

2) сумму степеней вершин;

3) построить дополнение $\overline{G}$, частичный граф и подграф, убрав вершину x_1.

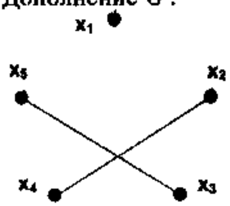
Решение

1. Граф G(X, U) является неографом, так как все связи являются ребрами. Это конечный, регулярный, обыкновенный, связный граф.

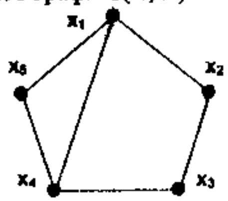
2. Сумма степеней вершин $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 2|U| = 2k = 2\cdot 8 = 16$, где k - количество ребер.

3.

Дополнение $\overline{G}$:



Одна из разновидностей частичного графа G(X,U'):

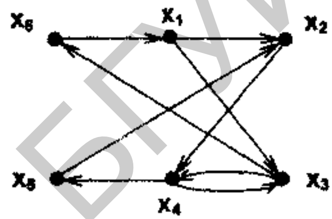


Подграф G(X', U") без вершины x_1:

Пример 4. Построить орграф, определить полустепени исхода и захода и построить граф, изоморфный данному - $X = \{x_1, ..., x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{13}, u_{24}, u_{36}, u_{34}, u_{43}, u_{45}, u_{52}, u_{61}\}$.

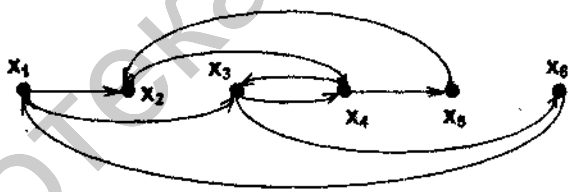
Решение

Орграф и полустепени исхода и захода:



$p^+(x_1) = 1 \quad p^-(x_1) = 2$
$p^+(x_2) = 2 \quad p^-(x_2) = 1$
$p^+(x_3) = 2 \quad p^-(x_3) = 2$
$p^+(x_4) = 2 \quad p^-(x_4) = 2$
$p^+(x_5) = 1 \quad p^-(x_5) = 1$
$p^+(x_6) = 1 \quad p^-(x_6) = 1$

Изоморфный граф:

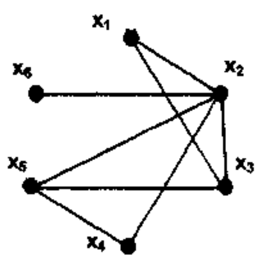


Пример 5. Для графа G(X,U):

1. Записать все замкнутые маршруты из вершины x_1 через вершину x_5 и определить их длину.

2. Определить, какие из найденных маршрутов являются циклами.

3. Определить наличие Эйлерова цикла.



Решение

1. Замкнутые маршруты из вершины x_1 через вершину x_5:

а) x_1,x_2,x_4,x_5,x_3,x_1, длина $n = 5$;
б) $x_1,x_2,x_3,x_5,x_4,x_2,x_1$, $n = 6$;
в) x_1,x_2,x_5,x_4,x_2,x_1, $n = 5$;
г) x_1,x_2,x_5,x_3,x_1, $n = 4$;
д) x_1,x_2,x_5,x_3,x_2,x_1, $n = 5$;
е) x_1,x_3,x_5,x_4,x_2,x_1, $n = 5$.

2. Маршруты а), г), е) являются простыми циклами.

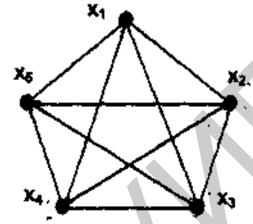
3. В данном графе Эйлерова цикла нет, т.к. есть вершины нечетной степени.

Пример 6. Для графа G(X,U) записать:

1) Эйлеров цикл.

2) 3 элементарных цикла.

3) Построить дерево.



Решение

1) Эйлеров цикл:

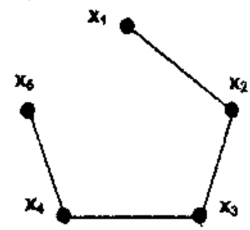
а) $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_3,x_1,x_4,x_2,x_5,x_1$; б) $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_1,x_3,x_5,x_2,x_4,x_1$ и т.д.

2) Элементарные циклы:

а) x_1,x_2,x_5,x_1; в) x_5,x_3,x_4,x_5.

б) x_2,x_5,x_3,x_2;

3) В графе, содержащем 5 вершин, для построения дерева нужно взять число ребер $k = 5-1 = 4$. В результате получим дерево:



Пример 7. Дано: $X = \{x_1, ..., x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{23}, u_{26}, u_{34}, u_{45}, u_{56}\}$.

1. Построить неограф.

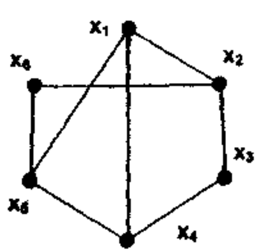
2. Построить планарный граф.

3. Записать матрицу смежности, инцидентности.

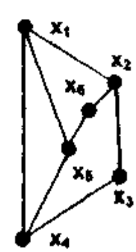
Решение

1. На рисунке а - неограф.

2. На рисунке б - планарный граф.



а)



б)

3.

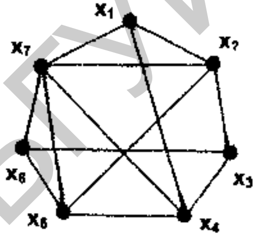
Матрица смежности

$A =$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_1	0	1	0	1	1	0
	x_2	1	0	1	0	0	1
	x_3	0	1	0	1	0	0
	x_4	1	0	1	0	1	0
	x_5	1	0	0	1	0	1
	x_6	0	1	0	0	1	0

Матрица инцидентности

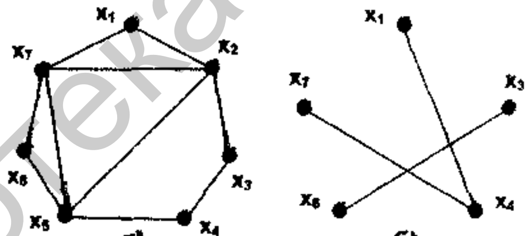
$B =$		u_{12}	u_{14}	u_{15}	u_{23}	u_{26}	u_{34}	u_{45}	u_{56}
	x_1	1	1	1	0	0	0	0	0
	x_2	1	0	0	1	1	0	0	0
	x_3	0	0	0	1	0	1	0	0
	x_4	0	1	0	0	0	1	1	0
	x_5	0	0	1	0	0	0	1	1
	x_6	0	0	0	0	1	0	0	1

Пример 8. **Разбить граф на плоские суграфы и определить толщину графа.**



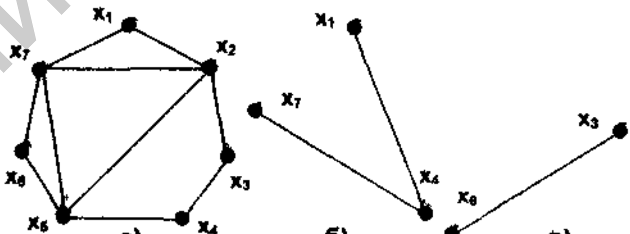
Решение

Первый шаг: удаляем из графа ребра на другую плоскость (рисунок б) для получения его плоского изображения (рисунок а).



а) б)

Второй шаг: из суграфа (рисунок б) удаляем ребра на следующую плоскость (рисунок в) для получения плоского изображения. Окончательный вариант разбиения графа на плоские суграфы - на рисунках а, б, в.

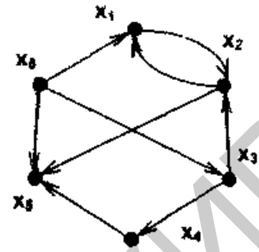


а) б) в)

Толщина графа m = 3

Пример 9. Для орграфа G(X,U):

1. Определить связность графа.
2. Записать матрицу длин.



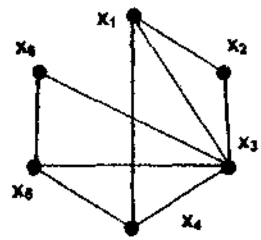
Решение

1. Граф несвязный, т.к. в вершину 6 попасть невозможно.

2. Матрица длин D имеет следующий вид:

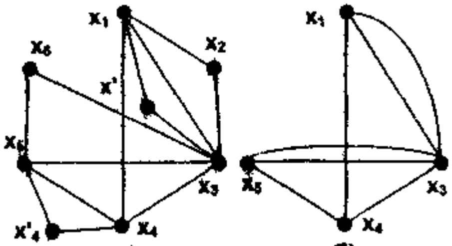
$$D = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ x_2 & 1 & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ x_3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \infty \\ x_4 & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & \infty \\ x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ x_6 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Пример 10. Для графа G(X,U) провести операцию сжатия и расширения.



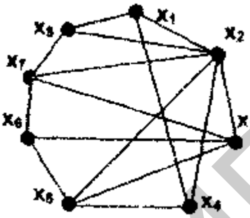
Решение

Операция расширения производится на ребрах, соединяющих вершины нечетной степени. Нечетную степень имеют вершины x_1, x_3, x_4, x_5. Операцию расширения производим на ребре, соединяющем вершины x_1 и x_3, и на ребре, соединяющем вершины x_4 и x_5 (рисунок **а**). Операция сжатия производится с вершинами степени 2, т.е. вершины x_2 и x_6 убираются и заменяются ребрами (рисунок **б**).



а) б)

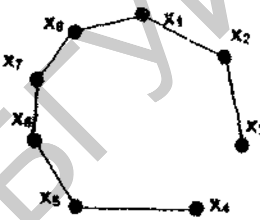
Пример 11. Для графа G(X,U) определить:



1 Цикломатическое число и построить дерево.
2 Хроматическое число
3 Число внутренней устойчивости.
4 Число внешней устойчивости.
5. Записать Гамильтонов цикл.

Решение

1 Цикломатическое число $\gamma(G) = k - n + p$,



где k *- число ребер;* n - число вершин; p - число компонент связности.

$\gamma(G) = 15 - 8 + 1 = 8$.

Дерево приведено на рисунке.

2. Хроматическое число.

Записываем матрицу смежности A.

$A =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	1	0	0	0	1
x_2	1	0	1	1	1	0	1	1
x_3	0	1	0	0	1	1	1	0
x_4	1	1	0	0	1	0	0	0
x_5	0	1	1	1	0	1	0	0
x_6	0	0	1	0	1	0	1	0
x_7	0	1	1	0	0	1	0	1
x_8	1	1	0	0	0	0	1	0

смежности

Из матрицы смежности получается три подмножества несмежных между собой вершин:

$X_1 = \{x_1, x_5, x_7\}$;
$X_2 = \{x_2, x_6\}$;
$X_3 = \{x_3, x_4, x_8\}$

Следовательно, хроматическое число $K(G) = 3$.

3. Число внутренней устойчивости: $\alpha(G) = 3$.

4. Число внешней устойчивости: $\beta(G) = 2$.

5. Гамильтонов цикл: x_1, x_2, x_8, x_7, x_3, x_6, x_5, x_4 и т д.

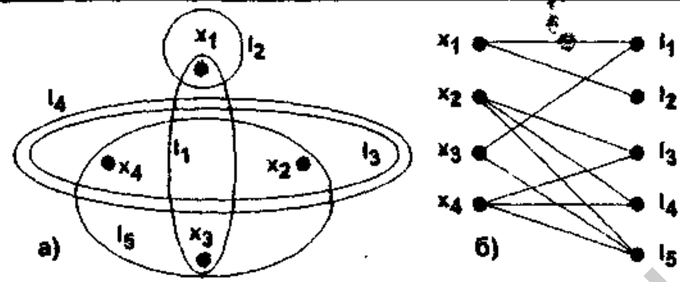
Пример 12. Дано: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$.

R = 1: $R(x_1,l_2)$; $R(x_1,l_1)$; $R(x_2,l_3)$; $R(x_2,l_4)$; $R(x_4,l_4)$; $R(x_3,l_1)$; $R(x_4,l_5)$; $R(x_3,l\ )$; $R(x_4,l_3)$; $R(x_2,l_5)$.

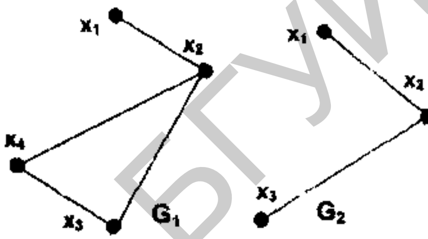
Построить гиперграф H(X,L,R) и граф Кенига K(H)

Решение

Гиперграф приведен на рисунке а, граф Кенига - на рисунке б:



Пример 13. Для графов $G_1(X_1,U_1)$ и $G_2(X_2,U_2)$ определить объединение, пересечение и вычитание графов.



Решение

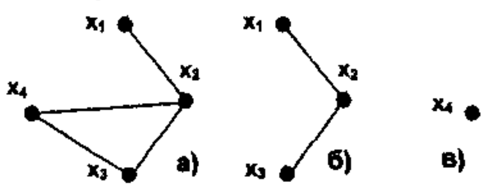
Записываем отображение смежных вершин для каждого графа:

$\Gamma_1 x_1 = \{x_2\}$; $\Gamma_2 x_1 = \{x_2\}$;
$\Gamma_1 x_2 = \{x_1,x_3,x_4\}$; $\Gamma_2 x_2 = \{x_1,x_3\}$;
$\Gamma_1 x_3 = \{x_2,x_4\}$; $\Gamma_2 x_3 = \{x_2\}$.
$\Gamma_1 x_4 = \{x_2,x_3\}$;

1. Объединение вершин и отображений двух графов:

$X = X_1 \cup X_2 = \{x_1,x_2,x_3,x_4\} \cup \{x_1,x_2,x_3\} = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$;
$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cup \Gamma_2 x_1 = \{x_2\} \cup \{x_2\} = \{x_2\}$;
$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cup \Gamma_2 x_2 = \{x_2,x_3,x_4\} \cup \{x_1,x_3\} = \{x_1,x_3,x_4\}$;
$\Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 \cup \Gamma_2 x_3 = \{x_2,x_4\} \cup \{x_2\} = \{x_2,x_4\}$;
$\Gamma x_4 = \Gamma_1 x_4 \cup \Gamma_2 x_4 = \{x_2,x_3,\} \cup \varnothing = \{x_2,x_3\}$.

Объединение двух графов показано на рисунке а.



2. Пересечение вершин и отображений двух графов:

$X = X_1 \cap X_2 = \{x_1,x_2,x_3,x_4\} \cap \{x_1,x_2,x_3\} = \{x_1,x_2,x_3\}$;
$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cap \Gamma_2 x_1 = \{x_2\} \cap \{x_2\} = \{x_2\}$;
$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cap \Gamma_2 x_2 = \{x_1,x_3,x_4\} \cap \{x_1,x_3\} = \{x_1,x_3\}$;

$\Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 \cap \Gamma_2 x_3 = \{x_2, x_4\} \cap \{x_2\} = \{x_2\}$.

Пересечение графов показано рисунке б.

3. Вычитание графов.

$X = X_1 \backslash X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \backslash \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_4\}$;
$\Gamma x_4 = X \cap \Gamma_1 x_4 = \{x_4\} \cap \{x_2, x_3\} = \varnothing$.

В результате вычитания получается нуль-граф с вершиной x_4 (рисунок в).

4.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Дано: множество вершин $X = \{x_1 ... x_7\}$ и множество ребер $U = \{u_{12}, u_{15}, u_{17}, u_{23}, u_{24}, u_{26}, u_{34}, u_{45}, u_{47}, u_{56}, u_{57}, u_{67}\}$.

Представить граф:

- графически;
- с помощью линейных алгебраических уравнений;
- отображением смежных вершин;
- с помощью инциденторов, равных 1.

Подсчитать количество инциденторов, равных 0, и определить степени всех вершин.

Задача 2. Дано: множество вершин $X = \{x_1 ... x_5\}$ и множество дуг $U = \{u_{12}, u_{23}, u_{43}, u_{45}, u_{51}, u_{52}, u_{53}\}$. Построить граф, записать отображение смежных вершин и степени всех вершин.

Задача 3. Дано множество вершин $X = \{x_1 ... x_3\}$ и множество ребер $U = \{u_{12}, u_{23}, u_{13}\}$. Записать инциденторы, равные 1 и равные 0.

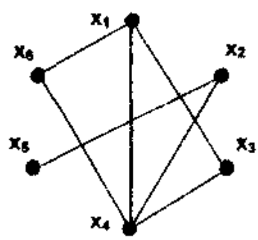
Задача 4. Для графа записать:

а) систему линейных алгебраических уравнений;

б) отображение смежных вершин;

в) инциденторы, равные 1;

г) степени вершин.



Задача 5. По заданной системе алгебраических уравнений построить неограф:

$$\begin{cases} x_1 = u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{16}x_6 \\ x_2 = u_{12}x_1 + u_{23}x_3 + u_{25}x_5 \\ x_3 = u_{13}x_1 + u_{23}x_2 + u_{34}x_4 + u_{56}x_6 \\ x_4 = u_{34}x_3 + u_{45}x_5 + u_{46}x_6 \\ x_5 = u_{25}x_2 + u_{45}x_4 + u_{56}x_6 \\ x_6 = u_{16}x_1 + u_{36}x_3 + u_{46}x_4 + u_{56}x_5 \end{cases}$$

Задача 6. Составить неограф по заданному отображению смежных вершин:

$$\begin{cases} \Gamma x_1 = \{x_2, x_3, x_4\} \\ \Gamma x_2 = \{x_1, x_3\} \\ \Gamma x_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\} \\ \Gamma x_4 = \{x_1, x_3, x_5\} \\ \Gamma x_5 = \{x_3, x_4\}. \end{cases}$$

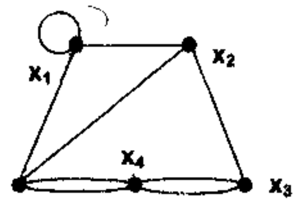
Задача 7. Составить неограф по заданным инциденторам, равным 1:

$R(x_1,u_{12})$; $R(x_1,u_{13})$; $R(x_1,u_{15})$; $R(x_4,u_{34})$; $R(x_4,u_{45})$;
$R(x_2,u_{12})$; $R(x_2,u_{23})$, $R(x_5,u_{15})$; $R(x_5,u_{35})$; $R(x_5,u_{45})$.
$R(x_3,u_{13})$; $R(x_3,u_{23})$; $R(x_3,u_{34})$; $R(x_3,u_{35})$;

Задача 8. Построить граф, однородный степени 3, при количестве вершин n = 6 и дополнение $\overline{G}$ к этому графу.

Задача 9. Для графа G(X,U) определить:

1. Разновидности графа.
2. Сумму степеней вершин.
3. Построить дополнение $\overline{G}$ и подграф, убрав вершины x_1 и x_2.
4. Построить граф, изоморфный данному.



Задача 10. Дан неограф: $X = \{x_1 \dots x_7\}$; $U = \{u_{12}, u_{17}, u_{24}, u_{25}, u_{13}, u_{35}, u_{36}, u_{47}, u_{57}, u_{67}\}$.

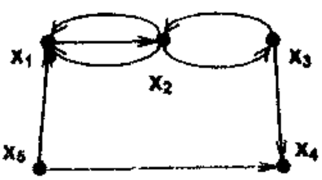
Построить граф Кенига и граф, изоморфный заданному.

Задача 11. Дано: $X = \{x_1 \dots x_9\}$; $U = \{u_{12}, u_{13}, u_{23}, u_{45}, u_{46}, u_{56}, u_{67}, u_{89}\}$.

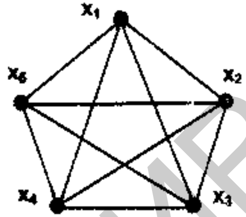
Построить неограф и определить:

1. Разновидности данного графа.
2. Ранг графа.

Задача 12. Для графа G(X,U) определить разновидности графа, полустепень захода и исхода всех вершин, мультичисло.



Задача 13. Для графа G(X,U):



1. Определить разновидности графа.

2. Что представляет собой дополнение $\overline{G}$ для данного графа?

3. Построить граф, изоморфный данному.

Задача 14. Построить все деревья для количества вершин n = 4.

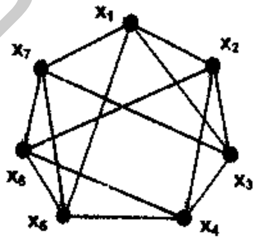
Задача 15. Дано: $X = \{x_1, ..., x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{16}, u_{13}, u_{25}, u_{34}, u_{46}, u_{56}\}$.

1. Построить неограф.

2. Записать Гамильтонов цикл.

3. Построить изоморфный граф и дополнение $\overline{G}$ к данному графу.

Задача 16. Для графа G(X,U):



1. Записать Эйлеров цикл.

2. Построить подграф, убрав вершины x_1, x_2, x_3.

3. Построить дерево.

4. Записать открытый маршрут, сложную цепь, 2 элементарных цикла.

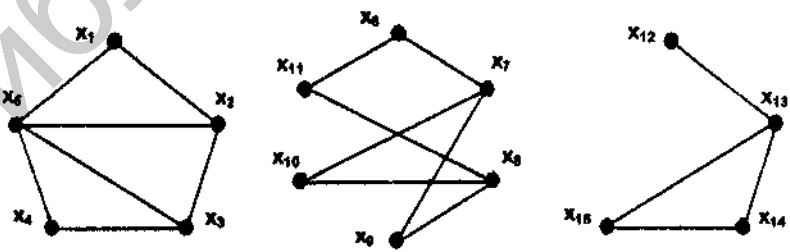
Задача 17. Дано: $X = \{x_1, ..., x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{16}, u_{25}, u_{36}, u_{15}, u_{34}, u_{45}\}$.

1. Построить неограф и дополнение $\overline{G}$ к данному графу.

2. Записать Гамильтонов цикл.

3. Записать элементарный цикл и простую цепь, длина которой равна 5.

Задача 18. Для графа G(X,U) построить лес:

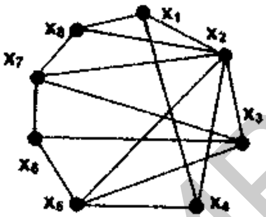


Задача 19. Для графа G(X,U):

1. Построить планарный граф.

2. Записать Гамильтонов цикл.

3. Построить матрицу длин.



Задача 20. Дано $X = \{x_1. .x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{13}, u_{23}, u_{34}, u_{36}, u_{45}, u_{46}, u_{56}\}$. Построить неограф и произвести операцию сжатия и расширения.

Задача 21. Дано $X = \{x_1...x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{16}, u_{23}, u_{25}, u_{34}, u_{36}, u_{45}, u_{46}\}$.

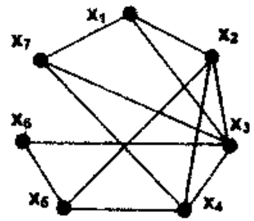
1. Построить неограф.

2. Определить наличие Гамильтонова и Эйлерова циклов (если есть - записать).

3. Записать матрицу смежности и инцидентности.

4. Построить планарный граф.

Задача 22. Разбить граф G(X,U) на плоские суграфы и определить толщину графа.



Задача 23. Дано $X = \{x_1...x_6\}$, $U = \{u_{12}, u_{16}, u_{23}, u_{34}, u_{35}, u_{36}, u_{45}, u_{46}\}$.

1. Построить неограф, изоморфный планарный граф.

2. Произвести операцию расширения.

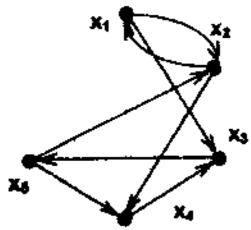
3. Записать матрицу длин и смежности.

Задача 24. Для орграфа G(X,U):

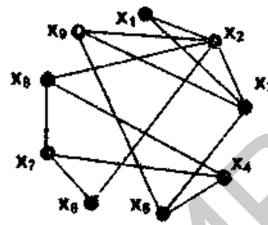
1. Записать матрицу длин.

2. Маршруты из вершины x_1 в вершину x_5.

3. Элементарный цикл.



Задача 25. Разбить граф на плоские суграфы.



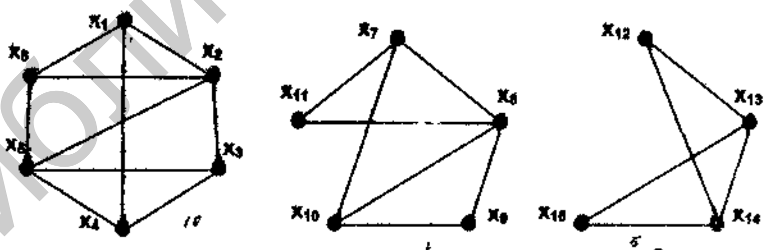
Задача 26. Для неографа : $X = \{x_1...x_6\}$; $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{23}, u_{26}, u_{34}, u_{45}, u_{56}\}$ определить:

1. Цикломатическое число и построить дерево.
2. Хроматическое число.
3. Число внутренней устойчивости.
4. Число внешней устойчивости.
5. Ядро графа.
6. Записать Гамильтонов цикл.

Задача 27. Дано $X= \{x_1...x_7\}$, $U = \{u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{23}, u_{25}, u_{37}, u_{46}, u_{47}, u_{56}\}$ построить неограф и определить:

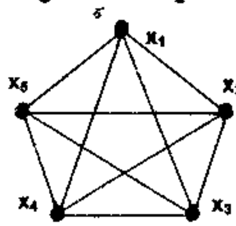
1. Цикломатическое число и построить дерево;
2. Хроматическое число;
3. Число внутренней устойчивости;
4. Число внешней устойчивости;
5. Ядро графа.

Задача 28. Определить цикломатическое число и построить лес для графа G(X,U):



Задача 29. Для графа определить:

1. Хроматическое число;
2. Число внутренней и внешней устойчивости.

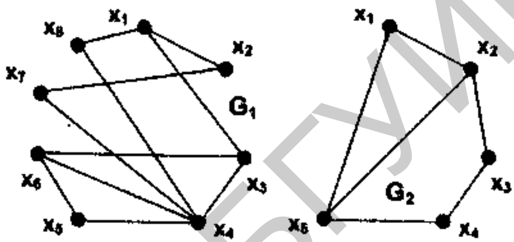


Задача 30. Построить гиперграф H(X,L,R) и граф Кенига K(H):

$X = \{x_1...x_7\}$, $L = \{l_1...l_8\}$.

$R(x,l) = 1$: $R(x_1,l_1)$; $R(x_2,l_1)$; $R(x_3,l_2)$; $R(x_4,l_5)$; $R(x_7,l_2)$; $R(x_2,l_8)$; $R(x_5,l_6)$; $R(x_6,l_7)$; $R(x_7,l_8)$; $R(x_5,l_3)$; $R(x_6,l_3)$; $R(x_1,l_7)$; $R(x_3,l_4)$; $R(x_6,l_4)$.

Задача 31. Найти и построить объединение, пересечение и вычитание графов $G_1(X_1,U_1)$ и $G_2(X_2,U_2)$.

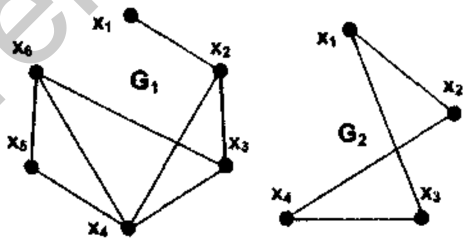


Задача 32. Определить пересечение и вычитание графов и построить их.

G_1: $X_1 = \{x_1...x_6\}$, $U_1 = \{u_{12}, u_{14}, u_{23}, u_{25}, u_{36}, u_{45}, u_{56}\}$.

G_2: $X_2 = \{x_1...x_4\}$, $U_2 = \{u_{12}, u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{34}\}$.

Задача 33. Найти и построить объединение, пересечение и вычитание графов $G_1(X_1,U_1)$ и $G_2(X_2,U_2)$.



Задача 34. Построить гиперграф H(X,L,R) и граф Кенига K(H):

$X = \{x_1...x_7\}$, $L = \{l_1...l_{10}\}$.

$R(x, l) = 1$: $R(x_1,l_2)$; $R(x_1,l_1)$; $R(x_2,l_3)$; $R(x_5,l_4)$; $R(x_3,l_1)$; $R(x_4,l_6)$; $R(x_3,l_4)$; $R(x_6,l_3)$; $R(x_5,l_7)$; $R(x_2,l_6)$; $R(x_3,l_5)$; $R(x_6,l_7)$; $R(x_4,l_5)$; $R(x_2,l_8)$; $R(x_3,l_8)$; $R(x_7,l_8)$; $R(x_7,l_9)$; $R(x_7,l_{10})$; $R(x_1,l_{10})$; $R(x_3,l_{10})$; $R(x_4,l_8)$.

5. ЛИТЕРАТУРА

1. Деньдобренко Б.Н., Малика А.С. Автоматизация конструирования РЭА: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1980.

2. Корячко В.П., Курейчик В.М., Норенков И.П. Теоретические основы САПР: Учебник для вузов. - М.: Энергоатомиздат, 1987.

3. Методические указания к практическим занятиям по курсу "Автоматизация конструкторского и технологического проектирования РЭС" для студентов специальности "Конструирование и технология РЭС" / И.И. Шпак, И.Л. Селезнёв, Н.С. Образцов и др.; Под ред. И.И. Шпака. Ч. 1 - Мн.: МРТИ, 1990.

4. Оре О. Теория графов. - М.: Наука, 1980.

5. САПР. Система автоматизированного проектирования.: Учебное пособие для технических вузов. В 9 книгах /Под ред. И.П. Норенкова. - М.: Высшая школа, 1986.

6. Селезнёв И.Л., Шпак И.И. Теоретические основы САПР: Учеб. пособие для студентов факультета компьютерного проектирования. В 3 ч. Ч 1 "Математические методы в проектировании". - Мн.: БГУИР, 1997.

7. Селезнёв И.Л., Шпак И.И. Теоретические основы САПР: Учеб. пособие для студентов факультета компьютерного проектирования. В 3 ч. Ч. 2 "Элементы информационного обеспечения". - Мн.: БГУИР, 1998.

8. Системы автоматизированного проектирования в радиоэлектронике: Справочник /Е.В. Авдеев, А.Т. Еремин, И.П. Норенков, М.И. Песков; Под ред И.П. Норенкова. - М.: Радио и связь, 1986.

9. Шпак И.И., Образцов Н.С., Боровиков С.М., Цырельчук Н.А. Математические методы моделирования конструкций и технологических процессов в САПР: Учеб. пособие по курсу "Математическое обеспечение конструкторского и технологического проектирования с применением САПР" для студентов специальностей "Конструирование и производство РЭА" и "Конструирование и производство ЭВА". - Мн.: МРТИ, 1989.

Св. план 1998, поз 2

Учебное издание

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям по курсу ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ САПР для студентов специальности Т08.01.00

Составители: СЕЛЕЗНЁВ Игорь Львович,
ШПАК Иван Ильич,
ТОЛСТАЯ Алла Ивановна,
ПОЛЕЩУК Елена Николаевна

Редактор Т.Н. Крюкова

Подписано в печать 01.07.98. Формат 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл.печ.л. 2,67.
Уч.-изд.л. 2,2. Тираж 200 экз. Заказ 426.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Отпечатано в БГУИР. Лицензия ЛП № 156. 220027, Минск, П Бровки, 6