Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

С.С. Смородинский   Н.В. Батин

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СЛАБОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по курсу "Методы и системы принятия решений"

для студентов специальности
"Автоматизированные системы обработки информации"

Минск 2002

УДК 519.816 (075.8)
ББК 22.18 Я 73
С 51

Рецензент: главный научный сотрудник научно-производственного унитарного предприятия СКБ “Камертон”, д-р техн. наук проф. Л.Н.Марков

Смородинский С.С., Батин Н.В. Методы анализа и принятия решений в слабоструктурированных задачах: Учеб. пособие по курсу “Методы и системы принятия решений” для студентов специальности “Автоматизированные системы обработки информации”. Мн.: БГУИР, 2002.- 116 с.
ISBN 985-444-385-X

В пособии приводится теоретический и практический материал, связанный с проблематикой принятия решений в автоматизированных системах обработки информации и управления (АСОИ).

Пособие рекомендуется студентам специальности АСОИ, изучающим перспективные компьютерные технологии принятия решений в задачах прогнозирования, планирования, диагностики, проектирования и управления. Пособие целесообразно использовать при изучении курса "Методы и системы принятия решений", а также в курсовом и дипломном проектировании. Пособие представляет интерес для специалистов, практическая деятельность которых связана с подготовкой и принятием экономико-управленческих решений.

УДК 519.816 (075.8)
ББК 22.18 Я 73

ISBN 985-444-385-X

СОДЕРЖАНИЕ

"Принятие решений - это специфический жизненно важный процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий."

Ларичев О.И., 2000 [1]

"В наши дни потери, вызванные ошибочными решениями, могут быть настолько велики, что способны поставить под угрозу не только благополучие и жизнь отдельных людей, но и само существование человеческого общества. В этих условиях полагаться только на опыт и интуицию при принятии решений недостаточно. Слишком велика может быть плата за возможные ошибки и просчеты."

Марков Л.Н., 2001 [8]

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии рассматриваются методы анализа и принятия решений в слабоструктурированных задачах прогнозирования, планирования, диагностики, проектирования и управления. Материал пособия дополняет содержание основных источников, обеспечивающих курс "Методы и системы принятия решений" [1, 21].

Слабоструктурированные задачи принятия решений "содержат как качественные, так и количественные элементы, причем качественные, малоизвестные и неопределенные стороны проблем имеют тенденцию доминировать" [1, с.65-66]. Слабоструктурированные задачи имеют следующие характерные особенности: неполное или нечеткое представление о предметной/проблемной области; неполное или нечеткое представление о внешних условиях проведения операций; большое количество конкурирующих альтернативных решений; большое количество разнородных критериев для оценки альтернатив; необходимость использования всей доступной объективной и субъективной информации при формировании матрицы векторных оценок; необходимость учета факторов риска, неопределенности и противодействия при реализации процедур многокритериального выбора рациональных решений и др.

К числу типичных слабоструктурированных задач относятся задачи управления в целенаправленных организационно-технических системах [3-7]. Управление может быть тактическим или стратегическим. Тактическое управление - это текущее оперативное управление, направленное на поддержание объекта управления на должном уровне. Стратегическое управление связано с коренными качественными изменениями объекта управления и выводом его на новый более высокий уровень. Стратегическое управление осуществляется практически в виде реализации соответствующего проекта по следующей схеме: 1) целевая ориентация на основе анализа проблемной ситуации и прогнозирования; 2) разработка планов, мероприятий и программ работ для достижения поставленной цели; 3) реализация, сопровождение и мониторинг намеченной программы преобразований; 4) контроль процесса преобразований и оценка эффективности объекта управления в новом состоянии. Таким образом, стратегическое управление реализует в сущности концепцию проектного управления, которая развивается в рамках нового научного направления - "управление проектами" (Project Management) [7].

Процесс управления можно представить в виде следующей концептуальной схемы: 1) определяется цель управления, т.е. желаемое состояние проводимой операции; 2) выявляется проблемная ситуация, т.е. расхождение между фактическим и желаемым состоянием операции; 3) выбирается или синтезируется управленческое решение, т.е. воздействие на объект управления, позволяющее разрешить проблемную ситуацию. Процесс управления состоит, в сущности, в подготовке, принятии, реализации и сопровождении управленческих решений на основе активного использования информационных ресурсов.

В учебном пособии рассматриваются методы анализа и принятия решений в условиях риска (раздел 1, [2, 12-16, 20]), методы анализа и оптимизации решений на основе эконометрических моделей (раздел 2, [2, 12, 17-19]), методы анализа и принятия решений на основе алгоритмов кластерного анализа и распознавания (раздел 3, [12, 18, 19]). Рекомендуемая студентам литература включает также источники по теории принятия решений [1-8] и перспективным средствам компьютерной поддержки принятия решений [9-11].

1. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1.1. Понятие риска при принятии решений. Источники и виды рисков

В зависимости от полноты информации об условиях принятия решения и его возможных последствиях, выделяют следующие виды задач принятия решений:

- принятие решений в условиях определенности: при выборе решения точно известны результаты реализации выбранного решения;
- принятие решений в условиях риска и неопределенности: результаты реализации решения заранее точно не известны.

Под *неопределенностью* понимается неполнота или неточность информации о внешних условиях, влияющих на эффективность решения. Под внешними условиями здесь понимаются любые факторы, на которые не может влиять лицо, принимающее решения (или возможность такого влияния ограничена): спрос на продукцию или услуги, цены на используемые в производстве материалы, действия конкурентов, природно-климатические условия и т.д. Причиной неопределенности может быть незнание некоторой информации, непредсказуемость действий людей (партнеров, конкурентов и т.д.), принципиальная непредсказуемость (например, изменение природных условий). Так как заранее точно не известны условия реализации решения, не могут быть заранее известны и результаты решения (прибыль, затраты, сроки реализации решения и т.д.).

Под *риском* понимается возможность каких-либо неблагоприятных последствий принятого решения: потери ресурсов, недополучения прибыли, возникновения дополнительных расходов, несвоевременного выполнения работ и т.д.

В табл.1.1 приведена классификация рисков по источникам их возникновения, а в табл.1.2 - классификация задач, связанных с принятием решений в условиях риска и неопределенности.

Таблица 1.1

Классификация рисков

Виды рисков	Описание
Хозяйственно-экономические	Риски, связанные с колебаниями спроса и предложения, изменениями цен и т.д.
Политико-экономические	Риски, связанные с изменениями экономического законодательства, политической ситуации.

Продолжение табл. 1.1

Виды рисков	Описание
Риски партнерства	Риски, связанные с неопределенностью целей, непредсказуемостью действий заинтересованных сторон.
Производственно-технологические	Риски, связанные с непостоянством характеристик работы оборудования, возможностью аварий, сбоев и т.д.
Риски противодействия	Риски, связанные с возможными действиями сознательного противника (например, конкурентов).
Природно-климатические	Риски, связанные с природными факторами (например, с изменениями погоды).

Таблица 1.2

Классификация задач принятия решений в условиях риска и неопределенности

Признак для классификации	Классы задач	Описание
Степень информированности о внешних условиях*	Задачи принятия решений при известных вероятностях внешних условий	Задачи, в которых для каждого варианта внешних условий можно найти вероятность (степень возможности) его реализации.
	Задачи принятия решений при неизвестных вероятностях внешних условий	Задачи, в которых есть лишь общие предположения о внешних условиях.
	Задачи принятия решений в условиях противодействия	Задачи, в которых основным источником риска являются действия сознательного противника.
Требования к виду решения	Задачи с выбором единственного решения	Задачи, в которых требуется выбрать только одно решение из нескольких возможных (пример: выбор проекта строительства предприятия).
	Задачи с выбором комбинации решений	Задачи, в которых требуется определить рациональное соотношение из возможных решений (примеры: определение ассортимента выпускаемой продукции; покупка пакета ценных бумаг; составление портфеля заказов).

*Примечание. Для задач принятия решений при известных вероятностях внешних условий часто применяется название “задачи принятия решений в условиях риска”, а при неизвестных внешних условиях – “задачи принятия решений в условиях неопределенности”

1.2. Общие принципы принятия решений в условиях риска и неопределенности

Существует несколько способов снижения риска. Эти способы могут быть направлены на компенсацию потерь, связанных с рискованными решениями, на ограничение величины таких потерь, на снижение их вероятности. Основные способы снижения риска следующие:

- диверсификация - выбор комбинации из нескольких решений. В этом случае можно рассчитывать, что если какое-либо из решений окажется неэффективным, то связанные с этим потери будут компенсированы за счет других решений. Пример использования этого способа снижения риска - выпуск нескольких видов продукции в условиях, когда спрос на продукцию не гарантирован. В этом случае можно рассчитывать, что хотя бы некоторые виды продукции будут пользоваться спросом;
- получение дополнительной информации. Примеры: дополнительные исследования рынка сбыта до начала выпуска новой продукции, проверка состояния предприятия при его обращении в банк для получения кредита. Как правило, получение дополнительной информации требует затрат;
- лимитирование - установление предельных величин расходов (денежных, материальных и других ресурсов) на реализацию рискованных решений;
- распределение риска между несколькими сторонами-участниками;
- страхование;
- самострахование - резервирование средств на компенсацию потерь в случае неудачной реализации принятых решений.

Так как эффективность решения зависит не только от самого решения, но и от состояния внешних условий, при принятии решения необходимо учитывать, какие варианты внешних условий более вероятны. Как правило, точно рассчитать вероятность вариантов внешних условий невозможно. Общие принципы оценки возможных внешних условий следующие:

- если задачи, подобные решаемой, многократно решались в прошлом, то можно оценить вероятности вариантов внешних условий на основе имеющихся данных. Например, если анализируются сведения о спросе на некоторый товар за период с 1983 по 2002 год (т.е. за 20 лет), и известно, что товар пользовался повышенным спросом в 1987, 1989, 1991, 1992, 1997 и 2000 году (т.е. 6 лет из 20), то можно считать, что вероятность повышенного спроса на этот товар составляет 6/20, или 0,3;

- в некоторых случаях можно получить экспертную оценку вероятностей внешних условий. Эксперт дает такую оценку на основе своих знаний, опыта и интуиции;
- если для оценки вероятностей внешних условий нет никаких данных, то во многих случаях при принятии решения можно предполагать, что все внешние условия одинаково возможны (равновероятны);
- при принятии особо ответственных решений, а также в случаях, когда требуется прежде всего избежать существенных потерь, во многих случаях предполагается, что внешние условия будут наихудшими (принцип крайнего пессимизма);
- если основным источником риска являются действия сознательного противника, то обычно предполагается, что противник будет действовать *наиболее выгодным для себя* образом.

1.3. Оценки эффективности и риска

Принятие решений в условиях риска включает следующие основные этапы: 1) качественный анализ - определение источников риска и стадий реализации решений, на которых возможен риск; 2) количественный анализ - оценка степени риска и выбор решения.

На этапе количественного анализа требуется использовать оценки (количественные меры) эффективности и риска.

Для оценки **эффективности** рискованных решений обычно применяются следующие величины:

- средняя эффективность;
- ожидаемая (наиболее вероятная) эффективность;
- пессимистическая и оптимистическая оценки эффективности;
- вероятность успешной реализации принятого решения.

В качестве оценок **риска** обычно используются следующие величины:

- дисперсия эффективности;
- среднеквадратическое отклонение эффективности (квадратный корень из дисперсии);
- коэффициент вариации эффективности (отношение среднеквадратического отклонения к средней эффективности);
- вероятность неблагоприятных результатов.

Могут использоваться и другие оценки эффективности и риска.

Для оценки ожидаемой эффективности и риска могут применяться следующие методы:

- экспертные методы: оценки эффективности и риска указываются экспертами на основе их опыта и интуиции;
- статистические методы: оценки эффективности и риска рассчитываются на основе данных о результатах принятия подобных решений в прошлом;
- аналитические методы: оценки эффективности и риска определяются путем расчетов на основе каких-либо математических методов (обычно – с использованием методов теории вероятностей);
- эмпирические методы: оценки эффективности и риска определяются на основе процедур, не имеющих строгого обоснования, однако неоднократно проверенных на практике;
- имитационные методы: оценки эффективности и риска определяются по результатам моделирования процессов реализации возможных решений и внешних условий. Обычно при этом применяется метод Монте-Карло. Имитационные методы, как правило, используются в случаях, когда применение других методов оказывается невозможным.

Приведем примеры определения оценок эффективности и риска.

Пример (оценка эффективности и риска на основе экспертного метода)**.** Предприятие предполагает начать выпуск нового изделия. Спрос на это изделие заранее точно не известен. Для оценки возможной величины прибыли от выпуска изделий, а также для оценки риска, связанного с его выпуском, проводится консультация с экспертом.

Экспертная оценка *эффективности* нового изделия может быть получена тремя способами.

Первый способ. Эксперту предлагается указать три оценки прогнозируемой эффективности: пессимистическую ($E_п$), наиболее вероятную ($E_{нв}$) и оптимистическую ($E_о$). Предлагается также указать вероятности того, что прогнозируемая величина примет эти значения: $P_п$, $P_{нв}$, $P_о$. При этом должно выполняться условие $P_п + P_{нв} + P_о = 1$. Ожидаемое значение прогнозируемой величины находится по формуле

$$E_{ож} = E_п \cdot P_п + E_{нв} \cdot P_{нв} + E_о \cdot P_о. \qquad (1.1)$$

Пусть эксперт указал, что в худшем случае (например, при низком спросе) прибыль от выпуска нового изделия составит 100 тыс. ден.ед; вероятность этого, по мнению эксперта, составляет 0,3 (или 30%). Наиболее вероятно, что прибыль составит примерно 130 тыс. ден.ед.; вероятность этого - 0,6. В самом лучшем случае (при высоком спросе) прибыль может составить 180 тыс. ден.ед; вероятность этого - 0,1.

Таким образом, экспертом указаны следующие оценки: $E_п$ = 100 тыс. ден.ед.; $E_{нв}$ = 130; $E_о$ = 180; $P_п$ = 0,3; $P_{нв}$ = 0,6; $P_о$ = 0,1. Прогнозируемая величина прибыли находится следующим образом:

$$E_{ож} = 100 \cdot 0{,}3 + 130 \cdot 0{,}6 + 180 \cdot 0{,}1 = 126 \text{ тыс. ден.ед.}$$

Второй способ. Эксперту предлагается указать только оценки эффективности: $E_п$, $E_{нв}$ и $E_о$. Ожидаемое значение эффективности находится по формуле

$$E_{ож} = (E_п + 2 \cdot E_{нв} + E_о)/4. \quad (1.2)$$

Для рассматриваемого примера ожидаемая величина прибыли находится следующим образом:

$$E_{ож} = (100 + 2 \cdot 130 + 180)/4 = 135 \text{ тыс. ден.ед.}$$

Третий способ. Эксперту предлагается указать только две оценки: пессимистическую $E_п$ и оптимистическую $E_о$. Ожидаемое значение прогнозируемой величины находится по формуле

$$E_{ож} = (3 \cdot E_п + 2 \cdot E_о)/5. \quad (1.3)$$

Для рассматриваемого примера:

$$E_{ож} = (3 \cdot 100 + 2 \cdot 180)/5 = 132 \text{ тыс. ден.ед.}$$

Примечание. Обычно используется третий способ, так как эксперту проще всего указать только пессимистическую и оптимистическую оценки.

На основе оценок эффективности, указанных экспертом, находятся оценки *риска*. В качестве таких оценок могут использоваться среднеквадратическое отклонение, дисперсия или коэффициент вариации. Среднеквадратическое отклонение находится по формуле

$$\sigma = (E_о - E_п)/5. \quad (1.4)$$

Для данного примера σ= (180-100)/5 = 16 тыс. ден.ед.

Дисперсия определяется по формуле

$$D = \sigma^2. \quad (1.5)$$

Для данного примера D=256 ден.ед.^{2}

Коэффициент вариации находится по формуле

$$\varepsilon = \sigma / E_{ож}. \tag{1.6}$$

Предположим, что для оценки эффективности был использован третий способ. Тогда ε = 16/132 =0,12.

Из формул (1.4) - (1.6) видно, что чем больше разность между оптимистической и пессимистической оценкой эффективности (т.е. *чем менее предсказуемой* является эффективность решения), тем больше среднеквадратическое отклонение, дисперсия и коэффициент вариации. Таким образом, чем больше эти величины, тем более рискованно данное решение. Для анализа и выбора решений чаще применяется коэффициент вариации, так как при его расчете учитывается как показатель риска (σ), так и эффективности ($E_{ож}$). Коэффициент вариации можно рассматривать как удельный риск (риск на единицу эффективности).

Пример (оценка эффективности и риска на основе статистического метода). В ходе составления плана производства на очередной год анализируются показатели сбыта некоторого изделия. Сведения об объеме сбыта этого изделия за последние 10 лет приведены в табл.1.3.

Таблица 1.3

Годы	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Объем сбыта, млн ден.ед.	18	25	24	19	16	20	21	14	23	17

Как видно из этих данных, объем сбыта изделия не был постоянным, а изменялся в зависимости от спроса. Поэтому объем сбыта изделия в очередном году также заранее не известен. Таким образом, решение о производстве данного изделия связано с риском.

В качестве оценки *эффективности* изделия можно использовать средний объем сбыта:

$$\overline{E} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_j , \tag{1.7}$$

где E_j – имеющиеся оценки эффективности (статистические данные);

N – количество имеющихся оценок.

Для данного примера $\overline{E}$ =19,7 млн ден.ед.

В качестве оценок риска могут использоваться дисперсия (D), среднеквадратическое отклонение (σ) или коэффициент вариации (ε), определяемые по формулам:

$$D = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(E_j - \overline{E})^2 ;$$

(1.8)

$$\sigma = \sqrt{D} ;$$

(1.9)

$$\varepsilon = \sigma / \overline{E} .$$

(1.10)

Для данного примера D=12,9 млн ден.ед.^{2}, σ=3,59 млн ден.ед., ε=0,18.

Эти меры риска отражают разброс имеющихся оценок эффективности (в данном примере – разброс значений объема сбыта в течение десяти лет). Таким образом, чем менее постоянной была эффективность данного решения в предыдущие периоды времени, тем выше риск.

Пример (оценка эффективности и риска на основе аналитического метода)**.** Для обеспечения нормальной работы металлургического предприятия требуется выполнить очистку 200 тонн сырья в сутки. Производительность очистного оборудования зависит от качества сырья и может составлять от 180 до 250 тонн в сутки.

На предприятие может поступать сырье разного качества, поэтому заранее точно не известно, сколько времени потребуется на его очистку. В качестве меры риска (и меры эффективности) в данной задаче следует использовать вероятность несвоевременной очистки сырья (т.е. вероятность того, что за сутки будет очищено менее 200 тонн сырья).

В данной задаче количество сырья, очищаемого в течение суток, представляет собой случайную величину, распределенную по равномерному закону в диапазоне от 180 до 250 тонн в сутки. Такая случайная величина описывается следующей плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 180 \\ \dfrac{1}{250-180} = \dfrac{1}{70}, & 180 \le x \le 250 \\ 0, & x > 250 \end{cases} .$$

Из теории вероятностей известно, что вероятность попадания случайной величины в некоторый диапазон равна интегралу от плотности распределения по этому диапазону. Найдем вероятность того, что будет очищено менее 200 тонн сырья, т.е. от 180 до 200 тонн:

$$P = \int_{180}^{200} \frac{1}{70} dx = 0{,}29.$$

Таким образом, оценка риска (вероятность несвоевременной очистки сырья) составляет 0,29, или 29%.

Пример (оценка риска на основе эмпирического метода)**.** Имеется возможность реализовать один из двух коммерческих проектов. При реализации первого проекта существует риск убытков в размере 1 млн ден.ед.; вероятность таких убытков – 10%. При реализации второго проекта возможны убытки в размере 3 млн ден.ед.; вероятность таких убытков – 5%.

Для оценки риска в случаях, когда известна величина возможных потерь и их вероятность, может применяться следующая формула:

$$R = 3{,}12 \cdot P_П + \lg U, \qquad (1.11)$$

где $P_П$ – вероятность потерь;
U – величина потерь.

Для рассматриваемых проектов оценки риска находятся следующим образом:

$R_1 = 3{,}12 \cdot 0{,}1 + \lg 1 = 0{,}312;$

$R_2 = 3{,}12 \cdot 0{,}05 + \lg 3 = 0{,}633.$

Таким образом, первый проект менее рискован, чем второй.

1.4. Методы принятия решений в условиях риска и неопределенности

Существует несколько классов методов принятия решений в условиях риска и неопределенности. Выбор метода решения конкретной задачи зависит от ряда факторов: объем и точность информации о внешних условиях, наличие опыта решения аналогичных задач в прошлом, возможность формализации задачи (т.е. построения ее математической модели) и т.д. Классификация методов принятия решений в условиях риска и неопределенности приведена в табл.1.4.

Как правило, практические задачи решаются на основе процедур, включающих методы различных классов.

Таблица 1.4

Классификация методов принятия решений в условиях риска и неопределенности

Классы методов	Описание	Применение
Экспертные	Решение принимается на основе экспертных оценок	Задачи с минимальным объемом информации о внешних условиях, неформализуемые задачи
Игровые	Решение применяется на основе методов теории игр	Задачи, в которых имеется возможность для каждого варианта решения оценить его возможные последствия в различных вариантах внешних условий.

Продолжение табл. 1.4

Классы методов	Описание	Применение
Статистические	Решение принимается на основе анализа результатов принятия аналогичных решений в прошлом	Задачи, решаемые многократно
Аналитические	Решение принимается путем расчетов на основе каких-либо математических методов (например, методов математического программирования, теории вероятностей и т.д.)	Задачи, для которых возможно построение достаточно полной математической модели
Методы на основе деревьев решений	Решение принимается на основе анализа всех возможных результатов принимаемых решений, а также вероятностей этих результатов	Задачи, в которых для каждого варианта решения можно указать все его возможные последствия, а также вероятности этих последствий
Методы на основе зон риска	Решение принимается на основе выявления возможных диапазонов потерь и их вероятностей	Задачи, для которых имеется возможность указать диапазоны допустимого, нежелательного и недопустимого риска
Имитационные методы	Решение принимается по результатам моделирования процессов реализации	Наиболее сложные задачи

	возможных решений и внешних условий (обычно – на основе метода Монте-Карло)	

1.5. Экспертные методы

При использовании этих методов решение принимается на основе оценок специалистов (экспертов), уже имеющих опыт принятия аналогичных решений.

Пример. Предприятие предполагает выпускать один из шести видов некоторых изделий (И1,И2,И3,И4,И5,И6). Спрос на изделия заранее точно не известен; поэтому невозможно заранее указать, какое изделие окажется более выгодным. Одновременный выпуск нескольких видов изделий невозможен. Требуется выбрать изделие, выпуск которого обеспечит получение средней прибыли не менее 4,5 млн ден.ед. в год при минимальном риске.

В данной задаче эффективность принятого решения (прибыль от производства изделия) зависит не только от самого решения (вид изделия), но и от внешних условий, т.е. от спроса на изделие. Поэтому данная задача связана с принятием решения в условиях риска и неопределенности.

В данной задаче отсутствуют сведения, на основе которых можно было бы спрогнозировать уровень спроса на изделия (такими сведениями могли бы быть, например, данные о спросе на аналогичные изделия в прошлом). Поэтому для решения задачи используется экспертный метод. Задача решается следующим образом.

Для каждого изделия находятся оценки эффективности и риска на основе экспертных оценок, как показано в подразделе 1.3. Пусть эксперт указал две оценки возможной прибыли от каждого вида изделий (в млн ден.ед.): пессимистическую ($E_п$) и оптимистическую ($E_о$). Экспертные оценки приведены в табл.1.5.

Таблица 1.5

Изделие	И1	И2	И3	И4	И5	И6
Пессимистическая оценка, млн ден.ед.	2	4	3	2	2	3
Оптимистическая оценка, млн ден.ед.	8	6	8	7	9	7

Здесь, например, эксперт считает, что производство изделия И1 в худшем случае (например, при низком спросе на это изделие) обеспечит прибыль около 2 млн ден.ед. В самом лучшем случае (при высоком спросе на изделие И1) прибыль может составить 8 млн ден.ед.

Так как эксперт указал для каждого решения две оценки, для определения ожидаемой эффективности используется формула (1.3). Например, для первого изделия ожидаемая эффективность находится следующим образом: $E_{ож1}=(3\cdot 2+ +2\cdot 8)/5 = 4{,}4$ млн ден.ед. Для остальных изделий: $E_{ож2} = 4{,}8$; $E_{ож3} = 5$; $E_{ож4} = 4$; $E_{ож5} = 4{,}8$; $E_{ож6} = 4{,}6$ млн ден.ед.

На основе экспертных оценок находится оценка риска для каждого варианта решения. В качестве оценки риска будем использовать коэффициент вариации. Для этого сначала определим величины среднеквадратического отклонения по формуле (1.4). Для данного примера $\sigma_1= (8-2)/5 = 1{,}2$ млн ден.ед.; $\sigma_2=0{,}4$; $\sigma_3 = 1$; $\sigma_4 = 1$; $\sigma_5 = 1{,}4$; $\sigma_6 = 0{,}8$.

Используя величины среднеквадратического отклонения и ожидаемой эффективности, найдем коэффициенты вариации по формуле (1.6): $\varepsilon_1 =1{,}2/4{,}4 = =0{,}27$; $\varepsilon_2 = 0{,}08$; $\varepsilon_3 = 0{,}2$; $\varepsilon_4 = 0{,}25$; $\varepsilon_5 = 0{,}29$; $\varepsilon_6 = 0{,}17$.

Смысл оценок риска, используемых в данной задаче, рассмотрен в подразделе 1.3.

На основе полученных оценок эффективности и риска принимается решение. Изделия И1 и И4 не могут быть выбраны, так как ожидаемая прибыль от их производства ($E_{ож}$) ниже заданной величины (4,5 млн ден.ед.). Из изделий И2, И3, И5, И6 выбирается изделие с минимальной оценкой риска (т.е. с минимальным коэффициентом вариации): это И2. Таким образом, предприятию рекомендуется выпускать изделие И2: это обеспечивает прибыль не ниже заданной величины при минимальном риске.

1.6. Игровые методы

Игровые методы применяются в случаях, когда для каждого варианта решения можно определить его результаты в каждом из возможных вариантов внешних условий.

Постановка задачи, решаемой игровыми методами, следующая. Требуется выбрать одно из M решений ($A_1,A_2,...,A_M$). Известно, что каждое из решений может быть реализовано в одном из N вариантов внешних условий ($B_1,B_2,...,B_N$). Для каждого из решений известны его последствия (выигрыши стороны, принимающей решение) в каждом из вариантов внешних условий: E_{ij}, i=1,...,M, j=1,...,N. Эти выигрыши можно свести в таблицу, называемую матрицей выигрышей (или платежной матрицей). Вид матрицы выигрышей показан в табл.1.6.

Таблица 1.6

	B_1	B_2	B_3	···	B_N
A_1	E_{11}	E_{12}	E_{13}	···	E_{1N}
A_2	E_{21}	E_{22}	E_{23}	···	E_{2N}
...	...	...	...	...	...
A_M	E_{M1}	E_{M2}	E_{M3}	···	E_{MN}

Примечание 1. В матрице выигрышей могут быть отрицательные элементы, соответствующие убыткам.

Примечание 2. В некоторых случаях вместо матрицы выигрышей используется матрица затрат. В этом случае элемент E_{ij} - это затраты, связанные с i-м решением в j-м варианте внешних условий.

Требуется выбрать решение (или комбинацию решений), обеспечивающее максимальный выигрыш.

В зависимости от требований к виду решения, а также от имеющейся информации о внешних условиях применяются различные игровые методы.

Выбор единственного решения

Если требуется выбрать только одно из возможных решений, то применяются методы игрового программирования на основе критериев Байеса, Вальда, Лапласа, Гурвица, Сэвиджа. Если вероятности внешних условий известны, то применяется критерий Байеса; если эти вероятности неизвестны, то используются другие критерии. Во многих случаях находятся решения на основе всех указанных критериев, а затем выбирается решение, оказавшееся лучшим по большинству критериев, или некоторое компромиссное решение.

Примечание. Задачи, связанные с выбором единственного решения на основе игровых методов, называются также “играми с природой”.

Рассмотрим решение таких задач на следующем примере.

Пример. Предприятие, выпускающее электроприборы бытового назначения, предполагает открыть центр технического обслуживания (ЦТО) для ремонта и наладки своей продукции. Предлагаются 4 варианта ЦТО, различающихся по количеству стендов для ремонта и наладки электроприборов: 5, 6, 7 или 8 стендов. Прибыль ЦТО зависит от количества заказов. Из опыта работы других ЦТО получены оценки возможной прибыли (в тыс ден.ед.) в зависимости от количества ремонтных стендов и потока заказов (табл.1.7).

Таблица 1.7

Количество стендов	Поток заказов (в год)		
	менее 5 тыс. шт.	от 5 до 7 тыс. шт.	более 7 тыс. шт.
5	150	180	200
6	120	200	240
7	80	180	250
8	50	160	260

Требуется выбрать количество стендов, при котором прибыль ЦТО будет максимальной.

В данной задаче роль внешних условий играет поток заказов, т.е. количество заказов на ремонт электроприборов, поступающих в ЦТО за год. Здесь имеется три варианта внешних условий. Очевидно, что влиять на поток заказов практически невозможно. Эффективность (прибыль) зависит как от принимаемого решения (количества стендов), так и от внешних условий (потока заказов). Видно, что при меньшем потоке заказов выгодно иметь небольшое количество стендов (чтобы они не простаивали); при большем потоке заказов требуется больше стендов (чтобы иметь возможность выполнить все заказы).

Таблица 1.7 представляет собой матрицу выигрышей.

Рассмотрим различные методы решения задачи в зависимости от имеющейся информации о внешних условиях.

Предположим, что имеются экспертные оценки **вероятностей внешних условий**. Вероятность того, что поток заказов составит менее 5000 заказов в год, оценивается руководством предприятия в 20%; вероятность поступления от 5 до 7 тыс. заказов - 70%, вероятность поступления более 7 тыс. заказов - 10%. В этом случае для оценки решений применяется критерий Байеса. Он может использоваться в двух видах: как критерий максимума среднего выигрыша или как критерий минимума среднего риска.

Если решение выбирается *по значениям выигрышей*, то для каждой альтернативы находится средняя оценка по всем вариантам внешних условий (средний выигрыш):

$$Z_{Бi} = \sum_{j=1}^{N} E_{ij} \cdot P_j, \quad i=1,...,M, \qquad (1.12)$$

где P_j - вероятности внешних условий.

Лучшей является альтернатива с максимальной оценкой.

Найдем оценки альтернатив для данной задачи: $Z_{Б1}$ = 150·0,2 + 180·0,7 + +200·0,1 = 176; $Z_{Б2}$ = 120·0,2 + 200·0,7 + 240·0,1 = 188; $Z_{Б3}$ = 167; $Z_{Б4}$ = 148. Таким образом, рекомендуется вариант ЦТО с шестью стендами.

В некоторых случаях для выбора решения используется *матрица рисков.* Под риском понимается потерянный выигрыш: разность между выигрышем, *максимально возможным для данного варианта внешних условий*, и фактическим выигрышем. Для данной задачи матрица рисков приведена в табл.1.8.

Таблица 1.8

Количество стендов	Поток заказов (в год)		
	менее 5 тыс. шт.	от 5 до 7 тыс. шт.	более 7 тыс. шт.
5	0	20	60
6	30	0	20
7	70	20	10
8	100	40	0

Здесь, например, для первого варианта внешних условий (менее 5 тыс. заказов в год) максимальный выигрыш достигается при использовании пяти стендов: этот выигрыш составляет 150 тыс. ден.ед. При использовании шести стендов выигрыш будет меньшим и составит только 120 тыс. ден.ед.; очевидно, при таком потоке заказов часть стендов будет простаивать. Потерянный выигрыш (риск) находится как 150 - 120 = 30 тыс. ден.ед.

Оценки альтернатив по критерию минимума среднего риска находятся по следующей формуле:

$$Z_{Бi} = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} \cdot P_j, \qquad i=1,...,M, \qquad (1.13)$$

где R_{ij} - величина риска, соответствующая i-му решению в j-м варианте внешних условий.

Лучшей является альтернатива с *минимальной* оценкой.

Оценки альтернатив для данной задачи: $Z_{Б1}$ = 0·0,2 + 20·0,7 + 60·0,1 = 20; $Z_{Б2}$ = 30·0,2 + 0·0,7 + 20·0,1 = 8; $Z_{Б3}$ = 29; $Z_{Б4}$ = 48. Таким образом, рекомендуется вариант ЦТО с шестью стендами.

Если **вероятности внешних условий неизвестны**, то для выбора решения могут применяться следующие критерии.

Критерий Лапласа: применяется, если можно предполагать, что все варианты внешних условий равновероятны. Для каждой альтернативы находится средняя оценка по всем вариантам внешних условий (средний выигрыш):

$$Z_{Лi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} E_{ij}, \qquad i=1,...,M. \tag{1.14}$$

Лучшей является альтернатива с максимальной оценкой.

Оценки альтернатив для данной задачи: $Z_{Л1}$=(150 + 180 + 200)/3 = 176,67; $Z_{Л2}$ = (120 + 200 + 240)/3 = 186,67; $Z_{Л3}$ = 170; $Z_{Л4}$ = 156,67. Таким образом, если есть основания предполагать, что все три варианта потоков заказов (менее 5 тыс. в год, от 5 до 7 тыс. и свыше 7 тыс.) одинаково вероятны, то следует открыть ЦТО с шестью ремонтными стендами.

Критерий Вальда (критерий крайнего пессимизма): решение выбирается в расчете на *наихудшие внешние условия*. В качестве оценки каждой альтернативы используется минимальный выигрыш, который можно получить при выборе данной альтернативы:

$$Z_{Bi} = \min_{j} E_{ij}, \qquad i=1,...,M. \tag{1.15}$$

Лучшей является альтернатива с максимальной оценкой.

В данном примере Z_{B1} = min(150; 180; 200)=150; Z_{B2} = 120; Z_{B3} = 80; Z_{B4} = 50. Таким образом, рекомендуется вариант ЦТО с пятью стендами.

Примечание. В данной задаче для всех альтернатив наихудшим является один и тот же вариант внешних условий (минимальный поток заказов). Однако необходимо учитывать, что в большинстве задач для *разных* альтернатив наихудшими являются *разные* варианты внешних условий.

Критерий Сэвиджа (критерий крайнего пессимизма)**:** решение принимается в расчете на наихудшие внешние условия (как и при использовании критерия Вальда), но для оценки альтернатив используется матрица рисков. В качестве оценки используется максимальный риск (максимальный потерянный выигрыш), соответствующий данной альтернативе:

$$Z_{Ci} = \max_{j} R_{ij}, \qquad i=1,...,M. \tag{1.16}$$

Лучшей является альтернатива с *минимальной* оценкой.

В данном примере Z_{C1} = max(0; 20; 60)=60; Z_{C2} = max(30; 0; 20)=30; Z_{C3} = = 70; Z_{C4}=100. Таким образом, рекомендуется вариант ЦТО с шестью стендами.

Критерий Гурвица: решение принимается с учетом того, что возможны как благоприятные, так и неблагоприятные внешние условия. При использовании этого критерия требуется указать “коэффициент пессимизма” - число (в диапазоне от 0 до 1), представляющее собой субъективную оценку возможности неблагоприятных внешних условий. Если есть основания предполагать, что внешние условия будут неблагоприятными, то коэффициент пессимизма назначается близким к единице. Если неблагоприятные внешние условия маловероятны, то используется коэффициент пессимизма, близкий к нулю. Оценки альтернатив находятся по следующей формуле:

$$Z_{\Gamma i} = a \cdot \min_j E_{ij} + (1 - a) \cdot \max_j E_{ij}, \quad i=1,\ldots, M, \tag{1.17}$$

где a - коэффициент пессимизма.

Лучшей является альтернатива с максимальной оценкой.

Пусть при выборе варианта ЦТО требуется в равной степени учесть возможность как благоприятных, так и неблагоприятных внешних условий. Для этого выберем коэффициент пессимизма a=0,5. Найдем оценки альтернатив: $Z_{\Gamma 1} = 0{,}5 \cdot 150 + 0{,}5 \cdot 200 = 175$; $Z_{\Gamma 2} = 0{,}5 \cdot 120 + 0{,}5 \cdot 240 = 180$; $Z_{\Gamma 3}$ = 165; $Z_{\Gamma 4}$ = 155. Таким образом, рекомендуется вариант ЦТО с шестью стендами.

С учетом всех использованных критериев, лучшим решением является открытие ЦТО с шестью ремонтными стендами. Это решение оказалось лучшим по большинству критериев (Лапласа, Сэвиджа и Гурвица); решение по критерию Вальда также близко к нему.

Во многих случаях достаточно сложной задачей является расчет матрицы выигрышей (или затрат). Рассмотрим задачу, в которой такой расчет требуется.

Пример. Требуется определить количество строительного материала, необходимого для укрепления стен при строительстве туннеля. Расход материала зависит от состояния грунта, в котором прокладывается туннель. Рассчитано, что для прокладки туннеля в легком грунте потребуется 60 тонн строительного материала, для тяжелого грунта – 80 тонн, для особо тяжелого – 110 тонн. Состояние грунта не может быть точно определено заранее. Цена строительного материала составляет 8 тыс. ден.ед. за тонну. Если будет закуплено недостаточное количество материала, то недостающий материал потребуется срочно закупать во время строительства. Однако из-за срочности закупки цена материала составит 15 тыс. ден.ед. за тонну. Продать лишний строительный материал достаточно сложно. С учетом всех указанных факторов требуется найти, сколько материала следует закупить перед началом строительства.

В данной задаче имеется три варианта внешних условий: легкий, тяжелый или особо тяжелый грунт (имеет место производственно-технологический риск). Из-за того, что состояние грунта на всем участке строительства не может быть точно определено заранее, неизвестно и количество строительного материала, которое потребуется в ходе строительства (а значит - и затраты на него). В данной задаче будем рассматривать три возможных решения: закупка материала в расчете на легкий, тяжелый и особо тяжелый грунт.

Выполним расчет матрицы затрат.

Пусть принято решение - закупить материал в расчете на легкий грунт (т.е. 60 тонн). Затраты составят $60 \cdot 8 = 480$ тыс. ден.ед. Если грунт на всем участке строительства туннеля окажется легким, то дополнительные затраты не потребуются. Если грунт окажется тяжелым, то потребуется дополнительно закупить 20 тонн материала по цене 15 тыс. ден.ед.; общие затраты составят $480 + +20 \cdot 15 = 780$ тыс. ден.ед. Если грунт окажется особо тяжелым, то потребуется дополнительно закупить 50 тонн материала по цене 15 тыс. ден.ед.; общие затраты в этом случае составят $480+50 \cdot 15 =$ 1 млн 230 тыс. ден.ед.

Пусть принято решение - закупить материал в расчете на тяжелый грунт (т.е. 80 тонн). Затраты составят $80 \cdot 8 = 640$ тыс. ден.ед. Если грунт окажется легким или тяжелым, то дополнительные затраты не потребуются (причем если на всем участке строительства грунт окажется легким, то 20 тонн материала останутся неизрасходованными). Если грунт окажется особо тяжелым, то потребуется дополнительно закупить 30 тонн по цене 15 тыс. ден.ед.; общие затраты в этом случае составят $640+30 \cdot 15 =$ 1 млн 90 тыс. ден.ед.

Пусть принято решение - закупить материал в расчете на особо тяжелый грунт (т.е. 110 тонн). Затраты составят $110 \cdot 8 = 880$ тыс. ден.ед. Такого количества материала достаточно для прокладки туннеля в любом грунте.

Матрица затрат (в тысячах ден.ед.) приведена в табл. 1.9.

Таблица 1.9

Закупка стройматериала, тонн	Характеристика грунта		
	легкий	тяжелый	особо тяжелый
60	480	780	1230
80	640	640	1090
110	880	880	880

Пусть по результатам исследования места строительства установлено, что на местности, где будет прокладываться туннель, примерно 40% составляют участки с легким грунтом, 50% - с тяжелым, 10% - с особо тяжелым. Так как имеются оценки вероятностей состояний внешних условий, можно использовать критерий Байеса. Найдем оценки решений: $Z_{Б1} = 480\cdot0{,}4 + 78\cdot0{,}5 + 1230\cdot0{,}1 = 705$; $Z_{Б2} = 640\cdot0{,}4 + 640\cdot0{,}5 + +1090\cdot0{,}1 = 685$; $Z_{Б3} = 880\cdot0{,}4 + 880\cdot0{,}5 + 880\cdot0{,}1 = 880$. Лучшим является решение с *минимальной* оценкой (так как расчет выполняется по значениям *затрат*). Таким образом, лучшее решение - закупить 60 тонн строительного материала.

Предположим, что оценки вероятностей состояния грунта отсутствуют (или недостаточно достоверны). Найдем решения на основе критериев, для которых не требуется использовать вероятности внешних условий. При этом необходимо учитывать, что в данной задаче для оценки решений используется матрица *затрат* (а не выигрышей).

Критерий Лапласа: $Z_{Л1} = (480 + 780 + 1230)/3 = 830$; $Z_{Л2} = (640 + 640 + +1090)/3 = 790$; $Z_{Л3} = (880 + 880 + 880)/3 = 880$. Лучшее решение - закупить 80 тонн строительного материала.

Критерий Вальда: $Z_{В1} = \max(480, 780, 1230) = 1230$; $Z_{В2} = 1090$; $Z_{В3} = = 880$. Лучшее решение - закупить 110 тонн строительного материала.

Критерий Гурвица: пусть по результатам исследования участка строительства установлено, что большая часть туннеля будет проложена в легком и тяжелом грунте, и только незначительная часть – в особо тяжелом. Таким образом, вероятность неблагоприятных внешних условий невелика. Используем коэффициент пессимизма a=0,3. Найдем оценки решений: $Z_{Г1} = 0{,}3\cdot1230 + + 0{,}7\cdot480 = 705$; $Z_{Г2} = 0{,}3\cdot1090 + 0{,}7\cdot640 = 775$; $Z_{Г3} = 0{,}3\cdot880 + 0{,}7\cdot880 = 880$. Лучшее решение - закупить 60 тонн строительного материала.

Таким образом, с учетом всех использованных критериев следует выбрать компромиссное решение: закупить 80 тонн строительного материала.

Выбор комбинации решений

При выборе решений в условиях риска, как правило, каждая альтернатива наиболее эффективна при каком-то определенном варианте внешних условий, причем для разных вариантов внешних условий наиболее эффективными являются разные альтернативы. Поэтому во многих случаях следует не выбирать какое-то одно из возможных решений, а использовать комбинацию решений, которая окажется достаточно эффективной при любом варианте внешних условий.

При решении таких задач обычно применяется **приближенный метод** решения задач игрового программирования. Метод основан на многократном выборе решений из матрицы выигрышей (или матрицы затрат). Каждое очередное решение выбирается следующим образом: 1) с учетом опыта предыдущих решений; 2) в расчете на *худшие* внешние условия. Затем определяется, насколько часто оказывалось лучшим каждое из решений, и находится рациональная комбинация решений.

Пример. Сельскохозяйственное предприятие предполагает на 2000 гектаров выращивать пшеницу двух сортов (С1 и С2). Урожай зависит от погодных условий (особенно - от погоды в летнее время). Из опыта выращивания этих сортов пшеницы приближенно известно, какую прибыль получит предприятие от продажи урожая, если оно будет выращивать только один из сортов на всей имеющейся площади (2000 га). Значения прибыли (млн ден.ед.) приведены в табл.1.10.

Требуется определить, какую площадь следует выделить для выращивания пшеницы каждого сорта.

Таблица 1.10

Сорт пшеницы	Погода в летнее время					
	жаркая сухая	жаркая влажная	теплая сухая	теплая влажная	прохладная сухая	прохладная влажная
С1	9	7	8	4	5	3
С2	5	1	3	3	9	6

Здесь, например, указано, что если предприятие использует все 2000 га под пшеницу сорта С1, и погода летом окажется жаркой и сухой, то прибыль предприятия от продажи урожая составит 9 млн ден.ед.

В данной задаче источником риска являются погодные условия, которые не могут быть известны заранее; таким образом, имеет место природно-климатический риск. Из табл.1.10 (матрицы выигрышей) видно, например, что в жаркую и теплую погоду больший урожай дает пшеница сорта С1, в прохладную - С2. Поэтому имеет смысл выращивать пшеницу обоих сортов, чтобы получить прибыль при любых погодных условиях.

Для краткости обозначим варианты внешних условий (жаркое сухое лето, жаркое влажное и т.д.) как В1, В2,...,В6.

Рассмотрим решение задачи на основе приближенного метода.

1. Для каждого из возможных решений находится величина выигрыша при худших (для данного решения) внешних условиях, т.е. минимальный выигрыш. В данном примере для пшеницы сорта С1 минимальный выигрыш равен 3 млн ден.ед. (этот выигрыш будет достигнут, если на всех 2000 га будет выращиваться только пшеница С1, и погода летом окажется прохладной и влажной). Для пшеницы С2 минимальный выигрыш равен 1 млн ден.ед. (если выращивается только пшеница С2, и лето оказывается жарким и влажным).

2. Выбирается решение, обеспечивающее максимальный выигрыш в худших условиях. В данном случае это решение - выращивание пшеницы С1.

3. Для выбранного решения определяется худший вариант внешних условий (т.е. вариант условий, при котором выигрыш от данного решения минимален). В данном примере этот вариант - В6 (прохладная влажная погода). Для этого варианта внешних условий определяются возможные выигрыши (для всех возможных решений). В данном случае это 3 (при выборе пшеницы С1) или 6 (при выборе С2).

4. Предполагается, что и при выборе следующего решения внешние условия будут такими же (в данном случае - В6). Для предполагаемого варианта условий выбирается решение, обеспечивающее максимальный выигрыш. В данном случае это решение - выращивание пшеницы сорта С2 (для внешних условий В6 она обеспечивает выигрыш в 6 млн ден.ед., а С1 - только 3 млн).

Ход выбора решения записывается в таблицу (табл.1.11).

Таблица 1.11

№	Решение	Возможные выигрыши, млн ден.ед.						Худший вариант внешних условий	Возможные выигрыши, млн ден.ед.	
		В1	В2	В3	В4	В5	В6		С1	С2
1	С1	9	7	8	4	5	3	В6	3	6
2	С2									

5. Для выбранного решения (в данном случае - для С2) находятся возможные суммарные выигрыши от данного решения (эти величины берутся из матрицы выигрышей, приведенной в табл.1.10) и от *всех предыдущих* решений (берутся из табл.1.11). Эти выигрыши находятся для всех возможных вариантов внешних условий: 9+5=14, 7+1=8,...,3+6=9. Суммарные выигрыши заносятся в таблицу (табл.1.12).

Таблица 1.12

№	Решение	Возможные выигрыши, млн ден.ед.						Худший вариант внешних условий	Возможные выигрыши, млн ден.ед.	
		В1	В2	В3	В4	В5	В6		С1	С2
1	С1	9	7	8	4	5	3	В6	3	6
2	С2	14	8	11	7	14	9			

6. Для выбранной последовательности решений (сначала С1, затем С2) находится худший вариант внешних условий. Для этого из суммарных выигрышей, найденных на шаге 5 (см. табл.1.12), выбирается минимальный выигрыш. В данном примере он равен 7 и соответствует варианту внешних условий В4 (теплая влажная погода).

7. Для выбранного *и всех предыдущих* вариантов внешних условий находятся суммарные возможные выигрыши при каждом из решений. Возможные выигрыши для выбранного варианта внешних условий берутся из матрицы выигрышей (в данном примере эти выигрыши составляют 4 и 3), для предыдущих вариантов внешних условий - из табл.1.12 (в данном примере - 3 и 6).

Для решения С1 суммарный возможный выигрыш равен 3+4=7, для С2 - 6+3=9. Таким образом, максимальный выигрыш достигается при выборе решения С2; оно выбирается в качестве очередного решения. Ход выбора решения заносится в таблицу (табл.1.13).

Таблица 1.13

№	Решение	Возможные выигрыши, млн ден.ед.						Худший вариант внешних условий	Возможные выигрыши, млн ден.ед.	
		В1	В2	В3	В4	В5	В6		С1	С2
1	С1	9	7	8	4	5	3	В6	3	6
2	С2	14	8	11	7	14	9	В4	7	9

8. Шаги 6-7 повторяются многократно. В табл. 1.14 приведены результаты десяти итераций.

Таблица 1.14

№	Решение	Возможные выигрыши, млн ден.ед.						Худший вариант внешних условий	Возможные выигрыши, млн ден.ед.	
		B1	B2	B3	B4	B5	B6		C1	C2
1	C1	9	7	8	4	5	3	B6	3	6
2	C2	14	8	11	7	14	9	B4	7	9
3	C2	19	9	14	10	23	15	B2	14	10
4	C1	28	16	22	14	28	18	B4	18	13
5	C1	37	23	30	18	33	21	B4	22	16
6	C1	46	30	38	22	38	24	B4	26	19
7	C1	55	37	46	26	43	27	B4	30	22
8	C1	64	44	54	30	48	30	B4	34	25
9	C1	73	51	62	34	53	33	B6	37	31
10	C1									

Например, на третьей итерации значения возможных выигрышей для решения C2 получены как суммы возможных выигрышей от предыдущих решений (14, 8, 11, 7, 14, 9) и от решения C2 (5, 1, 3, 3, 9, 6): 19=14+5; 9=8+1; 14=11+3; 10 = 7+3; 23 = 14+9; 15 = 9+6. Наихудший вариант внешних условий - B2 (при нем выигрыш минимален и равен 9). Возможные варианты выигрыша при этом варианте внешних условий - 7 (если будет выбрано решение C1) или 1 (если будет выбрано решение C2); эти величины взяты из матрицы выигрышей, приведенной в табл.1.10. Суммарные возможные выигрыши при данном варианте внешних условий (с учетом предыдущих решений) следующие: 14 = 7+7; 10 = 9+1. Лучшее решение - C1, так как оно обеспечивает больший выигрыш, равный 14 (решение C2 обеспечивает выигрыш, равный 10).

9. Находятся частоты (вероятности) выбора каждого из решений:

$P_i = F_i/F, \qquad i=1,...,M,$

где F - общее количество итераций (в данном примере F=10);

F_i - количество случаев, когда было выбрано i-е решение.

В данном примере сорт пшеницы C1 был выбран в восьми из десяти случаев, сорт C2 - в двух из десяти. Поэтому P_1 = 8/10 = 0,8; P_2 = 2/10 = 0,2.

10. На основе частот выбора отдельных решений определяется рациональная комбинация решений.

В данном случае сельскохозяйственному предприятию выгодно использовать 80% площади под пшеницу сорта C1, и 20% - под C2. Так как всего имеется 2000 гектаров, следует использовать 0,8·2000 = 1600 гектаров под пшеницу сорта C1, и 400 - под C2.

Приведем пример задачи, в которой матрица выигрышей заранее не известна, и ее требуется рассчитать.

Пример. Предприятие выпускает два вида скоропортящихся продуктов: пирожки (П) и мороженое (М). Затраты предприятия на приготовление одного пирожка составляют 1 ден.ед., на одну порцию мороженого - 2 ден.ед. Пирожки продаются по цене 3 ден.ед., мороженое - по 5 ден.ед. Спрос на продукты зависит от погодных условий: в теплую погоду повышается спрос на мороженое и снижается спрос на пирожки, в прохладную погоду - наоборот. Из предыдущего опыта работы предприятия известны примерные объемы реализации продуктов (штук в день) в зависимости от погодных условий; они приведены в табл.1.15.

Таблица 1.15

Продукт	Погода	
	теплая	прохладная
Пирожки	1000	4000
Мороженое	6000	2000

Требуется найти, сколько продукции каждого вида следует выпускать предприятию.

Рассмотрим два возможных решения: 1) выпуск продукции в расчете на теплую погоду, т.е. 1000 пирожков и 6000 порций мороженого; 2) выпуск продукции в расчете на прохладную погоду, т.е. 4000 пирожков и 2000 порций мороженого. Обозначим эти решения как A1 и A2 соответственно. Так как погода не может быть точно известна заранее, предприятию не следует выбирать одно из этих решений; очевидно, например, что если будет выпущена продукция в расчете на теплую погоду, а погода окажется прохладной, то значительная часть продукции не будет реализована. Поэтому следует выбрать некоторое “промежуточное” решение.

Составим матрицу выигрышей.

Предположим, что выбрано решение A1, т.е. выпущено 1000 пирожков и 6000 порций мороженого. Затраты предприятия составят $1 \cdot 1000 + 2 \cdot 6000 = 13000$ ден.ед. Если погода окажется теплой, то будет продана вся продукция. Прибыль предприятия составит $3 \cdot 1000 + 5 \cdot 6000 - 13000 = 20000$ ден.ед. Если погода окажется прохладной, то будет продано 1000 пирожков (хотя есть спрос на 4000, но выпушено только 1000) и 2000 порций мороженого (еще 4000 порций останутся нереализованными). Прибыль предприятия составит $3 \cdot 1000 + 5 \cdot 2000 - 13000 = 0$, т.е. предприятие сможет только окупить затраты на выпуск продукции.

Предположим, что выбрано решение А2, т.е. выпущено 4000 пирожков и 2000 порций мороженого. Затраты предприятия составят $1\cdot4000 + 2\cdot2000 = 8000$ ден.ед. Если погода окажется теплой, то будет продано 1000 пирожков (еще 3000 останутся нереализованными из-за отсутствия спроса) и все 2000 порций мороженого. Прибыль предприятия составит $3\cdot1000 + 5\cdot2000 - 8000 = = 5000$ ден.ед. Если погода окажется прохладной, то будет продана вся продукция. Прибыль предприятия в этом случае составит $3\cdot4000 + 5\cdot2000 - 8000 = = 14\,000$ ден.ед.

Матрица выигрышей (в тысячах ден.ед) приведена в табл.1.16.

Таблица 1.16

Решение	Погода	
	теплая	прохладная
А1	20	0
А2	5	14

Решим задачу, используя приближенный метод. Ход решения приведен в табл.1.17.

Таблица 1.17

№	Решение	Возможные выигрыши, тыс. ден.ед.		Худший вариант внешних условий	Возможные выигрыши, тыс. ден.ед.	
		теплая	прохладная		А1	А2
1	А2	5	14	В1	20	5
2	А1	25	14	В2	20	19
3	А1	45	14	В2	20	33
4	А2	50	28	В2	20	47
5	А2	55	42	В2	20	61
6	А2	60	56	В2	20	75
7	А2	65	70	В1	40	80
8	А2	70	84	В1	60	85
9	А2	75	98	В1	80	90
10	А2					

Таким образом, решение А1 (выпуск 1000 пирожков и 6000 порций мороженого) было выбрано в двух случаях из десяти. Решение А2 (выпуск 4000 пирожков и 2000 порций мороженого) было выбрано в восьми случаях из десяти. Находятся частоты выбора решений: $P_1 = 2/10 = 0{,}2$; $P_2 = 8/10 = 0{,}8$.

Находятся объемы выпуска каждого вида продукции. Так как с вероятностью 0,2 (в 20% случаев) выгодным оказывается выпуск 1000 пирожков, а в 80% случаев - 4000, то количество выпускаемых пирожков должно составлять $1000\cdot0{,}2 + 4000\cdot0{,}8 = 3400$. Аналогично находится количество порций мороженого: $6000\cdot0{,}2 + 2000\cdot0{,}8 = 2800$.

Таким образом, предприятию следует выпустить 3400 пирожков и 2800 порций мороженого.

1.7. Статистические методы

Статистические методы анализа и принятия решений могут применяться, если аналогичные решения уже принимались многократно, и имеются сведения об эффективности этих решений. Статистические методы основаны на анализе результатов принятия аналогичных решений в прошлом.

Как и при использовании других методов, процедуры выбора решения зависят от того, требуется ли выбрать только одно решение, или имеется возможность выбрать комбинацию решений.

Выбор единственного решения

Пример. Предприятие предполагает вложить денежные средства в закупку ценных бумаг. Имеется возможность купить три вида ценных бумаг (ЦБ1, ЦБ2, ЦБ3), причем предприятие имеет возможность приобрести ценные бумаги *только одного вида*. Имеются сведения об этих ценных бумагах за четыре месяца (табл.1.18). В таблице приведены цены, по которым можно было приобрести ценные бумаги в начале каждого месяца, дивиденды за месяц и цены, по которым можно было продать ценные бумаги в конце каждого месяца (в денежных единицах).

Требуется определить, какие ценные бумаги следует приобрести, чтобы их покупка обеспечила предприятию прибыль не менее 1,15 ден.ед. на каждую вложенную денежную единицу при минимальном риске.

В данной задаче риск состоит в том, что параметры ценных бумаг (цена покупки, дивиденды и цена продажи) не постоянны, а изменяются в зависимости от многих факторов. Поэтому при покупке ценной бумаги невозможно точно знать, какими будут дивиденды, и по какой цене можно будет продать эту ценную бумагу.

Таблица 1.18

	Первый месяц			Второй месяц			Третий месяц			Четвертый месяц		
	ЦБ1	ЦБ2	ЦБ3	ЦБ1	ЦБ2	ЦБ3	ЦБ1	ЦБ2	ЦБ3	ЦБ1	ЦБ2	ЦБ3
Покупка в начале месяца	1200	2000	1000	1200	2500	700	1600	2000	1200	1500	2600	1500
Дивиденды	80	150	50	100	80	100	40	140	110	50	200	60
Продажа в	1200	2500	700	1600	2000	1200	1500	2600	1500	1600	2700	1200

конце месяца												

Так как имеются сведения об эффективности каждого вида ценных бумаг в прошлом (за последние четыре месяца), имеется возможность применить статистический метод.

Найдем показатели эффективности ценных бумаг. Так как требуется выбрать ценную бумагу с заданным уровнем удельной эффективности (отношения полученных средств к вложенным), для определения оценок эффективности также будем использовать удельную эффективность.

Найдем удельную эффективность ценных бумаг за первый месяц: E_{11} = = (1200+80)/1200 = 1,067; E_{21} = (2500+150)/2000 = 1,325; E_{31} = (700+50)/1000 = = 0,75.

Аналогично находится удельная эффективность ценных бумаг в другие месяцы. Эти величины приведены в табл.1.19.

Таблица 1.19

	Первый месяц			Второй месяц			Третий месяц			Четвертый месяц		
	ЦБ1	ЦБ2	ЦБ3	ЦБ1	ЦБ2	ЦБ3	ЦБ1	ЦБ2	ЦБ3	ЦБ1	ЦБ2	ЦБ3
Удельная эффективность	1,067	1,325	0,750	1,417	0,832	1,857	0,963	1,370	1,342	1,100	1,115	0,840

В качестве оценки эффективности решений (ценных бумаг) будем использовать среднюю удельную эффективность. Найдем эту оценку для каждого вида ценных бумаг: $\overline{E}_1$ = (1,067+1,417+0,963+1,1)/4 = 1,136; $\overline{E}_2$ = 1,161; $\overline{E}_3$ = 1,197.

Найдем оценки риска. В качестве таких оценок будем использовать величины дисперсии (вариации) удельной эффективности, определяемые по следующей формуле:

$$V_{ii} = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(E_{ij} - \overline{E}_i)^2, \qquad i=1,...,M,$$

где M - количество решений (в данном примере - количество видов ценных бумаг);

N - количество случаев принятия решения в прошлом (в данном примере - количество месяцев);

E_{ij}- эффективность i-го решения в j-м случае (в данном примере – удельная эффективность i-й ценной бумаги в j-м месяце);

$\overline{E}_i$ - средняя эффективность i-го решения (ценной бумаги).

Например, для ценной бумаги ЦБ1:

$$V_{11} = ((1{,}067-1{,}136)^2 + (1{,}417-1{,}136)^2 + (0{,}963-1{,}136)^2 + (1{,}1-1{,}136)^2)/3 = 0{,}038.$$

Аналогично найдем дисперсии удельной эффективности для остальных ценных бумаг: $V_{22} = 0{,}06$; $V_{33} = 0{,}261$.

Как показано в подразделе 1.3, чем больше дисперсия, тем более рискованно соответствующее решение. В данном случае дисперсия тем больше, чем больше варьировалась эффективность ценной бумаги в разные месяцы.

Примечание. В качестве оценок риска можно использовать также среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации. Определение этих оценок на основе статистических данных, а также их смысл рассмотрены в подразделе 1.3.

На основе полученных оценок эффективности и риска выберем решение. Сначала найдем допустимые решения, т.е. ценные бумаги, имеющие среднюю удельную эффективность не ниже заданной (1,15). Это ценные бумаги ЦБ2 и ЦБ3. Для ценной бумаги ЦБ1 $\overline{E}_1$=1,136, т.е. эта ценная бумага не обеспечивает заданной прибыли. Поэтому она исключается из рассмотрения.

Из ценных бумаг ЦБ2 и ЦБ3 выберем решение с минимальным риском. Для этого используем оценки риска: $V_{22} = 0{,}06$, $V_{33} = 0{,}261$. Выбирается ценная бумага ЦБ2, так как для нее оценка риска меньше (другими словами, ее удельная эффективность более стабильна). Таким образом, предприятию следует приобрести ценные бумаги ЦБ2.

Выбор комбинации решений

Пример. Предприятие предполагает приобрести ценные бумаги ЦБ1, ЦБ2 или ЦБ3, причем имеется возможность приобрести ценные бумаги *как одного вида, так и нескольких (в любых сочетаниях)*. Характеристики ценных бумаг за последние четыре месяца приведены в табл.1.18. Требуется определить, какой должна быть доля каждой ценной бумаги в портфеле ценных бумаг, приобретаемых предприятием, чтобы обеспечить эффективность не ниже 1,15 ден.ед. на каждую вложенную денежную единицу при минимальном риске.

Для решения задачи будем использовать меры эффективности и риска, найденные в пункте 1.7.1. Кроме того, в качестве меры риска следует использовать величину, называемую *ковариацией*. Она отражает взаимосвязь между значениями эффективности решений. Для данной задачи использование ковариации требуется, так как показатели эффективности ценных бумаг (их цены и дивиденды) во многих случаях взаимосвязаны. Ковариация находится по следующей формуле:

$$V_{ik} = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(E_{ij} - \overline{E}_i)\cdot(E_{kj} - \overline{E}_k), \qquad i=1,...,M,\ k=1,...,M.$$

Для данного примера значения ковариации находятся следующим образом:

V_{12} = ((1,067-1,136)·(1,325-1,161) + (1,417-1,136)·(0,832-1,161) + + (0,963-1,136)·(1,37-1,161) + (1,1-1,136)·(1,115-1,161))/3 = -0,046.

V_{13} = ((1,067-1,136)·(0,75-1,197) + (1,417-1,136)·(1,857-1,197) + + (0,963-1,136)·(1,342-1,197) + (1,1-1,136)·(0,84-1,197))/3 = 0,068.

V_{23} = ((1,325-1,161)· (0,75-1,197) + (0,832-1,161)· (1,857-1,197) + + (1,37-1,161)· (1,342-1,197) + (1,115-1,161)· (0,84-1,197))/3 = -0,081.

V_{21} = -0,046; V_{31} = 0,068; V_{32} = -0,081.

Смысл ковариации следующий. Если ковариация эффективностей i-го и k-го решения *отрицательна*, это означает, что при *снижении* эффективности i-го решения *повышается* эффективность k-го решения, и наоборот. *Положительное* значение ковариации означает, что при *снижении* эффективности i-го решения *снижается* и эффективность k-го решения, и наоборот. Комбинация решений, у которых ковариация *отрицательна*, обеспечивает *снижение* риска.

В данном примере одновременная покупка ценных бумаг ЦБ1 и ЦБ2 может снизить риск, связанный с непостоянством эффективности ценных бумаг. Действительно, проанализировав значения удельной эффективности ценных бумаг за отдельные месяцы (табл.1.19), легко заметить, что в первом и третьем месяце удельная эффективность ценной бумаги ЦБ1 (1,067 и 0,963) оказывалась ниже средней удельной эффективности этой ценной бумаги (1,136), однако это снижение компенсировалось тем, что удельная эффективность ЦБ2 (1,325 и 1,37) была выше средней (1,161). Во втором месяце, наоборот, эффективность ЦБ2 оказалась ниже средней (0,832<1,161), однако это снижение компенсировалось тем, что эффективность ЦБ1 была выше средней (1,417>1,136). Только один раз (в четвертом месяце) эффективность *обеих* ценных бумаг оказалась ниже средней. Таким образом, в большинстве случаев (в трех месяцах из четырех) снижение эффективности ЦБ1 компенсировалось ростом эффективности ЦБ2, или наоборот. Аналогично изменялась эффективность ЦБ2 и ЦБ3, поэтому совместная покупка этих ценных бумаг также может привести к снижению риска. Совместная покупка ЦБ1 и ЦБ3 рискованна, так как снижение эффективности одной из них достаточно часто сопровождалось снижением эффективности другой.

Составим математическую модель задачи. Обозначим доли каждого из M возможных решений через переменные X_i, $i=1,...,M$. В данной задаче потребуются три переменные: X_1, X_2, X_3 (доли ценных бумаг ЦБ1, ЦБ2 и ЦБ3 соответственно). Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$V = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} V_{ik} \cdot X_i \cdot X_k \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{M} \overline{E}_i \cdot X_i \geq E_{доп}$$

$$\sum_{i=1}^{M} X_i = 1$$

Здесь целевая функция (V) означает, что риск, связанный с закупкой ценных бумаг, должен быть минимальным. Первое ограничение устанавливает, что эффективность ценных бумаг (отношение прибыли к затратам) должна быть не меньше минимально допустимой величины (в данном примере $E_{доп}$=1,15). Третье ограничение устанавливает, что ценные бумаги ЦБ1, ЦБ2, ЦБ3 образуют весь пакет ценных бумаг, закупаемых предприятием, т.е. сумма их долей равна единице.

Для данной задачи целевая функция и система ограничений имеют следующий вид:

$$V = 0{,}038 \cdot X_1^2 - 0{,}046 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}068 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0{,}046 \cdot X_2 \cdot X_1 +$$
$$+ 0{,}06 \cdot X_2^2 - 0{,}081 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}068 \cdot X_3 \cdot X_1 - 0{,}081 \cdot X_3 \cdot X_2 + 0{,}261 \cdot X_3^2 =$$
$$= 0{,}038 \cdot X_1^2 - 0{,}092 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}136 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}06 \cdot X_2^2 - 0{,}162 \cdot X_2 \cdot X_3 +$$
$$+ 0{,}261 \cdot X_3^2 \to \min$$

$$1{,}136 \cdot X_1 + 1{,}161 \cdot X_2 + 1{,}197 \cdot X_3 \geq 1{,}15$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1.$$

Это задача *нелинейного программирования*. Для ее решения воспользуемся средствами табличного процессора Excel.

Предположим, что желательно получить результаты (значения переменных X_1, X_2, X_3) в ячейках B2, C2, D2 (конечно, можно использовать и любые другие ячейки). В ячейке B3 введем формулу целевой функции:

=0,038*B2^2-0,092*B2*C2+0,136*B2*D2+0,06*C2^2-
0,162*C2*D2+0,261*D2^2

В ячейке B4 введем формулу ограничения на эффективность:

=1,136*B2+1,161*C2+1,197*D2

В ячейке D4 введем правую часть этого ограничения: 1,15.

В ячейке B5 введем формулу ограничения на сумму долей: =B2+C2+D2

В ячейке D5 введем правую часть этого ограничения: 1.

Укажем также некоторые поясняющие надписи и обозначения (хотя это и необязательно). Рабочий лист будет иметь примерно такой вид, как показано на рис.1.1.

Примечание. Обозначения на рабочем листе (X1,X2,X3,->, >= и т.д.), показанные на рис.1.1, необязательны. Значения 0 в ячейках B3-B5 получены автоматически для начальных значений переменных, равных нулю.

	A	B	C	D	E	F
1		X1	X2	X3		
2	Решение:					
3	Целевая функция:	0	->	min		
4	Ограничения:	0	>=	1,15		
5		0	=	1		
6						

Рис.1.1. Рабочий лист Excel для решения задачи.

Для решения задачи из меню “Сервис” выберем элемент “Поиск решения”. В поле “Установить целевую ячейку” указывается ячейка B3, где находится формула целевой функции. Используя переключатели, указываем, что требуется установить ячейку B13 “равной минимальному значению” (так как целевая функция в этой задаче подлежит минимизации). В поле “Изменяя ячейки” указываем ячейки, в которых должны находиться значения переменных: B2:D2.

В области “Ограничения” указываются ограничения. Для начала их ввода требуется нажать кнопку “Добавить”. На экран выводится окно “Добавление ограничения”. В этом окне в поле “Ссылка на ячейку” указывается ячейка, в которой находится левая часть (формула) ограничения, а в поле “Ограничение” правая часть ограничения (число или ссылка на ячейку, где находится правая часть ограничения). Чтобы задать ограничение на эффективность, требуется в поле “Ссылка на ячейку” указать ячейку B4, выбрать знак ограничения (>=), а в поле “Ограничение” указать ячейку D4. Для ввода ограничения требуется нажать кнопку “Добавить”. Затем аналогично вводится ограничение на сумму долей: в поле “Ссылка на ячейку” – B5, в поле знака ограничения - знак =, в поле “Ограничение” – D5. Кроме того, требуется ввести ограничение на неотрицательность всех переменных: B2:D2>=0. По окончании ввода всех ограничений требуется нажать OK.

Для решения задачи следует нажать кнопку “Выполнить”. После появления окна с сообщением о том, что решение найдено, следует установить переключатель “Сохранить найденное решение” и нажать кнопку OK. Рабочий лист с результатами решения будет иметь примерно такой вид, как показано на рис.1.2.

	A	B	C	D	E	F
1		X1	X2	X3		
2	Решение:	0,494	0,468	0,038		
3	Целевая функция:	0,001	->	min		
4	Ограничения:	1,15	>=	1,15		
5		1	=	1		
6						

Рис.1.2. Рабочий лист Excel с результатами решения задачи.

Таким образом, получены следующие значения переменных: X_1=0,494, X_2=0,468, X_3=0,038. Это означает, что в пакете ценных бумаг, приобретенных предприятием, бумаги первого вида (ЦБ1) должны составлять 49,4%, ЦБ2 – 46,8%, ЦБ3 – 3,8%. Получение такого результата можно объяснить тем, что ценные бумаги ЦБ1 и ЦБ2 имеют значительно меньшие значения дисперсии (V_{11} и V_{22}), чем ЦБ3. Кроме того, как показано выше, одновременная закупка ЦБ1 и ЦБ2 позволяет снизить риск, так как снижение эффективности одной из этих бумаг обычно компенсируется ростом эффективности другой бумаги (ковариация значений эффективности этих ценных бумаг отрицательна).

Ожидаемая удельная эффективность полученного решения, рассчитанная в ячейке B4, составит 1,15 денежной единицы на каждую вложенную денежную единицу. Оценка риска полученного решения (значение целевой функции) равна 0,001.

1.8. Методы на основе деревьев решений

Методы на основе деревьев решений обычно применяются в случаях, когда требуется анализ и выбор последовательности решений, и при этом принятие каждого решения зависит от результатов предыдущих решений и от информации о внешних условиях.

Дерево решений - графическое изображение последовательности решений, состояний внешних условий и результатов принятых решений с указанием их вероятностей.

Методы на основе деревьев решений применяются в случаях, когда для каждого решения можно указать все его возможные последствия (в зависимости от внешних условий), а также вероятности этих последствий. Вероятности могут быть найдены из статистических данных (т.е. сведений о принятии аналогичных решений в прошлом). Если таких данных нет, то могут использоваться экспертные оценки вероятностей.

Пример. Предприятие обращается в банк с заявлением о выделении кредита сроком на один год в размере 200 000 ден.ед. под 15% годовых. Банк имеет возможность выделить такой кредит, однако руководству банка известно, что примерно 5% кредитов не возвращается. Банк может отказать в предоставлении кредита и вложить средства в государственные ценные бумаги под 4% годовых; известно, что в условиях данной страны государственные ценные бумаги абсолютно надежны. Банк может также обратиться в аудиторскую фирму и заказать проверку состояния предприятия, обращающегося за кредитом, а затем принять решение в зависимости от результатов проверки. За проверку аудиторская фирма требует плату в размере 3000 ден.ед. Известно, что за последнее время основные аудиторские фирмы выполнили 400 проверок. В 360 случаях аудиторские фирмы давали заключение о том, что состояние предприятий достаточно хорошее, и они смогут вернуть кредит. Этим предприятиям были выделены банковские кредиты, однако 9 предприятий их не вернули.

Требуется выбрать рациональное решение для банка.

Банк имеет возможность принять одно из трех решений: отказать в выделении кредита и вложить средства в государственные ценные бумаги; выделить кредит; обратиться в аудиторскую фирму и действовать по результатам проверки предприятия. Рассмотрим возможные последствия этих решений:

* отказ в выделении кредита. В этом случае банк вложит средства в государственные ценные бумаги и получит прибыль в размере 4% годовых, т.е. 8000 ден.ед.;

* выделение кредита (без проверки состояния предприятия). Если кредит будет возвращен, то банк получит прибыль в размере 15% годовых, т.е. 0,15·200 000 = 30 000 ден.ед.; вероятность такого результата - 95% (так как в 95% случаев кредиты возвращаются). Если кредит не будет возвращен, то банк потеряет 200 000 ден.ед.; вероятность этого - 5%;

* обращение в аудиторскую фирму. Если заключение о состоянии предприятия (т.е. о его способности вернуть кредит) будет положительным, то банк выделит ему кредит; вероятность такого развития событий можно считать равной 360/400=0,9, или 90%. Если кредит будет возвращен, то предприятие получит прибыль в размере 0,15·200 000 - 3000 = 27 000 ден.ед. (здесь 3000 - плата аудиторской фирме за проверку). Вероятность возврата кредита (при положительном заключении аудиторской фирмы) составляет 351/360=0,975 (так как из 360 предприятий, получивших положительные заключения аудиторских фирм, 351 предприятие вернуло кредит). Если кредит не будет возвращен, то банк потеряет 203 000 ден.ед. Если аудиторская фирма даст отрицательное заключение о состоянии предприятия, то банк не выделит ему кредит; вероятность этого равна 40/400=0,1. В этом случае банк вложит свои средства в государственные ценные бумаги и получит прибыль в размере 0,04·200 000 - 3000 = 5000 ден.ед.

<u>Примечание.</u> Используемый в данной задаче способ снижения риска – получение дополнительной информации. Для получения такой информации выполняется проверка состояния предприятия. Вероятность невозвращения кредита без проверки составляет 0,05, а при положительном заключении аудиторской фирмы - только 0,025. Можно сказать, что проверка (т.е. получение дополнительной информации) снижает риск в 2 раза. Однако такое снижение риска связано с затратами в размере 3000 ден.ед..

Представим возможные решения банка и их последствия в виде дерева решений (рис.1.3). Прямоугольники на рис.1.3, соответствующие решениям и их последствиям, называются ***вершинами*** дерева решений. Номера вершин могут быть любыми. Здесь вершины 2,3,4,5 соответствуют решениям банка, а вершины 6-10 - последствиям этих решений. На линиях, соединяющих вершины, указаны решения банка, внешние условия (например, результаты проверки, возвращение или невозвращение кредита) и вероятности этих условий.

По дереву находятся оценки всех решений.

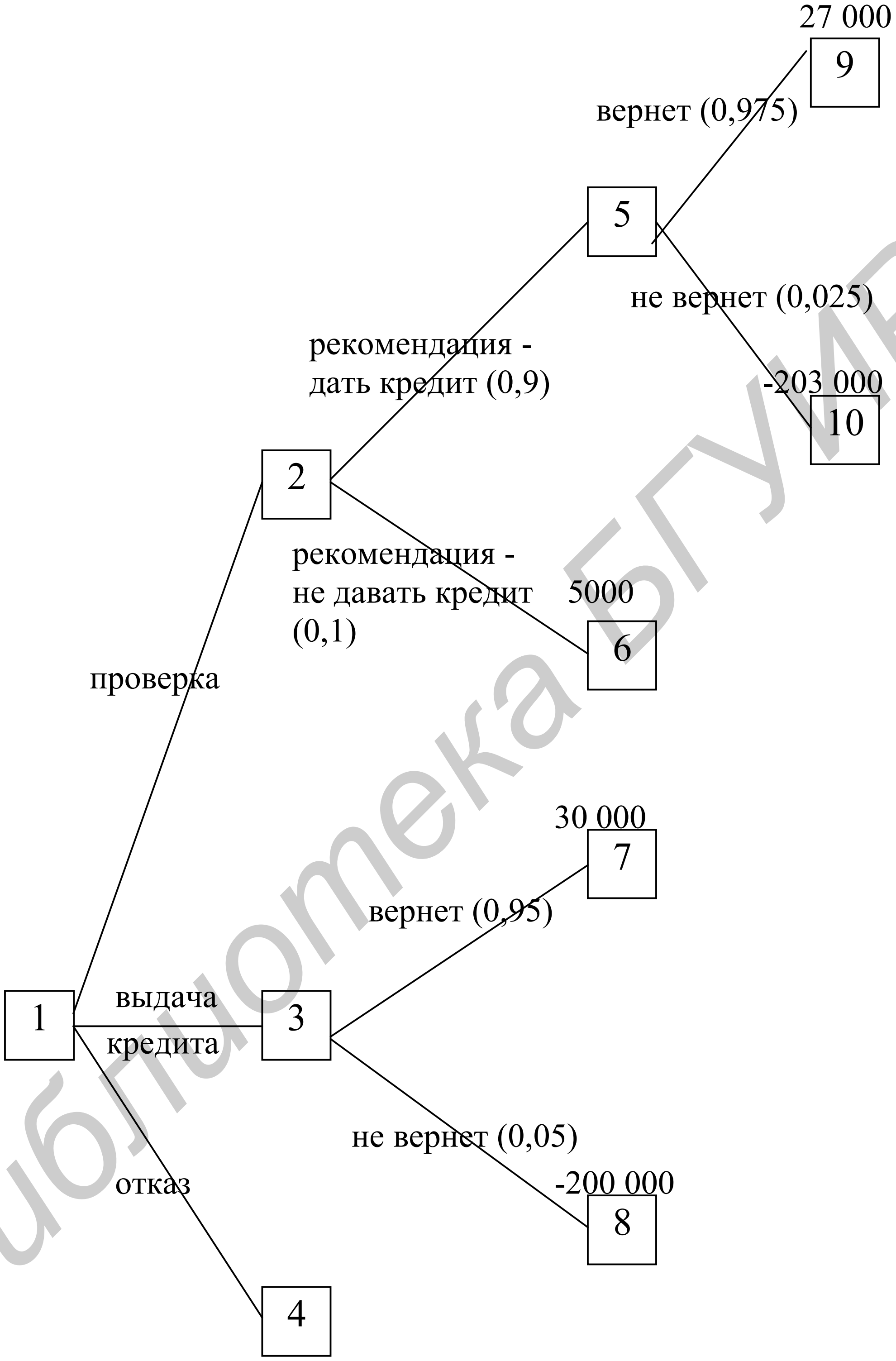

Рис.1.3. Дерево решений

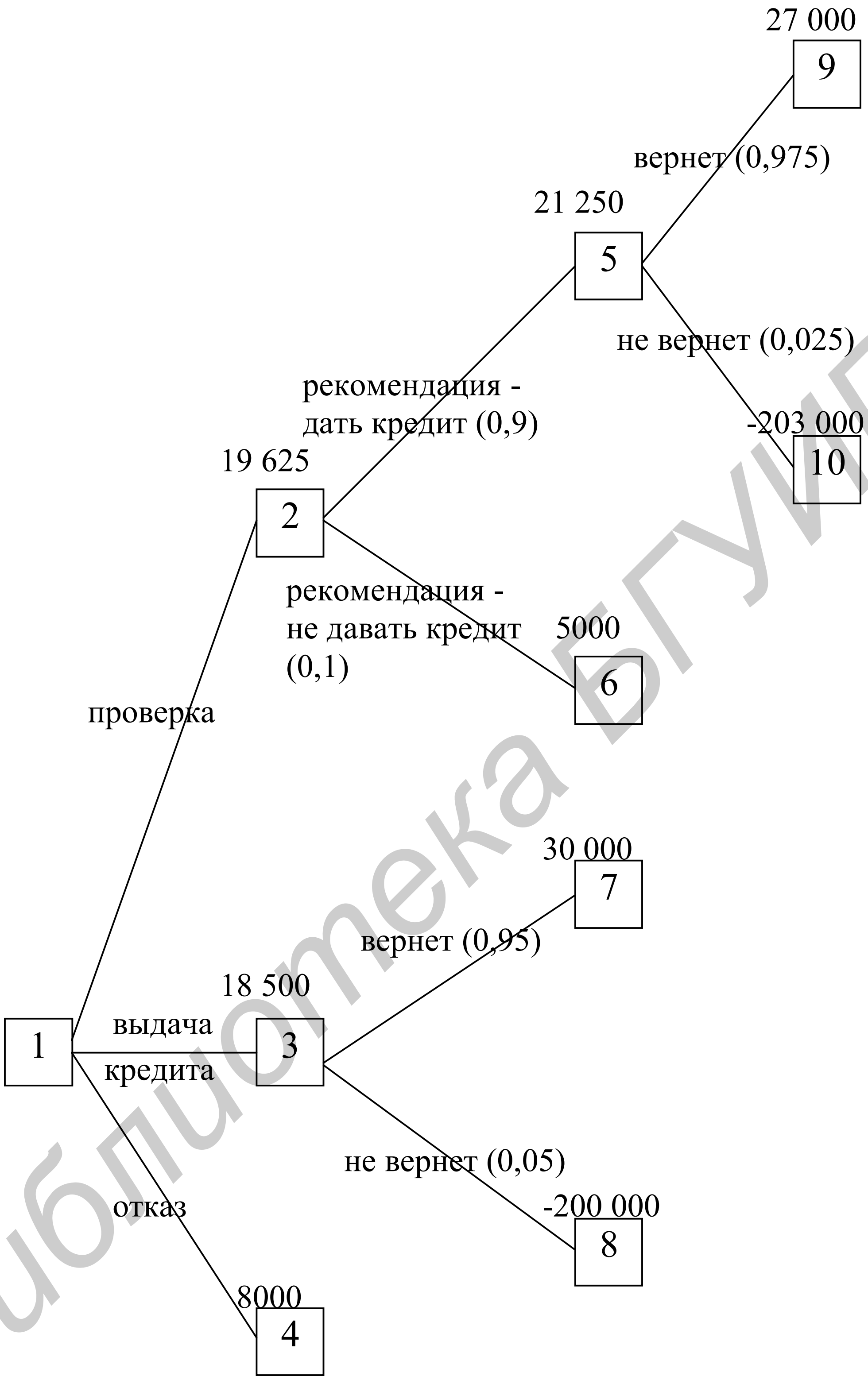

Рис.1.4. Дерево решений с оценками решений, в ден.ед.

Найдем оценку вершины 5 (выдача кредита при положительном заключении аудиторской фирмы). Возможные последствия этого решения - получение прибыли в размере 27 000 ден.ед. с вероятностью 0,975 (если кредит будет возвращен) или убыток в размере 203 000 ден.ед. с вероятностью 0,025 (если, несмотря на положительное заключение аудиторской фирмы, кредит не будет возвращен). Оценка решения находится следующим образом: $27\,000 \cdot 0{,}975 - 203\,000 \cdot 0{,}025 = 21\,250$ ден.ед.

Найдем оценку вершины 2 (обращение в аудиторскую фирму и действия по результатам проверки). Возможные последствия этого решения: отрицательное заключение аудиторской фирмы, отказ в выдаче кредита и вложение средств в государственные ценные бумаги (в этом случае прибыль составит 5000 ден.ед., вероятность - 0,1) или положительное заключение аудиторской фирмы и выдача кредита (оценка этого решения получена выше и составляет 21 250 ден.ед., вероятность - 0,9). Оценка решения находится следующим образом: $5000 \cdot 0{,}1 + 21\,250 \cdot 0{,}9 = 19\,625$ ден.ед.

Найдем оценку вершины 3 (выдача кредита без предварительной проверки). Возможные последствия - прибыль в размере 30 000 ден.ед. (с вероятностью 0,95) или убыток в размере 200 000 ден.ед. (с вероятностью 0,05). Оценка решения: $30\,000 \cdot 0{,}95 - 200\,000 \cdot 0{,}05 = 18\,500$ ден.ед.

Оценка вершины 4 (отказ в выдаче кредита и вложение средств в государственные ценные бумаги) равна 8000 ден.ед. (4% от суммы в размере 200 000 ден.ед., вложенной в государственные ценные бумаги).

Дерево с оценками решений показано на рис.1.4.

Банку требуется сделать выбор из решений, соответствующих вершинам 2, 3, 4. Максимальную оценку имеет вершина 2. Таким образом, для банка можно рекомендовать следующее решение: обратиться в аудиторскую фирму для проверки состояния предприятия, и в случае положительного заключения - выдать кредит.

1.9. Имитационные методы

Имитационные методы анализа и выбора решений основаны на моделировании процессов реализации возможных решений и внешних условий. Обычно при этом применяется метод Монте-Карло. Как правило, имитационные методы достаточно сложны и применяются в случаях, когда применение других методов (игровых, статистических и т.д.) невозможно из-за отсутствия необходимых данных и/или сложности формализации задачи.

Пример. Для обеспечения нормальной работы металлургического предприятия требуется выполнять очистку 200 тонн сырья в сутки. Качество сырья, поступающего на предприятие, может быть различным. В зависимости от качества сырья производительность *одной* установки, используемой для очистки, может составлять от 15 до 80 тонн в сутки. Требуется определить минимальное количество установок, достаточное для обеспечения своевременной очистки необходимого сырья, с вероятностью не менее 95%.

Как следует из постановки задачи, производительность очистного оборудования не является постоянной, а зависит от внешних факторов (от качества поступающего сырья). Поэтому заранее точно не известно, сколько времени потребуется на очистку необходимого количества сырья (200 тонн). Риск, т.е. возможность неблагоприятных последствий, в данной задаче заключается в том, что за сутки может быть очищено меньше сырья, чем необходимо. Риск здесь является производственно-технологическим, так как связан с непостоянством характеристик работы оборудования (его производительности).

В качестве меры риска в данной задаче следует использовать вероятность несвоевременной очистки сырья, т.е. вероятность того, что за сутки будет очищено менее 200 тонн сырья.

В данной задаче легко видеть, например, что одной установки явно недостаточно: даже при максимальной производительности она может очистить не более 80 тонн сырья в сутки (а требуется 200). С другой стороны, если использовать, например, 20 установок, то они в любом случае обеспечат очистку необходимого сырья. Даже при минимальной производительности они очистят за сутки 300 тонн сырья, что больше необходимого; однако такое количество установок, возможно, будет избыточным. В то же время сложно рассчитать, какой будет вероятность своевременной обработки необходимого количества сырья, если использовать, например, три или пять установок. Рассчитать необходимое количество очистных установок, используя какие-либо аналитические методы (например, методы теории вероятностей), достаточно сложно. Поэтому необходимо применить имитационное моделирование на основе метода Монте-Карло.

Известно, что метод Монте-Карло основан на применении случайных равномерно распределенных чисел (СРРЧ). Расчет (розыгрыш) СРРЧ выполняется по специальным алгоритмам, реализованным в большинстве языков программирования и во многих прикладных системах обработки данных. Эти алгоритмы разработаны таким образом, что СРРЧ всегда принимают значения из диапазона от нуля до единицы, и при этом принимают значения из любой части диапазона (0;1) с одинаковой частотой.

В данной задаче СРРЧ будут использоваться для имитации производительности очистной установки. Эта производительность может рассматриваться как случайная величина, распределенная в диапазоне (15; 80) по равномерному закону (т.е. принимающая любые значения из этого диапазона с одинаковой частотой). Для имитации случайной величины, распределенной по равномерному закону в некотором диапазоне (A; B), используется следующая формула:

$$X = A+(B-A)R, \qquad (1.18)$$

где R – СРРЧ.

Если разыграть значение СРРЧ (т.е. получить некоторое случайное число из диапазона от нуля до единицы) и подставить его в формулу (1.18), то будет получено число из диапазона от A до B. При A=15, B=80 будет получено случайное число из диапазона от 15 до 80. Это число можно рассматривать как значение производительности *одной* очистной установки. Таким образом, будет смоделирована работа *одной установки за одни сутки*. Если разыграть *несколько* СРРЧ и получить несколько значений X по формуле (1.18), то будет смоделирована работа *нескольких* очистных установок. Наконец, если повторить эти действия многократно, то будет смоделирована работа *нескольких установок за несколько суток*. По найденным значениям X можно подсчитать количество случаев, когда суммарная производительность установок оказывалась меньше требуемой величины (200 тонн в сутки), и найти вероятность таких случаев.

Алгоритм имитации работы K установок и определения вероятности несвоевременной очистки необходимого количества сырья реализуется в следующем порядке.

1. Разыгрывается K СРРЧ: $R_1, R_2, \ldots, R_k$.
2. Разыгрываются значения производительности K очистных установок по формуле (1.18): $X_i = A+(B-A)R_i$, $i=1,\ldots,K$.
3. Рассчитывается суммарная производительность K установок, т.е. количество сырья, очищенного всеми установками за сутки: $S=X_1+X_2+\ldots+X_k$.
4. Если $S<200$, то количество случаев, когда за сутки было очищено менее 200 тонн сырья, увеличивается на единицу: $Z=Z+1$.

5. Шаги 1-4 повторяются многократно, например, 10 000 раз (обозначим количество повторений как N). Таким образом имитируется работа K установок за N суток.

6. Находится вероятность того, что за сутки было очищено менее 200 тонн сырья: P=Z/N.

Используя приведенный алгоритм, необходимо смоделировать работу различного количества установок (т.е. использовать различные значения K). Выбирается минимальное количество установок, при котором P<0,05.

Приведем программную реализацию алгоритма на языке Паскаль. В программе имитируется работа различного количества очистных установок (от одной до десяти). Через константу neobh обозначено количество сырья, которое должно быть очищено в течение суток. Random – стандартная функция языка Паскаль, выполняющая розыгрыш СРРЧ. Смысл всех переменных программы тот же, что и в приведенном выше алгоритме.

```
program ochistka;
uses crt;
const neobh=200; n=10000; a=15; b=80;
var i,j,k,z: integer;
    r,x,s,p: real;
begin
clrscr;
for k:=1 to 10 do
    begin
    z:=0;
    for i:=1 to n do
        begin
        s:=0;
        for j:=1 to k do
            begin
            r:=random;
            x:=a+(b-a)*r;
            s:=s+x;
            end;
       if s<neobh then z:=z+1;
       end;
   p:=z/n;
   writeln('Количество установок: ',k:2,' Вероятность: ',p:5:3);
   end;
end.
```

Результаты имитации приведены в табл.1.20.

Таблица 1.20

Количество очистных установок	Вероятность обработки менее 200 тонн сырья в сутки	Количество очистных установок	Вероятность обработки менее 200 тонн сырья в сутки
1	1,000	6	0,031
2	1,000	7	0,003
3	0,960	8	0,000
4	0,601	9	0,000
5	0,199	10	0,000

Таким образом, предприятию следует использовать шесть очистных установок. Это минимальное количество установок, при котором вероятность того, что за сутки будет очищено менее 200 тонн сырья, составляет менее 0,05 (т.е. вероятность очистки заданного количества сырья превышает 95%).

1.10. Методы оценки и выбора решений на основе зон риска

Эти методы основаны на разбиении диапазона возможных потерь на поддиапазоны по степени их допустимости. Эти поддиапазоны называются *зонами риска.* Для каждой зоны риска определяется вероятность соответствующих потерь. Для оценки вероятностей используются экспертные, статистические, аналитические или имитационные методы. На основе анализа зон риска и вероятностей попадания величины потерь в эти зоны выполняется оценка допустимости решения. Способы выделения зон риска и анализа вероятностей полностью зависят от конкретной задачи.

В большинстве случаев выделяются три зоны риска: зона допустимого, критического и катастрофического риска. При оценивании риска, связанного с коммерческими проектами (т.е. с некоторыми мероприятиями, требующими затрат и приносящими прибыль), зоны риска обычно выделяются по следующим правилам:

- зона допустимого риска: получение *прибыли* ниже ожидаемой;
- зона критического риска: получение *выручки*, недостаточной для покрытия затрат;
- зона катастрофического риска: полное отсутствие *выручки* и дополнительные потери.

Проект признается допустимым по уровню риска, если вероятность допустимого риска не превышает одной десятой, вероятность критического риска – не более одной сотой, вероятность катастрофического риска – не более одной тысячной.

Пример. Предприятие предполагает реализовать некоторый коммерческий проект. Затраты на проект составят 8 млн ден.ед. Предприятие ожидает получить в результате проекта *выручку* в размере 14 млн ден.ед.

Таким образом, по расчетам предприятия, его прибыль должна составить 6 млн ден.ед.

Согласно приведенным выше правилам, зона допустимого риска соответствует получению прибыли в размере от 0 до 6 млн ден.ед. (или, другими словами, получению выручки от 8 до 14 млн ден.ед.). Зона критического риска соответствует получению выручки в размере от 0 до 8 млн ден.ед. Зона катастрофического риска соответствует отсутствию выручки и возникновению дополнительных расходов.

Пусть имеются экспертные оценки, согласно которым вероятность получения выручки в размере от 8 до 14 млн ден.ед. составляет 8%. Вероятность получения выручки менее 8 млн ден.ед (но выше нуля) составляет 3%. Вероятность того, что в результате реализации проекта предприятие вообще не получит выручки и понесет дополнительные затраты (сверх 8 млн ден.ед., затраченных на реализацию проекта), составляет 1%. При наличии таких экспертных оценок предприятию следует *отказаться* от реализации проекта, так как вероятности критического и катастрофического риска превышают допустимые величины.

Примечание. Назначение зон риска и анализ допустимости решений могут выполняться и по другим правилам.

При использовании методов на основе зон риска наиболее сложной задачей является получение вероятностей потерь, соответствующих различным зонам риска.

Пример. Требуется определить количество установок, необходимых для очистки сырья, используемого металлургическим предприятием (см. пример из подраздела 1.9). Для нормальной работы предприятия требуется выполнять очистку 200 тонн сырья в сутки. Если будет очищено от 190 до 200 тонн, это приведет к незначительным сбоям в работе предприятия. Если количество очищенного сырья составит от 175 до 190 тонн, то в работе предприятия возможны серьезные сбои. Если количество очищенного сырья составит менее 175 тонн, то работа предприятия остановится. Требуется найти минимально необходимое количество очистных установок, обеспечивающее риск не выше допустимого уровня.

В данной задаче будем считать, что очистка сырья в количестве от 190 до 200 тонн соответствует зоне допустимого риска; очистка от 175 до 190 тонн – зоне критического риска, менее 175 тонн – зоне катастрофического риска. Допустимость риска будем оценивать по правилам, приведенным выше: вероятность допустимого риска – не более одной десятой, критического риска – не более одной сотой, катастрофического риска – не более одной тысячной. Для выбора необходимого количества установок используем алгоритм имитации, приведенный в разделе 1.9. В алгоритме потребуется изменить только шаги 4 и 6. Они будут иметь следующий вид.

4. Если $190 \le S < 200$, то количество случаев, когда за сутки было очищено от 190 до 200 тонн сырья (допустимый риск), увеличивается на

единицу: $Z_{доп}=Z_{доп}+1$. Если $175 \leq S \leq 190$, то количество случаев, когда за сутки было очищено от 175 до 190 тонн сырья (критический риск), увеличивается на единицу: $Z_{крит}=Z_{крит}+1$. Если $S<175$, то количество случаев, когда за сутки было очищено менее 175 тонн сырья (катастрофический риск), увеличивается на единицу: $Z_{кат}=Z_{кат}+1$.

…

6. Находятся вероятности допустимого, критического и катастрофического риска: $P_{доп}=Z_{доп}/N$, $P_{крит}=Z_{крит}/N$, $P_{кат}=Z_{кат}/N$.

Потребуется также внести соответствующие несложные изменения в программную реализацию данного алгоритма. Результаты имитации приведены в табл.1.21.

Таблица 1.21

Количество очистных установок	Вероятность обработки		
	от 190 до 200 тонн (допустимый риск)	от 175 до 190 тонн (критический риск)	менее 175 тонн (катастрофический риск)
1	0,000	0,000	1,000
2	0,000	0,000	1,000
3	0,035	0,092	0,833
4	0,096	0,152	0,352
5	0,058	0,068	0,072
6	0,012	0,011	0,008
7	0,002	0,001	0,000
8	0,000	0,000	0,000
9	0,000	0,000	0,000
10	0,000	0,000	0,000

Как видно из результатов моделирования, предприятию следует использовать семь очистных установок. В этом случае вероятность допустимого риска составит 0,002 (т.е. менее 0,1), вероятность критического риска – 0,001 (менее 0,01), вероятность катастрофического риска практически равна нулю (т.е. менее 0,001).

1.11. Принятие решений в условиях риска при многих критериях

Как правило, в ходе принятия управленческих решений необходимо принимать во внимание как многокритериальность (т.е. различные показатели, характеризующие принимаемые решения), так и риск (т.е. учитывать, что последствия решений могут зависеть не только от самого решения, но и от неконтролируемых внешних факторов). Обычно из нескольких критериев, учитываемых при принятии решения, некоторые критерии зависят от внешних условий.

Анализ и выбор альтернатив по многим критериям с учетом риска может выполняться следующим образом.

1. Для *каждого варианта внешних условий* находятся обобщенные оценки альтернатив. Для этого могут применяться различные методы многокритериальной оценки альтернатив: метод анализа иерархий, метод комплексной оценки структур, методы на основе функций полезности и т.д.

2. Полученные обобщенные оценки сводятся в матрицу выигрышей. Окончательный выбор альтернативы выполняется на основе игровых методов, рассмотренных в подразделе 1.6.

Пример. Рассматриваются три варианта строительства предприятия химической промышленности: проект A, B и C.

Спрос на продукцию, которую будет выпускать предприятие, заранее точно не известен. По мнению экспертов, в ближайшие годы вероятность низкого спроса на продукцию предприятия составляет 10%, среднего - 60%, высокого - 30%.

При выборе проекта учитываются следующие критерии: прибыль от работы предприятия (К1); количество рабочих мест, создаваемых предприятием (К2); загрязнение окружающей среды (К3); затраты на строительство предприятия (К4). Оценки проектов по критериям К1-К3 в условиях различных уровней спроса приведены в табл. 1.22.

Затраты на строительство предприятия по проекту A составят 60 млн ден.ед., по проекту B - 80, по проекту C - 90 млн ден.ед.

Таблица 1.22

Спрос	Низкий			Средний			Высокий		
Проекты	A	B	C	A	B	C	A	B	C
Прибыль, млн ден.ед./год	40	30	30	45	60	65	45	60	80
Количество рабочих мест, тыс.	8	11	12	8,5	11	12,5	8,5	11	12,5
Загрязнение окружающей среды, тонн/год	30	70	60	30	80	70	30	80	80

По мнению руководства фирмы - владельца предприятия, наиболее важным критерием, который следует учитывать при выборе проекта, является прибыль; очень важным критерием также является загрязнение окружающей среды. Менее важный критерий - затраты на строительство предприятия, еще немного менее важный - количество создаваемых рабочих мест.

В этой задаче требуется учитывать четыре критерия. Три из них (прибыль, количество рабочих мест и загрязнение окружающей среды) зависят не только от принятого решения (т.е. выбранного проекта предприятия), но и от внешних условий (спроса на продукцию). Таким образом, решение принимается в условиях риска и неопределенности. В то же время один из критериев - затраты на строительство предприятия - не зависит от будущего спроса на продукцию.

Для решения задачи воспользуемся методом анализа иерархий.

Найдем обобщенные оценки альтернатив (проектов) для первого варианта внешних условий, т.е. **для низкого спроса.**

1. Находятся локальные приоритеты (оценки важности) критериев. Для этого выполняется их попарное сравнение по важности (табл.1.23). Локальные приоритеты находятся по алгоритму Саати [5,6,21].

Таблица 1.23

	K1	K2	K3	K4
K1	1	7	2	5
K2	1/7	1	1/6	1/3
K3	1/2	6	1	4
K4	1/5	3	1/4	1

$L_{K1} = 0{,}51$; $L_{K2} = 0{,}05$; $L_{K3} = 0{,}33$; $L_{K4} = 0{,}11$.

2. Находятся локальные приоритеты альтернатив (проектов) по каждому из критериев. Для этого выполняется их попарное сравнение (табл.1.24 - 1.27).

Таблица 1.24

Сравнение по критерию “прибыль”			
	A	B	C
A	1	5	5
B	1/5	1	1
C	1/5	1	1

$L_A^{K1} = 0{,}71$; $L_B^{K1} = 0{,}14$; $L_C^{K1} = 0{,}14$.

Таблица 1.25

Сравнение по критерию “количество рабочих мест”			
	A	B	C
A	1	1/5	1/6
B	5	1	1/2
C	6	2	1

$L_A^{K2} = 0{,}08$; $L_B^{K2} = 0{,}34$; $L_C^{K2} = 0{,}58$.

Здесь, например, оценка X_{12} = 5 (см. табл.1.24) означает, что в условиях низкого спроса проект А лучше, чем проект В, по критерию “прибыль” (проект А приносит прибыль в размере 40 млн ден.ед., а В - 30 млн).

Таблица 1.26

Сравнение по критерию “загрязнение окружающей среды”			
	A	B	C
A	1	9	7
B	1/9	1	1/3
C	1/7	3	1

Таблица 1.27

Сравнение по критерию “затраты на строительство”			
	A	B	C
A	1	7	8
B	1/7	1	3
C	1/8	1/3	1

$L_A^{K3} = 0{,}79$; $L_B^{K3} = 0{,}07$; $L_C^{K3} = 0{,}15$. $L_A^{K4} = 0{,}78$; $L_B^{K4} = 0{,}15$; $L_C^{K4} = 0{,}07$.

3. Находятся глобальные приоритеты критериев. В данной задаче они равны локальным приоритетам: G_{K1} = 0,51; G_{K2} = 0,05; G_{K3} = 0,33; G_{K4} = 0,11. Находятся обобщенные оценки (глобальные приоритеты) альтернатив: G_A = = 0,71; G_B = 0,13; G_C = 0,16. Например, глобальный приоритет проекта А найден следующим образом:

$$G_A = L_A^{K1} \cdot G_{K1} + L_A^{K2} \cdot G_{K2} + L_A^{K3} \cdot G_{K3} + L_A^{K4} \cdot G_{K4} =$$
$$= 0{,}71 \cdot 0{,}51 + 0{,}08 \cdot 0{,}06 + 0{,}79 \cdot 0{,}33 + 0{,}78 \cdot 0{,}1 = 0{,}71.$$

Найдем обобщенные оценки альтернатив для второго варианта внешних условий, т.е. **для среднего спроса.**

1. Находятся локальные приоритеты (оценки важности) критериев. Так как важность критериев не зависит от внешних условий, локальные приоритеты критериев будут такими же, как и найденные выше (для условий низкого спроса): L_{K1} = 0,51; L_{K2} = 0,05; L_{K3} = 0,33; L_{K4} = 0,11.

2. Находятся локальные приоритеты альтернатив по каждому из критериев (табл.1.28 - 1.31).

Таблица 1.28

Сравнение по критерию “прибыль”			
	A	B	C
A	1	1/6	1/7
B	6	1	1/3
C	7	3	1

Таблица 1.29

Сравнение по критерию “количество рабочих мест”			
	A	B	C
A	1	1/5	1/6
B	5	1	1/3
C	6	3	1

$L_A^{K1} = 0{,}07$; $L_B^{K1} = 0{,}29$; $L_C^{K1} = 0{,}64$. $L_A^{K2} = 0{,}08$; $L_B^{K2} = 0{,}29$; $L_C^{K2} = 0{,}64$.

Таблица 1.30

Сравнение по критерию “загрязнение окружающей среды”			
	A	B	C
A	1	9	9
B	1/9	1	1/3
C	1/9	3	1

Таблица 1.31

Сравнение по критерию “затраты на строительство”			
	A	B	C
A	1	7	8
B	1/7	1	3
C	1/8	1/3	1

$L_A^{K3} = 0{,}81$; $L_B^{K3} = 0{,}06$; $L_C^{K3} = 0{,}13$. $L_A^{K4} = 0{,}78$; $L_B^{K4} = 0{,}15$;
$L_C^{K4} = 0{,}07$.

3. Находятся обобщенные оценки (глобальные приоритеты) альтернатив: $G_A = 0{,}39$; $G_B = 0{,}2$; $G_C = 0{,}41$.

Найдем обобщенные оценки альтернатив для третьего варианта внешних условий, т.е. **для высокого спроса.**

1. Находятся локальные приоритеты (оценки важности) критериев: $L_{K1} = 0{,}51$; $L_{K2} = 0{,}05$; $L_{K3} = 0{,}33$; $L_{K4} = 0{,}11$.

2. Находятся локальные приоритеты альтернатив по каждому из критериев (табл.1.32 - 1.35).

Таблица 1.32

Сравнение по критерию “прибыль”			
	A	B	C
A	1	1/6	1/9
B	6	1	1/7
C	9	7	1

Таблица 1.33

Сравнение по критерию “количество рабочих мест”			
	A	B	C
A	1	1/5	1/7
B	5	1	1/3
C	7	3	1

$L_A^{K1} = 0{,}05$; $L_B^{K1} = 0{,}18$; $L_C^{K1} = 0{,}77$. $L_A^{K2} = 0{,}07$; $L_B^{K2} = 0{,}28$; $L_C^{K2} = 0{,}65$.

Таблица 1.34

Сравнение по критерию “загрязнение окружающей среды”			
	A	B	C
A	1	9	9
B	1/9	1	1
C	1/9	1	1

Таблица 1.35

Сравнение по критерию “затраты на строительство”			
	A	B	C
A	1	7	8
B	1/7	1	3
C	1/8	1/3	1

$L_A^{K3} = 0{,}82$; $L_B^{K3} = 0{,}09$; $L_C^{K3} = 0{,}09$. $L_A^{K4} = 0{,}78$; $L_B^{K4} = 0{,}15$; $L_C^{K4} = 0{,}07$.

3. Находятся обобщенные оценки (глобальные приоритеты) альтернатив: $G_A = 0{,}38$; $G_B = 0{,}16$; $G_C = 0{,}46$.

Примечание. Парные сравнения альтернатив и их локальные приоритеты по критерию “затраты на строительство” (табл.1.27, 1.31, 1.35) одинаковы для всех вариантов внешних условий, так как этот критерий не зависит от внешних условий. Затраты зависят только от проекта, по которому строится предприятие, но не от будущего спроса на его продукцию.

Обобщенные оценки альтернатив, полученные для различных вариантов внешних условий, сводятся в матрицу выигрышей (табл.1.36).

Таблица 1.36

Проекты	Внешние условия (спрос)		
	Низкий	Средний	Высокий
A	0,71	0,39	0,38
B	0,13	0,2	0,16
C	0,16	0,41	0,46

На основе матрицы выигрышей выбирается лучшая альтернатива. Выбор производится в зависимости от постановки задачи, прежде всего - в зависимости от информации о внешних условиях. В данном случае известны вероятности внешних условий, т.е. экспертные оценки вероятностей для различных уровней спроса. Поэтому для выбора альтернативы используется критерий Байеса (критерий максимума среднего выигрыша). Для каждой альтернативы находится обобщенная оценка с учетом всех вариантов внешних условий:

$E_A = 0{,}71 \cdot 0{,}1 + 0{,}39 \cdot 0{,}6 + 0{,}38 \cdot 0{,}3 = 0{,}42$;

$E_B = 0{,}13 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}16 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$;

$E_C = 0{,}16 \cdot 0{,}1 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}46 \cdot 0{,}3 = 0{,}4$.

Таким образом, в качестве рационального решения следует выбрать строительство предприятия по проекту А.

1.12. Принятие решений в условиях противодействия

Условия противодействия - это условия принятия решения, когда результат решения зависит не только от стороны, принимающей данное решение, но и от некоторой другой стороны (также принимающей решения); эта сторона называется “сознательным противником”. При этом “противник” действует в соответствии со своими целями, которые не совпадают с целями стороны, принимающей решение (хотя и не всегда противоположны им).

Точное предсказание действий “противника”, как правило, невозможно. Общие принципы прогнозирования возможных действий “противника” следующие:

- если “противник” предпринимает свои действия, *не зная* о принятом решении, то вероятности различных его действий оцениваются на основе статистических данных (т.е. данных о действиях “противника” в прошлом) или экспертных оценок. Если таких данных нет, то можно предполагать, что любые действия “противника” одинаково возможны. В некоторых случаях (например, при принятии особо ответственных решений) предполагается, что действия “противника” будут наименее благоприятными для стороны, принимающей решение;
- если “противник” предпринимает свои действия, *зная* о принятом решении, то обычно следует считать, что “противник” будет действовать *наиболее выгодным для себя* образом.

Пример. Предприятие предполагает предпринять попытку выхода со своим товаром на новый рынок. Известно, что на этом рынке уже продает тот же товар другое предприятие - монополист. Прибыль предприятия-монополиста составляет примерно 12 млн ден.ед. в год. Если новое предприятие выйдет со своим товаром на рынок, то предприятие-монополист имеет возможность предпринять одно из следующих действий:

- сокращение объема производства (монополист “делится рынком” с новым предприятием). Согласно экспертным оценкам, в этом случае прибыль монополиста снизится до 8 млн ден.ед. Прибыль нового предприятия составит примерно 4 млн ден.ед.;
- сохранение прежнего объема производства. В этом случае произойдет перенасыщение рынка данным товаром, и цена на него снизится. В результате прибыль монополиста составит примерно 6 млн ден.ед., а новое предприятие понесет убыток в размере 2 млн ден.ед.

Если новое предприятие откажется от выхода на рынок, то оно ничего не потеряет и не получит (прибыль равна нулю). Очевидно, что предприятие-монополист при этом сохранит прежний объем производства, и его прибыль не изменится (12 млн ден.ед.).

Требуется определить, следует ли новому предприятию выходить на рынок со своим товаром.

Данная задача решается в условиях противодействия, так как результат принятого решения (выход на рынок или отказ от такого выхода) зависит не только от самого решения, но и от действий другой стороны (предприятия-монополиста). Предприятие-монополист здесь может рассматриваться как “сознательный противник”. При этом важно отметить, что его цель состоит не в причинении ущерба новому предприятию, а в получении максимальной прибыли для себя.

“Противник” (предприятие-монополист) предпринимает свои действия, уже зная о том, какое решение принято новым предприятием (вышло оно на рынок или нет). Поэтому следует предположить, что предприятие-монополист будет действовать наиболее выгодным (для себя) образом.

Возможные действия обоих предприятий и результаты этих действий приведены в табл.1.37. Прочерки в таблице соответствуют вариантам действий, которые явно не будут реализованы на практике: очевидно, что в случае отказа нового предприятия от выхода на рынок предприятие-монополист не будет сокращать объем производства.

Рассмотрим возможные действия нового предприятия:

- выход на рынок. В этом случае предприятие-монополист может сократить объем производства (в этом случае его прибыль составит 8 млн ден.ед.) или сохранить прежний объем (прибыль составит 6 млн ден.ед.). Таким образом, можно ожидать, что предприятие-монополист сократит объем производства, так как его прибыль при этом больше, чем при сохранении прежнего объема. В этом случае прибыль нового предприятия составит 4 млн ден.ед.;

- отказ от выхода на рынок. В этом случае новое предприятие не получит прибыли и не понесет убытков.

Таблица 1.37

	Действия предприятия-монополиста			
	Сокращение объема производства		Сохранение объема производства	
Действия нового предприятия	Прибыль нового предприятия, млн ден.ед.	Прибыль предприятия-монополиста, млн ден.ед.	Прибыль нового предприятия, млн ден.ед.	Прибыль предприятия-монополиста, млн ден.ед.
Выход на рынок	4	8	-2	6
Отказ от выхода на рынок	-	-	0	12

Таким образом, можно ожидать, что при выходе на рынок новое предприятие получит прибыль в размере 4 млн ден.ед., при отказе от выхода на рынок - не получит прибыли. Решение, рекомендуемое для нового предприятия - выход на рынок.

2. АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Общая характеристика и классификация эконометрических моделей

Эконометрические модели представляют собой один из видов экономико-математических моделей, применяемых для анализа и оптимизации управленческих решений. Эконометрическая модель – это уравнение (или система уравнений), выражающее связь некоторого показателя Y с факторами $X_1, X_2, \ldots, X_M$, влияющими на этот показатель:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_M).$$

Факторы, влияющие на эффективность решения, называются также входными переменными (входными величинами, или независимыми переменными). Величина, характеризующая эффективность решения, называется выходной переменной (выходной величиной, или зависимой переменной). Во многих случаях в качестве входных переменных рассматриваются величины, на которые можно влиять: затраты ресурсов на реализацию решения, объемы производства, цены на выпускаемую продукцию и т.д. В качестве выходной переменной может использоваться прибыль, выручка, объем производства, процент брака и другие показатели, характеризующие эффективность принимаемого решения и зависящие от входных величин.

Классификация эконометрических моделей приведена в табл.2.1.

Значительная часть управленческих решений связана с распределением ресурсов. При выборе таких решений во многих случаях целью является максимизация объема производства или достижение заданного объема производства. Поэтому во многих эконометрических моделях входными переменными являются величины расхода ресурсов, а выходной переменной – объем выпускаемой продукции. При этом как входные, так и выходная переменные могут быть выражены как в денежном, так и в натуральном выражении. Эконометрические модели такого вида называются *производственными функциями*.

Особый класс эконометрических моделей составляют *трендовые модели* Y=f(t), отражающие изменение выходной величины во времени. Трендовые модели могут быть как линейными, так и нелинейными.

Эконометрические модели обычно применяются для решения следующих задач:

- определение тенденции изменения выходной переменной (рост, снижение, периодическое изменение и т.д.);

- определение вида зависимости выходной переменной от входных;
- прогнозирование значения выходной переменной при заданных значениях входных переменных;
- определение значений входных переменных, необходимых для достижения заданного значения выходной переменной;
- использование эконометрических моделей в качестве ограничений и/или целевых функций в задачах оптимизации.

Таблица 2.1

Классификация эконометрических моделей

Признак для классификации	Виды эконометрических моделей	Общий вид модели
Количество входных переменных	С одной входной переменной	$Y = f(X)$
	С несколькими входными переменными	$Y = f(X_1,X_2,...,X_M)$
Вид используемого уравнения	Линейные	$Y = A_0+A_1X_1+ A_2X_2+…+ A_MX_M$
	Нелинейные	Степенные: $Y = A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2} \cdot … \cdot X_M^{A_M}$
		Показательные: $Y = A_0 \cdot A_1^{X_1} \cdot A_2^{X_2} \cdot … \cdot A_M^{X_M}$
		Полиномиальные: $Y=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=0}^{S}\sum_{l=0}^{S} A_{ijkl} \cdot X_i^k X_j^l$, где S – некоторое число (степень модели)
		Смешанные и т.д.

Важно отметить, что в эконометрической модели *невозможно* учесть *все* факторы, влияющие на выходную величину. Поэтому эконометрические модели отражают лишь тенденции связи между исследуемыми величинами, но не позволяют *в точности* определить, каким будет значение выходной величины при определенных значениях входных величин. Например, можно построить эконометрическую модель связи между затратами на рекламу некоторой продукции и объемом ее сбыта. Если эта модель будет достаточно точной, то с ее помощью можно будет определить, каким будет *средний* объем сбыта продукции при определенных затратах на рекламу (например, при затратах в размере 20 тыс. ден.ед.). Однако *точно* установить, каким будет объем сбыта при затратах на рекламу в размере 20 тыс. ден.ед., невозможно, так как на объем сбыта влияет не только размер затрат на рекламу, но и многие другие факторы.

В большинстве случаев эконометрические модели составляются на основе статистических данных о значениях входных и выходных переменных. Для построения эконометрической модели могут использоваться данные, собранные за длительный период времени (например, за несколько лет), или данные, собранные на определенный момент времени по нескольким объектам (например, по нескольким предприятиям). Построение эконометрической модели включает следующие основные этапы: 1) выбор вида эконометрической модели (линейная, степенная и т.д.); 2) определение коэффициентов эконометрической модели ($A_0, A_1,\ldots,A_M$); 3) проверку адекватности эконометрической модели.

Основным методом, применяемым для определения коэффициентов эконометрических моделей, является **метод наименьших квадратов**. Рассмотрим сущность этого метода на примере построения эконометрической модели с одной входной переменной.

Пусть из статистических данных известно N значений входной переменной X (обозначим их как $x_1,x_2,\ldots,x_N$) и соответствующие им значения выходной переменной Y ($y_1,y_2,\ldots,y_N$). Предполагается, что переменная Y зависит от X. Требуется построить эконометрическую модель зависимости между ними: Y=f(X). Например, если требуется построить линейную эконометрическую модель, то она будет иметь вид $Y=A_0+A_1\cdot X$. Построение модели состоит в определении значений коэффициентов (для линейной модели это коэффициенты A_0 и A_1).

Принцип работы метода наименьших квадратов состоит в следующем. Очевидно, что если модель связи между переменными X и Y будет построена правильно, то при подстановке в нее имеющихся значений X ($x_1,x_2,\ldots,x_N$) должны получаться значения Y, близкие к имеющимся ($y_1,y_2,\ldots,y_N$). Поэтому уравнение модели Y=f(X) строится таким образом, чтобы обеспечить минимальное значение следующей величины:

$$Q_e = \sum_{j=1}^{N}(y_j - \hat{y}_j)^2, \tag{2.1}$$

где $\hat{y}_j$, j=1,…,N – модельные значения выходной переменной Y, полученные путем подстановки значений x_j, j=1,…,N, в построенное уравнение Y=f(X). Таким образом, модель, построенная по методу наименьших квадратов, в максимальной степени соответствует исходным данным. Величина Q_e называется остаточной суммой квадратов, или суммой квадратов ошибки. Реализация метода наименьших квадратов может быть различной в зависимости от вида эконометрической модели.

2.2. Выбор вида эконометрической модели

В некоторых случаях вид эконометрической модели можно считать известным. Например, для описания зависимости объема производства от расхода ресурсов часто применяется степенная модель. Такая модель называется производственной функцией Кобба-Дугласа. Построение и применение таких моделей будет подробно рассмотрено в подразделе 2.7.

Во многих случаях проверяется возможность построения линейной эконометрической модели. Широкое применение этих моделей объясняется тем, что методы прогнозирования выходных величин при заданных входных величинах, а также методы проверки адекватности в основном разработаны именно для линейных моделей.

Пример. В ходе разработки мероприятий по повышению качества продукции некоторой отрасли исследуется зависимость между затратами на входной контроль (проверку качества сырья) и потерями предприятий из-за брака. Анализируются данные по шести предприятиям, приведенные в табл.2.2.

Таблица 2.2

Предприятие	1	2	3	4	5	6
Затраты на входной контроль, тыс.ден.ед	15	8	14	12	10	7
Потери от брака, тыс.ден.ед.	20	28	23	27	28	30

Требуется выяснить, имеется ли линейная связь между исследуемыми величинами.

Здесь затраты на входной контроль – входная (независимая) переменная X, а потери от брака - выходная переменная Y, характеризующая эффективность контроля качества. Для каждой из переменных известно по шесть значений (N=6). Например, на первом предприятии затраты на входной контроль за некоторый период времени составили 15 тыс. ден.ед.; потери этого предприятия от брака (за этот же период) составили 20 тыс. ден.ед.

Чтобы выяснить, существует ли линейная связь между исследуемыми величинами, находится коэффициент корреляции:

$$R_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j y_j - N\overline{X}\overline{Y}}{(N-1)\sqrt{S_x^2 \cdot S_y^2}}, \qquad (2.2)$$

где $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ - средние выборочные значения исследуемых величин:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j, \qquad \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j; \qquad (2.3)$$

S_x^2, S_y^2 - выборочные дисперсии исследуемых величин:

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \overline{X})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(y_j - \overline{Y})^2 . \qquad (2.4)$$

Найдем коэффициент корреляции для рассматриваемого примера:

$\overline{X}$ = (15+8+14+12+10+7)/6 = 11;

$\overline{Y}$ = (20+28+23+27+28+30)/6 = 26;

$S_x^2 = ((15-11)^2 + (8-11)^2 + ...+ (7-11)^2)/5 = 10,4;$

$S_y^2 = 14;$

$$\sum_{j=1}^{N} X_j \cdot Y_j = 15 \cdot 20 + 8 \cdot 28 + 14 \cdot 23 + 12 \cdot 27 + 10 \cdot 28 + 7 \cdot 30 = 1660.$$

Коэффициент корреляции: $R_{xy} = -0.93$.

Если коэффициент корреляции близок к 1, то можно считать, что между исследуемыми величинами имеется линейная связь, причем с увеличением X увеличивается Y. Если коэффициент корреляции близок к -1, то линейная связь существует, но с ростом X уменьшается Y. Если коэффициент корреляции близок к нулю, то величины X и Y не связаны друг с другом, или связь между ними нелинейная.

Чтобы выяснить, можно ли считать коэффициент корреляции значимым (т.е. близким к 1 или к –1), определяется следующий критерий:

$$T = \left| R_{xy} \right| \sqrt{\frac{N-2}{1-R_{xy}^2}}. \qquad (2.5)$$

Этот критерий сравнивается с величиной, определяемой по таблицам распределения Стьюдента и обозначаемой как $T_{табл}$ или $T_{\alpha/2;s}$. Для определения $T_{табл}$ назначается величина α (обычно - из диапазона от 0,05 до 0,1), называемая *уровнем значимости*. Находится также параметр распределения Стьюдента, называемый *числом степеней свободы* (s). В задаче, связанной с проверкой значимости коэффициента корреляции, s=N-2.

Если выполняется условие $T > T_{\alpha/2;s}$, то коэффициент корреляции можно считать значимым. Это означает, что с вероятностью, равной $1-\alpha$, можно считать, что между исследуемыми величинами имеется *линейная* связь. Если $T < T_{\alpha/2;s}$, то коэффициент корреляции не является значимым. В этом случае можно считать, что *линейной* связи между исследуемыми величинами нет.

В данном примере (при $\alpha=0,05$, s=N-2=4) T=4,99, $T_{\alpha/2;s} = T_{0,025;4} = 2,776$. Можно считать, что линейная связь между затратами на входной контроль и потерями от брака существует. Как и следовало ожидать, с увеличением затрат на входной контроль потери от брака снижаются. Таким образом, зависимость потерь от брака (Y) от затрат на входной контроль (X) может быть описана линейной эконометрической моделью: $Y=A_0+A_1 \cdot X$.

Если эконометрическая модель содержит только одну входную переменную (X), и коэффициент корреляции между исследуемыми величинами оказывается незначимым (т.е. линейная связь отсутствует), то для выбора вида эконометрической модели можно воспользоваться *диаграммой рассеивания*, т.е. графиком, на котором в виде точек указаны пары значений (x_j, y_j).

2.3. Построение и проверка линейных эконометрических моделей с одной входной переменной

2.3.1. Алгоритм построения и проверки модели

Пример. Требуется построить линейную модель зависимости потерь от брака (Y) от затрат на входной контроль (X) по данным из примера, приведенного в подразделе 2.2.

Как отмечено выше, основным методом построения эконометрических моделей является метод наименьших квадратов. Можно доказать, что значение суммы квадратов ошибки (2.1) будет наименьшим, если коэффициенты линейной модели A_0 и A_1 будут найдены путем решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &A_0 \cdot N + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_j = \sum_{j=1}^{N} y_j \\ &A_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_j + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_j^2 = \sum_{j=1}^{N} x_j \cdot y_j. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Составим такую систему уравнений для рассматриваемого примера:

$$\begin{aligned} 6 \cdot A_0 + 66 \cdot A_1 &= 156 \\ 66 \cdot A_0 + 778 \cdot A_1 &= 1660. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, получим: $A_0 = 37{,}85$, $A_1 = -1{,}08$. Таким образом, зависимость между затратами на входной контроль (X) и потерями от брака (Y) может быть выражена следующей эконометрической моделью: $Y = 37{,}85 - 1{,}08 \cdot X$.

Построенная модель должна быть проверена на адекватность, т.е. на соответствие исходным данным. Модель является адекватной (достаточно точной), если фактические величины y_j (j=1,...,N), известные из статистических данных, близки к модельным значениям $\hat{y}_j$, определяемым путем подстановки известных значений x_j (j=1,…,N) в построенную модель.

Чтобы выполнить проверку модели на адекватность, требуется найти модельные значения $\hat{y}_j$ (j=1,…,N), а также следующие вспомогательные величины:

$$Q_r = \sum_{j=1}^{N} (\hat{y}_j - \overline{Y})^2, \qquad (2.7)$$

$$Q_e = \sum_{j=1}^{N} (y_j - \hat{y}_j)^2.$$

Величина Q_r называется *суммой квадратов, обусловленной моделью*, а величина Q_e - *остаточной суммой квадратов*, или *суммой квадратов* *ошибки* (эта величина уже упоминалась выше при описании метода построения модели).

Для проверки модели на адекватность находится следующий критерий:

$$F = \frac{Q_r \,/\, k}{Q_e \,/(N - k - 1)}, \qquad (2.8)$$

где k - количество коэффициентов модели, не считая A_0 (для модели с одной входной переменной k=1).

Этот критерий сравнивается с величиной, определяемой по таблицам распределения Фишера и обозначаемой как $F_{табл}$ или $F_{\alpha,s1,s2}$. Для определения $F_{\alpha,s1,s2}$ назначается величина α (обычно - из диапазона от 0,05 до 0,1), называемая уровнем значимости. Находятся также параметры распределения Фишера, называемые числами степеней свободы (s_1, s_2). В задачах, связанных с проверкой адекватности линейных моделей, $s_1 = k$, $s_2 = N\text{-}k\text{-}1$.

Если выполняется условие $F > F_{\alpha,s1,s2}$, то построенная линейная модель является адекватной, т.е. она достаточно точно описывает связь между исследуемыми величинами.

Выполним проверку адекватности для построенной эконометрической модели, описывающей связь потерь от брака с затратами на входной контроль.

Модельные значения Y:

$\bar{y}_1$=37,85-1,08·15=21,69; $\bar{y}_2$=37,85-1,08·8=29,23;
$\bar{y}_3$=22,77; $\bar{y}_4$=24,92; $\bar{y}_5$=27,08; $\bar{y}_6$=30,31.

Сумма квадратов, обусловленная моделью:

$Q_r = (21{,}69\text{-}26)^2 + (29{,}23\text{-}26)^2 + ... +(30{,}31\text{-}26)^2 = 60{,}31.$

Сумма квадратов ошибки:

Q_e = (21,69-20)2 + (29,23-28)2 +...+ (30,31-30)2= 9,69.

Критерий для проверки адекватности модели:

$$F = \frac{60{,}31/1}{9{,}69/(6-1-1)} = 24{,}89.$$

Числа степеней свободы распределения Фишера: s_1=1, s_2=4. По значениям уровня значимости α=0,05 и числам степеней свободы s_1=1, s_2=4 из таблиц распределения Фишера находится $F_{\alpha;s1;s2} = F_{0,05;1;4}$ =7,71.

Так как $F > F_{\alpha;s1;s2}$, можно считать, что модель Y = 37,85-1,08·X достаточно точно описывает зависимость Y (потери от брака) от X (затраты на входной контроль).

Для оценки точности модели применяется также величина, называемая коэффициентом детерминации:

$$R^2 = \frac{Q_r}{Q_r + Q_e}. \qquad (2.9)$$

Эта величина показывает, какая часть разброса значений выходной переменной Y (т.е. различий между величинами $y_1, y_2, \ldots, y_N$) объясняется разбросом значений входной переменной X (т.е. различиями между величинами $x_1, x_2, \ldots, x_N$). Для данного примера R^2=0,86. Это означает, что различия в значениях потерь от брака на 86% объясняются различиями в значениях затрат на входной контроль, и на 14% - другими факторами, не учтенными при построении эконометрической модели.

Примечание. Коэффициент детерминации применяется для выбора наиболее точной модели в случаях, когда вид модели заранее точно не известен, и строится несколько моделей (например, линейная модель и несколько нелинейных).

2.3.2. Построение и проверка модели с использованием табличного процессора Excel

В табличном процессоре Excel имеются функции, позволяющие выполнять большую часть действий по построению и проверке линейных эконометрических моделей.

Рассмотрим построение эконометрической модели, описывающей связь потерь от брака с затратами на входной контроль, в среде табличного процессора Excel. Пусть исходные данные введены в рабочий лист Excel, как показано на рис.2.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Затраты на входной контроль	15	8	14	12	10	7
2	Потери от брака	20	28	23	27	28	30

Рис.2.1. Рабочий лист Excel с исходными данными для построения эконометрической модели

Примечание. При больших объемах данных удобнее вводить их не в строку, а в столбец.

Чтобы выяснить, можно ли использовать линейную модель для описания связи между исследуемыми величинами, найдем коэффициент корреляции. В Excel для этого применяется функция КОРРЕЛ. В рассматриваемом примере требуется в какой-либо свободной ячейке ввести следующее: =КОРРЕЛ(B1:G1;B2:G2). Здесь B1:G1 и B2:G2 - диапазоны ячеек, в которых располагаются исходные данные.

Для проверки значимости коэффициента корреляции необходимо найти критерий T по формуле (2.5) и сравнить его с табличным значением $T_{\alpha/2;s}$.

Для расчета критерия T необходимо в любую свободную ячейку ввести формулу, реализующую расчет по формуле (2.5). При этом необходимо помнить, что все формулы в Excel начинаются со знака =. Величина $T_{\alpha/2;s}$ находится с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР со следующими аргументами (для данного примера): Вероятность - 0,05, Степени свободы - 4.

Примечание. Для получения величины $T_{\alpha/2;s}$ с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР в качестве аргумента "Вероятность" необходимо указывать именно значение α, а не $\alpha/2$ (в данном примере – именно 0,05, а не 0,025).

Построение линейной эконометрической модели на основе метода наименьших квадратов, а также большая часть расчетов для ее проверки выполняются с помощью функции ЛИНЕЙН. Расчеты выполняются в следующем порядке.

1. С помощью "мыши" выделить группу ячеек из *двух* столбцов (по числу определяемых коэффициентов модели) и *пяти* строк (для того, чтобы получить не только коэффициенты модели, но и данные для ее проверки).
2. Выбрать из меню функцию ЛИНЕЙН (она находится в группе СТАТИСТИЧЕСКИХ функций).
3. В появившемся окне аргументов функции указать следующее:

   Известные значения Y: B2:G2
   Известные значения X: B1:G1
   Константа: 1
   Статистика: 1

После указания всех аргументов НЕ НАЖИМАТЬ кнопку ОК!

Аргумент "Константа", равный 1, указывает, что при построении модели необходимо найти коэффициент A_0 (если указать для этого аргумента значение 0, то строится модель $Y=A_1 \cdot X$, т.е. коэффициент A_0 считается равным нулю). Аргумент "Статистика", равный 1, означает, что необходимо вычислить не только коэффициенты A_0 и A_1, но и данные для проверки модели.

4. Нажать *комбинацию* клавиш CTRL-SHIFT-ENTER. Результаты функции ЛИНЕЙН выводятся в выбранные ячейки.

Пусть для вычисления функции ЛИНЕЙН были выбраны ячейки C4:D8. В результате рабочий лист будет иметь примерно такой вид, как показано на рис.2.2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Затраты на входной контроль	15	8	14	12	10	7
2	Потери от брака	20	28	23	27	28	30
3							
4			-1,08	37,85			
5			0,22	2,46			
6			0,86	1,56			
7			24,89	4,00			
8			60,31	9,69			
9							

Рис.2.2. Результаты применения функции ЛИНЕЙН

Смысл величин, полученных в результате использования функции ЛИНЕЙН, показан на рис.2.3. Прочерками обозначены вспомогательные величины, не рассматриваемые в данном пособии.

	A	B	C	D	E	F	G
…							
4			A_1	A_0			
5			-	-			
6			R^2	-			
7			F	s_2			
8			Q_r	Q_e			
9							

Рис.2.3. Смысл результатов применения функции ЛИНЕЙН

Здесь A_1 и A_0 - коэффициенты модели. Следует обратить внимание, что сначала указывается коэффициент A_1, а затем - A_0. Смысл величин R^2, Q_r, Q_e, s_2 и F рассмотрен выше.

Как показано в п. 2.3.1, для проверки адекватности модели необходимо сравнить величину критерия F, найденную по формуле (2.8), с табличной величиной $F_{\alpha;s1;s2}$, определяемой по таблицам распределения Фишера. Значение критерия F имеется в результатах функции ЛИНЕЙН (см. рис.2.3). Для определения $F_{\alpha;s1;s2}$ в Excel используется функция FРАСПОБР со следующими аргументами (для данного примера):

Вероятность: 0,05

Степени_свободы1: 1

Степени_свободы2: 4

В результате применения этой функции будет получено значение $F_{\alpha;s1;s2} = F_{0,05;1;4} = 7,71$. Как указано выше, выполнение условия $F > F_{\alpha;s1;s2}$ означает, что построенная модель является адекватной, т.е. соответствует фактическим данным.

2.4. Применение линейной эконометрической модели с одной входной переменной

Основные возможности применения линейных эконометрических моделей следующие:

- интерпретация модели;
- прогнозирование значения выходной переменной при заданном значении входной переменной;
- определение значения входной переменной, необходимого для получения заданного значения выходной переменной.

2.4.1. Интерпретация модели

По эконометрической модели легко установить направление связи между входной и выходной переменными. Например, из модели, описывающей связь потерь от брака с затратами на входной контроль ($Y = 37{,}85 - 1{,}08 \cdot X$), видно, что чем выше затраты на входной контроль (X), тем ниже потери от брака (Y).

Коэффициент A_1 показывает, на сколько *в среднем* изменится выходная переменная Y при увеличении входной переменной X на единицу. Например, в построенной выше модели коэффициент A_1=-1,08 означает, что увеличение затрат на входной контроль на одну тысячу денежных единиц позволяет снизить потери от брака в среднем на 1,08 тыс. ден.ед.

Коэффициент A_0 представляет собой значение выходной переменной Y при X=0. Например, в рассматриваемой модели A_0=37,85 - это средние потери от брака (в тыс. ден.ед.) при *отсутствии* затрат на входной контроль.

Примечание. В некоторых эконометрических моделях коэффициент A_0 не имеет конкретного смысла. Это относится прежде всего к случаям, когда входная переменная X по смыслу задачи не может быть равной нулю. Например, если бы была построена линейная модель зависимости прибыли предприятия (Y) от численности работающих (X), то для коэффициента A_0 в такой модели нельзя было бы указать конкретный смысл, так как величина X (численность работающих) не может быть равной нулю.

В некоторых случаях требуется проанализировать влияние изменения переменной X на изменение Y не в абсолютных величинах, а в процентах. Для этого используется величина, называемая коэффициентом эластичности:

$$E = A_1 \cdot \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}. \qquad (2.10)$$

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем изменяется переменная Y при увеличении X на один процент.

Для приведенного примера коэффициент эластичности находится следующим образом: $E = -1.08 \cdot 11/26 = -0.46$. Это означает, что повышение расходов на входной контроль на 1% позволяет снизить потери от брака в среднем на 0,46%.

2.4.2. Прогнозирование значения выходной переменной при заданном значении входной переменной

Эконометрическая модель может применяться для прогнозирования значения входной переменной при известных значениях входных переменных.

Чтобы найти *среднее* ожидаемое значение выходной переменной Y, достаточно подставить в модель известное значение входной переменной X.

Рассмотрим решение задачи прогнозирования выходной переменной для примера, приведенного выше. Пусть на некотором предприятии предполагается выделить на входной контроль 17 тыс. ден.ед. Можно ожидать, что потери предприятия, связанные с браком, составят в среднем $37{,}85-1{,}08 \cdot 17=19{,}49$ тыс. ден.ед.

Следует обратить внимание, что при подстановке входной величины в эконометрическую модель будет получено *среднее* ожидаемое значение выходной величины. Для приведенного примера это означает следующее. Пусть *на большом количестве предприятий* будет затрачено на входной контроль по 17 тыс. ден.ед. Конечно, при этом предполагается, что другие условия (объемы производства, используемые технологии и т.д.) на этих предприятиях примерно одинаковы. Тогда потери этих предприятий, связанные с браком, будут составлять *в среднем* по 19,49 тыс. ден.ед. Однако на *каждом* из этих предприятий потери от брака будут отличаться от величины 19,49 тыс. ден.ед., и эти отличия могут быть значительными. Поэтому представляют интерес прогнозы выходной величины, полученные с заданной точностью, или интервальные оценки ожидаемой величины.

Границы диапазона, в котором будет находиться выходная переменная Y при заданном значении входной переменной X_0 с заданной вероятностью P, находятся по следующей формуле:

$$Y_0 \pm T_{\alpha/2,s} \cdot \sqrt{\frac{Q_e}{N-2}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{N}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum_{j=1}^{N} x_j^2 - N \cdot \overline{X}^2}}, \tag{2.11}$$

где Y_0 – среднее ожидаемое значение выходной переменной, найденное путем подстановки значения X_0 в построенную линейную эконометрическую модель;

$T_{\alpha/2;s}$ – величина, определяемая по таблицам распределения Стьюдента по уровню значимости α=1-P и числу степеней свободы s=N-2;

Q_e – сумма квадратов ошибки, найденная по формуле (2.1);

$\overline{X}$ - среднее значение входной переменной, найденное по формуле (2.3).

Пусть для примера, рассмотренного выше, требуется *с точностью 95%* найти ожидаемые потери от брака при затратах на входной контроль в размере 17 тыс. ден.ед.

В данном примере X_0=17; P=0,95. Большинство величин, необходимых для определения диапазона выходной переменной по формуле (2.11), найдены выше: Y_0=37,85-1,08·17=19,49; $T_{\alpha/2;s}$=2,776 (для α=1-P=0,05, s=6-2=4); Q_e=9,69; $\overline{X}$=11. Найдем сумму квадратов значений входной величины: $\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = 15^2+8^2+14^2+12^2+10^2+7^2 = 778$. Подставив эти величины в формулу (2.11), получим интервал 19,49 ± 5,89 = (13,6; 25,38). Это означает, что при расходах на входной контроль, равных 17 тыс. ден.ед., потери от брака с вероятностью 95% составят не менее 13,6 и не более 25,38 тыс. ден.ед.

2.4.3. Определение значения входной переменной для получения заданного значения выходной переменной

Эконометрическая модель может применяться для определения значений входных переменных, необходимых для достижения заданного значения выходной переменной.

Рассмотрим решение такой задачи для примера, приведенного выше. Пусть требуется найти, сколько средств следует выделить на входной контроль, чтобы потери от брака составили не более 25 тыс. ден.ед.

В данной задаче задано значение выходной переменной: Y=25. Требуется найти значение входной переменной X. Модель связи исследуемых величин построена выше: Y=37,85-1,08·X. Легко определить, что для Y=25 входная переменная X должна иметь значение X=11,9. Таким образом, чтобы потери от брака *в среднем* составляли 25 тыс. ден.ед., необходимо выделять на входной контроль 11,9 тыс. ден.ед.

Однако, как отмечено в п.2.4.2, таким образом можно определять только *средние* значения исследуемых величин. В данном примере это означает, что при затратах на входной контроль, равных 11,9 тыс. ден.ед, *средние* потери от брака составят 25 тыс. ден.ед.; однако в разных случаях величина потерь от брака будет различной (в том числе и большей, чем 25 тыс. ден.ед.). Поэтому представляет интерес значение входной переменной X, при котором выходная переменная Y будет *с заданной вероятностью* находиться в некотором желаемом диапазоне.

Значение X, при котором выходная переменная Y с заданной вероятностью примет значение *не меньше* заданной величины Y_0, находится путем решения следующего уравнения:

$$A_0 + A_1 \cdot X - T_{\alpha,s} \cdot \sqrt{\frac{Q_e}{N-2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(X-\overline{X})^2}{\sum\limits_{j=1}^{N} x_j^2 - N \cdot \overline{X}^2}} = Y_0. \qquad (2.12)$$

Значение X, при котором выходная переменная Y с заданной вероятностью примет значение *не больше* заданной величины Y_0, находится путем решения следующего уравнения:

$$A_0 + A_1 \cdot X + T_{\alpha,s} \cdot \sqrt{\frac{Q_e}{N-2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(X-\overline{X})^2}{\sum\limits_{j=1}^{N} x_j^2 - N \cdot \overline{X}^2}} = Y_0 \qquad (2.13)$$

Смысл всех величин, используемых в уравнениях (2.12) и (2.13), показан выше.

Примечание. В уравнениях (2.12) и (2.13) используется именно табличная величина $T_{\alpha;s}$, а не $T_{\alpha/2;s}$.

Из этих уравнений находится величина X. Так как эти уравнения достаточно сложны, они решаются численными методами (или просто подбором значения X с помощью программных средств).

Пусть для рассматриваемого примера требуется найти, сколько средств необходимо выделить на входной контроль, чтобы с вероятностью 95% потери от брака *не превысили* 25 тыс. ден.ед. Величина расходуемых средств X находится путем решения уравнения (2.13). Чтобы составить это уравнение, из таблиц распределения Стьюдента найдем величину $T_{\alpha;s} = T_{0,05;4}$; она равна 2,132. Все остальные величины, необходимые для составления уравнения, найдены выше. Уравнение будет иметь следующий вид:

$$37{,}85 - 1{,}08 \cdot X + 2{,}132 \cdot \sqrt{\frac{9{,}69}{6-2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{6} + \frac{(X-11)^2}{778 - 6 \cdot 11^2}} = 25.$$

Рассмотрим решение этого уравнения средствами табличного процессора Excel. Все величины, необходимые для составления этого уравнения, также могут быть найдены средствами Excel. Определение коэффициентов модели (A_0 и A_1) показано выше (п.2.3.1, 2.3.2). Табличная величина $T_{\alpha;s}$ (для данного примера - $T_{0,05;4}$) находится с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР со следующими аргументами: Вероятность - 0,1, Степени свободы - 4. Для определения выборочного среднего значения и суммы квадратов величины X используются функции СРЗНАЧ и СУММКВ соответственно.

Примечание. Функция СТЬЮДРАСПОБР вычисляет табличное значение распределения Стьюдента для величины $\alpha/2$, где α - величина, указанная в качестве аргумента “Вероятность”. Поэтому для получения величины $T_{0,05;4}$ с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР в качестве аргумента “Вероятность” необходимо указывать именно значение 0,1, а не 0,05.

Пусть для удобства составления уравнения все величины, входящие в него, введены в рабочий лист Excel так, как показано на рис.2.4 (очевидно, что данные можно разместить и по-другому). Обозначения в рабочем листе (A0, A1 и т.д.) приведены только для удобства.

	A	B	C	D	E	F	G
…							
9	A0	A1	Ттабл	Qe	N	Xсредн	Сумма X^2
10	37,85	-1,08	2,132	9,69	6	11	778
11							

Рис.2.4. Рабочий лист Excel с исходными данными для определения значения входной переменной

Пусть значение X требуется получить в ячейке B12. Введем левую часть уравнения (2.13) в какую-либо свободную ячейку (например, B13) в виде следующей формулы:

=A10+B10*B12+C10*КОРЕНЬ(D10/(E10-2))*
КОРЕНЬ(1+1/E10+(B12-F10)^2/(G10-E10*F10^2))

Примечание. Формула вводится в одну строку.

Чтобы решить это уравнение, воспользуемся функцией "Подбор параметра" из меню "Сервис". В окне, появившемся при вызове этой функции, необходимо указать следующее:

Установить в ячейке: B13
Значение: 25
Изменяя значение ячейки: B12

Таким образом, при решении уравнения с помощью функции "Подбор параметра" в строке "Установить в ячейке" указывается ячейка с левой частью уравнения, в строке "Значение" - правая часть уравнения, в строке "Изменяя значение ячейки" - ячейка, где необходимо получить корень уравнения.

Нажав кнопку OK, в ячейке B13 получим значение 15,8. Это означает, что при выделении на входной контроль 15,8 тыс. ден.ед. потери от брака с вероятностью 0,95 (95%) не превысят величины 25 тыс. ден.ед. (или, другими словами, при затратах на входной контроль в размере 15,8 тыс. ден.ед. вероятность того, что потери от брака превысят 25 тыс. ден.ед., составляет только 5%).

Пусть требуется снизить потери от брака до величины не более 22 тыс. ден.ед. Найдем необходимую величину затрат на входной контроль. Задача решается так же, как показано выше; при использовании функции "Подбор параметра" в строке "Значение" вводится величина 22. В результате решения будет получено, что затраты на входной контроль должны составлять 19,63 тыс. ден.ед. Как и следовало ожидать, для снижения потерь от брака потребуется увеличить затраты на входной контроль.

2.5. Линейные эконометрические модели с несколькими входными переменными

2.5.1. Алгоритм построения и проверки модели

Линейная модель связи выходной переменной Y с входными переменными $X_1, X_2,…,X_M$ имеет следующий вид: $Y = A_0+A_1 \cdot X_1+ A_2 \cdot X_2+…+ A_M \cdot X_M$. Значения коэффициентов $A_0, A_1,..., A_M$ находятся по методу наименьших квадратов. Можно доказать, что сумма квадратов ошибки (2.1) будет минимальной, если коэффициенты $A_0, A_1,..., A_M$ определяются путем решения следующей системы из M+1 уравнения:

$$\begin{aligned}
&A_0 \cdot N + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j} + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j} + ... + A_M \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} = \sum_{j=1}^{N} y_j \\
&A_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j} + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j}^2 + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j} \cdot x_{2j} + ... + A_M \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j} \cdot x_{Mj} = \sum_{j=1}^{N} x_{1j} \cdot y_j \\
&A_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j} + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j} \cdot x_{1j} + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j}^2 + ... + A_M \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j} \cdot x_{Mj} = \sum_{j=1}^{N} x_{2j} \cdot y_j \qquad (2.14) \\
&... \\
&A_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} \cdot x_{1j} + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} \cdot x_{2j} + ... + A_M \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{Mj}^2 = \sum_{j=1}^{N} x_{Mj} \cdot y_j,
\end{aligned}$$

где x_{ij}, i=1,…,M, j=1,…,N – значения входных переменных, известные из статистических данных (таким образом, для каждой входной переменной должно быть известно N значений);

y_j, j=1,…,N – значения выходной переменной, также известные из статистических данных (при этом каждое значение выходной переменной y_j соответствует набору значений входных переменных $x_{1j}, x_{2j},…,x_{Mj}$).

Пример. При разработке мероприятий по повышению качества продукции некоторой отрасли анализируется эффективность двух видов контроля качества: входного контроля и контроля в процессе производства. Данные о затратах на эти виды контроля и о потерях от брака для шести предприятий приведены в табл.2.3.

Таблица 2.3

Предприятие	1	2	3	4	5	6
Затраты на входной контроль, тыс.ден.ед.	15	8	14	12	10	7
Затраты на контроль в процессе производства, тыс.ден.ед.	11	14	18	11	7	10
Потери от брака, тыс.ден.ед.	20	28	23	27	28	30

Требуется построить линейную модель связи потерь от брака с затратами на входной контроль и на контроль в процессе производства.

Здесь затраты на входной контроль и на контроль в процессе производства – входные (независимые) переменные. Обозначим их как X_1 и X_2. Потери от брака (как и в предыдущем примере) – выходная переменная Y. Линейная эконометрическая модель связи между исследуемыми величинами будет иметь вид: $Y=A_0+A_1 \cdot X_1+A_2 \cdot X_2$. Для определения коэффициентов A_0, A_1, A_2 по методу наименьших квадратов требуется составить систему из трех уравнений согласно формуле (2.14):

$$A_0 \cdot N + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j} + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j} = \sum_{j=1}^{N} y_j$$

$$A_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j} + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j}^2 + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{1j} \cdot x_{2j} = \sum_{j=1}^{N} x_{1j} \cdot y_j$$

$$A_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j} + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j} \cdot x_{1j} + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{2j}^2 = \sum_{j=1}^{N} x_{2j} \cdot y_j.$$

Для рассматриваемого примера эта система уравнений будет иметь следующий вид:

$$6 \cdot A_0 + 66 \cdot A_1 + 71 \cdot A_2 = 156$$

$$66 \cdot A_0 + 778 \cdot A_1 + 801 \cdot A_2 = 1660$$

$$71 \cdot A_0 + 801 \cdot A_1 + 911 \cdot A_2 = 1819.$$

Решив эту систему уравнений, получим: $A_0 = 38{,}5$; $A_1 = -1{,}04$; $A_2 = -0{,}09$. Таким образом, зависимость потерь от брака (Y) от затрат на входной контроль (X_1) и затрат на контроль в процессе производства (X_2) может быть выражена следующей эконометрической моделью: $Y = 38{,}5 - 1{,}04 \cdot X_1 - 0{,}09 \cdot X_2$. Проверка модели на адекватность выполняется точно так же, как и для моделей с одной входной переменной.

Сначала находятся модельные значения выходной переменной $\hat{y}_j$, j=1,…,6. Для этого известные значения входных переменных, приведенные в табл.2.3, подставляются в построенную модель. Например, $\hat{y}_1$=38,5-1,04·15-- 0,09·11 = 21,9.

По формулам (2.7) находятся величины Q_r (сумма квадратов, обусловленная моделью) и Q_e (сумма квадратов ошибки). Для данного примера Q_r=60,78; Q_e=9,22. По формуле (2.8) находится значение критерия F для проверки адекватности модели: F=9,89 (при вычислении F используется значение k=2, так как построенная модель содержит два коэффициента, не считая A_0).

Критерий F необходимо сравнить с величиной, определяемой из таблиц распределения Фишера ($F_{\alpha;s1;s2}$). Для уровня значимости α=0,05 и числа степеней свободы s_1=k=2, s_2=N-k-1=3, из таблиц распределения Фишера находится значение $F_{\alpha;s1;s2} = F_{0,05;2;3}$ = 9,55. Так как условие $F > F_{\alpha;s1;s2}$ выполняется, можно считать, что построенная модель является адекватной, т.е. достаточно точно описывает связь потерь от брака с затратами на входной контроль и на контроль в процессе производства.

2.5.2. Построение и проверка модели с использованием табличного процессора Excel

Для построения линейной эконометрической модели удобно воспользоваться табличным процессором Excel (см. п. 2.3.2). Пусть исходные данные для построения модели введены в рабочий лист Excel, как показано на рис.2.5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Затраты на входной контроль	15	8	14	12	10	7
2	Затраты на контроль в процессе производства	11	14	18	11	7	10
3	Потери от брака	20	28	23	27	28	30

Рис.2.5. Рабочий лист Excel с исходными данными для построения линейной эконометрической модели с двумя входными переменными

Для построения модели воспользуемся функцией ЛИНЕЙН. Сначала необходимо с помощью "мыши" выделить группу ячеек из *трех* столбцов (по числу определяемых коэффициентов модели) и *пяти* строк (для того, чтобы получить данные для проверки модели). Затем вводится функция ЛИНЕЙН со следующими аргументами:

Известные значения Y: B3:G3
Известные значения X: B1:G2
Константа: 1
Статистика: 1

После нажатия *комбинации* клавиш CTRL-SHIFT-ENTER результаты функции ЛИНЕЙН выводятся в выбранные ячейки.

Пусть для вычисления функции ЛИНЕЙН были выбраны ячейки B5:D9. Результаты будут иметь примерно такой вид, как показано на рис.2.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Затраты на входной контроль	15	8	14	12	10	7
2	Затраты на контроль в процессе производства	11	14	18	11	7	10
3	Потери от брака	20	28	23	27	28	30
4							
5		-0,09	-1,04	38,50			
6		0,22	0,26	3,24			
7		0,87	1,75	#Н/Д			
8		9,89	3,00	#Н/Д			
9		60,78	9,22	#Н/Д			

Рис.2.6. Результаты применения функции ЛИНЕЙН

Здесь в ячейках B5, C5, D5 указаны коэффициенты A_2, A_1, A_0 (именно в таком порядке). В ячейках B9 и C9 указаны величины Q_r и Q_e, в ячейке B8 – значение критерия F, в ячейке B7 – коэффициент детерминации. В ячейках с обозначениями #Н/Д не выводится никаких данных.

Величина $F_{\alpha;s1;s2}$, необходимая для проверки адекватности модели, находится с помощью функции FРАСПОБР со следующими аргументами (для данного примера):

Вероятность: 0,05

Степени_свободы1: 2

Степени_свободы2: 3

В результате применения этой функции будет получено значение $F_{\alpha;s1;s2}=F_{0,05;2;3}=9,55$. Эта величина сравнивается с F=9,89. Выполнение условия $F>F_{\alpha;s1;s2}$ означает, что построенная модель достаточно точна.

2.5.3. Применение модели

Возможности применения линейных эконометрических моделей с несколькими входными переменными в основном те же, что и для моделей с одной входной переменной.

Коэффициенты модели A_i (i=1,…,M) показывают, на сколько *в среднем* изменится выходная переменная Y при увеличении входной переменной X_i на единицу (при *неизменных* значениях остальных входных переменных). Например, в модели, описывающей связь потерь от брака с затратами на различные виды контроля качества (см. п.2.5.1), коэффициент A_1=-1,04 означает, что увеличение затрат на входной контроль на одну тысячу денежных единиц позволяет снизить потери от брака в среднем на 1,08 тыс. ден.ед. Коэффициент A_2=-0,09 означает, что увеличение затрат на контроль в процессе производства на тысячу денежных единиц позволяет снизить потери от брака только на 0,09 тыс. ден.ед. Из значений A_1 и A_2 можно сделать вывод, что входной контроль на предприятиях данной отрасли значительно эффективнее, чем контроль в процессе производства.

Коэффициент A_0 представляет собой приближенную оценку выходной переменной Y в случае, когда все входные переменные равны нулю. Для рассматриваемого примера A_0=38,5 - это средние потери от брака (в тыс. ден.ед.) при *отсутствии* затрат на входной контроль и на контроль в процессе производства.

На основе линейной эконометрической модели для каждой из входных переменных можно найти коэффициент эластичности:

$$E_i = A_i \cdot \frac{\overline{X}_i}{\overline{Y}}. \tag{2.15}$$

Для рассматриваемого примера E_1=-0,44, E_2=-0,04. Это означает, что повышение расходов на входной контроль на 1% позволяет снизить потери от брака в среднем на 0,44%. Повышение расходов на контроль в процессе производства на 1% приводит к снижению потерь от брака только на 0,04%.

Модель может применяться также для прогнозирования *среднего* значения выходной переменной при заданных значениях входных переменных. Пусть, например, предполагается расходовать на входной контроль 17 тыс. ден.ед., а на контроль в процессе производства - 12 тыс. ден.ед. Можно ожидать, что потери предприятия, связанные с браком, составят в среднем 38,5-1,04·17-0,09·12 = 19,74 тыс. ден.ед.

Линейные эконометрические модели могут применяться также в качестве целевых функций и/или ограничений в задачах оптимизации.

2.6. Трендовые модели

Трендовая модель Y=f(t) – это эконометрическая модель, отражающая тенденцию (тренд) изменения некоторой величины во времени. Входной переменной в трендовой модели является время (t), а выходной – некоторая величина, изменяющаяся во времени (Y). Трендовые модели могут быть как линейными, так и нелинейными.

Построение и применение трендовых моделей рассмотрим на следующем примере.

Пример. При составлении плана производства некоторого товара анализируется спрос на этот товар за последние 10 лет. Данные о спросе приведены в табл.2.4.

Таблица 2.4

Год	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Спрос, тыс. штук	212	218	247	243	266	302	328	319	342	356

Требуется построить модель, отражающую тенденцию изменения спроса на товар, и найти прогноз спроса на товар на очередной (2003) год с точностью 95%.

В качестве входной переменной при построении модели будем использовать номер года: первый год, для которого имеются данные, получает номер 1, второй – номер 2, и т.д. Исходные данные для построения модели приведены в табл.2.5.

Таблица 2.5

Номер года (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Спрос (Y), тыс. штук	212	218	247	243	266	302	328	319	342	356

Выясним, можно ли использовать линейную модель для описания изменения спроса за последние 10 лет. Для этого найдем коэффициент корреляции между номером года (t) и спросом (Y) по формуле (2.2). Для рассматриваемого примера $R_{ty} = 0,98$. Чтобы проверить значимость коэффициента корреляции, найдем критерий T по формуле (2.5): T=14,38. Этот критерий требуется сравнить с величиной, определяемой по таблицам распределения Стьюдента: $T_{\alpha/2;s} = T_{0,025;8} = 2,31$ (напомним, что здесь s=N-2=8 – число степеней свободы). Так как $T > T_{\alpha/2;s}$, значит, коэффициент корреляции значим. Изменение спроса на товар может быть описано линейной моделью.

Примечание. В данном примере проверка значимости коэффициента корреляции не обязательна, так как его значение (0,98) очень близко к 1.

Построим линейную модель зависимости спроса (Y) от номера года (t), как показано в п.2.3.1 или 2.3.2. Будет получена следующая модель: Y=189,47 +
+ 17,06·t.

Коэффициент 17,06 означает, что за последние 10 лет спрос на изделие увеличивался *в среднем* на 17,06 тыс. штук в год.

Найдем прогноз спроса на очередной год с точностью 95%. Для этого воспользуемся формулой (2.11). В качестве входной переменной (X) здесь используется номер года (t). Найдем величины, необходимые для применения этой формулы: $X_0=11$ (номер очередного года), $Y_0=189{,}47+17{,}06\cdot 11 =$

$= 377{,}13$; $N=10$; $T_{\alpha/2;s} = T_{0{,}025;8} = 2{,}31$; $Q_e = 929{,}3$; $\overline{X}=5{,}5$; $\sum_{j=1}^{10} x_j^2=385$.

Подставив эти величины в формулу (2.11), получим интервал $377{,}13\pm 27{,}11 =$ (350,02; 404,24). Это означает, что с вероятностью 95% спрос на данный товар в очередном (2003) году составит не менее 350,02 и не более 404,24 тыс. штук.

2.7. Нелинейные эконометрические модели. Производственные функции Кобба-Дугласа

Построение и применение нелинейных эконометрических моделей рассмотрим на примере производственных функций. *Производственная функция* – это эконометрическая модель, в которой входными переменными являются величины расхода ресурсов, а выходной переменной – объем выпускаемой продукции. При этом как входные, так и выходная величины могут быть выражены как в денежном, так и в натуральном выражении. Производственные функции широко применяются в качестве моделей производственных процессов для крупных экономических единиц (для крупных предприятий и объединений, регионов, экономики в целом).

Чаще всего применяется производственная функция Кобба-Дугласа – степенная эконометрическая модель следующего вида:

$$Y = A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2} \ldots \cdot X_M^{A_M}, \qquad (2.16)$$

где Y – величина, характеризующая результаты производства (обычно – объем производства);

$X_1, X_2, \ldots, X_M$ – факторы, влияющие на результаты производства (обычно – величины расхода ресурсов);

$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_M$ – коэффициенты, определяемые при построении производственной функции.

Как отмечено выше, основным методом построения эконометрических моделей является метод наименьших квадратов. Однако этот метод предназначен для построения линейных моделей. Поэтому нелинейные эконометрические модели обычно строятся в следующем порядке: 1) с помощью каких-либо математических преобразований выполняется переход к линейной модели; 2) выполняется построение линейной модели, т.е. определяются ее коэффициенты на основе метода наименьших квадратов; 3) выполняется переход к нелинейной эконометрической модели. Применяемые при этом математические преобразования могут быть различными в зависимости от вида эконометрической модели, которую требуется построить.

2.7.1. Алгоритм построения производственной функции Кобба-Дугласа

Пример. В ходе разработки мероприятий по повышению эффективности работы металлургических предприятий требуется построить модель зависимости объема производства от используемых ресурсов. Имеются данные об использовании ресурсов и объеме производства (в год) по шести предприятиям данной отрасли (см. табл.2.6).

Таблица 2.6

	1	2	3	4	5	6
Расход энергии, млн кВт·ч	700	500	800	400	600	1000
Используемое основное оборудование, шт	30	25	40	25	35	45
Трудовые ресурсы, тыс. человеко-дней	900	850	1500	700	1200	1600
Объем производства, млн т	98	70	146	68	100	118

Построим требуемую модель в виде производственной функции Кобба-Дугласа:

$$Y = A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2} \cdot .X_3^{A_3}, \qquad (2.17)$$

где Y – объем производства;

X_1, X_2, X_3 – используемые ресурсы (энергия, основное оборудование, трудовые ресурсы).

Производственная функция строится в следующем порядке.

1. Выполняется переход к линейной функции. Для этого выполняется логарифмирование производственной функции:

$$\ln Y = \ln A_0 + A_1 \cdot \ln X_1 + A_2 \cdot \ln X_2 + A_3 \cdot \ln X_3.$$

Введем обозначения: $\ln Y = Z$; $\ln A_0 = B_0$; $\ln X_i = U_i$ $(i=1,...,3)$.

Таким образом, выполнен переход к линейному уравнению:

$$Z = B_0 + A_1 \cdot U_1 + A_2 \cdot U_2 + A_3 \cdot U_3. \qquad (2.18)$$

Это уравнение представляет собой линейную модель зависимости выходной переменной Z от входных переменных U_1, U_2, U_3, т.е. модель зависимости *логарифма* выходной переменной Y от *логарифмов* входных переменных X_1, X_2, X_3.

2. Находятся значения новых переменных U_1, U_2, U_3 и Z (табл.2.7).

Таблица 2.7

Номер предприятия	1	2	3	4	5	6
$U_1 = \ln X_1$	6,55	6,21	6,68	5,99	6,40	6,91
$U_2 = \ln X_2$	3,40	3,22	3,69	3,22	3,56	3,81
$U_3 = \ln X_3$	6,80	6,75	7,31	6,55	7,09	7,38
$Z = \ln Y$	4,58	4,25	4,98	4,22	4,61	4,77

Здесь, например, 6,55 = ln 700.

3. На основе метода наименьших квадратов определяются коэффициенты линейной модели (2.18): B_0, A_1, A_2, A_3. Для этого по формулам (2.14) составляется следующая система уравнений:

$$B_0 \cdot N + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{1j} + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{2j} + A_3 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{3j} = \sum_{j=1}^{N} y_j$$

$$B_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{1j} + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{1j}^2 + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{1j} \cdot u_{2j} + A_3 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{1j} \cdot u_{3j} = \sum_{j=1}^{N} u_{1j} \cdot y_j$$

$$B_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{2j} + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{2j} \cdot u_{1j} + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{2j}^2 + A_3 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{2j} \cdot u_{3j} = \sum_{j=1}^{N} u_{2j} \cdot y_j$$

$$B_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{3j} + A_1 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{3j} \cdot u_{1j} + A_2 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{3j} \cdot u_{2j} + A_3 \cdot \sum_{j=1}^{N} u_{3j}^2 = \sum_{j=1}^{N} u_{3j} \cdot y_j.$$

Здесь N - количество имеющихся значений (в данном примере N=6). Для данного примера система уравнений для определения B_0, A_1, A_2, A_3 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
6 \cdot B_0 + 38{,}75 \cdot A_1 + 20{,}89 \cdot A_2 + 41{,}88 \cdot A_3 &= 27{,}41\\
38{,}75 \cdot B_0 + 250{,}76 \cdot A_1 + 135{,}27 \cdot A_2 + 270{,}94 \cdot A_3 &= 177{,}45\\
20{,}89 \cdot B_0 + 135{,}27 \cdot A_1 + 73{,}03 \cdot A_2 + 146{,}21 \cdot A_3 &= 95{,}77\\
41{,}88 \cdot B_0 + 270{,}94 \cdot A_1 + 146{,}21 \cdot A_2 + 292{,}87 \cdot A_3 &= 191{,}78.
\end{aligned}$$

Решив эту систему, получим: B_0 = -0,47; A_1 = 0,22; A_2 = 0,43; A_3 = 0,31. Таким образом, для производственной функции (2.17) найдены коэффициенты A_1, A_2, A_3.

4. Находится коэффициент производственной функции A_0:

$$A_0 = e^{B_0} = e^{-0,47} = 0,63.$$

Таким образом, коэффициенты производственной функции (2.17) найдены: A_0 = 0,63; A_1 = 0,22; A_2 = 0,43; A_3 = 0,31. Зависимость объема производства (Y) от расхода энергии (X_1), количества используемого оборудования (X_2) и трудовых ресурсов (X_3) может быть выражена следующей формулой:

$$Y = 0,63 \cdot X_1^{0,22} \cdot X_2^{0,43} \cdot X_3^{0,31}.$$

2.7.2. Построение производственной функции с использованием табличного процессора Excel

Табличный процессор Excel имеет встроенные функции для построения *линейных* моделей зависимости между исследуемыми величинами. Поэтому нелинейные эконометрические модели строятся в Excel в том же порядке, что и в алгоритме, рассмотренном в п.2.7.1: сначала выполняется переход к линейной модели, а затем - ее построение на основе метода наименьших квадратов.

Рассмотрим построение производственной функции средствами Excel для примера, приведенного в п.2.7.1. Пусть исходные данные введены в рабочий лист Excel, как показано на рис.2.7.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расход энергии (X1)	700	500	800	400	600	1000
2	Основное оборудование (X2)	30	25	40	25	35	45
3	Трудовые ресурсы (X3)	900	850	1500	700	1200	1600
4	Объем производства (Y)	98	70	146	68	100	118

Рис.2.7. Рабочий лист Excel с исходными данными для построения производственной функции Кобба-Дугласа

Для перехода к линейной модели выполним логарифмирование, используя для этого функцию LN. Результаты показаны на рис.2.8.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расход энергии (X1)	700	500	800	400	600	1000
2	Основное оборудование (X2)	30	25	40	25	35	45
3	Трудовые ресурсы (X3)	900	850	1500	700	1200	1600
4	Объем производства (Y)	98	70	146	68	100	118
5							
6	U1 = ln X1	6,55	6,21	6,68	5,99	6,40	6,91
7	U2 = ln X2	3,40	3,22	3,69	3,22	3,56	3,81
8	U3 = ln X3	6,80	6,75	7,31	6,55	7,09	7,38
9	Z = ln Y	4,58	4,25	4,98	4,22	4,61	4,77

Рис.2.8. Рабочий лист Excel с данными для перехода к линейной модели

Например, в ячейке B6 следует ввести формулу =LN(B1).

Для определения коэффициентов *линейной* модели (2.18) используем функцию ЛИНЕЙН. Построение выполняется в следующем порядке. С помощью "мыши" следует выделить *четыре* любых свободных ячейки, например, B11:E11. Затем следует выбрать из меню функцию ЛИНЕЙН (она находится в группе СТАТИСТИЧЕСКИХ функций). В окне аргументов функции требуется указать следующее:

Известные значения Y: B9:G9

Известные значения X: B6:G8

Константа: 1

Статистика: 1

После ввода аргументов функции *не нажимать* кнопку ОК. Для получения результата нажать *комбинацию* клавиш CTRL-SHIFT-ENTER. Результат будет иметь примерно такой вид, как показано на рис.2.9.

	A	B	C	D	E	F	G
…							
11		0,31	0,43	0,22	-0,47		

Рис.2.9. Результаты функции ЛИНЕЙН

В ячейках B11:E11 получены коэффициенты *линейной* модели (2.18): A_3, A_2, A_1, B_0 (именно в таком порядке). Для построения степенной производственной функции (2.17) требуется получить коэффициент A_0. Так как $B_0=\ln A_0$, для получения A_0 используем функцию EXP. Для этого в любой свободной ячейке необходимо ввести формулу =EXP(E11). Будет получен следующий результат: 0,63. Таким образом, построена производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Y = 0,63 \cdot X_1^{0,22} \cdot X_2^{0,43} \cdot X_3^{0,31}.$$

2.7.3. Применение производственных функций

Производственная функция может использоваться для прогнозирования результатов производства при заданном объеме используемых ресурсов. Для этого требуется подставить известные объемы использования ресурсов ($X_1,X_2,...,X_M$) в производственную функцию.

Пусть, например, имеется возможность использовать 500 млн кВт·ч энергии, 20 единиц оборудования и 950 тыс. человеко-дней трудовых ресурсов. Можно ожидать, что объем производства при таких затратах ресурсов будет близок к следующей величине:

$$Y = 0,63 \cdot 500^{0,22} \cdot 20^{0,43} \cdot 950^{0,31} = 75,1 \text{ млн тонн.}$$

На основе производственной функции Кобба-Дугласа легко определить *коэффициенты эластичности*. Напомним, что коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменяется выходная переменная при увеличении входной переменной на один процент (при условии, что значения остальных входных переменных не изменяются). Коэффициенты эластичности равны коэффициентам производственной функции Кобба-Дугласа A_1, A_2,...,A_M (где M - количество видов ресурсов).

В рассматриваемом примере величина A_1=0,22 означает, что увеличение расхода энергии на один процент приведет к увеличению объема производства в среднем на 0,22% (при неизменном количестве оборудования и трудовых ресурсов). Увеличение количества оборудования на один процент (также при неизменных значениях других ресурсов) приводит к увеличению объема производства на 0,43%; увеличение трудовых ресурсов на один процент увеличивает объем производства на 0,31%.

Коэффициент A_0 представляет собой приближенную оценку объема производства в случае, когда расход каждого из ресурсов равен единице (т.е. при X_1=X_2=...=X_M=1). Однако необходимо учитывать, что этот коэффициент не всегда имеет смысл. Например, в задачах, где расход каждого из ресурсов (по содержанию задачи) всегда значительно больше единицы, этот коэффициент может оказаться очень неточной оценкой.

Производственные функции, как и другие эконометрические модели, могут применяться также при решении задач оптимизации в качестве целевых функций и/или ограничений. Примеры такого применения производственных функций рассматриваются ниже.

2.8. Оптимизация и выбор решений на основе эконометрических моделей

Эконометрические модели могут использоваться в качестве критериев оптимизации (целевых функций) или ограничений в задачах оптимизации различных видов. Если в задаче оптимизации используются линейные эконометрические модели, то такая задача представляет собой задачу линейного программирования; для решения таких задач можно применять, например, симплекс-метод. Если в задаче оптимизации используются нелинейные эконометрические модели (например, производственные функции Кобба-Дугласа), то такая задача представляет собой задачу нелинейного программирования.

Приведем примеры решения задач оптимизации с использованием производственных функций Кобба-Дугласа.

2.8.1. Определение оптимального количества ресурсов для обеспечения максимального объема производства при ограничениях на затраты

Постановка данной задачи следующая. Для производства некоторой продукции используются ресурсы нескольких видов (обозначим количество видов ресурсов как M). Зависимость объема производства от расхода ресурсов описывается производственной функцией Кобба-Дугласа (2.16). Известны цены на ресурсы: C_1, C_2,...,C_M. На закупку ресурсов может быть выделена денежная сумма, не превышающая некоторой величины C. Требуется найти, сколько ресурсов каждого вида требуется приобрести на имеющиеся средства, чтобы объем производства, достигнутый за счет использования этих ресурсов, был максимальным.

Обозначим количество закупаемых ресурсов как $X_1,X_2,...,X_M$. Составим математическую модель задачи:

$$Y = A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2} \dots \cdot X_M^{A_M} \to \max$$

$$C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \dots + C_M \cdot X_M \le C$$

$$X_i \ge 0, \quad i=1,...,M.$$

Здесь A_1, A_2,...,A_M - коэффициенты производственной функции.

Данная задача решается методами нелинейного программирования (например, градиентными методами).

Пример. На расширение производства на металлургическом предприятии выделено 25 млн ден.ед. Цена одного киловатт-часа энергии - 0,6 ден.ед., одной единицы оборудования - 0,5 млн ден.ед., одного человеко-дня - 700 ден.ед. Определить, сколько требуется закупить ресурсов каждого вида, чтобы объем производства за счет их использования был максимальным.

Обозначим через X_1 количество закупаемой энергии (в миллионах кВт·ч), через X_2 - количество единиц оборудования, через X_3 - трудовые ресурсы (в тысячах человеко-дней). Все цены будем выражать в миллионах ден.ед.

Составим математическую модель задачи:

$$Y = 0{,}63 \cdot X_1^{0{,}22} \cdot X_2^{0{,}43} \cdot X_3^{0{,}31} \to \max$$

$$0{,}6 \cdot X_1 + 0{,}5 \cdot X_2 + 0{,}7 \cdot X_3 \le 25$$

$$X_1,\ X_2,\ X_3 \ge 0$$

X_2 – целая.

Данная задача представляет собой задачу нелинейного программирования (так как нелинейной является целевая функция). Требование целочисленности для переменной X_2 связано с тем, что эта переменная обозначает количество единиц оборудования.

Решим эту задачу, используя табличный процессор Excel. Предположим, что результаты (значения переменных X_1, X_2, X_3) желательно получить в ячейках B14, C14, D14 соответственно. В этих ячейках введем произвольные начальные значения, например, единицы.

В ячейке B15 введем формулу целевой функции:

=0,63*(B14^0,22)*(C14^0,43)*(D14^0,31)

В ячейке B16 введем формулу левой части ограничения:
=0,6*B14+0,5*C14+0,7*D14

В ячейке D16 введем правую часть ограничения: 25. Укажем также некоторые поясняющие обозначения (хотя это необязательно). Рабочий лист будет иметь примерно такой вид, как показано на рис.2.10.

Использованные на рабочем листе обозначения X1,X2,X3, ->, <= и т.д. не обязательны. Величины 0,63 и 1,8 получены для начальных значений переменных, равных единице (можно указать и другие значения).

	A	B	C	D	E	F
	…					
13		X1	X2	X3		
14	Решение:	1	1	1		
15	Целевая функция:	0,63	->	max		
16	Ограничение:	1,8	<=	25		

Рис.2.10. Рабочий лист Excel для решения задачи максимизации объема производства

Для решения задачи из меню "Сервис" выберем элемент "Поиск решения". В поле "Установить целевую ячейку" указывается ячейка B15, где находится формула целевой функции. Используя переключатели, указываем, что требуется установить целевую ячейку (B15) "равной максимальному значению" (т.е. целевая функция подлежит максимизации). В поле "Изменяя ячейки" указываем ячейки, в которых должны находиться значения переменных: B14:D14.

В области "Ограничения" вводятся ограничения задачи. Для начала их ввода требуется нажать кнопку "Добавить". В появившемся окне "Добавление ограничения" в поле "Ссылка на ячейку" указывается ячейка, где записана левая часть ограничения, а в поле "Ограничение" - ячейка с правой частью ограничения. Для ввода ограничения на затраты требуется в поле "Ссылка на ячейку" указать ячейку B16, выбрать знак ограничения (<=), а в поле "Ограничение" указать ячейку D16. Для ввода ограничения следует нажать кнопку "Добавить". Затем следует ввести ограничение на неотрицательность переменных: B14:D14 >= 0. Требуется также ввести ограничение на целочисленность переменной X_2: в поле "Ссылка на ячейку" указать ячейку C14, а в поле знака ограничения выбрать отметку “цел”. После ввода всех ограничений требуется нажать OK.

Для решения задачи требуется нажать кнопку "Выполнить". После появления окна с сообщением о том, что решение найдено, следует установить переключатель "Сохранить найденное решение" и нажать OK.

Рабочий лист Excel будет иметь примерно такой вид, как показано на рис.2.11.

	A	B	C	D	E	F
	…					
13		X1	X2	X3		
14	Решение:	9,69	22	11,7		
15	Целевая функция:	8,41	->	max		
16	Ограничение:	25	<=	25		

Рис.2.11. Рабочий лист Excel с результатами решения задачи максимизации объема производства

Таким образом, $X_1 = 9{,}69$; $X_2 = 22$; $X_3 = 11{,}7$. Это означает, что на 25 млн ден.ед. следует приобрести 9,69 млн кВт·часов энергии, 22 единицы оборудования и 11,7 тыс. человеко-дней трудовых ресурсов. Объем производства при этом будет максимальным и составит (в среднем) 8,41 млн тонн.

2.8.2. Определение оптимального количества ресурсов для обеспечения заданного объема производства при минимальных затратах

Постановка данной задачи следующая. Для производства некоторой продукции используются ресурсы M видов. Зависимость объема производства от расхода ресурсов описывается производственной функцией Кобба-Дугласа (2.16). Известны цены на ресурсы: $C_1, C_2, \ldots, C_M$. Необходимо обеспечить объем производства в размере Y (величина Y задана). Требуется найти, сколько ресурсов каждого вида необходимо приобрести, чтобы обеспечить заданный объем производства с минимальными затратами.

Обозначим количество закупаемых ресурсов как $X_1, X_2, \ldots, X_M$. Составим математическую модель задачи:

$$C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \ldots + C_M \cdot X_M \to \min$$

$$A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2} \ldots \cdot X_M^{A_M} \geq Y$$

$$X_i \geq 0, \quad i=1,\ldots,M.$$

Пример. Металлургическому предприятию требуется выпустить не менее 10 млн тонн продукции. Цены на ресурсы, а также производственная функция, описывающая зависимость объема производства от расхода ресурсов, приведены в предыдущем примере. Требуется определить, сколько следует закупить ресурсов каждого вида, чтобы обеспечить заданный объем производства с минимальными затратами.

Обозначим через X_1, X_2, X_3 количество закупаемых ресурсов. Составим математическую модель задачи:

$$0{,}6 \cdot X_1 + 0{,}5 \cdot X_2 + 0{,}7 \cdot X_3 \to \min$$

$$0{,}63 \cdot X_1^{0{,}22} \cdot X_2^{0{,}43} \cdot X_3^{0{,}31} \geq 10$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

X_2 – целая.

Решим эту задачу, используя Excel. Пусть, как и в предыдущей задаче, требуется получить результаты в ячейках B14, C14, D14.
В ячейке B15 введем формулу целевой функции:

=0,6*B14+0,5*C14+0,7*D14
В ячейке B16 введем формулу левой части ограничения:

=0,63*(B14^0,22)*(C14^0,43)*(D14^0,31)
В ячейке D16 введем правую часть ограничения: 10.

Для решения задачи из меню "Сервис" выберем элемент "Поиск решения". Дальнейшие действия выполняются так же, как показано в предыдущем примере. Имеется только одно отличие: необходимо указать, что требуется установить целевую ячейку (B15) "равной минимальному значению".

После решения задачи рабочий лист Excel будет иметь примерно такой вид, как показано на рис.2.12.

	A	B	C	D	E	F
	…					
13		X1	X2	X3		
14	Решение:	11,38	27	13,74		
15	Целевая функция:	29,95	->	min		
16	Ограничение:	10	>=	10		

Рис.2.12. Рабочий лист Excel с результатами решения задачи обеспечения заданного объема производства при минимальных затратах

Таким образом, $X_1 = 11{,}38$; $X_2 = 27$; $X_3 = 13{,}74$. Это означает, что для обеспечения выпуска 10 млн т продукции с минимальными затратами необходимо приобрести 11,38 млн кВт·часов энергии, 27 единиц оборудования и 13,74 тыс. человеко-дней трудовых ресурсов. Затраты на закупку ресурсов при этом составят примерно 29,95 млн ден.ед.

2.8.3. Определение оптимального количества ресурсов для обеспечения максимального объема производства на единицу затрат

Постановка данной задачи следующая. Требуется определить, сколько ресурсов каждого вида требуется приобрести, чтобы обеспечить максимальный объем производства на каждую единицу средств, израсходованных на закупку ресурсов (т.е. обеспечить максимальную удельную эффективность). При этом практически всегда имеется ограничение на величину денежных средств, выделяемых на закупку ресурсов (C). Как правило, задан также необходимый объем производства (Y). Зависимость объема производства от расхода ресурсов описывается производственной функцией Кобба-Дугласа (2.16). Известны также цены на ресурсы: $C_1, C_2, ..., C_M$.

Обозначим количество закупаемых ресурсов как $X_1, X_2, ..., X_M$. Составим математическую модель задачи:

$$\frac{A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2} \ldots \cdot X_M^{A_M}}{C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \ldots + C_M \cdot X_M} \to \max$$

$C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + ... + C_M \cdot X_M \le C$

$$A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2} \ldots \cdot X_M^{A_M} \ge Y$$

$X_i \ge 0$, $i=1,...,M$.

Пример. Металлургическому предприятию требуется выпустить не менее 7 млн тонн продукции. На закупку ресурсов выделено 25 млн ден.ед. Цены на ресурсы, а также производственная функция, описывающая зависимость объема производства от расхода ресурсов, те же, что и в предыдущем примере. Требуется определить, сколько необходимо закупить ресурсов каждого вида, чтобы обеспечить максимальный объем производства на единицу затраченных денежных средств.

Составим математическую модель задачи:

$$\frac{0{,}63 \cdot X_1^{0{,}22} \cdot X_2^{0{,}43} \cdot X_3^{0{,}31}}{0{,}6 \cdot X_1 + 0{,}5 \cdot X_2 + 0{,}7 \cdot X_3} \to \max$$

$0{,}6 \cdot X_1 + 0{,}5 \cdot X_2 + 0{,}7 \cdot X_3 \le 25$

$$0{,}63 \cdot X_1^{0{,}22} \cdot X_2^{0{,}43} \cdot X_3^{0{,}31} \ge 7$$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

X_2 – целая.

Эту задачу можно решить с помощью табличного процессора Excel, как показано выше. Решив данную задачу, получим: $X_1 = 7{,}72$; $X_2 = 19$; $X_3 = 9{,}33$. Таким образом, чтобы обеспечить максимальный выпуск продукции на единицу затраченных средств (при соблюдении заданных ограничений на расходы и на объем производства), следует приобрести 7,72 млн кВт·часов энергии, 19 единиц оборудования и 9,33 тыс. человеко-дней трудовых ресурсов. Затраты на закупку ресурсов при этом составят 20,66 млн ден.ед. Будет выпущено 7 млн тонн продукции. Объем производства на единицу затрат (целевая функция) составит 0,34 тонны продукции на каждую затраченную денежную единицу.

3. АНАЛИЗ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА И РАСПОЗНАВАНИЯ

3.1. Общая характеристика и классификация методов кластерного анализа

Методы кластерного анализа предназначены для разделения множества анализируемых объектов и явлений на кластеры, т.е. на группы объектов, схожих друг с другом по каким-либо признакам.

Примеры объектов кластерного анализа: предприятия, характеризуемые набором экономических показателей; случаи заболеваний, описываемые набором симптомов; варианты выбора решения, характеризуемые набором возможных последствий, и т.д.

Методы кластерного анализа применяются для решения следующих задач:

- разделение анализируемых объектов на группы с целью дальнейшего анализа специалистами в соответствующей предметной области;
- структуризация и упорядочение информации о предметной области;
- сжатие информации о предметной области;
- построение баз знаний для интеллектуальных компьютерных систем.

Постановка задачи кластерного анализа следующая. Имеется N объектов: X_1, $X_2,\ldots, X_N$. Для описания объектов используется M признаков. Каждый объект описывается набором значений признаков: $X_j=(X_{1j},\ X_{2j},\ \ldots,X_{Mj})$, $j=1,\ldots,N$. Требуется разделить объекты на кластеры таким образом, чтобы в каждый кластер входили объекты со сходными значениями признаков.

Примечание. Каждый объект $X_j=(X_{1j},\ X_{2j},\ \ldots,X_{Mj})$, для описания которого используется M признаков, может рассматриваться как вектор, имеющий M координат.

Классификация методов кластерного анализа приведена в табл.3.1.

Большинство методов кластерного анализа включают как формальные (математические), так и эвристические процедуры. Интерпретация результатов кластерного анализа и принятие решений на их основе осуществляются ЛПР и/или экспертом.

Таблица 3.1

Классификация методов кластерного анализа

Признак для классификации	Методы кластерного анализа	Описание
Процедура разделения объектов на кластеры	Иерархические	Из множества анализируемых объектов последовательно выделяются наиболее сходные объекты.
	Итеративные	Составляется некоторый первоначальный вариант разделения на кластеры; этот вариант затем последовательно улучшается до выполнения некоторого условия, характеризующего точность разделения.
Информация о количестве кластеров	Методы с заданным количеством кластеров	Количество кластеров задается экспертом или ЛПР до начала разделения объектов.
	Методы с неизвестным количеством кластеров	Количество кластеров определяется в процессе разделения объектов.

Пример. Анализируется информация о девяти инвестиционных фондах (Ф1,Ф2,…,Ф9). Показатели, характеризующие деятельность фондов, приведены в табл.3.2.

Таблица 3.2

Фонд	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф5	Ф6	Ф7	Ф8	Ф9
Прибыль за анализируемый период, тыс. ден.ед.	16476	17081	13827	13187	11793	16728	10386	15145	15596
Экспертная оценка риска, баллы	4	4	5	1	3	4	2	7	4

Примечание. Оценки риска заданы экспертом по десятибалльной шкале: 1 – минимальный риск, 10 – максимальный.

Требуется выделить группы фондов, имеющих сходные значения показателей.
В данной задаче имеется девять объектов (M=9). Для их описания используется два признака (N=2).
Решение этой задачи различными методами рассматривается ниже.

3.2. Подготовка данных для кластерного анализа.

Меры различия

Как отмечено выше, задача кластерного анализа состоит в разделении множества анализируемых объектов на группы объектов, сходных друг с другом по каким-либо признакам. При этом необходимо учитывать, что каждый объект, как правило, описывается несколькими признаками. Эти признаки обычно различаются по размерности (измеряются в разных единицах) и по диапазону значений (одни признаки выражаются большими числами, другие – малыми). Некоторые признаки могут указываться в виде балльных оценок (например, по 10- или 100-балльной шкале). В некоторых случаях объекты описываются качественными (словесными) признаками: для описания объектов используются оценки “отлично”, ”хорошо”, ”часто”, ”редко” и т.д. Такое разнообразие оценок затрудняет сопоставление объектов и делает невозможным получение оценки различия между объектами в виде одного числа. Поэтому, прежде чем применять какие-либо методы кластерного анализа, необходимо выполнить нормировку признаков объектов. В результате нормировки все значения признаков объектов должны быть безразмерными (т.е. не должны измеряться в каких-либо единицах) и находиться в некотором ограниченном диапазоне (например, от нуля до единицы). Существует несколько методов нормировки. Обычно применяются следующие методы:

- деление на максимальное значение: значения признака для всех объектов делятся на максимальное значение этого признака. Результатом являются безразмерные величины, находящиеся в диапазоне от нуля до единицы;
- стандартизация: из каждого значения признака вычитается среднее значение данного признака, полученная разность делится на стандартное отклонение данного признака. Результатом являются безразмерные величины, большинство из которых принимает значения в диапазоне от –3 до 3.

При небольшом количестве анализируемых объектов обычно применяется деление на максимальное значение, при большом количестве объектов – стандартизация.

Если для описания объектов используются качественные (словесные) оценки, то следует перейти от таких оценок к числовым величинам (например, балльным экспертным оценкам), а затем выполнить нормировку на основе одного из рассмотренных способов.

Рассмотрим пример, приведенный в подразделе 3.1 (анализ информации об инвестиционных фондах). В этом примере объекты описываются двумя признаками. Первый из этих признаков (прибыль) измеряется в денежных единицах, второй (оценка риска) – в баллах. Кроме того, первый признак может принимать большие значения (десятки тысяч), а второй – выражается числами от 1 до 10. На основе таких оценок невозможно получить какую-либо величину, характеризующую различие между объектами. Поэтому требуется нормировка значений признаков.

Выполним нормировку, используя **деление на максимальное значение**. Для признака “прибыль” максимальное значение равно 17 081, для признака “оценка риска” – 7 (см. табл.3.2). Для нормировки разделим каждое значение признака на соответствующее максимальное значение. Результаты приведены в табл.3.3.

Таблица 3.3

Фонд	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф5	Ф6	Ф7	Ф8	Ф9
Прибыль за анализируемый период	0,96	1,00	0,81	0,77	0,69	0,98	0,61	0,89	0,91
Экспертная оценка риска	0,57	0,57	0,71	0,14	0,43	0,57	0,29	1,00	0,57

Выполним нормировку на основе **стандартизации**. Для этого необходимо сначала найти среднее значение и стандартное отклонение каждого признака. Обозначим средние значения признаков как $\overline{A}_i$, а стандартные отклонения – как σ_i, i=1,…,M (где M – количество признаков). Эти величины находятся по следующим формулам:

$$\overline{A}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_{ij}, \tag{3.1}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(X_{ij} - \overline{A}_i)^2}. \tag{3.2}$$

Для данного примера $\overline{A}_1$=14468,78; $\overline{A}_2$=3,78; σ_1=2333,68; σ_2=1,72.

Как указано выше, нормировка выполняется следующим образом: из каждого значения признака (табл.3.2) вычитается среднее значение данного признака, полученная разность делится на стандартное отклонение. Результаты нормировки приведены в табл.3.4.

Таблица 3.4

Фонд	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф5	Ф6	Ф7	Ф8	Ф9
Прибыль за анализируемый период	0,86	1,12	-0,28	-0,55	-1,15	0,97	-1,75	0,29	0,48
Экспертная оценка риска	0,13	0,13	0,71	-1,62	-0,45	0,13	-1,04	1,88	0,13

Здесь, например, значение признака “прибыль за анализируемый период” для фонда Ф1 получено следующим образом: (16476-14468,78)/2333,68=0,86.

Во всех последующих расчетах будут использоваться только нормированные значения признаков.

Чтобы принять решение о том, можно ли считать некоторые объекты достаточно сходными и отнести их к одному кластеру, необходимо использовать некоторую числовую *меру различия* между объектами. Обычно в качестве такой меры различия используется *евклидово расстояние*. Значение евклидова расстояния между некоторыми объектами X_j и X_k определяется по следующей формуле:

$$D(X_j, X_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} (X_{ij} - X_{ik})^2}\,.$$

(3.3)

Найдем, например, евклидово расстояние между объектами X_1 и X_2 из рассматриваемого примера, т.е. меру различия между фондами Ф1 и Ф2. Для расчета евклидова расстояния будем использовать нормированные значения признаков, полученные путем деления на максимальное значение (табл.3.3):

$$D(X_1, X_2) = \sqrt{(0{,}96 - 1)^2 + (0{,}57 - 0{,}57)^2} = 0{,}04.$$

Если признаки различны по важности (т.е. различия по одним признакам необходимо учитывать в большей степени, по другим – в меньшей), то в качестве меры различия используется взвешенное евклидово расстояние:

$$D(X_j, X_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} W_i \cdot (X_{ij} - X_{ik})^2}\,,$$

(3.4)

где Wi, i=1,…,M – веса признаков (чем важнее признак, тем больше его вес). Они могут определяться, например, на основе методов экспертного анализа. Обычно используются значения весов, удовлетворяющие следующему условию: $W_1+W_2+\ldots+W_M=1$.

В некоторых случаях применяются также следующие меры различия:

- расстояние city-block:

$$D(X_j, X_k) = \sum_{i=1}^{M} \left| X_{ij} - X_{ik} \right|;$$

(3.5)

* чебышевское расстояние:

$$D(X_j, X_k) = \max_i \left| X_{ij} - X_{ik} \right|. \quad (3.6)$$

Смысл всех мер различия следующий: чем больше различаются значения признаков, описывающих объекты, тем большее значение принимают меры различия. Объекты с небольшими значениями мер различия должны относиться к одному кластеру, с большими – к разным.

3.3. Метод K средних

Метод предназначен для разделения объектов на заданное число кластеров.

Принцип работы метода следующий. На основе имеющейся информации о предметной области задается количество кластеров (K). При этом указывается также содержательный смысл каждого кластера (например, объекты с высоким значением некоторого признака, объекты со средним значением некоторых признаков и т.д.). Для каждого кластера выбирается объект-*прототип* (представитель), т.е. объект, наиболее подходящий для данного класса по значениям признаков. Находится первоначальный вариант разделения объектов на кластеры: каждый объект относится к кластеру, представляемому *ближайшим* объектом-прототипом. Затем в каждом кластере находится новый прототип со средними (для данного кластера) значениями признаков. Снова выполняется отнесение каждого объекта к кластеру, представляемому ближайшим прототипом. Процедура повторяется до получения окончательного разбиения, т.е. до тех пор, пока на двух последовательных итерациях метода будет получено одинаковое разбиение.

Приведем пошаговый алгоритм разбиения объектов на заданное число кластеров на основе метода K средних.

1. Номер итерации алгоритма принимается равным нулю: s=0.
2. Задается количество кластеров (K). Для каждого кластера выбирается первоначальный объект-прототип: P_k^0, k=1,…,K.
3. Выполняется переход к очередной итерации алгоритма: s=s+1.
4. Находятся расстояния от каждого из анализируемых объектов до каждого из объектов-прототипов. Выполняется отнесение каждого объекта к ближайшему кластеру, т.е. к кластеру, для которого расстояние между этим объектом и прототипом кластера минимально.
5. В каждом кластере определяется новый объект-прототип: P_k^s, k=1,…,K. Значение каждого признака этого объекта-прототипа определяется

как среднее арифметическое значений этого признака для всех объектов, входящих на текущей итерации в данный кластер.

6. Если объекты-прототипы всех кластеров на данной и на предыдущей итерации совпадают (т.е. выполняется условие $P_k^s = P_k^{s-1}$, k=1,…,K), то алгоритм завершается. Если на данной итерации получено разбиение объектов, отличное от предыдущего, то выполняется возврат к шагу 3.

Рассмотрим реализацию приведенного алгоритма на примере из подраздела 3.1 (анализ информации об инвестиционных фондах). Во всех расчетах будут использоваться нормированные значения признаков объектов, полученные путем деления на максимальное значение признака (табл.3.3).

Пусть предполагается, что инвестиционные фонды можно в основном разделить на три группы: 1) фонды с низким риском и низкой прибылью; 2) фонды с высоким риском и высокой прибылью; 3) фонды со средними значениями обоих показателей. Таким образом, предполагается, что число кластеров равно трем (K=3). Пошаговый алгоритм разбиения объектов на заданное число кластеров на основе метода K средних выполняется в следующем порядке.

1. Номер итерации принимается равным нулю: s=0.

2. Задается количество кластеров: K=3. Для каждого кластера требуется выбрать прототип. Пусть на основе анализа показателей (табл.3.2) эксперт указал, что наиболее характерным представителем первого кластера (фонды с низким риском и низкой прибылью) является фонд, обозначенный как Ф4. В качестве характерного представителя второго кластера (фонды с высоким риском и высокой прибылью) экспертом указан фонд Ф8, а в качестве представителя третьего кластера (фонды со средними значениями обоих показателей) – фонд Ф9. Таким образом, $P_1^0 = X_4 = (0{,}77;\ 0{,}14)$, $P_2^0 = X_8 = (0{,}89;\ 1)$, $P_3^0 = X_9 = = (0{,}91;\ 0{,}57)$.

3. Выполняется **переход к очередной итерации: s=1.**

4. Находятся расстояния от каждого из анализируемых объектов до каждого из прототипов по формуле (3.3). Эти расстояния приведены в табл.3.5.

Например, расстояние между объектом X_1 и прототипами кластеров найдено следующим образом:

$$D(X_1, P_1^0) = \sqrt{(0{,}96 - 0{,}77)^2 + (0{,}57 - 0{,}14)^2} = 0{,}47,$$

$$D(X_1, P_2^0) = \sqrt{(0{,}96 - 0{,}89)^2 + (0{,}57 - 1)^2} = 0{,}44,$$

$$D(X_1, P_3^0) = \sqrt{(0{,}96 - 0{,}91)^2 + (0{,}57 - 0{,}57)^2} = 0{,}05.$$

По найденным расстояниям выполняется отнесение каждого объекта к кластеру, представленному ближайшим прототипом. Например, для объекта X_1 расстояние до прототипа P_1^0 составляет 0,47, до прототипа P_2^0 - 0,44, до P_3^0 - 0,05. Таким образом, ближайшим к объекту X_1 оказался прототип третьего кластера, поэтому X_1 относится к этому кластеру. Результаты разделения объектов на кластеры приведены в табл.3.5 (последняя строка).

Таблица 3.5

Объект	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
P_1^0	0,47	0,49	0,57	0,00	0,30	0,48	0,22	0,87	0,45
P_2^0	0,44	0,44	0,30	0,87	0,60	0,44	0,76	0,00	0,43
P_3^0	0,05	0,09	0,17	0,45	0,26	0,07	0,41	0,43	0,00
Кластер	3	3	3	1	3	3	1	2	3

Таким образом, получено следующее разбиение объектов на кластеры: к первому кластеру относятся объекты X_4 и X_7, ко второму – только объект X_8, к третьему – объекты X_1, X_2, X_3, X_5, X_6, X_9.

5. В каждом кластере определяется новый объект-прототип. Значение каждого признака этого объекта-прототипа определятся как среднее арифметическое значений этого признака для всех объектов, входящих на текущей итерации в данный кластер. Для данного примера значения признаков объекта-прототипа первого кластера находятся как средние арифметические значений признаков объектов X_4 и X_7:

$$P_1^1 = \left(\frac{0{,}77 + 0{,}61}{2}; \frac{0{,}14 + 0{,}29}{2} \right) = (0{,}69;\ 0{,}22).$$

Во втором кластере находится только один объект (X_8), поэтому он и становится прототипом этого класса: $P_2^1 = (0{,}89;\ 1{,}00)$.

Значения признаков объекта-прототипа третьего кластера находятся как средние арифметические значений признаков объектов X_1, X_2, X_3, X_5, X_6, X_9:

$$P_3^1 = \left(\frac{0{,}96+1+0{,}81+0{,}69+0{,}98+0{,}91}{6}; \frac{0{,}57+0{,}57+0{,}71+0{,}43+0{,}57+0{,}57}{6} \right) = (0{,}89;\ 0{,}57)$$

6. Выполняется сравнение прототипов, полученных на данной и на предыдущей итерациях. На данной итерации получены прототипы P_1^1=(0,69; 0,22), P_2^1= (0,89; 1,00), P_3^1 = (0,89; 0,57). На предыдущей итерации прототипы были следующими: P_1^0= (0,77; 0,14), P_2^0= (0,89; 1), P_3^0 = (0,91; 0,57). Прототипы не совпадают, поэтому требуется следующая итерация. Выполняется возврат к шагу 3.

3. Выполняется **переход к очередной итерации: s=2.**

4. Находятся расстояния от каждого из анализируемых объектов до каждого из прототипов по формуле (3.3). По найденным расстояниям выполняется отнесение каждого объекта к кластеру, представленному ближайшим прототипом. Расстояния, а также результаты разделения объектов на кластеры приведены в табл.3.6.

Например, расстояние между объектом X_1 и прототипами кластеров найдено следующим образом:

$$D(X_1, P_1^1) = \sqrt{(0{,}96 - 0{,}69)^2 + (0{,}57 - 0{,}22)^2} = 0{,}45,$$

$$D(X_1, P_2^1) = \sqrt{(0{,}96 - 0{,}89)^2 + (0{,}57 - 1)^2} = 0{,}44,$$

$$D(X_1, P_3^1) = \sqrt{(0{,}96 - 0{,}89)^2 + (0{,}57 - 0{,}57)^2} = 0{,}07.$$

Таким образом, объект X_1 относится к третьему кластеру.

Таблица 3.6

Объект	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
P_1^1	0,45	0,47	0,51	0,11	0,21	0,46	0,11	0,81	0,42
P_2^1	0,44	0,44	0,30	0,87	0,60	0,44	0,76	0,00	0,43
P_3^1	0,07	0,11	0,16	0,45	0,25	0,09	0,40	0,43	0,02
Кластер	3	3	3	1	1	3	1	2	3

Таким образом, получено следующее разбиение объектов на кластеры: к первому кластеру относятся объекты X_4, X_5 и X_7, ко второму – только объект X_8, к третьему – объекты X_1, X_2, X_3, X_6, X_9.

5. В каждом кластере определяется новый объект-прототип:

$$P_1^2 = \left(\frac{0{,}77 + 0{,}69 + 0{,}61}{3} ; \frac{0{,}14 + 0{,}43 + 0{,}29}{3} \right) = (0{,}69\ ; 0{,}29),$$

P_2^2 = (0,89; 1,00),

$$P_3^2 = \left(\frac{0{,}96 + 1 + 0{,}81 + 0{,}98 + 0{,}91}{5} ; \frac{0{,}57 + 0{,}57 + 0{,}71 + 0{,}57 + 0{,}57}{5} \right) = (0{,}93; 0{,}60).$$

6. Выполняется сравнение прототипов, полученных на данной и на предыдущей итерациях. На данной итерации получены прототипы P_1^2 = (0,69; 0,29), P_2^2 = (0,89; 1,00), P_3^2 = (0,93; 0,63), на предыдущей – прототипы P_1^1 = (0,69; 0,22), P_2^1= (0,89; 1,00), P_3^1 = (0,89; 0,57). Таким образом, прототипы не совпадают. Требуется следующая итерация. Выполняется возврат к шагу 3.

3. Выполняется **переход к очередной итерации: s=3.**

4. Находятся расстояния от каждого из анализируемых объектов до каждого из прототипов по формуле (3.3), и выполняется отнесение каждого объекта к кластеру, представленному ближайшим прототипом. Результаты приведены в табл.3.7.

Таблица 3.7

Объект	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
P_1^2	0,39	0,42	0,44	0,17	0,14	0,41	0,08	0,74	0,36
P_2^2	0,44	0,44	0,30	0,87	0,60	0,44	0,76	0,00	0,43
P_3^2	0,04	0,07	0,17	0,49	0,29	0,06	0,45	0,40	0,04
Кластер	3	3	3	1	1	3	1	2	3

Таким образом, получено следующее разбиение объектов на кластеры: к первому кластеру относятся объекты X_4, X_5 и X_7, ко второму – только объект X_8, к третьему – объекты X_1, X_2, X_3, X_6, X_9.

5. В каждом кластере определяется новый объект-прототип (как и на предыдущих итерациях): P_1^3=(0,69; 0,29), P_2^3= (0,89; 1,00), P_3^3 = (0,93; 0,60).

6. Выполняется сравнение прототипов, полученных на данной и на предыдущей итерациях. Прототипы совпадают: $P_1^3 = P_1^2$, $P_2^3 = P_2^2$,. $P_3^3 = P_3^2$. Это означает, что получено окончательное разбиение объектов на кластеры.

Примечание. В качестве признака окончания алгоритма (т.е. окончательного разбиения) можно использовать совпадение разбиения на двух последовательных итерациях.

Таким образом, результаты разделения инвестиционных фондов на группы (кластеры) оказались следующими. К первой группе (фонды с низким риском и низкой прибылью) относятся фонды Ф4, Ф5, Ф7. Ко второй группе (фонды с высоким риском и высокой прибылью) можно отнести только фонд Ф8. В третью группу (фонды со средними значениями обоих показателей) входят фонды Ф1, Ф2, Ф3, Ф6, Ф9.

3.4. Метод максимина

Метод предназначен для разделения объектов на кластеры, причем количество кластеров заранее неизвестно; оно определяется автоматически в процессе разбиения объектов.

Принцип работы метода следующий. Выбирается один из объектов (любой); он становится прототипом первого кластера. Находится объект, наиболее удаленный от выбранного; он становится прототипом второго кластера. Все объекты распределяются по двум кластерам; каждый объект относится к кластеру, представленному ближайшим прототипом. Затем в каждом из кластеров находится объект, *наиболее удаленный* от своего прототипа. Если расстояние между этим объектом и прототипом кластера оказывается значительным (превышающим некоторую предельную величину), то объект становится новым прототипом, т.е. образуется новый кластер. После этого распределение объектов по кластерам выполняется заново. Процесс продолжается, пока не будет получено такое разбиение на кластеры, при котором расстояние от каждого объекта до прототипа кластера не будет превышать заданную предельную величину.

Приведем пошаговый алгоритм реализации метода максимина.

1. Выбирается любой из объектов, например, первый в списке объектов (X_1). Он становится прототипом первого кластера: $P_1=X_1$. Количество кластеров принимается равным единице: K=1.

2. Определяются расстояния от объекта P_1 до всех остальных объектов: $D(P_1, X_j)$, j=1,…,N. Определяется объект, наиболее удаленный от P_1, т.е. объект X_f, для которого выполняется условие: $D(P_1, X_f) = \max\limits_j D(P_1, X_j)$. Этот объект становится прототипом второго кластера: $P_2=X_f$. Количество кластеров принимается равным двум: K=2.

3. Определяется пороговое расстояние. Оно принимается равным *половине* расстояния между прототипами P_1 и P_2: $T= D(P_1, P_2) / 2$. Эта величина будет использоваться для проверки условия окончания алгоритма.

4. Находятся расстояния от каждого из анализируемых объектов до каждого из имеющихся объектов-прототипов. Выполняется отнесение каждого объекта к ближайшему кластеру, т.е. кластеру, для которого расстояние между этим объектом и прототипом кластера минимально.

5. В каждом кластере определяется объект, наиболее удаленный от прототипа своего кластера. Обозначим эти объекты как Y_k, k=1,...,K (здесь k – номер кластера, K – количество кластеров).

6. Для каждого из наиболее удаленных объектов, найденных на шаге 5, проверяется условие: $D(P_k,Y_k)<T$, k=1,…,K. Если это условие выполняется *для всех кластеров*, то алгоритм *завершается*. Если для некоторого объекта Y_k это условие не выполняется, то он становится прототипом нового кластера, и количество кластеров увеличивается на единицу (K=K+1). В результате этого шага количество кластеров K увеличивается на число, равное количеству новых кластеров.

7. Находится новое пороговое расстояние. Оно определяется как половина среднего арифметического всех расстояний между прототипами:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^{K} D(P_i, P_j)}{K \cdot (K-1)}. \tag{3.7}$$

8. Выполняется возврат к шагу 4.

Таким образом, окончательным является разбиение, для которого во всех кластерах расстояние от прототипа кластера до каждого из объектов, входящих в этот кластер (даже до самого удаленного), не превышает некоторой предельной величины (порогового расстояния).

Рассмотрим реализацию приведенного алгоритма на примере из подраздела 3.1 (анализ информации об инвестиционных фондах).

1. Первый из объектов принимается в качестве прототипа первого кластера: $P_1 = X_1 = (0,96;\ 0,57)$. Количество кластеров принимается равным единице: K=1.

2. Определяются расстояния от прототипа P_1 до всех остальных объектов по формуле (3.3). Эти расстояния приведены в табл.3.8.

Таблица 3.8

Объект	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
$P_1 = X_1$	0,00	0,04	0,21	0,47	0,30	0,02	0,45	0,44	0,05

Здесь, например, расстояние между прототипом P_1 и объектом X_2 найдено следующим образом: $D(P_1,X_2)=\sqrt{(0{,}96-1)^2+(0{,}57-0{,}57)^2}=0{,}04$.

Из таблицы 3.8 видно, что наиболее удаленным от прототипа P_1 является объект X_4. Он становится прототипом второго кластера: $P_2=X_4=(0{,}77;\ 0{,}14)$. Количество кластеров становится равным двум: K=2.

3. Определяется пороговое расстояние: $T= D(P_1, P_2) / 2 = 0{,}235$.

4. Находятся расстояния от каждого из анализируемых объектов до каждого из имеющихся объектов-прототипов. По найденным расстояниям выполняется отнесение каждого объекта к кластеру, представленному ближайшим прототипом. Расстояния, а также результаты разбиения объектов на кластеры приведены в табл.3.9.

Таблица 3.9

Объект	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
$P_1 = X_1$	0,00	0,04	0,21	0,47	0,30	0,02	0,45	0,44	0,05
$P_2 = X_4$	0,47	0,49	0,57	0,00	0,30	0,48	0,22	0,87	0,45
Кластер	1	1	1	2	2	1	2	1	1

Примечание. Если вычислить расстояния от объекта X_5 до прототипов P_1 и P_2 с большей точностью (до трех знаков), то они окажутся следующими: $D(P_1,X_5)=0{,}304$, $D(P_2,X_5)=0{,}301$. Поэтому объект X_5 отнесен ко второму кластеру.

5. В каждом кластере определяется объект, наиболее удаленный от прототипа *своего* кластера. Из таблицы 3.9 видно, что в первом кластере таким объектом является X_8, во втором – X_5. Таким образом, $Y_1=X_8$, $Y_2=X_5$.

6. Расстояния между наиболее удаленными объектами (найденными на шаге 5) и объектами-прототипами сравниваются с пороговым расстоянием. В данном примере наиболее удаленным объектом первого кластера оказался объект X_8. Расстояние между этим объектом и прототипом P_1 равно 0,44; оно превышает пороговое расстояние (0,235). Таким образом, можно считать, что объект X_8 существенно отличается от прототипа своего кластера. Поэтому он

становится прототипом нового кластера (P_3), и количество кластеров увеличивается на единицу (K=3). Во втором кластере наиболее удаленным объектом является X_5. Расстояние между этим объектом и прототипом P_2 равно 0,3; оно превышает пороговое расстояние. Поэтому объект X_5 также становится прототипом нового кластера (P_4), и количество классов увеличивается еще на единицу (K=4).

7. Находится новое пороговое расстояние. Оно определяется как половина среднего арифметического всех расстояний между прототипами. В данном случае имеется четыре прототипа (X_1, X_4, X_8, X_5). Требуется найти расстояния между ними: $D(X_1,X_4)=0{,}47$, $D(X_1,X_8)=0{,}44$, $D(X_1,X_5)=0{,}3$, $D(X_4,X_8)=0{,}87$, $D(X_4,X_5)=0{,}3$, $D(X_8,X_5)=0{,}6$. Новое пороговое расстояние находится по формуле (3.7) следующим образом:

$$T = \frac{0{,}47 + 0{,}44 + 0{,}3 + 0{,}87 + 0{,}3 + 0{,}6}{4 \cdot 3} = 0{,}25\,.$$

8. Выполняется возврат к шагу 4.

4. Находятся расстояния от каждого из анализируемых объектов до каждого из имеющихся объектов-прототипов. По найденным расстояниям выполняется отнесение каждого объекта к кластеру, представленному ближайшим прототипом. Результаты приведены в табл.3.10.

Таблица 3.10

Объект	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
$P_1 = X_1$	0,00	0,04	0,21	0,47	0,30	0,02	0,45	0,44	0,05
$P_2 = X_4$	0,47	0,49	0,57	0,00	0,30	0,48	0,22	0,87	0,45
$P_3 = X_8$	0,44	0,44	0,30	0,87	0,60	0,44	0,76	0,00	0,43
$P_4 = X_5$	0,30	0,34	0,30	0,30	0,00	0,32	0,16	0,60	0,26
Кластер	1	1	1	2	4	1	4	3	1

5. В каждом кластере определяется объект, наиболее удаленный от прототипа *своего* кластера. Из табл. 3.10 видно, что в первом кластере таким объектом является X_3, в четвертом – X_7. Во второй и третий кластеры входит по одному объекту (X_4 и X_8 соответственно). Таким образом, $Y_1=X_3$, $Y_2=X_4$, $Y_3=X_8$, $Y_4=X_7$.

6. Расстояния между наиболее удаленными объектами (найденными на шаге 5) и объектами-прототипами сравниваются с пороговым расстоянием.

В данном примере $D(P_1,Y_1)=0,21$, $D(P_2,Y_2)=0$, $D(P_3,Y_3)=0$, $D(P_4,Y_4)=0,16$. Все эти расстояния меньше порогового (T=0,25). Таким образом, можно считать, что во всех кластерах объекты достаточно близки к своим прототипам, т.е. имеют сходные значения признаков. Алгоритм завершается.

Таким образом, результаты разделения инвестиционных фондов на группы (кластеры) оказались следующими. К первому кластеру относятся фонды Ф1, Ф2, Ф3, Ф6, Ф9, ко второму – фонд Ф4, к третьему – Ф8, к четвертому - Ф5 и Ф7. Интерпретация этих результатов возможна только на основе анализа, выполняемого специалистами в соответствующей предметной области (в данном случае – экспертами-экономистами). Проанализировав показатели фондов, приведенные в табл.3.2, можно предложить следующую интерпретацию полученного разбиения. Первый кластер включает фонды со средней и высокой прибылью и со средними оценками риска. Второй кластер, включающий только фонд Ф4, соответствует средней прибыли и самому низкому риску. Третий кластер (фонд Ф8) соответствует достаточно высокой прибыли и самому высокому риску. Четвертый кластер включает фонды с низкой прибылью и невысоким (ниже среднего) риском.

3.5. Общая характеристика и классификация методов распознавания

Методы распознавания (дискриминантного анализа) предназначены для принятия решений об отнесении некоторого объекта или явления к одному из классов, т.е. к группе объектов (явлений), сходных с анализируемым по каким-либо признакам.

Примеры задач распознавания:

- техническая диагностика: определение вида неисправности по имеющимся признакам;
- медицинская диагностика;
- контроль качества продукции: отнесение готового изделия к годным или бракованным;
- обработка экономической информации: отнесение исследуемого объекта (предприятия, отрасли и т.д.) к одной из групп аналогичных объектов по имеющимся показателям;
- проектирование: выбор одного из нескольких возможных вариантов проектируемого изделия в зависимости от предполагаемых условий его эксплуатации;

- проверка подлинности документов и т.д.

Постановка задачи распознавания следующая. Имеется некоторый объект X. Известны значения M признаков, описывающих этот объект: X = = $(X_1, X_2, \ldots, X_M)$. Известно K классов (кластеров, групп) аналогичных объектов, описываемых с помощью тех же признаков. Требуется принять решение об отнесении объекта X к одному из этих классов (или установить, что объект X не может быть отнесен ни к одному из этих классов).

Значения признаков, используемых для распознавания, могут представлять собой как числа, так и словесные (качественные) характеристики, вероятностные описания и т.д.

Примечание. Распознаваемый объект $X=(X_1, X_2, \ldots,X_M)$, для описания которого используется M признаков, может рассматриваться как вектор, имеющий M координат.

Как задачи распознавания, так и методы их решения достаточно разнообразны. Упрощенная классификация методов распознавания приведена в табл.3.11.

Таблица 3.11

Классификация методов распознавания

Методы распознавания	Описание
Методы распознавания на основе мер различия (сходства) между объектами	Распознавание выполняется на основе сопоставления мер различия (сходства) между распознаваемым объектом и объектами, для которых уже известно, к каким классам они относятся.
Методы распознавания на основе классифицирующих (решающих) функций	Распознавание выполняется на основе некоторых функций от значений признаков распознаваемого объекта. Эти функции строятся по значениям признаков объектов, для которых уже известно, к каким классам они относятся.
Вероятностные методы распознавания	Распознавание выполняется на основе вычисления вероятностей принадлежности объектов к каждому из классов.

Большинство практических задач распознавания решается с помощью комбинированных методов, включающих процедуры из методов разных видов.

3.6. Распознавание на основе классифицирующих функций

Классифицирующие (решающие) функции – это функции от признаков распознаваемого объекта, по значениям которых принимается решение о том, к какому классу следует отнести распознаваемый объект.

Классифицирующие функции строятся по значениям признаков объектов, для которых *уже известно*, к каким классам они относятся. Набор объектов, используемых для построения классифицирующих функций, называется *обучающим множеством*.

Существуют различные алгоритмы построения классифицирующих функций. Такие алгоритмы направлены на построение классифицирующих функций, обладающих следующим свойством: эти функции должны давать правильные результаты для объектов, входящих в обучающее множество. Другими словами, при подстановке объекта из обучающего множества в классифицирующие функции этот объект должен относиться к тому классу, к которому он относится в действительности.

Рассмотрим один из алгоритмов построения линейных классифицирующих функций.

Пусть имеется K классов объектов. Имеется N объектов, для каждого из которых *точно известно*, к какому классу он относится. Эти объекты составляют обучающее множество. Количество объектов обучающего множества, входящих в каждый из классов, обозначим как N_k, k=1,…,K (при этом $N_1+N_2+…+N_K=N$). Для описания объектов используется M признаков. Каждый объект обучающего множества описывается набором значений признаков: $Y_j^k = (Y_{1j}^k, , Y_{2j}^k, ..., Y_{Mj}^k)$, j=1,…,$N_k$; здесь k – *номер класса*, к которому относится объект, j – номер объекта в классе.

В рассматриваемом алгоритме строится K классифицирующих функций (по одной для каждого класса). Эти функции имеют следующий вид: $F_k = D_{0k} + D_{1k}X_1+D_{2k}X_2+…+D_{Mk}X_M$, k=1,…,K. Классифицирующие функции, построенные на основе рассматриваемого алгоритма, обладают следующим свойством: если подставить в них объект обучающего множества Y_j^k, то в большинстве случаев максимальное значение примет функция F_k, т.е. функция того класса, к которому действительно относится подставленный объект. Чем больше количество объектов обучающего множества, для которых это свойство выполняется, тем более точными являются классифицирующие функции.

<u>Примечание</u>. Указанное свойство может выполняться не для всех объектов обучающего множества. Если это свойство не выполняется для значительного количества объектов обучающего множества, это означает, что для распознавания объектов необходимо использовать нелинейные решающие функции.

Алгоритм построения классифицирующих функций и их применение рассмотрим на следующем примере.

Пример. В ходе анализа эффективности работы предприятий некоторой отрасли установлено, что предприятия могут быть разделены на три класса:

- первый класс (предприятия с высокими показателями): предприятия с высокой производительностью труда, низкой себестоимостью продукции и низкой долей брака в готовой продукции;
- второй класс (предприятия с промежуточными показателями): предприятия с низкой производительностью труда, высокой себестоимостью продукции и низкой долей брака в готовой продукции;
- третий класс (предприятия с низкими показателями): предприятия с низкой производительностью труда, высокой себестоимостью продукции и высокой долей брака в готовой продукции.

Показатели предприятий, являющихся наиболее характерными представителями каждого из классов, приведены в табл.3.12.

Таблица 3.12

Класс	1				2			3			
Предприятие	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8	П9	П10	П11
Производительность труда, тыс. ден.ед. на одного работающего в месяц	140	170	158	145	90	94	87	95	82	90	85
Себестоимость, ден.ед. на единицу продукции	18	14	11	12	30	27	25	25	28	30	24
Доля брака в готовой продукции, %	1,2	0,8	1,1	0,9	0,7	1,1	0,9	1,8	2,2	3,1	2,7

Требуется построить классифицирующие функции для отнесения *других* предприятий к одному из рассматриваемых классов.

В данном примере предприятия П1, П2,…,П11 представляют собой обучающее множество, так как уже известно, к каким классам они относятся. Для дальнейших расчетов обозначим предприятия П1, П2, П3, П4 как объекты Y_1^1, Y_2^1, Y_3^1, Y_4^1, предприятия П5, П6, П7 – как Y_1^2, Y_2^2, Y_3^2, предприятия П8, П9, П10, П11 – как Y_1^3, Y_2^3, Y_3^3, Y_4^3.

Рассматриваемый ниже алгоритм построения классифицирующих функций связан с большим объемом вычислений, в том числе операций над матрицами. Поэтому вместе с описанием алгоритма приводится его реализация средствами табличного процессора Excel.

Алгоритм построения классифицирующих функций реализуется в следующем порядке.

1. Для каждого класса находятся средние значения каждого из признаков, используемых для описания объектов:

$$\overline{A}_i^k = \frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k} Y_{ij}^k, \qquad i=1,\ldots,M,\ k=1,\ldots,K. \tag{3.8}$$

Обозначим набор средних значений признаков для каждого класса как вектор $\overline{A}^k = (\overline{A}_1^k, \overline{A}_2^k, ..., \overline{A}_M^k)$, k=1,…,K.

Для рассматриваемого примера $\overline{A}^1$ = (153,25; 13,75; 1); $\overline{A}^2$ = (90,33; 27,33; 0,9); $\overline{A}^3$ = (88; 26,75; 2,45).

Здесь, например, $\overline{A}_1^1$= (140+170+158+145)/4 = 153,25; $\overline{A}_1^2$ = (90+94+ 87)/3 = 90,33.

На рис.3.1 показано размещение исходных данных (обучающего множества) и средних значений на рабочем листе Excel. Для вычисления средних значений используется функция СРЗНАЧ. Например, в ячейке E2 необходимо указать функцию СРЗНАЧ с аргументом A2:D2; в ячейке E7 требуется указать функцию СРЗНАЧ с аргументом A7:C7.

2. Для каждого класса строится ковариационная матрица $S^k = (S_{iq}^k)$, i=1,…,M, q=1,…,M, где S_{iq}^k - ковариация i-го и q-го признаков в k-м классе, определяемая по следующей формуле:

$$S_{iq}^k = \frac{1}{N_k}\sum_{j=1}^{N_k}(Y_{ij}^k - \overline{A}_i^k)\cdot(Y_{qj}^k - \overline{A}_q^k).$$

(3.9)

Для рассматриваемого примера ковариационные матрицы имеют следующий вид:

$$S^1 = \begin{pmatrix} 136{,}688 & -12{,}688 & -1{,}175 \\ -12{,}688 & 7{,}188 & 0{,}175 \\ -1{,}175 & 0{,}175 & 0{,}025 \end{pmatrix};\ S^2 = \begin{pmatrix} 8{,}222 & 1{,}889 & 0{,}267 \\ 1{,}889 & 4{,}222 & -0{,}200 \\ 0{,}267 & -0{,}200 & 0{,}027 \end{pmatrix};\ S^3 = \begin{pmatrix} 24{,}500 & -1{,}250 & -0{,}625 \\ -1{,}250 & 5{,}688 & 0{,}563 \\ -0{,}625 & 0{,}563 & 0{,}243 \end{pmatrix}.$$

Приведем примеры расчета некоторых элементов ковариационных матриц:

$$S_{11}^{1} = \frac{1}{4}\cdot((140\text{-}153{,}25)\cdot(140\text{-}153{,}25) + (170\text{-}153{,}25)\cdot(170\text{-}153{,}25) +$$
$$+ (158\text{-}153{,}25)\cdot(158\text{-}153{,}25) + (145\text{-}153{,}25)\cdot(145\text{-}153{,}25)) = 136{,}668;$$

$$S_{12}^{1} = \frac{1}{4}\cdot ((140\text{-}153{,}25)\cdot(18\text{-}13{,}75) + (170\text{-}153{,}25)\cdot(14\text{-}13{,}75) +$$
$$+ (158\text{-}153{,}25)\cdot(11\text{-}13{,}75) + (145\text{-}153{,}25)\cdot(12\text{-}13{,}75)) = -12{,}668;$$

$$S_{12}^{2} = \frac{1}{3}\cdot ((90\text{-}90{,}333)\cdot(30\text{-}27{,}333) + (94\text{-}90{,}333)\cdot(27\text{-}27{,}333) +$$
$$+ (87\text{-}90{,}333)\cdot(25\text{-}27{,}333)) = 1{,}889.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Класс 1				Средние				
2	140	170	158	145	153,25				
3	18	14	11	12	13,75				
4	1,2	0,8	1,1	0,9	1				
5									
6	Класс 2								
7	90	94	87		90,333				
8	30	27	25		27,333				
9	0,7	1,1	0,9		0,9				
10									
11	Класс 3								
12	95	82	90	85	88				
13	25	28	30	24	26,75				
14	1,8	2,2	3,1	2,7	2,45				
15									

Рис.3.1. Рабочий лист Excel с исходными данными (обучающее множество) и средними значениями признаков

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Класс 1				Средние		Ковариационные матрицы		
2	140	170	158	145	153,25		136,688	-12,688	-1,175
3	18	14	11	12	13,75		-12,688	7,188	0,175
4	1,2	0,8	1,1	0,9	1		-1,175	0,175	0,025
5									
6	Класс 2								
7	90	94	87		90,333		8,222	1,889	0,267
8	30	27	25		27,333		1,889	4,222	-0,200
9	0,7	1,1	0,9		0,9		0,267	-0,200	0,027
10									
11	Класс 3								
12	95	82	90	85	88		24,500	-1,250	-0,625
13	25	28	30	24	26,75		-1,250	5,688	0,563
14	1,8	2,2	3,1	2,7	2,45		-0,625	0,563	0,243
15									

Рис.3.2. Рабочий лист Excel с ковариационными матрицами

	…	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Средние		Ковариационные матрицы				Объединенная ков. матрица		
2		153,25		136,688	-12,688	-1,175		83,677	-6,260	-0,800
3		13,75		-12,688	7,188	0,175		-6,260	8,021	0,294
4		1		-1,175	0,175	0,025		-0,800	0,294	0,144
5										
6								Обратная матрица		
7		153,25		8,222	1,889	0,267		0,013	0,008	0,056
8		13,75		1,889	4,222	-0,200		0,008	0,140	-0,240
9		1		0,267	-0,200	0,027		0,056	-0,240	7,760
10										
11										
12		88		24,500	-1,250	-0,625				
13		26,75		-1,250	5,688	0,563				
14		2,45		-0,625	0,563	0,243				
15	…									

Рис.3.3. Рабочий лист Excel с объединенной ковариационной матрицей и обратной матрицей

	…	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Средние		Ковариационные матрицы				Объединенная ков. матрица		
2		153,25		136,688	-12,688	-1,175		83,677	-6,260	-0,800
3		13,75		-12,688	7,188	0,175		-6,260	8,021	0,294
4		1		-1,175	0,175	0,025		-0,800	0,294	0,144
5										
6								Обратная матрица		
7		153,25		8,222	1,889	0,267		0,013	0,008	0,056
8		13,75		1,889	4,222	-0,200		0,008	0,140	-0,240
9		1		0,267	-0,200	0,027		0,056	-0,240	7,760
10								Классифицирующие функции		
11								F1	F2	F3
12		88		24,500	-1,250	-0,625	D1	2,176	1,457	1,509
13		26,75		-1,250	5,688	0,563	D2	2,934	4,344	3,871
14		2,45		-0,625	0,563	0,243	D3	13,071	5,493	17,531
15	…						D0	- 193,435	- 127,649	- 139,636

Рис.3.4. Рабочий лист Excel с классифицирующими функциями

Расчет ковариационных матриц в табличном процессоре Excel показан на рис.3.2. В Excel для расчета ковариации используется функция КОВАР. Например, в ячейке G2 требуется ввести функцию КОВАР со следующими аргументами: Массив1 – A2:D2, Массив2 – A2:D2. В ячейке H2 вводится функция КОВАР со следующими аргументами: Массив1 – A2:D2, Массив2 – A3:D3.

3. Строится объединенная ковариационная матрица. Ее элементы находятся по следующей формуле:

$$S_{iq} = \frac{1}{N-K}\sum_{k=1}^{K} N_k \cdot S_{iq}^{k}, \qquad i=1,\ldots,M,\ \ q=1,\ldots,M. \qquad (3.10)$$

Для рассматриваемого примера объединенная ковариационная матрица имеет следующий вид:

$$S = \begin{pmatrix} 83,677 & -6,260 & -0,800 \\ -6,260 & 8,021 & 0,294 \\ -0,800 & 0,294 & 0,144 \end{pmatrix}.$$

Приведем примеры расчета некоторых элементов объединенной ковариационной матрицы:

$$S_{11} = \frac{1}{11-3}\cdot(4\cdot 136,688 + 3\cdot 8,222 + 4\cdot 24,5) = 83,677;$$

$$S_{12} = \frac{1}{11-3}\cdot(4\cdot(-12,688) + 3\cdot 1,889 + 4\cdot(-1,25)) = -6,26.$$

На рис.3.3 показана объединенная ковариационная матрица, рассчитанная в Excel (ячейки K2:M4). Например, в ячейке K2 требуется ввести следующую формулу: =(4*G2+3*G7+4*G12)/8.

4. Находится матрица, обратная к объединенной ковариационной матрице. Алгоритм получения обратной матрицы, рассматриваемый в курсе высшей математики, достаточно сложен и требует большого объема вычислений. Найдем обратную матрицу, используя табличный процессор Excel (см. рис.3.3).

В Excel для определения обратной матрицы применяется функция МОБР. Расчет обратной матрицы выполняется в следующем порядке. Сначала требуется с помощью “мыши” выделить столько свободных ячеек, сколько занимает исходная матрица (т.е. матрица, для которой вычисляется обратная). В данном примере для этого использованы ячейки K7:M9. Затем следует выбрать из меню функцию МОБР (она находится в группе МАТЕМАТИЧЕСКИХ функций). В качестве аргумента “Массив” необходимо указать диапазон ячеек, занимаемых исходной матрицей; в данном примере это ячейки K2:M4. Для получения обратной матрицы необходимо нажать *комбинацию* клавиш CTRL-SHIFT-ENTER (*не нажимать* кнопку OK). В выделенных ячейках (K7:M9) будет получена обратная матрица.

Как видно из рис.3.3, для данного примера матрица, обратная к объединенной ковариационной матрице, имеет следующий вид:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}013 & 0{,}008 & 0{,}056 \\ 0{,}008 & 0{,}140 & -0{,}240 \\ 0{,}056 & -0{,}240 & 7{,}760 \end{pmatrix}.$$

5. На основе вспомогательных величин, полученных на шагах 1-4, находятся классифицирующие функции. Напомним, что рассматриваемый алгоритм предназначен для построения линейных классифицирующих функций, имеющих вид $F_k = D_{0k} + D_{1k}X_1+D_{2k}X_2+\ldots+D_{Mk}X_M$, k=1,…,K.

Обозначим набор коэффициентов классифицирующей функции k-го класса $D_{1k}, D_{2k},\ldots,D_{Mk}$ (т.е. все коэффициенты, кроме D_{0k}) как вектор D^k. Этот вектор находится путем умножения обратной матрицы S^{-1} на вектор средних значений признаков соответствующего класса $\overline{A}^k$:

$$D^k = S^{-1} \cdot \overline{A}^k, \qquad k=1,\ldots,K. \qquad (3.11)$$

Напомним, что матрицы могут умножаться только при условии, что количество *столбцов* первой из умножаемых матриц равно количеству *строк* второй матрицы. Результатом умножения матриц, имеющих размерность UxV и VxW (где U, V, W – некоторые числа), является матрица размерностью UxW.

Рассмотрим определение коэффициентов классифицирующей функции первого класса (т.е. вектора D^1) с помощью Excel. Для этого требуется умножить обратную матрицу S^{-1} (размерность 3x3, ячейки K7:M9) на вектор средних значений $\overline{A}^1$ (размерность 3x1, ячейки E2:E4). Результатом умножения будет вектор-столбец, имеющий размерность 3x1. Умножение матриц в Excel выполняется с помощью функции МУМНОЖ в следующем порядке (рис.3.4).

Сначала требуется с помощью “мыши” выделить столько свободных ячеек, сколько требуется для матрицы, получаемой в результате умножения. В данном примере для этого использованы ячейки K12:K14. Затем следует выбрать из меню функцию МУМНОЖ (она находится в группе МАТЕМАТИЧЕСКИХ функций). В качестве аргументов функции МУМНОЖ указываются перемножаемые матрицы: “Массив1” - K7:M9, “Массив2” – E2:E4. Для получения результата (умножения матриц) необходимо нажать *комбинацию* клавиш CTRL-SHIFT-ENTER. В выделенных ячейках (K12:K14) будет получен столбец коэффициентов классифицирующей функции D_{11}, D_{21}, D_{31}.

Аналогично определяются коэффициенты классифицирующих функций для второго и третьего классов (рис.3.4, ячейки L12:L14 и M12:M14 соответственно). Для этого выполняется умножение обратной матрицы (ячейки K7:M9) на средние значения признаков для второго и третьего классов (ячейки E7:E9, E12:E14).

Коэффициенты классифицирующих функций D_{0k} находятся по формуле

$$D_{0k} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} D_{ik}\overline{A}_i^k, \qquad k=1,\ldots,K, \tag{3.12}$$

где D_{ik}, $i=1,\ldots,M$ – коэффициенты классифицирующей функции для k-го класса, найденные по формуле (3.11);

$\overline{A}_i^k$, $i=1,\ldots,M$ – средние значения признаков для k-го класса.

В рассматриваемом примере коэффициент классифицирующей функции для первого класса D_{01} находится следующим образом:

$$D_{01} = -\frac{1}{2}\cdot(2{,}176\cdot153{,}25 + 2{,}934\cdot13{,}75 + 13{,}071\cdot1) = -193{,}435.$$

Аналогично находятся коэффициенты классифицирующих функций для других классов: $D_{02} = -127{,}649$; $D_{03} = -139{,}636$.

Для расчета коэффициентов D_{0k} с использованием Excel удобно использовать функцию СУММПРОИЗВ (из группы МАТЕМАТИЧЕСКИЕ). Например, для вычисления коэффициента D_{01} в ячейку K15 (см. рис.3.4) введена следующая формула: =-0,5*СУММПРОИЗВ(K12:K14;E2:E4).

Таким образом, классифицирующие функции для рассматриваемого примера имеют следующий вид:

$$F_1 = -193{,}435+2{,}176\cdot X_1 + 2{,}934\cdot X_2 + 13{,}071\cdot X_3;$$
$$F_2 = -127{,}649+1{,}457\cdot X_1 + 4{,}344\cdot X_2 + 5{,}493\cdot X_3;$$
$$F_3 = -193{,}636+1{,}509\cdot X_1 + 3{,}871\cdot X_2 + 17{,}531\cdot X_3.$$

Выполним **проверку построенных классифицирующих функций**. Для этого подставим в них значения признаков объектов, входящих в обучающее множество (т.е. показатели предприятий, указанные в табл.3.12). Например, для первого объекта (предприятие П1) результаты будут следующими:

F_1 = -193,435+2,176·140 + 2,934·18 + 13,071·1,2 = 179,688;
F_2 = -127,649+1,457·140 + 4,344·18 + 5,493·1,2 = 161,121;
F_3 = -193,636+1,509·140 + 3,871·18 + 17,531·1,2 = 162,314.

Максимальное значение имеет классифицирующая функция F_1, соответствующая первому классу. Таким образом, распознавание выполнено правильно, так как предприятие П1 действительно относится к первому классу.

Выполним аналогичную проверку для всех объектов обучающего множества. Результаты приведены в табл.3.13.

Таблица 3.13

Предприятие	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8	П9	П10	П11
F_1	179,7	228,0	197,0	169,0	99,6	104,7	81,0	110,2	95,9	130,9	97,2
F_2	161,1	185,3	156,4	140,7	137,6	132,6	112,7	129,3	125,5	150,8	115,3
F_3	162,3	185,1	160,6	141,4	124,6	126,0	104,2	132,0	131,0	166,6	128,8
Класс	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3

Сопоставив результаты распознавания с постановкой задачи (табл.3.12), легко видеть, что распознавание всех предприятий выполнено правильно. Таким образом, построенные классифицирующие функции являются достаточно точными, и их можно использовать для распознавания других предприятий.

Рассмотрим **применение классифицирующих функций для распознавания объектов**. Пусть требуется определить, к какому классу относится предприятие со следующими показателями: производительность труда – 105 тыс. ден.ед. на одного работающего в месяц, себестоимость продукции – 20 ден.ед., доля брака в готовой продукции – 1,1%.

Подставим значения показателей в классифицирующие функции:

F_1 = -193,435+2,176·105 + 2,934·20 + 13,071·1,1 = 108,092;

F_2 = -127,649+1,457·105 + 4,344·20 + 5,493·1,1 = 118,262;
F_3 = -193,636+1,509·105 + 3,871·20 + 17,531·1,1 = 115,493.

Максимальное значение имеет классифицирующая функция F_2. Значит, предприятие относится ко второму классу (предприятия с промежуточными показателями).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000. – 296 с.
2. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. М.: Юнити, 1997. – 590 с.
3. Литвак Б.Г. Разработка управленческого решения. М.: Дело, 2000. – 392 с.
4. Карданская Н.Л. Принятие управленческого решения. М.: Юнити, 1999. – 407 с.
5. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991. - 224 с.
6. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. - 320 с.
7. Мазур И.И., Шапиро В.Д. и др. Управление проектами. Справочник для профессионалов. М.: Высшая школа, 2001. – 875 с.
8. Марков Л.Н. Анализ и процедуры принятия решений. Мн.: Институт управления и предпринимательства, 2001. – 168 с.
9. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений. М.: СИНТЕГ, 1998. - 376 с.
10. Железко Б.А., Морозевич А.Н. Теория и практика построения информационно-аналитических систем поддержки принятия решений. Мн.: Армита-Маркетинг, Менеджмент, 1999. - 143 с.
11. Гаврилова Т.А., Червинский В.Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. СПб.: Питер, 2000. – 384 с.
12. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом “Вильямс”, 2001. - 912 с.
13. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. М.: Финансы и статистика, 1999. – 176 с.
14. Князевская Н.В., Князевский В.С. Принятие рискованных решений в экономике и бизнесе. М.: Контур, 1998. – 160 с.
15. Грачева М.В. Анализ проектных рисков. М.: ЗАО “Финстатинформ”, 1999. – 216 с.
16. Грабовый П.Г. Риски в современном бизнесе. М.: Аланс, 1994. – 237 с.
17. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др.; Под общей ред. А.В. Кузнецова. Мн.: БГЭУ, 1999. - 413 с.
18. Многомерный статистический анализ в экономике: Учеб. для вузов / Л.А. Сошникова, В.Н.Тамашевич, М.Шефер и др.; Под ред. В.Н.Тамашевича. М.: Юнити, 1999. – 598 с.
19. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы для экономистов и менеджеров.: Учеб. для вузов. М.: Финансы и статистика, 1998. – 350 с.

20. Смородинский С.С., Батин Н.В. Анализ и оптимизация систем на основе аналитических моделей: Учебно-методическое пособие по курсу "Системный анализ и исследование операций" для студентов специальности АСОИ. Мн.: БГУИР, 1997. - 77 с.
21. Смородинский С.С., Батин Н.В. Методы и системы принятия решений. В 2-х частях. Часть 1. Мн.: БГУИР, 2000. – 96 с., Часть 2. Мн.: БГУИР, 2001. – 80 с.

Св. план 2002, поз.32

Учебное издание

Авторы: Смородинский Сергей Степанович,
Батин Николай Владимирович

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СЛАБОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по курсу "Методы и системы принятия решений"

для студентов специальности
"Автоматизированные системы обработки информации"

Редактор Т.Н.Крюкова
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Бумага Печать офсетная. Усл.печ.л.
Уч.-изд.л. Тираж 200 экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
“Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”
Лицензия ЛП №156 от 05.02.2001.
Лицензия ЛП №509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П.Бровки, 6