

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

*Кафедра теоретических основ электротехники*

ШЕВЧЕНКО Ф.Г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к выполнению контрольных заданий  
по курсу

# ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 39.01.01

ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ



Минск 2002

УДК 621.3(075)  
ББК 31.2 я73  
М 54

Шевченко Ф.Г.

М 54 Методические указания к выполнению контрольных заданий по курсу «Электротехника» для студентов специальности 39.01.01 заочной формы обучения /– Минск: БГУИР, 2002. - с.52: ил.

Методические указания предназначены для студентов-заочников, изучающих курс “ЭЛЕКТРОТЕХНИКА”. Содержат задания по анализу линейных электрических цепей в установившемся режиме с источниками постоянных и гармонических ЭДС и токов, частотным характеристикам линейных электрических цепей и методические разработки для выполнения контрольной работы №1.

Рекомендуются студентам заочникам для выполнения контрольной работы и при подготовке к экзамену.

УДК

621.3 (075)

ББК 31.2 я 73

© Ф.Г.Шевченко, 2002

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие указания

Методические указания к выполнению контрольной работы

Основные понятия и законы теории линейных электрических цепей

Расчет электрической цепи методом уравнений Кирхгофа

Метод узловых напряжений

Метод контурных токов

Метод наложения

Метод эквивалентного генератора напряжения

Расчет индуктивно связанных электрических цепей

Численные методы анализа

Эквивалентные схемы электрической цепи

Интегрирование дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния

Частотные характеристики линейных цепей

Контрольная работа № 1

Часть 1. Анализ цепи с источниками постоянных ЭДС и токов

Пример расчета цепи постоянного тока

Расчет токов методом преобразования

Метод эквивалентного генератора

Часть 2. Анализ электрической цепи при гармонических источниках

Пример расчета цепи переменного тока

Графоаналитический метод расчета

Построение амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик

ЛИТЕРАТУРА

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

К экзамену допускаются студенты, имеющие все зачтенные контрольные работы курса и выполнившие лабораторные работы.

При выполнении контрольных работ рекомендуется пользоваться следующими положениями:

1. Контрольную работу выполнять в школьной тетради. Текст должен быть написан только на одной стороне листа. Вторая сторона листа предназначена для внесения студентом исправлений. Для замечаний преподавателя на каждой странице должно быть оставлено поле справа шириной 3 см. Все страницы нумеруются. На титульном листе необходимо указать наименование института, название факультета, название предмета и номер контрольной работы, а также шифр, фамилию и инициалы, домашний адрес и группу.

2. В начале каждой контрольной работы вклеить распечатку-задание, привести расчетную схему в расшифрованном виде и исходные данные своего варианта.

3. В ходе решения давать подробные словесные пояснения. Обязательно указывать единицы измерения всех найденных при расчете величин. Результат решения записывать с тремя значащими цифрами, например: 2,07 А; 23,5 кОм; 0,01235 В; 0,461 мкФ.

4. В конце работы необходимо привести найденные при расчете величины в виде таблицы, список использованной литературы, поставить дату окончания работы и свою подпись.

5. На повторную рецензию не зачтенные контрольные работы принимаются только при наличии первоначального текста, в который студент не должен вносить никаких исправлений и изменений. Исправление ошибок делается на обратной стороне листа.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ  
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ К  
ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ №1, №2, №3, №6.

При изучении материала для выполнения и защиты контрольной и лабораторных работ студенту необходимо обратить внимание на основные закономерности для электрических цепей постоянного и переменного токов и изучить следующие методы расчета:

1. Метод преобразования.
2. Метод уравнений Кирхгофа.
3. Метод узловых потенциалов.
4. Метод контурных токов.
5. Метод наложения.
6. Метод эквивалентного генератора напряжения (тока).
7. Численные (компьютерные) методы.

**Основные понятия и законы теории линейных электрических цепей.**

Электрический ток в электрических цепях неразрывно связан с магнитным и электрическим полями. При переменном токе  $i(t)$  эти поля изменяются во времени. Изменяющееся магнитное поле наводит ЭДС, изменение электрического поля сопровождается изменением зарядов. При этом часть электромагнитной энергии превращается в тепло, часть излучается.

К простейшим двухполюсным элементам цепи относятся сопротивление  $r(R)$  или проводимость  $g(G)$ , индуктивность  $L$ , емкость  $C$ , источник напряжения  $e(t)$  и источник тока  $J(t)$  (рис. 1.).

Для любого момента времени напряжение на зажимах сопротивления и ток (рис. 1,а) связаны законом Ома:

$$u(t)=r*i(t) \quad \text{или} \quad i(t)=g*u(t).$$

Если  $u(t)=U_m \sin \omega t$ , то ток  $i(t)=(U_m/r) \sin \omega t=I_m \sin \omega t$ , т.е. напряжение и ток в резистивном элементе совпадают по фазе.

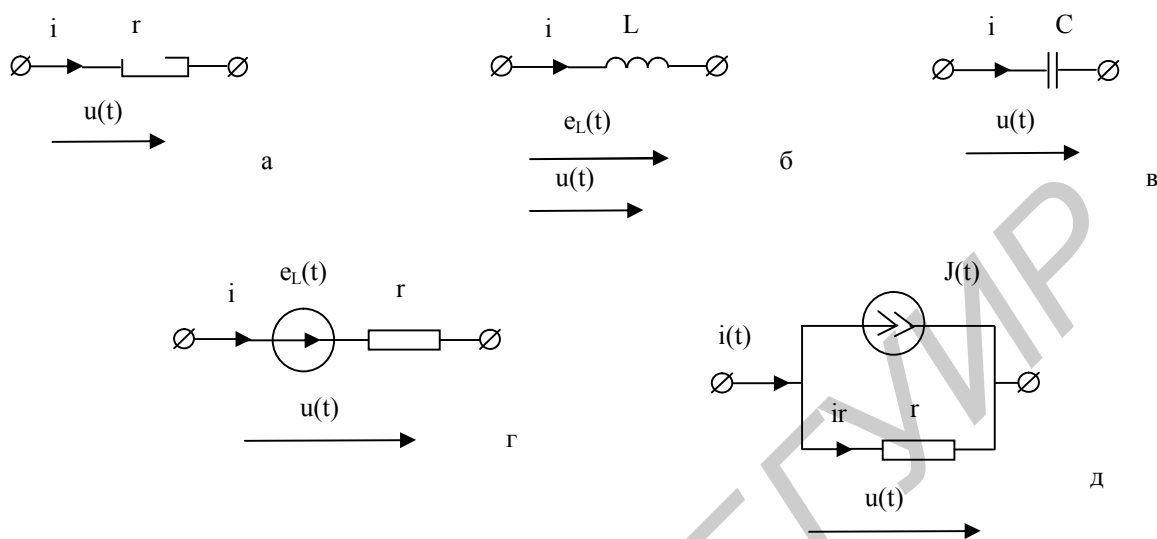


Рис.1.

Резистивный элемент (см.рис.1,а) характеризует преобразование электромагнитной энергии в тепловую (закон Джоуля-Ленца). Мгновенная мощность, передаваемая в элемент  $r$  от источника, равна

$$p(t)=r \cdot i^2=u \cdot i=U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin \omega t=U_m \cdot I_m(1-\cos 2 \omega t) \geq 0.$$

Среднее значение мощности за период называется активной мощностью и выражается формулой

$$P=1/T \int_0^T i(t) \cdot u(t) \cdot dt=U_m \cdot I_m/2=r I^2.$$

Сопротивление  $r$  в цепи переменного тока больше омического сопротивления ( $R=r \cdot 1/S$ ) в цепях постоянного тока и называется активным.

Это объясняется явлением «поверхностного эффекта», заключающимся в неодинаковом распределении плотности тока по сечению проводника. Противодействие наводимой магнитным полем ЭДС току тем больше, чем ближе нить проводника расположена к оси провода, так как эта нить сцеплена с большим количеством индукционных линий.

Индуктивный элемент (рис.1,б) – это элемент, в котором напряжение  $u(t)$  и ток  $i(t)$  связаны законом электромагнитной индукции

$$u=Ldi/dt \quad \text{и} \quad e_L=-Ldi/dt,$$

где  $e_L$  – ЭДС самоиндукции, противодействующая, согласно закону Ленца, изменению тока.

При  $i(t)=I_m \sin \omega t$  напряжение

$$u=-e_L(t)=Ldi/dt=\omega L * I_m * \cos \omega t=U_m * \sin(\omega t+\pi/2),$$

т.е. напряжение опережает по фазе ток на  $\pi/2$ , а  $e_L(t)$  отстает по фазе на  $\pi/2$ .

Величина  $\omega L$  имеет размерность сопротивления, называется индуктивным сопротивлением и обозначается  $X_L$ :  $X_L=\omega L$ .

Емкостный элемент (рис.1,в) – это элемент, который способен накапливать энергию в электрическом поле. При  $u(t)=U_m \sin \omega t$

$$i(t)=Cdu/dt=\omega C * U_m * \cos \omega t=I_m * \sin(\omega t+\pi/2),$$

т.е. ток опережает по фазе напряжение на  $\pi/2$ . Величина  $1/\omega C$  имеет размерность сопротивления, называется емкостным сопротивлением и обозначается  $X_C$ ;  $X_C=1/\omega C$ .

Основные законы электрического состояния любой цепи – это законы Кирхгофа. Для написания законов Кирхгофа необходимо произвольно задаться положительными направлениями токов каждой ветви.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узле, равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0,$$

где с положительным знаком учитываются токи, направленные от узла.

Первый закон Кирхгофа для узла (рис.1,д) имеет вид

$$J(t)+i_r(t)-i(t)=0.$$

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС любого замкнутого контура равна алгебраической сумме падений напряжений

$$\sum_{k=1}^n e_k(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t),$$

где с положительным знаком учитываются ЭДС и напряжения, направления которых совпадают с направлением обхода контура.

В цепи при гармоническом (синусоидально изменяющемся) воздействии мгновенные значения тока, напряжения и источников определяются выражениями:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$$

$$J(t) = J_m \sin(\omega t + \psi_J),$$

где  $I_m$ ,  $U_m$ ,  $E_m$ ,  $J_m$  – максимальные значения (амплитуды) соответственно тока, напряжения, ЭДС и источника тока;

$(\omega t + \psi)$  – фаза;

$\psi$  – начальная фаза;

$\omega = 2\pi/T = 2\pi \cdot f$  – угловая частота;

$T = 1/f$  – период гармонической функции;

$f$  – частота.

Для оценки эффективности гармонического тока вводится понятие «действующее значение тока»:

$$I = \left( \frac{1}{T} \int_0^T (i(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Действующие значения гармонической функции связаны с амплитудными значениями соотношением

$$I = I_m / \sqrt{2} = 0.707 \cdot I_m, \quad U = 0.707 \cdot U_m, \quad E = 0.707 \cdot E_m, \quad J = 0.707 \cdot J_m.$$



Расчет цепей переменного тока облегчается, если изображать гармонические токи, напряжения и ЭДС векторами или комплексными числами. Комплексное число  $\dot{I}_m$  называется комплексной амплитудой тока, и её можно записать

$$\dot{I}_m = I_m * e^{j\psi_i} = I_m * (\cos\psi_i + j\sin\psi_i).$$

Переход от гармонической функции времени, ее производной интеграла к изображающим их комплексным величинам осуществляется согласно простому правилу:

а) гармоническая функция заменяется изображающей ее комплексной величиной, т.е.

$$i(t) = I_m * \sin(\omega t + \psi_i) = \dot{I}_m = I_m * e^{j\psi_i}; \quad u(t) = \bar{U}_m = U_m * e^{j\psi_u};$$

б) дифференцирование заменяется умножением на  $j\omega$  комплексной величины, т.е.

$$U_L(t) = L * di/dt = j\omega L * I_m = \omega L * \dot{I}_m * e^{j(\psi_i + \pi/2)} = \bar{U}_{Lm};$$

$$i_c(t) = C * du/dt = j\omega C * U_m = \omega C * U_m * e^{j(\psi_u + \pi/2)} = \dot{I}_{cm};$$

в) интегрирование заменяется делением комплексной величины на  $j\omega$ ,

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt = \frac{1}{j\omega L} \dot{U}_{Lm} = \dot{I}_{Lm};$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_{cm} = \bar{U}_{cm}.$$

Согласно ГОСТу любое комплексное значение обозначается соответствующей буквой с чертой под ней (для величин, изменяющихся по гармоническому закону, разрешается комплексные величины обозначать с точкой, над соответствующей буквой).

При записи уравнений на основании законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме пользуются понятием обобщенной ветви (рис.2).

Первый закон Кирхгофа для узла 1:  $J_5 = I_5 - I$ .

Второй закон Кирхгофа:  $U_{12} = Z_5 I_5 - E_5$ .

Обобщенный закон Ома в комплексной форме имеет вид

$$I_5 = (E_5 = U_{12}) / Z_5,$$

где  $\hat{I}$ ,  $\hat{U}$ ,  $\hat{E}$ ,  $\hat{J}$  – комплексные действующие значения соответственно тока, напряжения, ЭДС и источника тока:

$z_5 = z_5 * e^{j\varphi} = r_5 + j(X_L - X_C) = z_5 * \cos(\varphi) + jz_5 * \sin(\varphi)$  – комплексное сопротивление ветви;

$r_5 = z_5 * \cos(\varphi)$  – активное сопротивление ветви в цепи переменного тока;

$X_5 = z_5 * \sin(\varphi)$  – реактивное сопротивление ветви;

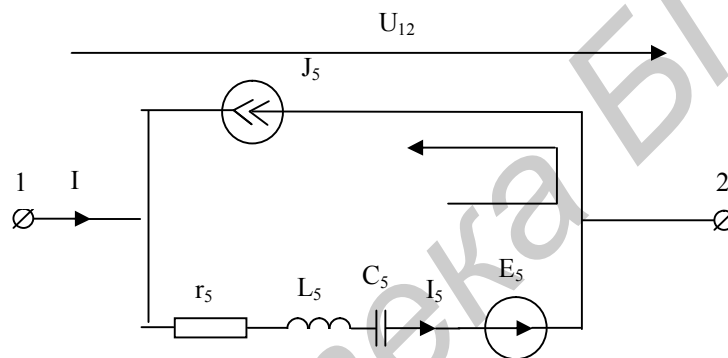


Рис.2

$\varphi = \psi_U - \psi_i = \arctg(X_5/r_5)$  – сдвиг по фазе между  $u(t)$  и  $i(t)$  или аргумент комплексного сопротивления пятой ветви;

$z_5 = \sqrt{(r_5)^2 + (x_5)^2}$  – модуль полного сопротивления пятой ветви;

$e^{j\pi/2} = \cos\pi/2 + j\sin\pi/2 = j = -1/j$  – вектор поворота на угол  $\pi/2$ .

Комплексное действующее значение связано с комплексной амплитудой равенством

$$\dot{I} = \dot{I}_m / \sqrt{2}, \quad \dot{U} = \dot{U}_m / \sqrt{2}, \quad \dot{E} = \dot{E}_m / \sqrt{2} = 0.707 \dot{E}_m.$$

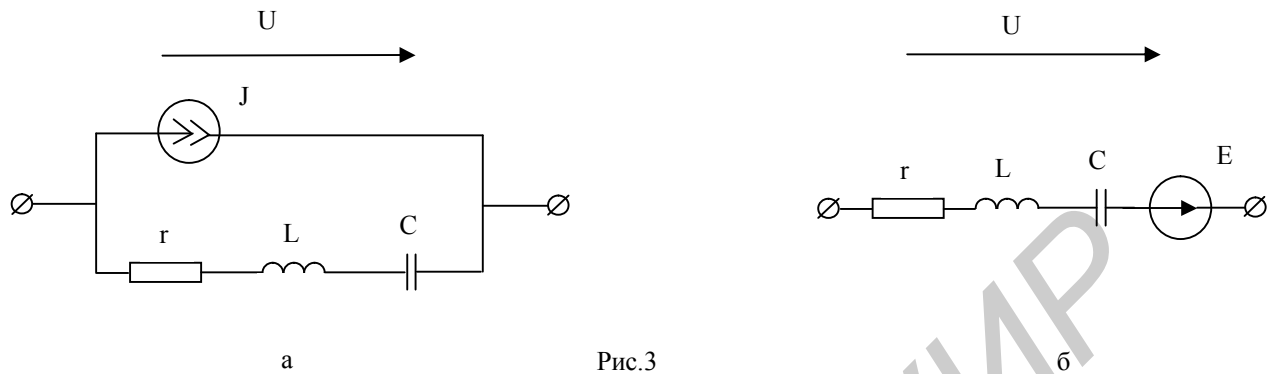


Рис.3

Реальный источник напряжения (рис.3,б) и источник тока (рис.3,а) имеют внутреннее сопротивление. Переход от схемы источника напряжения к эквивалентной схеме источника тока осуществляется по формулам

$$J = E/Z, \quad E = J/Y, \quad Z = 1/Y = r + j(\omega L - 1/\omega C).$$

Формулы преобразования звезды сопротивлений (рис.4,а) в эквивалентный треугольник (рис.4,б) и наоборот имеют вид

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 / Z_3; \quad Z_{23} = Z_2 + Z_3 + Z_2 Z_3 / Z_1;$$

$$Z_{31} = Z_3 + Z_1 + Z_3 Z_1 / Z_2; \quad Z_1 = Z_{12} Z_{13} / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31});$$

$$Z_2 = Z_{23} Z_{12} / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}); \quad Z_3 = Z_{31} Z_{23} / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}).$$

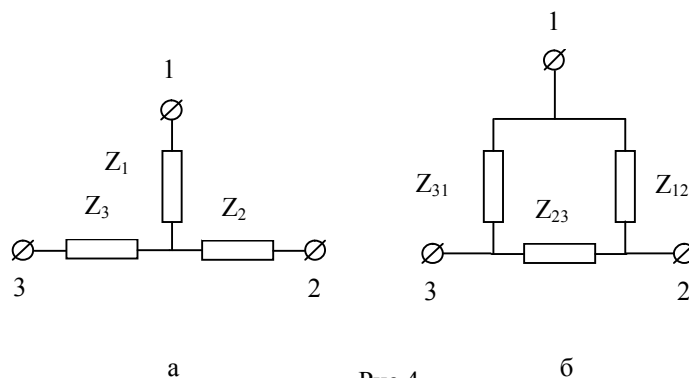


Рис.4

Эквивалентные последовательная (рис.5,а) и параллельная (рис.5,б) схемы замещения ветви связаны соотношениями:

$$Z=r+jX_L=1/Y=1/(g_L-jb_L)=(g_L+jb_L)/((g_L-jb_L)*(g_L+jb_L))=$$

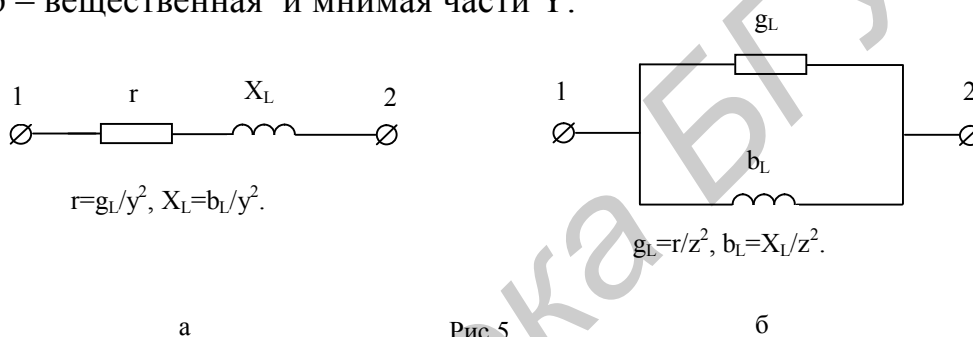
$$=(g_L+jb_L)/(g_L^2+b_L^2)=g_L/y^2+jb_L/y^2;$$

$$Y=g_L-jb_L=1/Z=1/(r+jX_L)=(r-jX_L)/((r+jX_L)*(r-jX_L))=(r-jX_L)/(r^2+X_L^2)=r/z^2-jX_L/z^2.$$

Здесь  $Y=ye^{-j\varphi}$  - комплексная проводимость ветви;

$$y=\sqrt{g^2+b^2} - \text{модуль комплексной проводимости ветви;}$$

$g$  и  $b$  – вещественная и мнимая части  $Y$ .



### 1.Расчет электрической цепи методом уравнений Кирхгофа.

Количество уравнений, составленных по этому методу, определяется из выражения  $N=N_1+N_2$ , где  $N_1=Y-1$  – количество уравнений по первому закону Кирхгофа;  $N_2=(B-Y+1-N_J)$  – количество независимых контуров, равное числу уравнений по второму закону Кирхгофа;  $B$ ,  $Y$  и  $N_J$  – соответственно количество ветвей, узлов и идеальных источников тока электрической цепи.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа ветви с источниками тока не должны быть включены в независимые контуры.

**Пример 1.** Определить токи во всех ветвях схемы, если

$$R_{r2}=60 \text{ Ом; } r_3=25 \text{ Ом;}$$

$$X_{L1}=65 \text{ Ом; } X_{C1}=20 \text{ Ом;}$$

$$X_{C3}=15 \text{ Ом};$$

$$e_2(t)=180*\sin(\omega t+50) \text{ В};$$

$$J_3(t)=2.3*\sin(\omega t-90) \text{ А}.$$

**Решение.** Произвольно зададим

направления неизвестных токов (рис.6).

Схема содержит 4 ветви, 2 узла

и один идеальный источник тока. По первому закону Кирхгофа составим одно уравнение (для узла 1):  $I_1-I_2-I_3-I_4=0$ . Выберем два контура и составим для них уравнения по второму закону Кирхгофа (см. рис.6).

$$Z_1*I_1+Z_3*I_3=0;$$

$$Z_1*I_1+Z_2*I_2=E_2,$$

где  $Z_1=jX_{L1}-jX_{C1}=j65-j20=j45 \text{ Ом}$ ;  $Z_2=r_2=60 \text{ Ом}$ ;  $Z_3=r_3-jX_{C3}=25-j15 \text{ Ом}$  ;

$$\hat{J}_4=J_4*\cos(-90)+j(J_4*\sin(-90))=-j0.707*2.3=-j1.63 \text{ А};$$

$$\hat{E}_2=E_2*\cos 50+jE_2*\sin 50=0.707(115.7+j137.9)=82+j97 \text{ В} .$$

Подставив численные значения, получим:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 + j1.63 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j45*I_1 + (25-j15)*I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j45*I_1 + 60*I_2 = 82 + j97. \end{cases}$$

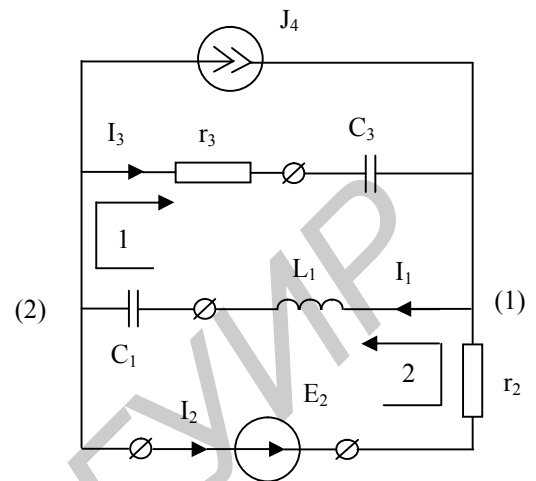


Рис.6

В результате решения находим токи:  $I_1=0.653e^{-j84.7}=0.065-j0.651$  А;

$$I_2=1.8e^{j61.2}=0.88+j1.58 \text{ А}; I_3=1.032e^{-j142.8}=-0.815-j0.605 \text{ А}.$$

Для проверки правильности решения задачи составим баланс активных и реактивных мощностей:  $P_{и}=P_{п}$  и  $Q_{и}=Q_{п}$ ,

где  $P_{и}=E_2 \cdot I_2 \cdot \cos(\psi_e - \psi_{j2}) + J_4 \cdot U_{12} \cos(\psi_{u12} - \psi_j)$  – мощность, отдаваемая источниками;  $P_{п}=r_2 \cdot I_2^2 + r_3 \cdot I_3^2$  – мощность, потребляемая элементами схемы;

$Q_{и}=E_2 \cdot I_2 \sin(\psi_e - \psi_{j2}) + J_4 \cdot U_{12} \sin(\psi_{u12} - \psi_j)$  – реактивная мощность источников;

$Q_{п}=(X_{L1} - X_{C1}) \cdot I_1^2 + (-X_{C3}) \cdot I_3^2$  – мощность, запасаемая элементами схемы;

$U_{12}=Z_1 \cdot I_1$  – напряжение на зажимах источника тока.

Баланс активных мощностей

$$127 \cdot 1.8 \cos(50-61) + 1.63 \cdot 45 \cdot 0.653 \cos(90-85+90) = 60 + 1.8^2 + 25 \cdot (-1.032)^2;$$

$$224.25 - 4.424 \approx 194 + 26.62; \quad 219.826 \approx 220.62 \text{ Вт}.$$

Баланс реактивных мощностей

$$127 \cdot 1.8 \sin(50-61) + 1.63 \cdot 45 \cdot 0.653 \sin(90-85+90) = 45 \cdot 0.65^2 - 15 \cdot (-1$$

$$-44.42 + 47.69 \approx 19.19 - 15.97; \quad 3.27 \approx 3.22 \text{ вар}.$$

## 2. Метод узловых напряжений.

Метод основан на использовании первого закона Кирхгофа. Количество уравнений, составляемых по этому методу, определяется из выражения  $N = Y - 1 - N_e$ , где  $Y$  и  $N_e$  – число узлов и количество идеальных источников ЭДС. Базисным узлом (узел, потенциал которого принимается равным нулю) необходимо выбрать один из узлов идеального источника ЭДС. Токи в ветвях находятся с помощью закона Ома по найденным напряжениям между узлами схемы.

Пример 2. Определить токи в ветвях схемы (рис.7), если

$$r_2=50 \text{ Ом}; r_3=10 \text{ Ом}; X_{L1}=65 \text{ Ом}; X_{C1}=20 \text{ Ом}; r_4=25 \text{ Ом};$$

$X_{C4}=15 \text{ Ом}; E_2=41 \text{ В}; \psi_e=24 \text{ град}; J_4=1.63 \text{ А}; \psi_j=-90 \text{ град}.$

**Решение.** Произвольно выбираем положительные направления токов в ветвях схемы (рис.7). Определим количество уравнений, необходимых для решения, приняв потенциал узла 2 равным нулю.  $N=Y-1-N_e=3-1-1=1.$

Потенциал 1-го узла равен:  $V_1=V_2+E_2=0+38.3+j18.7=41 \cdot e^{j24} \text{ В}.$

Запишем уравнение для определения потенциала узла 3:

$$(1/Z_1+1/Z_3+1/Z_4) \cdot V_3 - (1/Z_3) \cdot V_1 = J_4;$$

$$(1/(j65-j20)+1/10+1/(25-j15))V_3 - (41e^{j24})/(25-j15) = -j1.63; \quad V_3 = 29.4e^{j5.3} = 28.8 + j2.8 \text{ В}.$$

Определим напряжения между узлами:

$$U_{21} = V_2 - V_1 = 0 - 38.3 - j18.7 = 41.1e^{-j156} \text{ В};$$

$$U_{13} = V_1 - V_3 = 38.3 + j18.7 - 28.8 - j2.8 = 9.5 + j15.9 = 18e^{j61.2} \text{ В}; \quad U_{32} = -U_{23} = V_3 - V_2 = 29.4e^{j5.3} \text{ В}.$$

На основании закона Ома определим

токи в ветвях схемы (рис.7):

$$I_1 = U_{32}/Z_1 = (29.4e^{j5.3})/45e^{j90} = 0.653e^{-j84.7} \text{ А};$$

$$I_2 = U_{21}/Z_2 = (41.1e^{-j156})/50 = -0.766 - j0.374 \text{ А};$$

$$I_3 = U_{13}/Z_3 = (18e^{j61.2})/10 = 0.95 + j1.59 \text{ А};$$

$$I_4 = -U_{32}/Z_4 = (29.4e^{-j174.7})/(25-j15) = 1.032e^{-j142.8} \text{ А}.$$

Ток в ветви с ЭДС  $E_2$  находим по первому закону Кирхгофа:

$$I_e = I_3 - I_2 = 0.95 + j1.59 + 0.766 + j0.374 = 1.716 + j1.964 \text{ А}.$$

Правильность решения проверим, составив баланс активных и реактивных мощностей:

$$E_2 \cdot I_e \cdot \cos(\psi_e - \psi_{j_e}) - U_{32} \cdot J_4 \cdot \cos(\psi_u - \psi_j) = r_2 \cdot I_2^2 + r_3 \cdot I_3^2 + r_4 \cdot I_4^2;$$

$$41.1 \cdot 2.6 \cos(24 - 48.85) + 29.4 \cdot 1.63 \cos(5.3 + 90) = 50 \cdot 0.82^2 + 10 \cdot 1.8^2 + 25 \cdot 1^2;$$

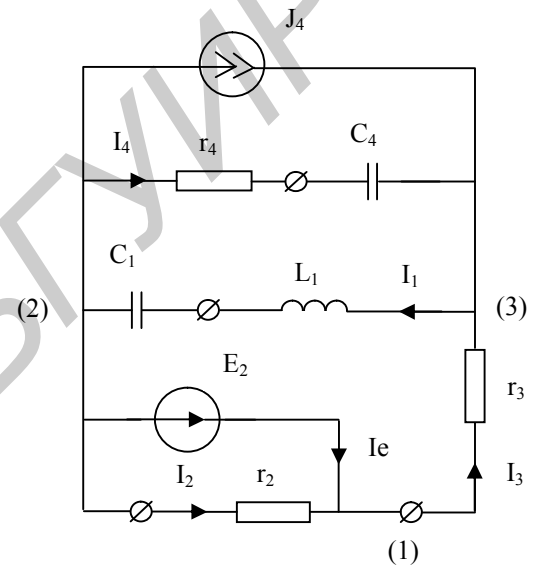


Рис.7

$$96.96 - 4.43 \approx 33.62 + 32.4 + 26.62; \quad 92.53 \approx 92.64 \text{ Вт.}$$

$$E_2 * I_e * \sin(\psi_e - \psi_{je}) + U_{32} * J_4 * \sin(\psi_u - \psi_j) = X_1 * I_1^2 - X_4 * I_4^2;$$

$$41.1 * 2.6 \sin(24 - 48.85) + 29.4 * 1.63 \sin(5.3 + 90) = 45 * 0.653^2 - 15 * 1.032^2;$$

$$-44.8 + 47.72 \approx 19.18 - 15.98; \quad 2.92 \approx 3.2 \text{ вар.}$$

### 3. Метод контурных токов.

Метод контурных токов основан на использовании второго закона Кирхгофа. Количество уравнений, равное числу независимых контуров, определяется из уравнения  $N = B - Y + 1 - N_J$ , где  $B, Y$  и  $N_J$  – соответственно число ветвей, узлов и количество идеальных источников тока. Контурные уравнения, для которых составляются уравнения, не должны содержать ветви с источниками тока, но учет падения напряжения в этих контурах от источников тока обязателен. Для этого рекомендуется обозначать контуры, которые содержат только один источник тока. В этом случае контурный ток известен и равен по величине току источника тока. Источник тока не может быть включен в несколько контуров.

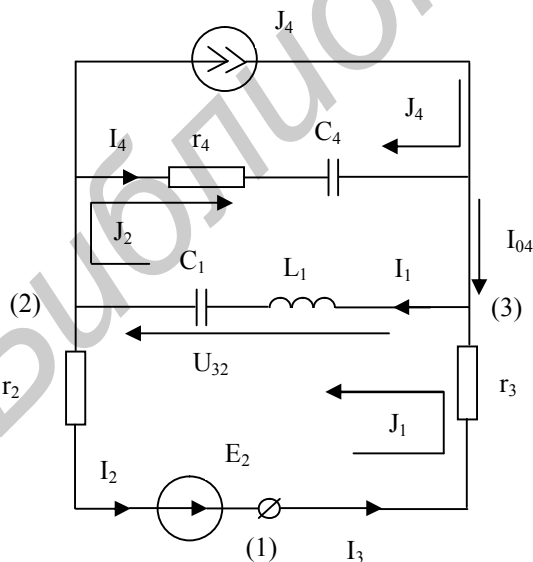


Рис.8

Пример 3. Определить токи во

всех ветвях схемы (рис.8), если

$$r_2 = 50 \text{ Ом}; \quad r_3 = 100 \text{ Ом}; \quad X_{L1} = 65 \text{ Ом}; \quad X_{C1} = 20 \text{ Ом};$$

$$r_4 = 25 \text{ Ом}; \quad X_{C4} = 15 \text{ Ом}; \quad E_2 = 127 \text{ В};$$

$$\psi_e = 50 \text{ град}; \quad J_4 = 1.63 \text{ А}; \quad \psi_j = -90 \text{ град.}$$

**Решение.** В схеме (см. рис.8) два узла (узел 1 устранимый), четыре ветви, одна из которых содержит источник тока. Количество независимых контуров находим по формуле

$$N = B - Y + 1 - N_J = 4 - 2 + 1 - 1 = 2.$$



Выбираем положительные направления контурных токов  $J_1, J_2$ , а также известного по величине контурного тока  $J_4$  (см. рис.8) и составляем уравнения:

$$(Z_1+Z_2+Z_3)J_1+Z_1J_2=E_2;$$

$$Z_1J_1+(Z_1+Z_4)J_2-Z_4J_4=0,$$

где  $Z_1=j(X_{L1}-X_{C1})=j(65-20)=j45=45e^{j90^\circ}$  Ом;  $Z_2=r_2=50$  Ом;  $Z_3=r_3=10$  Ом;

$Z_4=r_4-jX_{C4}=25-j15=29.1e^{-j31^\circ}$  Ом.

Подставим численные значения в систему уравнений:

$$(60+j45)J_1+j45*J_2=82+97.6j;$$

$$j45*J_1+(25+j25)J_2-(25-j15)(-j1.63)=0.$$

Отсюда  $J_1=0.88+j1.58$  А;  $J_2=-0.815-j2.235$  А.

Определим токи в ветвях, исходя из известных контурных токов:

$I_1=J_1+J_2=0.065-j0.655$  А;  $I_2=I_3=J_1=0.88+j1.58$  А;  $I_4=J_2-J_4=-0.815-j0.605$  А.

Для проверки правильности решения составим уравнение по первому закону Кирхгофа (для узла 3):

$$I_1-I_3-I_4-J_4=0; 0.065+j0.655-0.88-j1.58+0.815+j0.605+j1.63=0+j0.$$

#### 4.Метод наложения.

В любой линейной электрической цепи токи могут быть получены как алгебраическая сумма токов, вызываемых в этой цепи каждым источником энергии в отдельности.

**Пример 4.** Определить токи во всех ветвях схемы (рис.9), если  $r_2=50$  Ом;  $r_3=10$  Ом;  $X_{L1}=65$  Ом;  $X_{C1}=20$  Ом;  $r_4=25$  Ом;  $X_{C4}=15$  Ом;

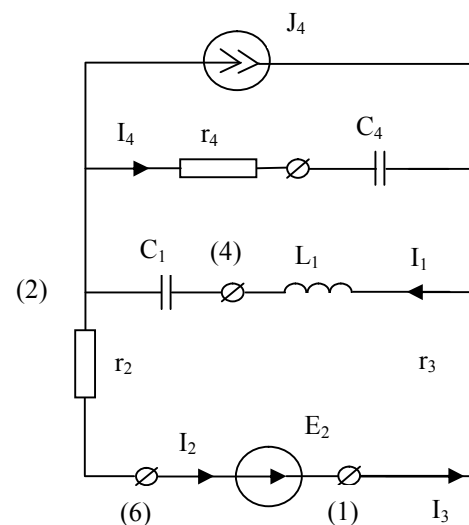


Рис.9

$E_2=127$  В;  $\psi_e=50$ град;  $J_4=1.63$  А;  $\psi_j=-90$ град.

**Решение.** Комплексные сопротивления

ветвей (рис.9):  $Z_1=j(X_{L1}-X_{C1})=j(65-20)=j45=45e^{j90^\circ}$  Ом;

$Z_2=r=50$  Ом;  $Z_3=r3=10$  Ом;  $Z_4=r4-jX_{C4}=25-j15=29.1e^{-j31^\circ}$  Ом;

1. Определим частные слагающие токи, вызываемые источником напряжения  $E_2$ .

Разорвем ветвь с источником тока (рис.10). Входное сопротивление всей цепи

$Z'=Z_2+Z_3+(Z_1*Z_4)/(Z_1+Z_4)=50+10+(j45*(25-j15)/(j45+25-j15)=95.2*e^{j4.6}$  Ом.

Тогда  $I_2'=I_3'=E_2/Z'=127*e^{j50}/95.2*e^{j4.6}=1.32*e^{j45.4}$  А.

Токи в 1-й и 2-й ветвях схемы (см. рис.10) находим по правилу плеч:

$$I_1'=I_2'*Z_4/(Z_1+Z_4)=0.99e^{-j35.7} \text{ А};$$

$$I_4'=-I_2'*Z_1/(Z_1+Z_4)=1.52e^{-j94.7} \text{ А}.$$

2. Определим частные слагающие токи, вызываемые источником тока  $J_4$  (рис.11). Определим токи  $I_1''$ ,  $I_2''$  и  $I_4''$  по правилу плеч:

$$I_4'' = -J_4 \frac{Z_{123}}{Z_4 + Z_{123}} = 1.21 e^{j126.7} \text{ А},$$

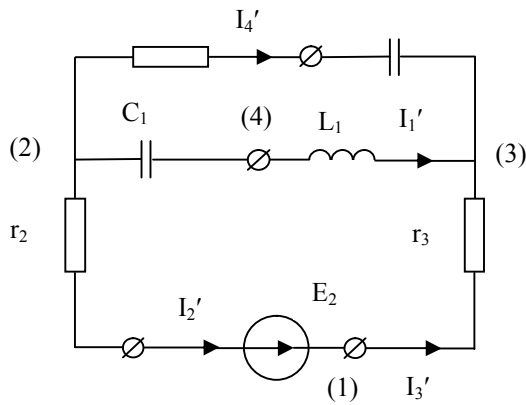


Рис.10

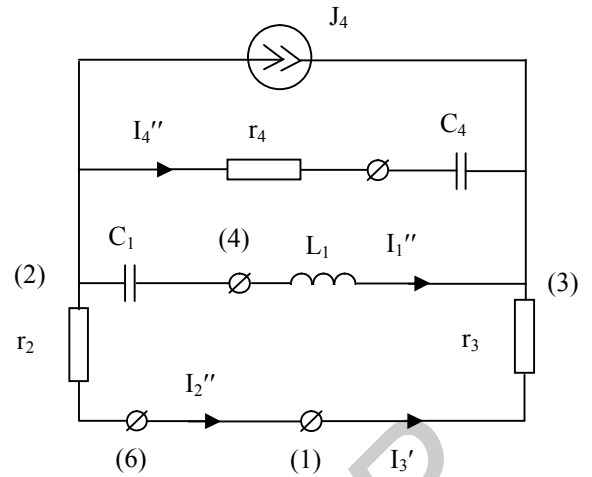


Рис.11

где  $Z_{123} = Z_1 * (Z_2 + Z_3) / (Z_1 + Z_2 + Z_3) = j45 * (50 + 10) / (j45 + 50 + 10) = 36e^{j53.13}$  Ом;

$$I'' = J_4 + I_4'' = -0.722 - j0.66 \text{ A};$$

$$I_1'' = I'' * (Z_2 + Z_3) / (Z_1 + Z_2 + Z_3) = 0.978e^{-j137.5} * (50 + 10) / (60 + j45) = 0.78e^{-j174.3} \text{ A};$$

$$I_2'' = I_3'' = -I'' * Z_1 / (Z_1 + Z_2 + Z_3) = 0.978e^{-j137.5} * j45 / (60 + j45) = 0.339e^{j95.3} \text{ A}.$$

3. Найдём искомые токи в ветвях схемы (рис.9) как алгебраическую сумму частных слагающих токов:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 0.826 - j0.577 - 0.766 - j0.0775 = 0.655e^{-j84.7} \text{ A};$$

$$I_2 = I_3 = I_2' + I_2'' = 0.926 + j0.96 - 0.06 + j0.6 = 1.79e^{j60.2} \text{ A};$$

$$I_4 = I_4' + I_4'' = -0.126 - j1.515 - 0.724 + j0.97 = 1.01e^{-j147.3} \text{ A}.$$

### 5. Метод эквивалентного генератора напряжения (МЭГН).

Метод позволяет сложную электрическую схему с произвольным числом источников электрической энергии привести к схеме с одним источником, что упрощает расчет.

Для того чтобы определить ток в произвольной ветви схемы данным методом (рис.12,а), необходимо:

1. Электрическую цепь, к которой подключена данная ветвь, заменим эквивалентным источником напряжения  $E_g$ , величина которого

определяется напряжением на зажимах разомкнутой ветви ab (рис.12,б), а внутреннее сопротивление источника равняется входному сопротивлению пассивной цепи со стороны зажимов a и b при разомкнутой ветви ab (рис.12,в). Напряжение на разомкнутых зажимах a и b определяем любым методом расчета (напряжение холостого хода ( $U_{abxx}$ )). При определении внутреннего сопротивления источника напряжения необходимо ветви, содержащие источники напряжения, закоротить.

2. Искомый ток определяем по формуле:  $I_H = U_{abxx} / (Z_r + Z_H)$ .

**Пример 5.** Определить закон изменения тока в четвертой ветви МЭГН (рис.13), если

$$r_1 = r_2 = r_3 = 2 \text{ Ом}; \quad r_4 = 10 \text{ Ом}; \quad X_C = 5 \text{ Ом}; \quad X_L = 5 \text{ Ом};$$

$$J_1(t) = 4.24 \sin(\omega t + 90) \text{ А}; \quad J_2(t) = 2.82 \sin(\omega t - 90) \text{ А}; \quad e(t) = 141 \sin \omega t \text{ В}.$$

**Решение.** Определим напряжение холостого хода при разомкнутой ветви ab (рис.14):

$$\begin{aligned} E_{rm} = U_{mbaxx} &= U_{mbd} + E_m + U_{mca} = -jX_L J_{m2} + E_m - jX_C J_{1m} = \\ &= -j5 * (-j2.82) + 141 - j5 * j4.24 = 148.1 \text{ В}. \end{aligned}$$

Определим внутреннее сопротивление генератора (рис.15):

$$Z_r = jX_L - jX_C = j5 - j5 = 0.$$

Ток в сопротивлении  $r_4$  равен

$$I_{3m} = U_{mbaxx} / (Z_r + Z_H) = 148.1 / (0 + 10) = 14.81 \text{ А}.$$

Закон изменения тока  $i_4(t) = 14.81 \sin \omega t \text{ (А)}$ .

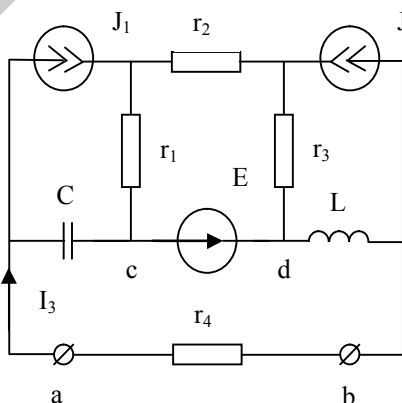


Рис.13

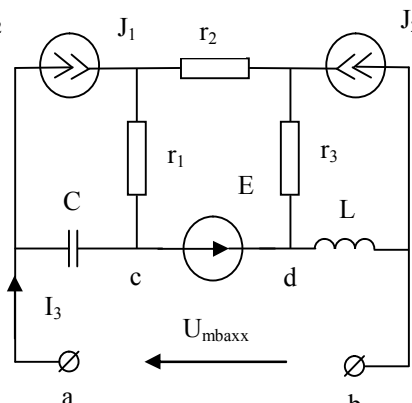


Рис.14

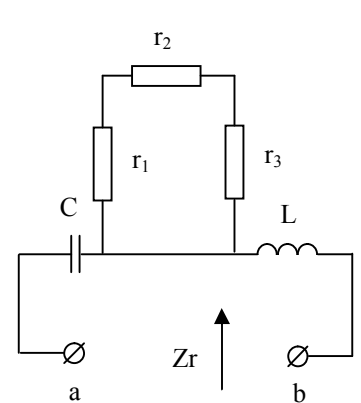


Рис.15

## 6. Расчет индуктивно связанных электрических цепей

Степень индуктивной связи двух элементов цепи характеризуют коэффициентом связи  $k$ , под которым понимают отношение

$$k = M / \sqrt{L_1 \cdot L_2} = X_M / \sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}} < 1 ,$$

где  $M$  – взаимная индуктивность элементов цепи;

$X_M = \omega M$  – сопротивление взаимной индукции.

Два зажима, принадлежащие двум разным индуктивно-связанным элементам цепи, называют одноименными и обозначают одинаковыми значками (рис.16) на основании следующего правила: при одинаковом направлении токов относительно одноименных зажимов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке должны суммироваться.

Существуют два способа соединения двух индуктивно-связанных элементов цепи: согласное включение (рис.16,а) и встречное включение (рис.16,б). При согласном включении токи в обоих элементах цепи в любой момент времени имеют одинаковые направления относительно одноименных зажимов, поэтому магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции, сцепленные с каждым элементом, складываются. При встречном включении токи в обоих элементах цепи в любой момент времени имеют направления, противоположные относительно одноименных зажимов, и поэтому магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции, сцепленные с каждым элементом, вычитаются.

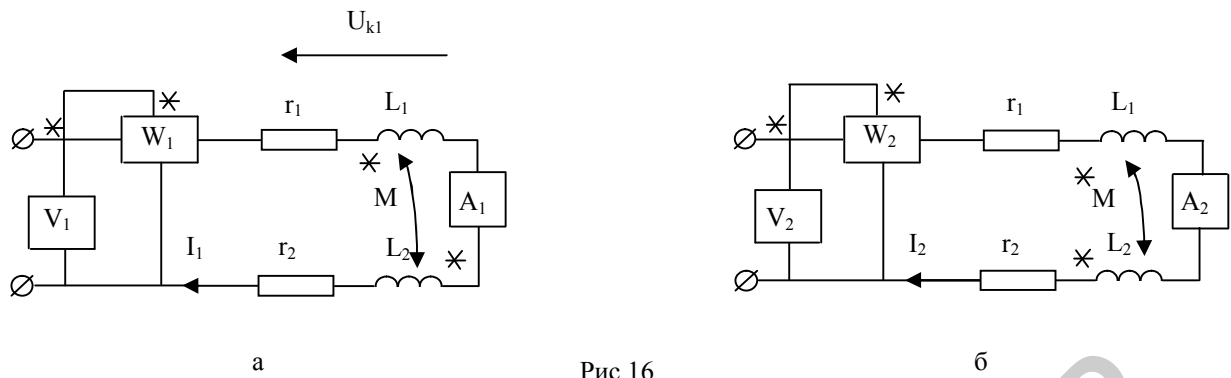


Рис.16

**Пример 6.** Показания приборов в цепи (см.рис.16,а):  $U_1=120$  В,  $I_1=10$  А,  $P_1=600$  Вт; в цепи (рис.16,б):  $U_2=120$  В;  $I_2=12$  А;  $P_2=864$  Вт.

Определить взаимную индуктивность катушек  $M$ , намотанных на одном сердечнике одним и тем же проводом, и напряжение на первой катушке, если частота переменного тока  $f=50$  Гц, а коэффициент связи  $k=0,15$ .

**Решение.** Произвольно выбираем положительные направления токов в ветвях. На рис.16,а – согласное включение, рис.16,б – встречное. Найдем полные, активные и реактивные сопротивления схем.

$$Z_{\text{согл}} = U_1/I_1 = 12 \text{ Ом}; \quad r = P_1/(I_1)^2 = 6 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{согл}} = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M = \sqrt{Z_{\text{согл}}^2 - r^2} = 10,4 \text{ Ом} - \text{согласное включение.}$$

$$Z_{\text{встр}} = U_2/I_2 = 10 \text{ Ом}; \quad r = P_2/(I_2)^2 = 6 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{встр}} = \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M = \sqrt{Z_{\text{встр}}^2 - r^2} = 8 \text{ Ом} - \text{встречное включение.}$$

Искомую взаимную индуктивность найдем из уравнения

$$M = (X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}})/4\omega = (10,4 - 8)/(4 * 2 * \pi * 50) = 1,91 \text{ мГн.}$$

Найдем напряжение на первой катушке

$$U_{k1} = z_{k1} * I = (r_1 + j\omega(L_1 + M)) * I = (4,48 + j(6,87 + 0,6)) * 10e^{-j60} = 87,09 - j1,45 = 87,1e^{-j0,95} \text{ В} - \text{согласное включение};$$

$$U_{k1} = (r_1 + j\omega(L_1 - M)) * I = (4,48 + j(6,87 - 0,6)) * 10e^{-j53,13} =$$

$$=92.448+j2.14=92.47e^{j1.33} \text{ В – встречное включение,}$$

где  $X_1=6,87 \text{ Ом}$ ,  $X_2=2,33 \text{ Ом}$  находим из уравнения  $X^2-9,2X+X_m^2/k^2=0$  – реактивные сопротивления катушек;

$r_1=r \cdot X_1/(X_1+X_2)=6 \cdot 6.87/(6.87+2.33)=4.48 \text{ Ом}$  – активное сопротивление первой катушки;

$$\varphi_{\text{согл}}=\arctg(X_{\text{согл}}/r)=\arctg(10.4/6)=60^\circ;$$

$$\varphi_{\text{встр}}=\arctg(X_{\text{встр}}/r)=\arctg(8/6)=53.13^\circ.$$

### Численные методы анализа

Многие неявные методы численного решения дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши, можно представить в обобщенном виде

$$X_{n+1} = \sum_{i=0}^m a_i \cdot (X_n)_i + h \sum_{i=1}^m b_i \cdot \left[ \left( \frac{dX}{dt} \right)_n \right]_i,$$

где  $X_{n+1} = X[(n+1) \cdot h]$  – матрица-столбец переменных состояния для момента времени  $t = (n+1) \cdot h$ ;  $X_n = X(n \cdot h)$  – матрица-столбец переменных состояния для предыдущего шага  $t = n \cdot h$ .

Первое слагаемое есть линейная комбинация переменных  $X(t)$ , моменты времени которых предшествуют моменту времени искомой величины. Второе слагаемое – линейная комбинация производных в соответствующие моменты времени.

Перепишем уравнение в виде

$$X_{n+1} = \sum_{i=0}^m a_i \cdot (X_n)_i + h \sum_{u=0}^m b_u \cdot \left[ \left( \frac{dX}{dt} \right)_n \right]_u + h \cdot b_{-1} \cdot \left( \frac{dX}{dt} \right)_{n+1}.$$

При  $a_0=1$ ,  $a_i=b_i=0$  для  $i>0$ ,  $b_0=b_{-1}=1/2$  получим расчетную формулу метода трапеций

$$X_{n+1} = X_n + (h/2) \left[ \left( \frac{dX}{dt} \right)_n + \left( \frac{dX}{dt} \right)_{n+1} \right].$$

При численных методах решения дифференциального уравнения интегрирование осуществляется по шагам, причем на первом шаге переменные состояния определяются из схемы до коммутации, а на каждом  $n$ -м шаге они вычисляются в результате расчета цепи на предыдущем шаге.

Решение системы дифференциальных уравнений численными методами можно осуществить по разному [1,3,11]:

1. По эквивалентным схемам, составленным для любого неявного метода интегрирования дифференциальных уравнений;
2. Интегрированием дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния в форме Коши для любого неявного метода.

### Эквивалентные схемы электрической цепи

Рассмотрим индуктивный элемент электрической цепи (рис.17,а). Напряжение на зажимах индуктивности при  $L = \text{const}$  характеризуется скоростью изменения потокосцепления во времени и равно

$$u_L(t) = d\psi/dt = L \cdot di/dt.$$

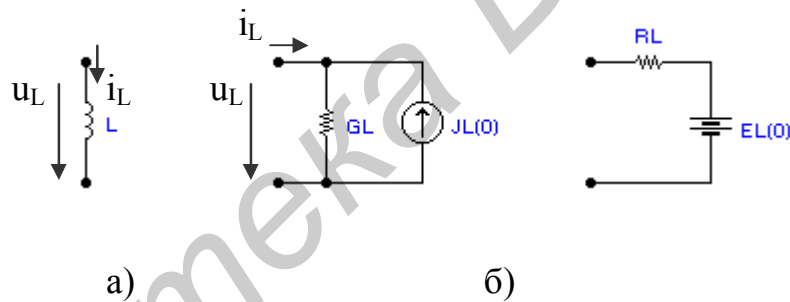


Рис.17

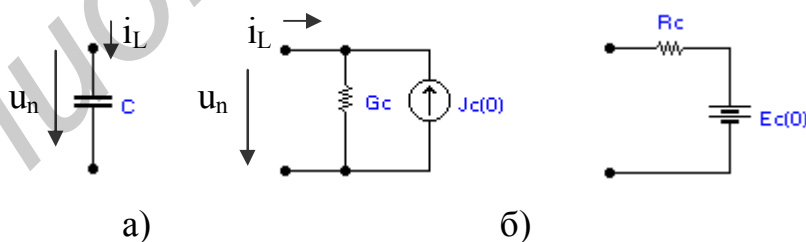


Рис.18

Производная от тока в линейной индуктивности  $di/dt = u_L(t)/L$ .

Заменяем переменную  $X$  переменной  $i$  в формуле трапеций, получим

$$i_{n+1} = i_n + (h/2)[(di/dt)_n + (di/dt)_{n+1}] = i_n + (h/2)[u_{Ln}/L + u_{L(n+1)}/L] = i_n + (h/2L)[u_{Ln} + u_{L(n+1)}].$$

Отношение  $h/2L$  заменим проводимостью  $G_L$ , а найденное значение тока идеальным источником тока  $J_n = i_n + G_L \cdot u_{Ln}$ , получим эквивалентную схему замещения индуктивного элемента (рис.17,б).



Таким образом, ток в индуктивной ветви на втором и последующих шагах определяется из выражения

$$i_{n+1} = J_n + G_L * u_{Ln+1} = (E_n + u_{Ln+1})/R_L,$$

где  $G_L = 1/R_L = h/2L$ ;  $J_n = i_n + G_L * u_{Ln} = E_n/R_L$ .

Аналогично для емкостного элемента (рис.18,а). Напряжение на зажимах конденсатора связано с током выражением

$$u = (1/C) \int i * dt.$$

Производная от напряжения на зажимах линейной емкости равна

$$du/dt = i/C.$$

Заменим переменную  $X$  переменной  $u$ , получим

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + h[(du/dt)_n + (du/dt)_{n+1}]/2 = u_n + (h/2C)(i_n + i_{n+1}) = \\ &= E_n + R_c * i_{n+1} = (J_n + i_{n+1})/G_c, \end{aligned}$$

где  $E_n = u_n + R_c * i_n = J_n/G_c$ ;  $R_c = 1/G_c = h/2C$ .

Эквивалентная резистивная схема емкостного элемента приведена на рис.18,б. Напряжение на емкости на втором и последующих шагах определяется из выражения

$$u_{n+1} = E_n + R_c * i_{n+1} = (J_n + i_{n+1})/G_c,$$

а ток в ветви с емкостью найдем по формуле

$$i_{n+1} = J_n + G_c * u_{n+1}.$$

Методика расчета для эквивалентных схем.

1. Выбирается шаг интегрирования на каждом интервале времени для обеспечения заданной точности решения.

2. Каждый элемент  $C$  и  $L$  заменяется соответствующей эквивалентной резистивной схемой, в которой источники соответствуют моменту времени  $t_n = n * h$ .

3. На каждом шаге вычисляются искомые переменные и новые параметры зависимых источников (для нелинейных схем пересчитываются также  $R_L$  и  $R_c$ ). Результаты расчета заносятся в таблицу или выводятся в виде графика.

Преимущества данной методики. Система дифференциальных уравнений заменяется алгебраической, и на каждом этапе расчета меняется только шаг интегрирования и параметры источников эквивалентных схем для линейных цепей, что существенно упрощает расчет. Метод применим и для нелинейных схем, при этом пересчитываются  $R_c$  и  $R_L$  на каждом шаге вычислений. Точность расчета увеличивается при уменьшении шага  $h$  или использовании неявного метода более высокого порядка, но при этом увеличивается время счета. Неявные методы устойчивы при любом шаге.

### **Интегрированием дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния**

Метод переменных состояния, наиболее универсальный метод расчета электрических цепей, используется для расчета цепей высокого порядка, когда применение других методов нецелесообразно. Он основан на решении дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в форме Коши. Аналитическое решение уравнений состояния для сложных линейных цепей сопряжено с большими трудностями, а для нелинейных цепей – невозможно.

Интегрирование дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния в форме Коши, на практике выполняется численными методами на ПЭВМ, при этом значения искомых величин в начальный момент времени  $t=0$  должны быть известны.

Дифференциальные уравнения состояния в матричной форме имеют вид

$$d\mathbf{X}(t)/dt = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{V}(t),$$

где  $\mathbf{X}(t)$  матрица-столбец (размера  $n \times 1$ ) переменных состояния;  $\mathbf{V}(t)$  – матрица-столбец (размера  $m \times 1$ ) источников;  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица порядка  $n$ ;  $\mathbf{B}$  – матрица размера  $n \times m$ . Элементы этих матриц определяются топологией и параметрами цепи.

Переменными состояниями в электрической цепи являются токи  $i_L$  и напряжения  $u_c$ , так как они определяют энергетическое состояние цепи.

Подставим в расчетную формулу метода трапеций уравнения переменных состояния для  $n$ -го и  $(n-1)$ -го шагов, получим

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + (h/2)\mathbf{A}(\mathbf{X}_n + \mathbf{X}_{n+1}) + (h/2)\mathbf{B}(\mathbf{V}_n + \mathbf{V}_{n+1}).$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{X}_{n+1} = [\mathbf{1} - (h/2)\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{1} + (h/2)\mathbf{A}]\mathbf{X}_n + (h/2) [\mathbf{1} - (h/2)\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{V}_n + \mathbf{V}_{n+1}).$$

Эта формула дает возможность непосредственно определять последующие значения переменных состояния по найденным на предыдущем шаге. Метод трапеций устойчив при любом шаге, поэтому выбор шага диктуется только необходимой точностью расчета.

Система алгебраических уравнений в матричной форме для остальных токов и напряжений электрической цепи имеет вид

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}(t),$$

где  $\mathbf{Y}(t)$  – матрица-столбец размера  $l \times 1$ ;  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{D}$  – матрицы связи (соответственно размера  $l \times n$  и  $l \times m$ ).

**Пример 7.** В схеме рис.19,а рассчитать токи  $i_1, i_2, i_3$  и напряжение  $u_c$ .

Решение. Начальные условия:  $i_3(0) = 0$  и  $u_c(0) = v_3(0) = 0$ .

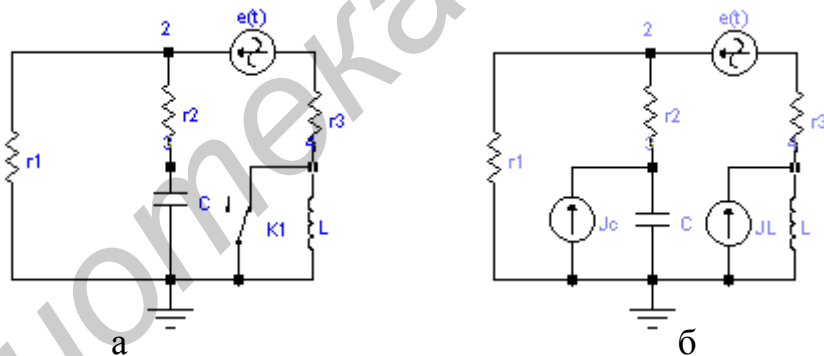


Рис.19

Задаемся шагом  $h$  и интервалом времени  $T_{\text{и}} = 5 \cdot \tau$ . Находим параметры эквивалентной резистивной схемы замещения (см.рис.19,б):

$$G_1 = 1/R_1; G_2 = 1/R_2; G_3 = 1/R_3; G_c = 2C/h; G_L = h/2L; G_{2c} = G_2 + G_c;$$

$$G_{3L} = G_L + G_3.$$

Для момента времени  $t = 0$  определяем  $i_1(0), i_2(0)$

$$i_2(0) = [R_1 i_3(0) - u_c(0)] / (R_1 + R_2); i_1(0) = i_3(0) - i_2(0); u_2(0) = u_c(0) + R_2 i_2(0);$$

$$u_3(0) = u_c(0); u_4(0) = u_2(0) - e(0) + R_3 i_3(0);$$

Определяем параметры источников эквивалентных схем.

$$J_c(0) = i_2(0) + G_c \cdot u_3(0);$$

$$J_L(0) = i_3(0) - G_L * u_4(0).$$

Запишем уравнения по методу узловых напряжений для следующего шага:

$$(G_1 + G_2 + G_3) * u_2 - G_2 * u_3 - G_3 * u_4 = G_3 * e(h);$$

$$-G_2 * u_2 + (G_2 + G_c) * u_3 = J_c;$$

$$-G_3 * u_2 + (G_3 + G_L) * u_4 = J_L - G_3 * e(h).$$

Находим потенциалы узлов:

$$u_2(h) = [y_4 e(h) + P_1 + Q_1] / y_5; \quad u_3(h) = [J_c(0) + G_2 * u_2(h)] / G_{2c};$$

$$u_4(h) = \{J_L(0) + G_3 [u_2(h) - e(h)]\} / G_{3L},$$

где  $y_4 = G_3 * G_L * G_{2c}$ ;  $P_1 = G_{3L} * G_2 * J_c(0)$ ;  $Q_1 = G_3 * G_{2c} * J_L(0)$ ;  $y_5 = y_4 + G_1 * G_{3L} * G_{2c} + G_2 * G_{3L} * G_c$ .

По закону Ома определяем токи в ветвях

$$i_3(h) = G_3 * [e(t) - u_2(h) + u_4(h)]; \quad i_2(h) = G_2 * [u_2(h) - u_3(h)]; \quad i_1(h) = i_3(h) - i_2(h).$$

Находим параметры источников для следующего момента времени:

$$J_c(h) = i_2(h) + G_c * u_3(h); \quad J_L(h) = i_3(h) - G_L * u_4(h).$$

Расчет повторяется до момента времени  $t = T$ .

Составим уравнения состояния для цепи (см. рис.20), в которой ток  $i_3$  представлен источником тока  $i_3(t)$ , а напряжение  $u_c$  - источником напряжения  $u_c(t)$ . Методом наложения определим ток в ветви с емкостью  $i_2(t)$  и напряжение  $u_L(t)$  на каждом шаге вычислений:

$$i_2(t) = [R_1 / (R_1 + R_2)] i_3(t) - [1 / (R_1 + R_2)] u_c(t);$$

$$u_L(t) = [-(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / (R_1 + R_2)] i_3(t) - [R_1 / (R_1 + R_2)] u_c(t) + e(t).$$

Учитывая, что  $i_2(t) = C du_c(t) / dt$ ,  $u_L(t) = L di_3(t) / dt$ , получим:

$$di_3(t) / dt = [-(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / L (R_1 + R_2)] i_3(t) - [R_1 / L (R_1 + R_2)] u_c(t) + e(t) / L;$$

$$du_c(t) / dt = [(R_1 / C (R_1 + R_2))] i_3(t) - [1 / C (R_1 + R_2)] u_c(t) + 0 * e(t).$$

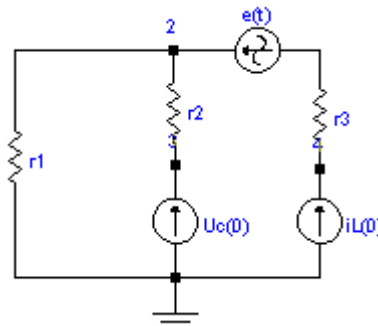


Рис. 20

В матричной форме это уравнение имеет вид

$$d\mathbf{X}(t) / dt = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{V}(t),$$

$$\text{где } d\mathbf{X}(t)/dt = \begin{vmatrix} di_3(t)/dt \\ du_c(t)/dt \end{vmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{X}(t) = \begin{vmatrix} i_3 \\ u_c \end{vmatrix}; \quad \mathbf{V}(t) = \mathbf{e}(t); \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{vmatrix};$$

$$a_{11} = -(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / [L(R_1 + R_2)]; \quad a_{12} = -R_1 / [L(R_1 + R_2)];$$

$$a_{21} = R_1 / [C^*(R_1 + R_2)]; \quad a_{22} = -1 / [C^*(R_1 + R_2)]; \quad b_{11} = 1/L; \quad b_{21} = 0.$$

Рассчитаем матрицы, входящие в уравнение, записанное по методу трапеций:

$$\mathbf{X}_{n+1} = [\mathbf{1} - (h/2)\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{1} + (h/2)\mathbf{A}] \mathbf{X}_n + (h/2) [\mathbf{1} - (h/2)\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{V}_n + \mathbf{V}_{n+1}),$$

$$\text{где } \mathbf{X}_{n+1} = \begin{vmatrix} i_{3n+1} \\ u_{cn+1} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{X}_n = \begin{vmatrix} i_{3n} \\ u_{cn} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1} + \mathbf{e}_n; \quad \mathbf{I} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1 + \frac{h}{2} \mathbf{A}\right); \quad \mathbf{N} = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{h}{2} \mathbf{A}\right); \quad \mathbf{J} = \begin{vmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} n_{22} & -n_{12} \\ -n_{21} & n_{11} \end{vmatrix}; \quad \Delta = n_{11} n_{22} - n_{12} n_{21}; \quad \mathbf{L} = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix} = \mathbf{I} \times \mathbf{J}; \quad \mathbf{K} = \begin{vmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{vmatrix} \times (\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{n+1}); \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{vmatrix} = \frac{h}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{K} = \frac{h}{2} \begin{vmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{vmatrix}.$$

Ток  $i_{3n+1}$  и напряжение  $u_{cn+1}$  найдем из выражения:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \begin{vmatrix} i_{3n+1} \\ u_{cn+1} \end{vmatrix} = \mathbf{J} \times \mathbf{I} \times \mathbf{X}_n + \frac{h}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{K} = \mathbf{L} \times \mathbf{X}_n + \mathbf{M} = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_{3n} \\ u_{cn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{vmatrix},$$

то есть  $i_{3n+1} = l_{11} i_{3n} + l_{12} u_{cn} + m_{11}$ ,  $u_{cn+1} = l_{21} i_{3n} + l_{22} u_{cn} + m_{21}$ .

Далее решение повторяем для следующего шага. Продолжая решение, получим таблицу искомых переменных для  $h$ ,  $2h$ ,  $3h$  и т.д.

Ниже приведена программа на языке Паскаль. Подпрограмма `grafm` выводит графики  $i_3(t)$  и  $u_c(t)$  (см. рис.21).

Результаты расчета сведены в табл.1. Сравнение значений  $i_3$  и  $u_c$ , рассчитанных аналитическими методами и численными методами показывает, что метод трапеций дает погрешность не более 1% для выбранного шага.

BEGIN

Start:

```
write(' Число шагов: '); REPEAT read(y7); UNTIL y7>1;
write(' Сопротивление R1 = '); read(R2);
```

```

write(' Соппротивление R2 = '); read(R3);
write(' Емкость C = '); read(C);
write(' Индуктивность L = '); read(L);
write(' uc(0) = '); read(uc[0]);
write(' iL(0) = '); read(iL[0]);
k7:=0; pi:=2*arctan(1/0.000000000001);
i:=0; h:=0.00003; R1:=100; Rc:=h/(2*C); RL:=2*L/h;
y1:=1/R1;y2:=1/R2;y3:=1/R3;yc:=1/Rc;yL:=1/RL;
y2c:=y2+yc; y3L:=y3+yL; t:=0; w:=10000;
y4:=y2c*y3*y3L-y3*y3*y2c;
y5:=(y1+y2+y3)*y2c*y3L-y2*y2*y3L-y3*y3*y2c;
e[0]:= 100*sin(w*t); i3[0]:=iL[0];
v11:=-103.79*3.14159/180;
v12:=-71.13*3.14159/180;
ucc[0]:=27.25*sin(w*t+v11);
i3c[0]:=0.3237*sin(w*t+v12);
uLc[0]:=w*L*0.3237*sin(w*t+v12+pi/2);
i2[0]:=(i3[0]*R1-uc[0])/(R1+R2);
v3[0]:=uc[0];
v2[0]:=v3[0]+R2*i2[0];
v4[0]:=v2[0]-e[0]+R3*i3[0];
JL[0]:=i3[0]-v4[0]/RL; Jc[0]:=uc[0]/Rc+i2[0];
i1[0]:=i3[0]-i2[0];
a11:=- (R1*R2+R1*R3+R2*R3)/((R1+R2)*L); a12:=-
R1/((R1+R2)*L);
a21:=R1/((R1+R2)*C); a22:=-1/((R1+R2)*C); b11:=1/L;
b21:=0.0;
i11:=1+h*a11/2; i22:=1+h*a22/2; i12:=h*a12/2;
i21:=h*a21/2;

```

```

j11:=1-h*a11/2; j22:=1-h*a22/2; j12:=-h*a12/2; j21:=-
h*a21/2;
od:=j11*j22-j21*j12; j11:=(1-h*a22/2)/od; j22:=(1-
h*a11/2)/od;
j12:=(h*a12/2)/od; j21:=(h*a21/2)/od;
l11:=j11*i11+j12*i21; l12:=j11*i12+j12*i22;
l21:=j21*i11+j22*i21; l22:=j21*i12+j22*i22;
iL[0]:=i3[0]; uc[0]:=uc[0];
writeln('          e(t) = 100sin(10000t) mB');
writeln('-----
-----');
writeln('
t','iL':9,'i3':9,'i3c':9,'uc':9,'v3':9,'ucc':8);
writeln('-----
-----');
writeln(t:10:5,iL[0]:9:5,i3[0]:9:5,i3c[0]:9:5,uc[0]:7:2,v
3[0]:7:2,ucc[0]:7:2); For i:=1 to y7 do
Begin
t:=t+h;
e[i]:=100*sin(w*t);
P1:=y2*y3L*Jc[i-1];
Q1:=y3*y2c*JL[i-1];
v2[i]:=(y4*e[i]+P1+Q1)/y5;
v3[i]:=(Jc[i-1]+y2*v2[i])/y2c;
v4[i]:=(JL[i-1]+y3*(v2[i]-e[i]))/y3L;
ucc[i]:=27.25*sin(w*t+v11);
i3c[i]:=0.3237*sin(w*t+v12);
uLc[i]:=w*L*0.3237*sin(w*t+v12+pi/2);
i2[i]:=y2*(v2[i]-v3[i]);
i3[i]:=y3*(e[i]-v2[i]+v4[i]);

```

```

i1[i]:=i3[i]-i2[i];
Jc[i]:=i2[i]+v3[i]/Rc;
JL[i]:=i3[i]-v4[i]/RL;
k11:=b11*(e[i-1]+e[i]);
k21:=b21*(e[i-1]+e[i]);
m11:=l11*iL[i-1]; m12:=l12*uc[i-1];
b12:=h*(j11*k11+j12*k21)/2;
b22:=h*(j21*k11+j22*k21)/2;
iL[i]:=l11*iL[i-1]+l12*uc[i-1]+b12;
uc[i]:=l21*iL[i-1]+l22*uc[i-1]+b22;
writeln(t:10:5,iL[i]:9:5,i3[i]:9:5,i3c[i]:9:5,uc[i]:7:2,v
3[i]:7:2,ucc[i]:7:2); end; t:=0; ummax; grafm;
END.

```

```

u(t) * ---> -4.260E+01 -2.130E+01 0.000E+00
2.130E+01 4.260E+01
i(t) + ---> -6.000E-01 -3.000E-01 0.000E+00
3.000E-01 6.000E-01
U (mB.); t (c) +-----+-----+-----+-----+
+-----+----->
-0.500 0.00000 *
-0.252 0.00003 *+
0.858 0.00006 *+
3.322 0.00009 * +
7.216 0.00012 * +
12.295 0.00015 * +
18.090 0.00018 *
+
23.995 0.00021
*+

```



29.358	0.00024								
*									
33.554	0.00027								
+ *									
36.060	0.00030								
+ *									
36.506	0.00033								
+ *									
34.714	0.00036								
+ *									
30.717	0.00039								+
*									
24.757	0.00042								+
*									
17.261	0.00045							+	*
8.808	0.00048						+		*
0.070	0.00051						+	*	
-8.245	0.00054						+	*	
-15.455	0.00057						+	*	
-20.972	0.00060						+	*	
-24.352	0.00063						*	+	
-25.333	0.00066						*	+	
-23.865	0.00069						*	+	
-20.110	0.00072						*	+	
-14.430	0.00075						*	+	
-7.357	0.00078						*	+	
0.458	0.00081						*	+	
8.298	0.00084						*	+	
15.449	0.00087						*	+	
+									

Бібліотека БГУМР

21.258	0.00090					
*+						
25.194	0.00093					
+ *						
26.898	0.00096					+
*						
26.207	0.00099					+
*						
23.177	0.00102					+
*						
18.072	0.00105					+
						*
11.342	0.00108					+
						*

Рис. 21

Таблица 1

$$e(t) = 100\sin(10000t) \text{ mB}$$

uCC	t	iL	i3	i3c	uc	v3
	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	0.00	0.00
-16.49	0.00003	0.01309	0.01309	0.02298	0.25	0.25
-9.94	0.00006	0.05039	0.05039	0.06619	1.36	1.36
-4.55	0.00009	0.10677	0.10677	0.12583	3.82	3.82
0.78						

6.58	0.00012	0.17510	0.17510	0.19567	7.72	7.72
12.89	0.00015	0.24717	0.24717	0.26807	12.80	12.80
19.47	0.00018	0.31443	0.31443	0.33487	18.59	18.59
25.84	0.00021	0.36890	0.36890	0.38833	24.50	24.50
31.44	0.00024	0.40389	0.40389	0.42194	29.86	29.86
35.72	0.00027	0.41463	0.41463	0.43101	34.05	34.05
38.21	0.00030	0.39865	0.39865	0.41320	36.56	36.56
38.55	0.00033	0.35607	0.35607	0.36867	37.01	37.01
36.61	0.00036	0.28952	0.28952	0.30014	35.21	35.21
32.43	0.00039	0.20392	0.20392	0.21259	31.22	31.22
26.27	0.00042	0.10600	0.10600	0.11283	25.26	25.26
18.58	0.00045	0.00372	0.00372	0.00889	17.76	17.76
9.93	0.00048	-0.09445	-0.09445	-0.09072	9.31	9.31
1.03	0.00051	-0.18036	-0.18036	-0.17779	0.57	0.57
-7.43	0.00054	-0.24684	-0.24684	-0.24514	-7.74	-7.74

0.00057	-0.28841	-0.28841	-0.28725	-14.95	-14.95
-14.75					
0.00060	-0.30174	-0.30174	-0.30083	-20.47	-20.47
-20.34					
0.00063	-0.28598	-0.28598	-0.28504	-23.85	-23.85
-23.75					
0.00066	-0.24282	-0.24282	-0.24164	-24.83	-24.83
-24.73					
0.00069	-0.17638	-0.17638	-0.17479	-23.36	-23.36
-23.24					
0.00072	-0.09281	-0.09281	-0.09072	-19.61	-19.61
-19.43					
0.00075	0.00024	0.00024	0.00284	-13.93	-13.93
-13.69					
0.00078	0.09430	0.09430	0.09735	-6.86	-6.86
-6.55					
0.00081	0.18081	0.18081	0.18420	0.96	0.96
1.32					
0.00084	0.25195	0.25195	0.25549	8.80	8.80
9.21					
0.00087	0.30123	0.30123	0.30473	15.95	15.95
16.38					
0.00090	0.32418	0.32418	0.32741	21.76	21.76
22.19					
0.00093	0.31866	0.31866	0.32143	25.69	25.69
26.10					
0.00096	0.28510	0.28510	0.28723	27.40	27.40
27.76					
0.00099	0.22644	0.22644	0.22780	26.71	26.71
26.99					

## ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

В радиотехнике и автоматике, измерительной и вычислительной технике нашли широкое применение четырехполюсники (элемент цепи, имеющий две пары доступных зажимов), представленных на рис.22. Четырехполюсники выполняют разнообразные функции: выделение и преобразование полезного сигнала, устранение помех и наводок в электрических цепях, анализ частотного спектра сигналов и шумов, коррекцию амплитудно-частотных характеристик высококачественных усилителей и обеспечение устойчивости систем автоматического регулирования.

Числовой характеристикой нагруженного четырехполюсника являются передаточные функции, которые определяются соотношениями между комплексными амплитудами  $U_1, U_2, I_1, I_2$ .

Коэффициент усиления (передачи) напряжения – безразмерное число  $K_u = U_2/U_1$ , коэффициент усиления (передачи) тока – безразмерное число  $K_i = I_2/I_1$ , передаточная проводимость  $Y = I_2/U_1$ , передаточное сопротивление  $Z = U_2/I_1$ .

Все они зависят от частоты. В общем случае функция  $K(j\omega)$  может быть представлена в показательной форме

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\Psi(\omega)},$$

где  $|K(j\omega)|$  – амплитудно-частотная характеристика цепи (АЧХ), для измерения которой используют логарифмические единицы – децибелы:  $20\lg |K(j\omega)|$  дБ;  $\Psi(\omega)$  – фазочастотная характеристика цепи (ФЧХ).

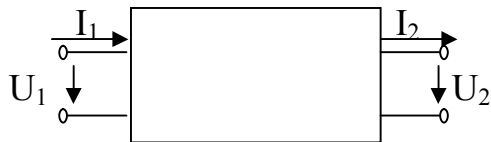


Рис.22

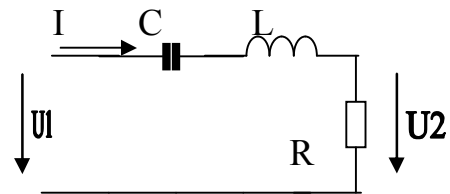


Рис.23

Для АЧХ типичной является область частот, в которой  $K$  почти не зависит от частоты и обозначается  $K_0$ . Такие цепи называются фильтрами. Чаще всего на АЧХ по вертикальной оси используют относительный масштаб, откладывая относительное усиление  $y=K/K_0$ . Такая АЧХ  $y(f)$  называется нормированной. Для оценки избирательности контура вводится понятие полосы пропускания  $\Pi_a$ . Полоса пропускания – область частот, в пределах которой АЧХ составляет не менее 0,707 своего максимального значения, т. е.

$$\Pi_a = f_2 - f_1 \cong 2\Delta f = f_0/Q,$$

где  $f_1$  и  $f_2$  нижняя и верхняя граничные частоты полосы пропускания.

Вследствие спада усиления и нелинейности ФЧХ на краях полосы пропускания амплитуда и время прохождения спектральных составляющих сложного сигнала различны. Это приводит к искажениям формы сигнала, которые называются амплитудно-частотными и фазовыми. Частотные и фазовые искажения называются линейными, так как создаются емкостями и индуктивностями схемы, которые являются линейными элементами. Линейные искажения изменяют форму лишь сложного сигнала, а форму гармонического колебания не изменяют. Масштаб по оси частот на АЧХ и ФЧХ удобно брать логарифмический, так как растягивается область нижних и сжимается область верхних частот.

Фильтрацию электрических сигналов в радиоэлектронной аппаратуре (РЭА) можно осуществить с помощью пассивных (RLC-цепей) и активных четырехполюсников.

Фильтрацию полезного сигнала можно осуществить с помощью последовательного колебательного контура (рис.23), в котором элементы  $L$  и  $C$  соединены последовательно. Активное сопротивление  $R$  учитывает потери в

контуре, которое для контуров, применяемых в радиотехнике, имеет порядок десятка ом.

Найдем коэффициент передачи  $K_r(j\omega) = U_r/U_1$ :

$$K_r(j\omega) = R \cdot I/U_1 = R/[R + j(\omega L - 1/\omega C)] = 1/(1 + j\xi) = |K_r(j\omega)| e^{-j \arctg \xi_r(\omega)}.$$

Здесь  $\xi(\omega) = (\omega L - 1/\omega C)/R = (\omega_0 L/R) \cdot (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) = Q(f/f_0 - f_0/f)$  – обобщенная расстройка контура;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  – резонансная частота контура;  $Q = \omega_0 L/R = \rho/R$  – добротность контура, характеризующая качество колебательной системы;  $\rho = \sqrt{L/C}$  – характеристическое сопротивление контура.

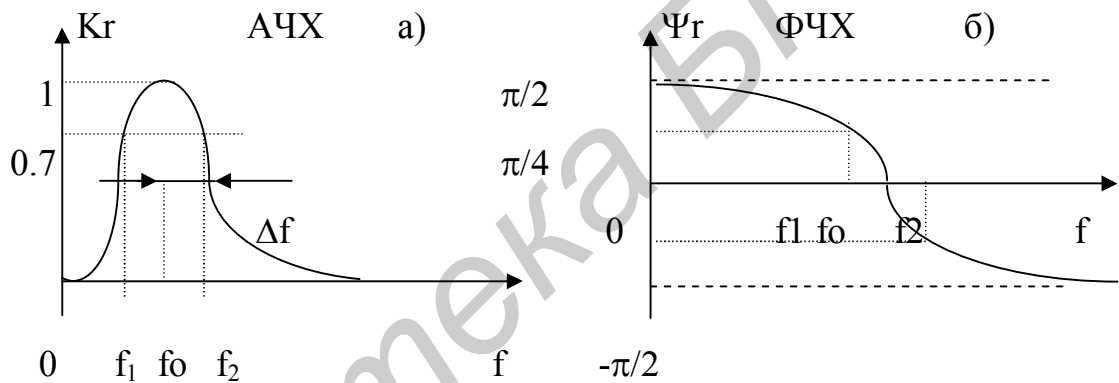


Рис.24

При частоте  $\omega_0$  сопротивление контура оказывается чисто активным и минимальным по модулю, обобщенная расстройка  $\xi(\omega_0) = 0$ , а ток в контуре  $I_0 = I_{\max} = U/R$  максимален. Это явление в цепи называется резонансом.

Нормированные АЧХ и ФЧХ (рис.24) построены в соответствии с выражениями:

$$|K_r(jf)| = 1/\sqrt{1+\xi^2};$$

$$\Psi_r(f) = -\arctg(f/f_0 - f_0/f) = -\arctg \xi.$$

Введем понятие затухания контура:

$$d = 1/Q = R/\rho = \Pi_0 = \Pi_a/f_0,$$

где  $\Pi_0$  – относительная полоса пропускания контура, численно равная затуханию контура. На граничных частотах  $\xi = \pm 1$ ,  $\psi = -\arctg \xi = \pm \pi/4 = \pm 45^\circ$ .

В радиотехнических устройствах часто последовательный колебательный контур используют как четырехполюсник, снимая выходной сигнал с конденсатора. Коэффициент передачи напряжения, снимаемого с емкости, записывается следующим образом:

$$K_c(j\omega) = U_c/U_1 = \rho\omega_0/[j\omega R(1+j\xi)] = Q\omega_0/[j\omega(1+j\xi)] = (\omega_0/\omega)Q |K_r(j\omega)| e^{-j[\arctg\xi + \pi/2]}.$$

Отсюда: АЧХ -  $|K_c(jf)| = (f_0/f)Q/\sqrt{1+\xi^2}$ ;

$$\Phi_{\text{ЧХ}} - \Psi_c(f) = -\arctg(f/f_0 - f_0/f) - \pi/2 = -\arctg\xi - \pi/2.$$

Учтем влияние источника сигнала и нагрузки на частотные свойства контура (рис.25). Сопротивления нагрузки и источника вносят в контур дополнительные потери и изменяют величину емкости, которую можно определить из выражений:

$$C' = b'_c/\omega = (g_n^2 + b_c^2)/\omega b_c \approx b_c/\omega = C \text{ при } g_n \ll b_c;$$

$$R_{\text{вн}} = g_n/(g_n^2 + b_c^2),$$

где  $b_c = \omega C = 1/X_c$  – емкостная проводимость;  $R_{\text{вн}}$  – вносимое сопротивление;  $g_n = 1/R_n$ .

При этом  $C'$  и  $R_{\text{вн}}$  зависят от частоты,  $\omega'_0 \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $Q_{\text{э}} = \rho/(R + R_{\text{вн}}) < Q$ ,  $\Pi'_0 = d' = 1/Q_{\text{э}} > \Pi_0$ . Таким образом, сопротивление нагрузки уменьшает добротность и расширяет полосу пропускания контура, т. е. ухудшает избирательность контура.

Вычислим частотный коэффициент передачи напряжения для схемы, представленной на рис.26. Приняв потенциал узла 5 равным нулю, запишем уравнения по методу узловых напряжений:

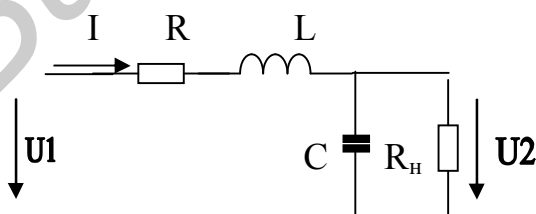


Рис.25

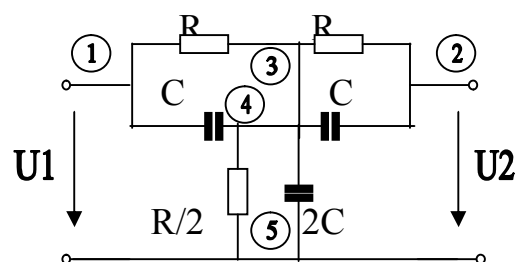


Рис.26



$$\begin{aligned}
 -U_1/R - U_2/R + (1/R + 1/R + j2\omega C)U_3 &= 0; \\
 -j\omega CU_1 - j\omega CU_2 + (j\omega C + j\omega C + 2/R)U_4 &= 0; \\
 (1/R + j\omega C)U_2 - U_3/R - j\omega CU_4 &= 0.
 \end{aligned}$$

Подставив напряжения  $U_3$  и  $U_4$  из первых двух уравнений в третье уравнение, получим:

$$(1 + j\omega RC)U_2 - (U_1 + U_2)/(2(1 + j\omega RC)) + \omega^2 R^2 C^2 (U_1 + U_2)/2(1 + j\omega RC) = 0.$$

Отсюда

$$Ku(j\omega) = U_2/U_1 = (1 - w^2)/(1 - w^2 + j4w) = |K(j\omega)| e^{j\Psi(w)},$$

где  $w = \omega RC$  – безразмерная переменная;  $|K(j\omega)| = (1 - w^2)/\sqrt{[1 - w^2]^2 + 16w^2}$  – АЧХ;  $\Psi(w) = -\arctg[4w/(1 - w^2)]$  при  $w < 1$ ,  $\Psi(w) = -\arctg[4w/(1 - w^2)] + \pi$  при  $w > 1$  – ФЧХ.

Графики АЧХ и ФЧХ представлены на рис.27. Данная цепь является режекторным фильтром (АЧХ обращается в нуль на частоте  $\omega_0 = 1/RC$ ). Физически это связано с тем, что на данной частоте потенциалы узлов 3 и 4 относительно узла 5 равны по модулю и противоположны по фазе, а потенциал узла 2 равен нулю.

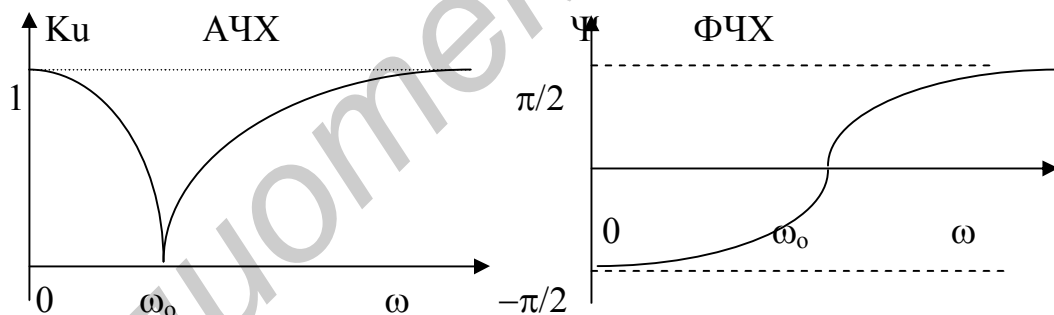


Рис.27

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Контрольная работа соответствует разделу программы «Анализ линейных электрических цепей в установившемся режиме с источниками постоянных и гармонических ЭДС и токов».

### Часть 1. Анализ цепи в установившемся режиме с источниками постоянных ЭДС и токов.

Задание для контрольной работы генерируется ЭВМ каждому студенту индивидуально. Распечатка одного из вариантов задания по постоянному току представлена в табл. 2. В соответствии с первой строкой табл. 2 первая ветвь направлена от шестого к четвертому узлу, вторая – от четвертого к седьмому и т. д.

Шифр студента 500101-10

Таблица 2.

---

№ ветви	Начало- -конец	Сопротивление (Ом)	Ист. ЭДС (В.)	Ист. тока (А)
1	6 4	410	-	-
2	4 5	120	-	-
3	5 3	260	200	-
4	3 2	630	-	-
5	2 1	350	600	5
6	1 6	530	-	-
7	5 6	360	-	3
8	4 2	620	-	-

---

Определить токи и напряжение  $U_{14}$ . Составить баланс мощностей. МЭГ определить ток в 1-й ветви.

Расшифруем исходные данные, приведенные в табл. 2.

1. Расположим шесть узлов цепи в соответствии с вариантом задания и соединим их ветвями (рис.28). Направление ветви определяется индексами начального и конечного узлов, к которым присоединена ветвь.

2. Включим в ветви, согласно варианту сопротивления, источники ЭДС и тока. Положительные направления токов ветвей, источников ЭДС и тока определяются направлением соответствующих ветвей графа (рис.29).

Расчет схемы заключается в определении токов во всех ветвях и напряжения между заданными узлами, составлении баланса мощностей в цепи

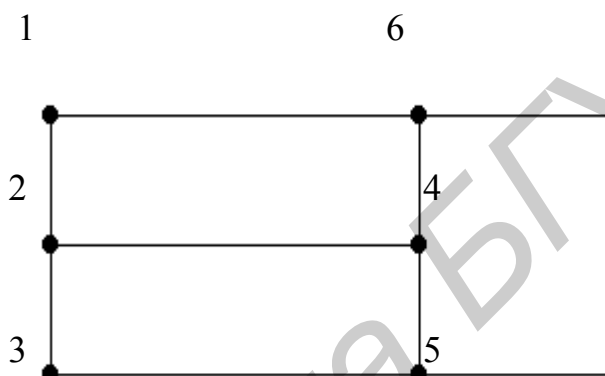


Рис. 28.

и определении заданного тока методом эквивалентного генератора.

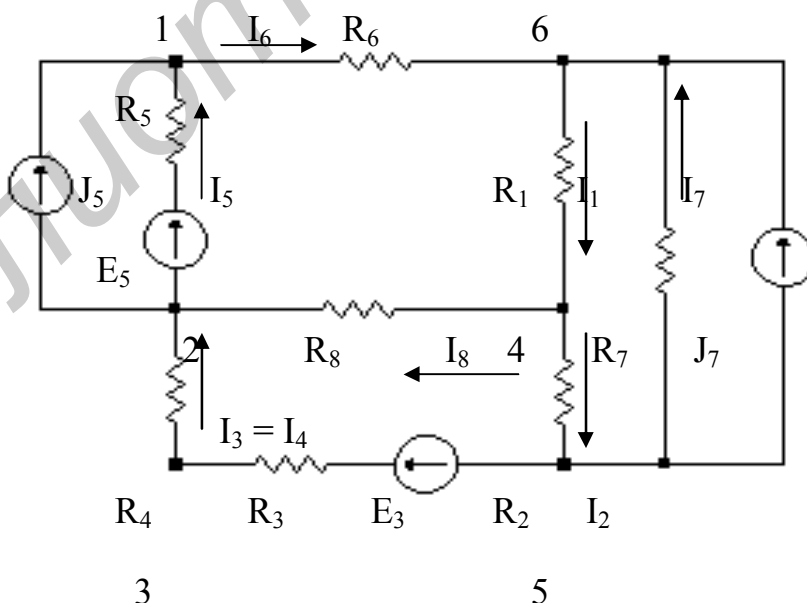


Рис. 29

## ПРИМЕР РАСЧЕТА ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 1. Расчет токов методом преобразования

Для определения тока  $I_1$  методом эквивалентного генератора первую ветвь в преобразовании не используем. Преобразуем источники тока  $J_5$  и  $J_7$  в эквивалентные источники напряжения  $E_{51}$  и  $E_7$ , а: активный треугольник 2-4-5 преобразуем в активную звезду (рис.30), где

$$E_{51} = E_5 + R_5 J_5 = 600 + 350 \cdot 5 = 2350 \text{ В};$$

$$E_7 = R_7 \cdot J_7 = 360 \cdot 3 = 1080 \text{ В};$$

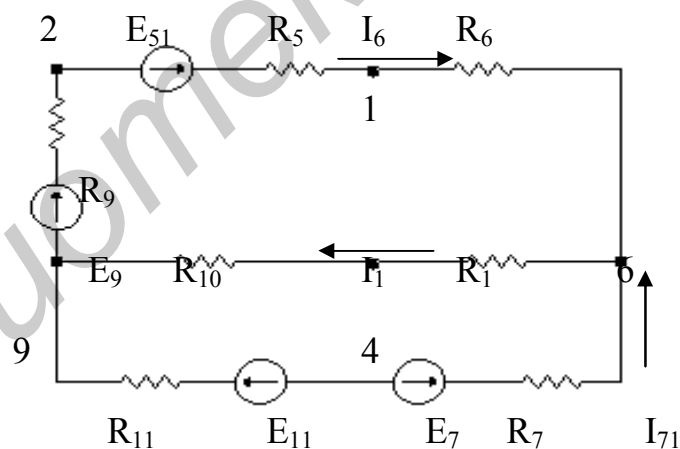
$$R_9 = R_{34} R_8 / (R_2 + R_{34} + R_8) = 890 \cdot 620 / (120 + 890 + 620) = 338.5 \text{ Ом};$$

$$R_{10} = R_2 R_8 / (R_2 + R_{34} + R_8) = 120 \cdot 620 / (120 + 890 + 620) = 45.64 \text{ Ом};$$

$$R_{11} = R_2 R_{34} / (R_2 + R_{34} + R_8) = 120 \cdot 890 / (120 + 890 + 620) = 65.5 \text{ Ом};$$

$$E_9 = R_9 \cdot E_3 / (R_3 + R_4) = 338.5 \cdot 200 / (260 + 630) = 76,17 \text{ В};$$

$$E_{11} = R_{11} \cdot E_3 / (R_3 + R_4) = 65,5 \cdot 200 / (260 + 630) = 14,74 \text{ В}.$$



5

Рис. 30

На рис.31 представлена упрощенная схема, в которой

$$E_{12} = E_9 + E_{51} = 76,17 + 2350 = 2426,2 \text{ В};$$

$$E_{13} = E_7 - E_{11} = 1080 - 14,7 = 1065,3 \text{ В};$$

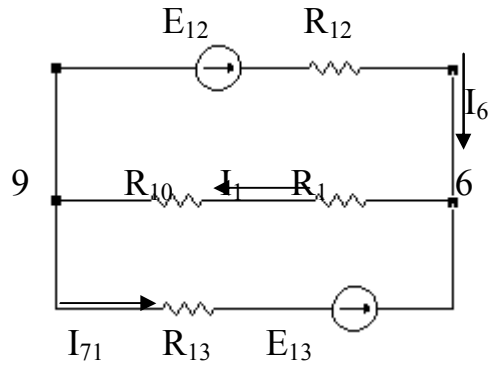


Рис. 31

$$R_{12} = R_5 + R_6 + R_9 = 350 + 530 + 338.5 = 1218.5 \text{ Ом};$$

$$R_{13} = R_7 + R_{11} = 360 + 65.5 = 425.5 \text{ Ом}.$$

Для определения тока в первой ветви преобразуем 12-ю и 13-ю ветви в одну эквивалентную 14-ю (рис.32).  $E_{14}$  находим по формуле двух узлов

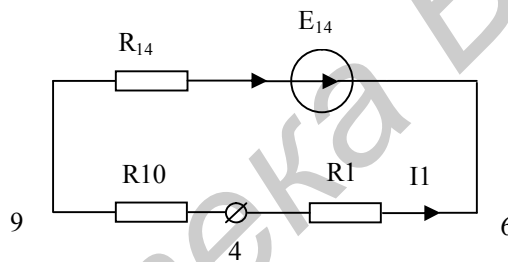


Рис.32

$$E_{14} = (G_{12}E_{12} + G_{13}E_{13}) / (G_{12} + G_{13}) =$$

$$= (2426/1218.5 + 1065/425.5) / (1/1218.5 + 1/425.5) = 1417 \text{ В},$$

где  $G_{12} = 1/R_{12}$ ;  $G_{13} = 1/R_{13}$ ;

$$R_{14} = \frac{R_{12} * R_{13}}{R_{12} + R_{13}} = \frac{1218.5 * 425.5}{1218.5 + 425.5} = 315.4 \text{ Ом}.$$

Ток в сопротивлении  $R_1$  схемы рис.32 определим по закону Ома

$$I_1 = E_{14} / (R_{14} + R_1) = 1417 / (371 + 410) = 1.838 \text{ А}.$$

Напряжение между узлами 6-9 ( $U_{69}$ ) схемы рис.32 находим по закону

Ома

$$U_{69}=(R_1+R_{10})\cdot I_1=(410+45.64)\cdot 1.838=837.5 \text{ В.}$$

По второму закону Кирхгофа находим токи в схеме рис.31:

$$U_{69}= E_{12} - R_{12}\cdot I_6;$$

$$I_6=(E_{12}-U_{69})/R_{12}=(2426.2-837.5)/1218.5=1.303 \text{ А};$$

$$U_{69}= E_{13} -R_{13}\cdot I_{71};$$

$$I_{71}= (E_{13} -U_{69}) / R_{13}= (1065.26-837.5) / 425.5=0.535 \text{ А.}$$

Для определения токов  $I_2$ ,  $I_3$  и  $I_8$  в схеме рис.3 определим напряжения между узлами 2, 4, 5 в схеме рис.30:

$$U_{42}=-E_9+R_9I_6+R_{10}I_1=-76.17+338.5\cdot 1.303+45.64\cdot 1.838=448.8 \text{ В};$$

$$U_{476}=R_{10}I_1+R_{11}I_{71}+E_{11}=45.64\cdot 1.838+65.5\cdot 0.535+14.74=133.8 \text{ В};$$

$$U_{27}=E_9-R_9I_6+R_{11}I_{71}+E_{11}=76.17-338.5\cdot 1.303+65.5\cdot 0.535+14.74=-315 \text{ В.}$$

Определим токи  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_8$  в схеме рис.29 по закону Ома:

$$I_2=U_{47}/R_2=133.8/120=1.115 \text{ А};$$

$$I_3=I_4=(E_3-U_{27})/(R_3+R_4)=(200-(-315))/(260+630)=0.58 \text{ А};$$

$$I_8=U_{42}/R_8=448.8/620=0.723 \text{ А.}$$

Для определения неизвестных токов  $I_5$  и  $I_7$  составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1 и 5 (см.рис.29):

$$\text{для узла 1: } I_5=I_6-J_5=1.303-5=-3.697 \text{ А};$$

$$\text{для узла 5: } I_7=I_2-I_3-J_7=1.115-0.58-3=-2.465 \text{ А.}$$

По второму закону Кирхгофа находим напряжение  $U_{14}$  (рис.29)

$$U_{14}=R_6\cdot I_6+R_1\cdot I_1=530\cdot 1.303+410\cdot 1.838=1444 \text{ В.}$$

Мощность источников напряжения (ЭДС) и тока определяется произведением тока и напряжения на его зажимах. Она положительна при противоположных направлениях тока и напряжения на зажимах источника (рис.33,а) и отрицательна при совпадающих направлениях (рис.33,б).

Баланс мощности записывается в виде  $P_{\text{ист}}=P_{\text{пр}}$ , где

$$P_{\text{ист}} = \sum_{i=1}^l I_i E_i + \sum_{J=1}^m U_J J_J \quad - \text{ мощность идеальных источников;}$$

$$P_{\text{пр}} = \sum_{\kappa=1}^n R_{\kappa} I_{\kappa}^2 \quad - \text{ мощность преобразования электромагнитной энергии в тепловую;}$$

$l$ ,  $m$ ,  $n$  – соответственно число источников напряжения, источников тока и резисторов (сопротивлений) в схеме.

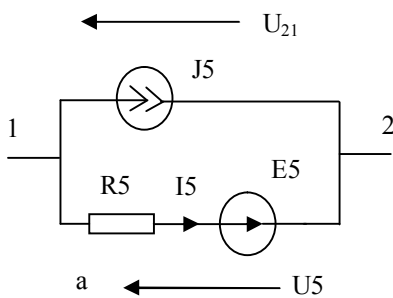
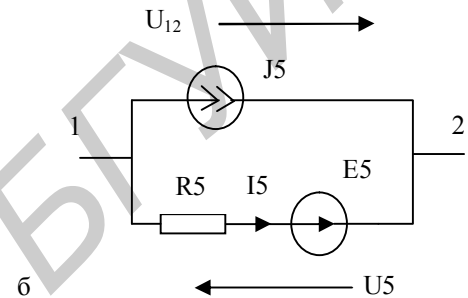


Рис.33



$$P_E = I_5 U_5 = I_5 E_5;$$

$$P_J = U_{21} J_5 = (E_5 - R_5 I_5) J_5.$$

$$P_E = -I_5 U_5 = -I_5 E_5;$$

$$P_J = -U_{12} J_5 = -(-R_5 I_5 - E_5) J_5.$$

Составим баланс мощностей для схемы рис.29:

$$P_{\text{ист}} = I_3 E_3 + I_5 E_5 + U_5 J_5 + U_7 J_7;$$

$$P_{\text{пр}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 + R_7 I_7^2 + R_8 I_8^2,$$

где  $U_5$  и  $U_7$  – напряжения на зажимах источников тока  $J_5$  и  $J_7$ :

$$U_5 = U_{52} = E_5 - R_5 I_5 = 600 - 350 * (-3,697) = 1893,95 \text{ В;}$$

$$U_7 = U_{67} = -R_7 I_7 = -360 * (-2,465) = 887,4 \text{ В;}$$

$$P_{\text{ист}} = 0,58 * 200 + (-3,697) * 600 + 1893,9 * 5 + 887 * 3 = 10029,75 \text{ Вт;}$$

$$P_{\text{пр}} = 410 * 1,838^2 + 120 * 1,115^2 + 630 * 0,58^2 + 260 * 0,58^2 +$$

$$+ 350 * (-3,69)^2 + 530 * 1,303^2 + 360 * (-2,46)^2 + 620 * 0,723^2 = 10029 \text{ Вт.}$$

Погрешность расчета

$$\Delta\% = \frac{P_{ист} - P_{пр}}{P_{ист}} 100\% = \frac{10030 - 10029}{10030} 100\% = 0,0998\%$$

### Метод эквивалентного генератора

Преобразуем треугольник сопротивлений  $R_2$ ,  $R_{34}$ ,  $R_8$  пассивной (без источников) схемы рис.34,а в эквивалентную звезду  $R_9$ ,  $R_{10}$ ,  $R_{11}$  (рис.34,б).

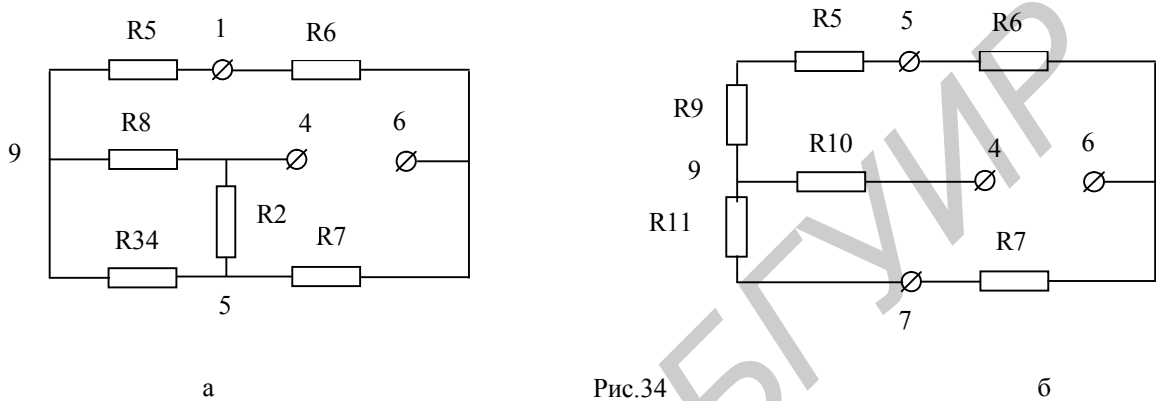


Рис.34

Сопротивление эквивалентного генератора находим относительно зажимов 4-6 схемы рис.34,б по формуле

$$R_{г} = R_{10} + \frac{(R_5 + R_6 + R_9) * (R_7 + R_{11})}{R_5 + R_6 + R_9 + R_7 + R_{11}} = 45,6 + \frac{(350 + 530 + 338,5) * (360 + 65,5)}{350 + 530 + 338,5 + 360 + 65,5} = 371$$

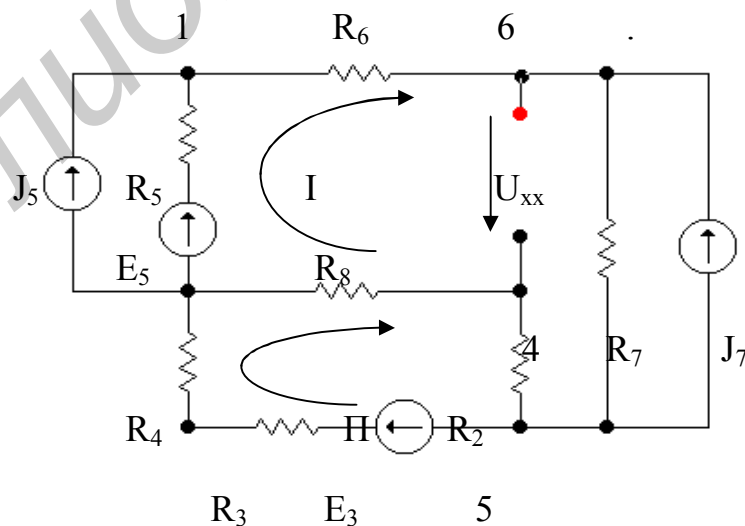


Рис. 35.



ЭДС эквивалентного генератора равную напряжению холостого хода на зажимах разомкнутой ветви находим из схемы рис.35 методом контурных токов.

$$\begin{cases} (R_2 + R_8 + R_5 + R_6 + R_7) \cdot J_{11} - (R_2 + R_8) \cdot J_{22} - R_5 \cdot J_5 + R_7 \cdot J_7 = E_5; \\ - (R_2 + R_8) \cdot J_{11} + (R_2 + R_3 + R_4 + R_8) \cdot J_{22} = E_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1980 \cdot J_{11} - 740 \cdot J_{22} - 350 \cdot 5 + 360 \cdot 3 = 600; \\ -740 \cdot J_{11} + 1630 \cdot J_{22} = 200. \end{cases}$$

В результате решения этой системы уравнений имеем:

$$J_{11} = 0,827 \text{ A}; \quad J_{22} = 0,498 \text{ A}.$$

ЭДС эквивалентного генератора находим по второму закону Кирхгофа из выражения:

$$E_{\Gamma} = U_{xx} = R_7 \cdot (J_{11} + J_7) + R_2 \cdot (J_{11} - J_{22}) = 1417 \text{ В}.$$

Находим ток в первой ветви схемы рис.36 по формуле

$$I_1 = E_{\Gamma} / (R_{\Gamma} + R_1) = 1417 / (371 + 410) = 1,838 \text{ A}.$$

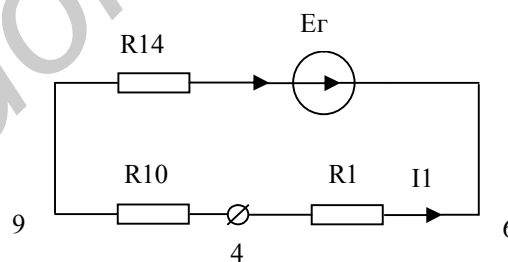


Рис.36

Рекомендуется разобрать решение задач: [3, №1.15, 1.26, 1.49, 1.51, 1.52, 1.53].

## Часть II. Анализ электрической цепи при гармонических источниках

Расшифруем исходные данные одного из вариантов задания по переменному току, приведенные на рис.28.

ШИФР 530101-13

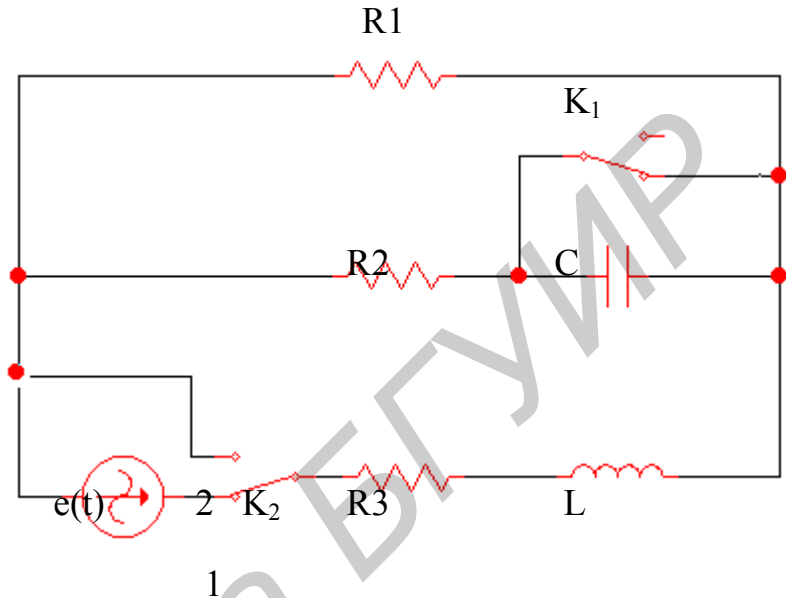


Рис.28

ПАРАМЕТРЫ:  $e(t) = E_m \cdot \sin \omega t = 100 \cdot \sin 10^4 t$  мВ.,

$R1 = 100$  Ом.,  $R2 = 21$  Ом.,  $R3 = 24$  Ом.,

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД -  $L = 33$  мГ.,  $C = 0,53$  мкФ.,

Ваттметр включен в ветвь с источником.

1. Расшифровать исходные данные для цепи синусоидального тока. Вклеить листок с распечаткой в контрольную работу, записать шифр и исходные данные и начертить схему.

2. Определить комплексы действующих значений токов во всех ветвях схемы и показание ваттметра. Записать мгновенные значения всех токов.

3. Построить топографическую диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов.

4. Составить в общем, виде систему уравнений по законам Кирхгофа в схеме с магнитной связью в двух формах:

а) для мгновенных значений; б) в символической форме.

5. Построить АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи напряжения  $K_u(j\omega) = U_2/E$ , где  $U_2$  – напряжение на параллельном участке цепи.

Расчет схемы заключается в определении токов во всех ветвях и напряжения между заданными узлами, определении тока методом эквивалентного генератора и показания ваттметра в заданной ветви, построения векторной диаграммы токов и топографической диаграммы напряжений относительно заданного узла.

### ПРИМЕР РАСЧЕТА ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

1. Начертим схему. (ключ  $K_1$  – разомкнут, ключ  $K_2$  – в положении 1) согласно варианту задания рис.28. Вклеим задание в контрольную работу и перепишем исходные данные из задания:

$$r_1 = 100 \text{ Ом}; \quad r_2 = 21 \text{ Ом}; \quad r_3 = 24 \text{ Ом}; \quad C = 0.53 \text{ мкФ};$$

$$L = 0,033 \text{ Гн}; \quad \omega = 10^4 \text{ рад/с}; \quad e(t) = 100 \cdot \sin(\omega t) \text{ мВ}.$$

2. Так как в цепи включен источник гармонического напряжения, расчет проводим символическим методом. Запишем комплексные сопротивления ветвей в схеме (рис.29):

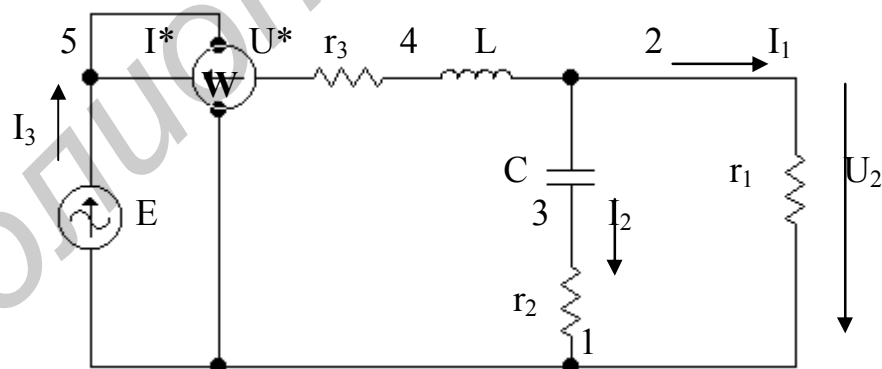


Рис.29

$$Z_1 = r_1 = 100 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = r_2 - j \frac{1}{\omega \cdot C} = 21 - j \frac{10^6}{10^4 \cdot 0,53} = 21 - j188,679 = z_2 \cdot e^{j\phi_2} =$$

$$= \sqrt{r_2^2 + X_c^2} \cdot e^{j \arctg(-X_c / r_2)} = 189,8 \cdot e^{-j83,65} \text{ Ом};$$

$$Z_3 = r_3 + j\omega \cdot L = 24 + j10^4 \cdot 0,033 = 24 + j330 = z_3 \cdot e^{j\phi_3} =$$

$$= \sqrt{r_3^2 + X_L^2} \cdot e^{j \arctg(X_L / r_3)} = 330,9 \cdot e^{j85,84} \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление цепи относительно источника

$$Z_{\text{ex}} = Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = 24 + j330 + \frac{100 \cdot 189,8 \cdot e^{-j83,65}}{224 \cdot e^{-j57,3}} =$$

$$= 24 + j330 + 84,73 \cdot e^{-j26,35} = 24 + j330 + 75,93 - j37,6 = 309,043 \cdot e^{j71,137} \text{ Ом},$$

где  $Z_{12} = Z_1 + Z_2 = 100 + 21 - j188,7 = \sqrt{121^2 + 188,7^2} \cdot e^{j \arctg(-188,7 / 121)} = 224 \cdot e^{-j57,3} \text{ Ом}.$

По закону Ома определим комплексную амплитуду тока  $I_{3m}$ :

$$\dot{I}_{3m} = \frac{\dot{E}_m}{Z_{\text{ex}}} = \frac{100}{309,043 \cdot e^{j71,137}} = 0,324 \cdot e^{-j71,137} \text{ МА}.$$

По правилу плеч находим комплексные амплитуды токов  $I_{2m}$  и  $I_{1m}$ :

$$\dot{I}_{2m} = \dot{I}_{3m} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = 0,324 e^{-j71,137} \frac{100}{224 \cdot e^{-j57,3}} = 0,145 \cdot e^{-j13,8} \text{ МА};$$

$$\dot{I}_{1m} = \dot{I}_{3m} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = 0,324 e^{-j71,137} \frac{189,8 \cdot e^{-j83,65}}{224 \cdot e^{-j57,3}} = 0,275 \cdot e^{-j97,8} \text{ МА}.$$

Проверим результат, используя 1-й закон Кирхгофа:

$$I_{3m} = I_{2m} + I_{1m} = 0,1047 - j0,3066 - 0,0373 - j0,2724 = 0,1035 - j0,307 = 0,32397 e^{-j71,4} \text{ МА}.$$

Определим показание ваттметра.

Активная мощность измеряется ваттметром, который имеет две обмотки – напряжения и тока. Начальные выводы обмоток напряжения и тока обозначают одинаковыми значками, обычно звездочками. По показаниям ваттметра можно определить не только мощность, но и направление передаваемой энергии.

Ваттметр измеряет мощность

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\psi_u - \psi_i),$$

где  $U$  и  $I$  – действующие напряжение и ток, подведенные к ваттметру, а  $\psi_u - \psi_i$  – угол сдвига фаз между ними, который соответствует одинаковым положительным направлениям  $U$  и  $I$  относительно выводов, отмеченных звездочкой.

$$P = E \cdot I_3 \cdot \cos(\psi_e - \psi_{i3}) = 100 \cdot 0,324 \cdot \cos(0 + 71,13) / 2 = 5,3 \text{ мВт}.$$

Баланс активных мощностей проверим по условию:  $P_{\text{и}} = P_{\text{пр}}$ ;

$$E_M \cdot I_{3M} \cdot \cos(\psi_e - \psi_{i3}) / 2 = (R_1 \cdot I_{1M}^2 + R_2 \cdot I_{2M}^2 + R_3 \cdot I_{3M}^2) / 2;$$

$$100 \cdot 0,324 \cdot \cos(0 + 71,13) / 2 = (100 \cdot 0,275^2 + 21 \cdot 0,145^2 + 24 \cdot 0,324^2) / 2;$$

$$5,3 = 5,27 \text{ мкВт.}$$

Показания ваттметра могут быть определены непосредственно по комплексным значениям напряжения и тока

$$P_W = \operatorname{Re}[E_M I_{3M}] / 2 = \operatorname{Re}[100 \cdot 0,324 e^{j71,13^\circ}] / 2 = -5,3 \text{ мкВт,}$$

где  $I_{2M} = 0,324 e^{j71,13^\circ}$  - сопряженный комплекс тока.

Погрешность расчета

$$\Delta\% = \frac{P_u - P_{np}}{P_u} 100\% = \frac{5,7 - 5,67}{5,7} 100\% = 0,526\%.$$

Составим баланс реактивных мощностей:  $Q_H = Q_{np}$ ;

$$E_M \cdot I_{3M} \cdot \sin(\psi_e - \psi_i) / 2 = (X_2 \cdot I_{2M}^2 + X_3 \cdot I_{3M}^2) / 2;$$

$$100 \cdot 0,324 \cdot \sin(0 + 71,13) / 2 = (-188,7 \cdot 0,145^2 + 330 \cdot 0,324^2) / 2;$$

$$14,57 \cdot 10^{-3} = 14,7 \cdot 10^{-3} \text{ вар.}$$

Погрешность расчета

$$\Delta\% = \frac{|Q_{np}| - |Q_{uct}|}{|Q_{np}|} 100\% = \frac{14,7 - 14,57}{14,7} 100\% = 0,998\%.$$

Мгновенные значения токов запишутся в следующем виде:

$$i_1(t) = 0,145 \sin(10^4 t - 13,8) \text{ мА.};$$

$$i_2(t) = 0,275 \sin(10^4 t - 97,8) \text{ мА.};$$

$$i_L(t) = i_3(t) = 0,324 \sin(10^4 t - 71,137) \text{ мА.}$$

Сопротивление эквивалентного генератора  $Z_g$  находим относительно первой ветви схемы рис.38:

$$Z_g = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{189,8 \cdot e^{-j83,65} \cdot 330,9 \cdot e^{j85,84}}{21 - j188,9 + 24 + j330} = 422 \cdot e^{-j70,1^\circ} \text{ Ом.}$$

Амплитуду тока в первой ветви схемы (см.рис.29) определим по формуле

$$I_{1м} = \frac{E_{эм}}{Z_2 + Z_1} = \frac{127,7e^{-j155,95}}{143,8 - j396,8 + 100} = 0,274 \cdot e^{-j97,6^\circ} \text{ мА},$$

где 
$$E_{эм} = \frac{Z_2 \cdot E_M}{Z_2 + Z_3} = \frac{189,8 \cdot e^{-j83,65^\circ}}{21 - j188,7 + 24 + j330} = 127,66e^{-j155,95^\circ} \text{ мВ}.$$

### 3. Графоаналитический метод расчета

Графоаналитический метод расчета – это совокупность графического метода и метода пропорционального пересчета. Метод основан на том, что в линейной цепи токи пропорциональны напряжениям, векторная диаграмма токов и напряжений сохраняет свой вид при изменении величины входного напряжения, изменяются лишь масштабы токов и напряжений. При этом надо учитывать, что в активном сопротивлении ток и напряжение совпадают по фазе, в индуктивном элементе – ток отстает от напряжения на  $90^\circ$ , а в емкостном элементе – ток опережает напряжение на  $90^\circ$ .

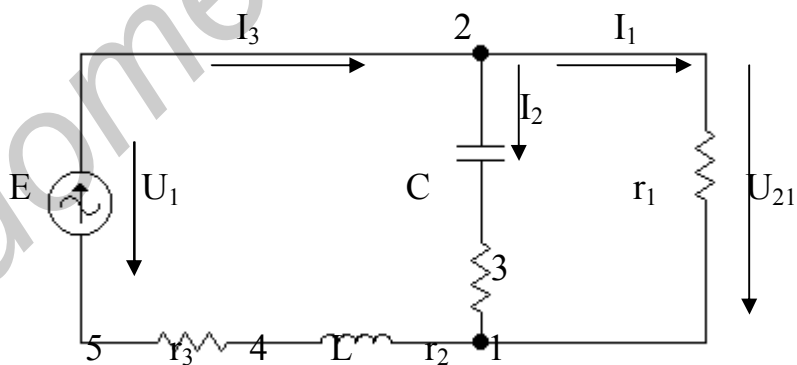


Рис. 30

По данным п.3 имеем:

$$I_{1м} = 0,275e^{-j97,44^\circ} \text{ мА}; \quad I_{2м} = 0,14e^{-13,79^\circ} \text{ мА}; \quad I_{3м} = 0,32e^{-j71,13^\circ} \text{ мА}.$$

Максимальное значение тока составляет 0,32 мА, поэтому выберем масштаб для токов  $m_i = 0,05 \text{ мА/см}$ , а для напряжения –  $m_u = 5 \text{ мВ/см}$ .

Построение векторной диаграммы для схемы рис.30 начинаем с наиболее удаленного от источника элемента цепи. Задаемся значением амплитуды тока второй ветви  $I_{2m}'=0,1$  мА и с учетом масштаба токов строим этот вектор, произвольно выбрав его направление (рис.31).

Определяем и строим на диаграмме напряжения на участках второй ветви. Падение напряжения на  $r_2$  по величине равно  $U_{r2m}' = r_2 * I_{2m}' = 2,1$  мВ и совпадает по фазе с током  $I_2'$ . Падение напряжения на емкостном сопротивлении равно по величине  $U_{cm}' = X_c * I_{2m}' = 18,87$  мВ и отстает по фазе от тока  $I_{2m}'$  на  $90^\circ$ . Сумма векторов  $U_{r2m}'$  и  $U_{cm}'$  определяет амплитуду напряжения на параллельном участке цепи  $U_{21m}'$ . Из диаграммы по масштабу  $m_u$  определяем величину напряжения  $U_{21m}' = [12] * m_u = 3,75 * 5 = 18,75$  мВ, где [12] – длина вектора  $U_{21m}'$  в мм.

По закону Ома для участка цепи с сопротивлением  $r_1$ , находим амплитуду тока первой ветви  $I_{1m}' = U_{21m}' / r_1 = 0,1875$  мА. Строим вектор  $I_{1m}'$  из начала координат, который по направлению совпадает с напряжением  $U_{21m}'$ . Сумма векторов токов  $I_{1m}'$  и  $I_{2m}'$  дает вектор  $I_{3m}' = [13] * m_i = 4,4 * 0,05 = 0,22$  мА (см. рис.31).

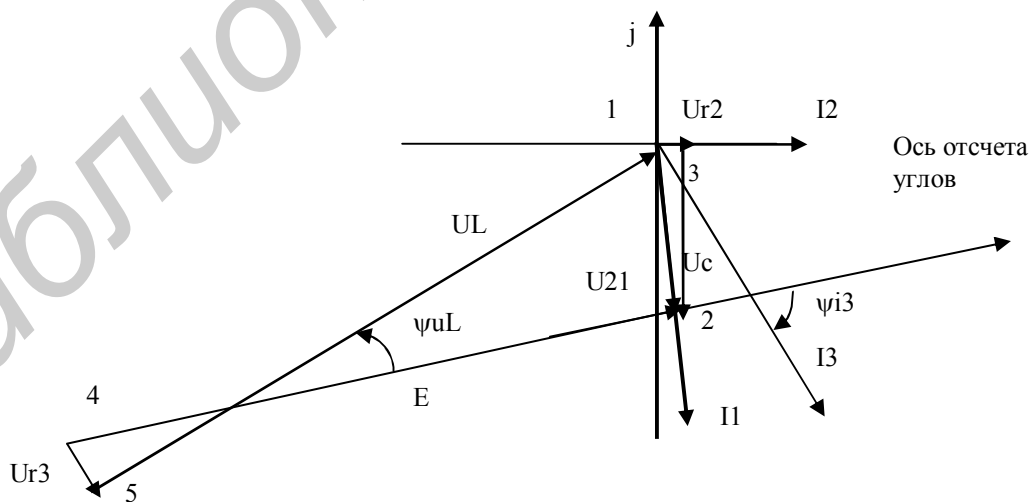


Рис.31

Определяем и строим на диаграмме напряжения на участках третьей ветви. Падение напряжения на индуктивном сопротивлении равно по величине  $U_{Lm}' = X_L * I_{3m}' = 330 * 0,22 = 72,6$  мВ, конец вектора  $U_{Lm}'$  входит в начало вектора  $U_{12m}'$  и опережает по фазе ток  $I_{3m}'$  на  $90^\circ$ . Падение напряжения на сопротивлении  $r_3$  равно по величине  $U_{r3m}' = r_3 * I_{3m}' = 5,28$  мВ, конец вектора входит в начало вектора  $U_{Lm}'$ . Вектор  $U_{r3m}'$  строим параллельно вектору тока  $I_{3m}'$ . Вектор приложенного к цепи напряжения  $U_m'$  находим как сумму векторов  $U_{r3m}'$ ,  $U_{Lm}'$ ,  $U_{21m}'$  (второй закон Кирхгофа), т.е. соединим начало вектора  $U_{r3m}'$  (точка 4) с концом вектора  $U_{21m}'$  (точка 2). Из диаграммы, с учетом масштаба  $\mu$ , находим величину напряжения  $U_m' = [42] * \mu = 13,8 * 5 = 69$  мВ, где [42] – длина вектора  $U_m'$  в мм. Так как амплитуда напряжения, согласно задания,  $U_m = E_m = 100$  мВ, то в силу линейности законов Кирхгофа все токи и напряжения увеличатся в  $K$  раз, где  $K = E_m / U_m' = 100 / 69 = 1,45$ , а взаимное расположение векторов на диаграмме не изменится. Ось отсчета углов начальных фаз всех токов и напряжений совпала с направлением источника ЭДС, так как ЭДС имеет начальную фазу равную нулю. Пользуясь диаграммой, запишем мгновенные значения всех рассчитанных величин:

$$i_1(t) = K * I_{1m}' \sin(\omega * t - \psi_{i1}) = 1,45 * 0,1875 \sin(10000 * t - 97^\circ) \text{ мА};$$

$$i_2(t) = K * I_{2m}' \sin(\omega * t - \psi_{i2}) = 1,45 * 0,1 \sin(10000 * t - 13^\circ) \text{ мА};$$

$$i_3(t) = K * I_{3m}' \sin(\omega * t - \psi_{i3}) = 1,45 * 0,22 \sin(10000 * t - 71^\circ) \text{ мА};$$

$$u_{12}(t) = K * U_{12m}' \sin(\omega * t - \psi_{u12}) = 1,45 * 18,75 \sin(10000 * t - 97^\circ) \text{ мВ};$$

Построенная в такой последовательности векторная диаграмма напряжений носит название топографической. причем каждой точке топографической диаграммы соответствует определенная точка схемы. Топографическая диаграмма позволяет измерить величину и начальную фазу напряжения любого участка цепи, не участвующего в расчете. Например, амплитуда напряжения между точками 5 и 1 диаграммы



$U_{51m} = K \cdot [51] \cdot \mu = 1,45 \cdot 14,5 \cdot 5 = 105$  мВ и начальная фаза его  $\psi_{uL} = 21^\circ$ , тогда  $u_{51}(t) = 105 \sin(10000 \cdot t + 21^\circ)$  мВ.

Рассмотрим пример построения топографической диаграммы по результатам расчета пункта 3:  $I_{1m} = 0,275 e^{-j97,44^\circ}$  мА;  $I_{2m} = 0,145 e^{-13,79^\circ}$  мА;  $I_{3m} = 0,324 e^{-j71,13^\circ}$  мА.

На комплексной плоскости (рис.32) из начала координат строим в принятом масштабе вектора всех токов. Получаем векторную диаграмму токов.

Для построения топографической диаграммы рассчитаем комплексные потенциалы узлов и промежуточных точек цепи (см. рис.30), приняв потенциал узла 1 равным нулю:

$$V_{1m} = 0;$$

$$V_{3m} = V_{1m} + (-jX_C)I_{2m} = 0 - j188,9 \cdot 0,145 e^{-j13,8^\circ} = 27,4 e^{-j103,8^\circ} \text{ мВ};$$

$$V_{2m} = V_{1m} + r_1 I_{1m} = 0 + 100 \cdot 0,275 e^{-j97,4^\circ} = 27,5 e^{-j97,4^\circ} \text{ мВ};$$

$$V_{5m} = V_{1m} + jX_L I_{3m} = 0 + j330 \cdot 0,324 e^{-j71,1^\circ} = 105,73 e^{j18,9^\circ} \text{ мВ};$$

$$V_{4m} = V_{5m} - r_3 \cdot I_{3m} =$$

Выбираем масштаб для напряжений  $m_U = 7,2$  мВ/см и строим топографическую диаграмму. Из точки 1 откладываем вектор напряжения  $U_{cm}$ , который отстает по фазе от  $I_{2m}$  на  $90^\circ$ , получаем точку 3. Из точки 3 откладываем вектор напряжения на сопротивлении  $r_2$  параллельно вектору тока  $I_{2m}$ . Получаем точку 2. Откладываем из точки 2 вектор напряжения  $U_{Lm}$ , опережающий по фазе ток  $I_{3m}$  на  $90^\circ$ . Получаем точку 5. Из точки 5 откладываем вектор напряжения на сопротивлении  $r_3$  параллельно вектору тока  $I_{3m}$ . Получаем точку 4. Соединив точки прямыми линиями, получим топографическую диаграмму (рис.32).

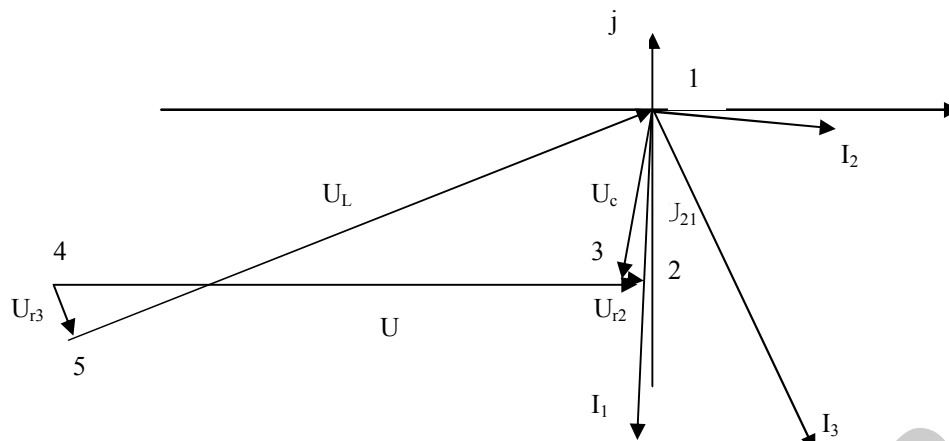


Рис.32

4. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа, заменив резистор  $r_2$  индуктивностью  $L_2$  и полагая, что между  $L$  и  $L_2$  существует магнитная связь (рис.33). Одноименные зажимы катушек обозначены звездочками. Число независимых уравнений по 1-му закону Кирхгофа находим из условия  $K_1 = N_u - 1 = 2 - 1 = 1$ , где  $N_u$  – число узлов в схеме. Количество независимых уравнений по 2-му закону Кирхгофа равно  $K_2 = N_b - N_u + 1 - N_i = 3 - 2 + 1 - 0 = 2$ , где  $N_b$  – число ветвей в схеме,  $N_i$  – число идеальных источников тока. Включение катушек встречное.

Запишем систему уравнений для мгновенных значений

$$\begin{cases} i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 * i_1(t) - (1/C) * \int i_2(t) dt - L_2 * di_2(t)/dt + M di_3(t)/dt = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 * i_1(t) - M di_2(t)/dt + L * di_3(t)/dt + r_3 * i_3(t) = e(t); \end{cases}$$

Система уравнений в символической форме

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 * \dot{I}_1 + j[(1/\omega C) - \omega L_2] * \dot{I}_2 + j\omega M * \dot{I}_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 * \dot{I}_1 - j\omega M * \dot{I}_2 + (j\omega L + r_3) * \dot{I}_3 = \dot{E}; \end{cases}$$

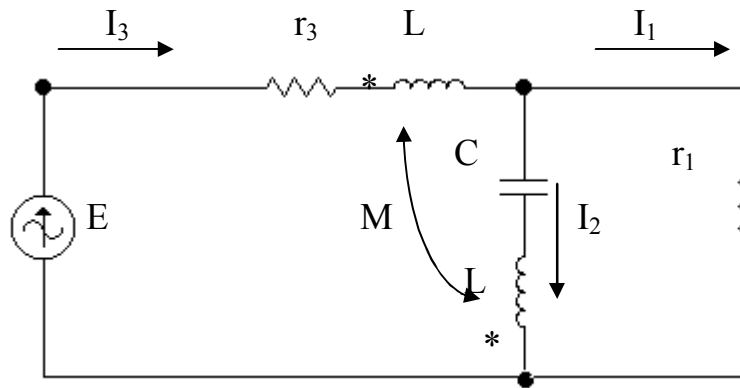


Рис. 33.

Найдем входное сопротивление схемы по отношению к источнику. Из системы уравнений находим:  $\dot{I}_2 = \dot{I}_3 - \dot{I}_1$ ;  $r_1 \dot{I}_1 = -\{j[(1/\omega C) - \omega L] \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_3\} = -\{j[(1/\omega C) - \omega L] (\dot{I}_3 - \dot{I}_1) + j\omega M \dot{I}_3\}$ ;  $\dot{I}_1 = j[(\omega L + \omega M - 1/\omega C)] \dot{I}_3 / [r_1 + j(\omega L - 1/\omega C)]$ ;  $(j\omega L + r_3) \dot{I}_3 = \dot{E} - r_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{E} - (r_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2)$ ;  $\dot{I}_3 = \dot{E} / \{ (j\omega L + r_3) + r_1 \dot{I}_1 / \dot{I}_3 + j\omega M \dot{I}_2 / \dot{I}_3 \}$ ;

$Z_{вх} = E / I_3 = \{ (j\omega L + r_3) Z_k + r_1 \dot{I}_1 / \dot{I}_3 + j\omega M \dot{I}_2 / \dot{I}_3 \} / Z_k$ , где  $Z_k = r_1 + j(\omega L - 1/\omega C)$ .

### Построение амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик

Построить АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи напряжения  $K_u(j\omega) = U_2 / E$ , где  $U_2$  – напряжение на параллельном участке цепи рис.29.

$$K_u(j\omega) = U_2 / E = Z_{п} \dot{I}_3 / (Z_3 + Z_{п}) \dot{I}_3 =$$

$$= K \cdot (1 + j\Omega \omega_0 r_2 C) / \{ 1 - \Omega^2 + j\Omega \omega_0 [(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) C + L] / (r_1 + r_3) \} =$$

$$= K \cdot (1 + jH \Omega) / (1 - \Omega^2 + j\alpha \Omega),$$

где  $K(\omega) = K \sqrt{[1 + (H \Omega)^2]} / \sqrt{[1 - \Omega^2]^2 + (\alpha \Omega)^2}$  – амплитудно-частотная характеристика цепи (АЧХ);

$\Psi(\omega) = \arctg(H \Omega) - \arctg[\alpha \Omega / (1 - \Omega^2)]$  – фазочастотная характеристика цепи (ФЧХ);

$$K = r_1 / (r_1 + r_3) = 0.806; \quad \omega_0^2 = (r_1 + r_3) / [(r_1 + r_2) L C] = 58.6 \cdot 10^6 \text{ рад./с};$$

$$\Omega = \omega / \omega_0; \quad H = \omega_0 r_2 C = 7.65 \cdot 10^3 \cdot 21 \cdot 0.53 \cdot 10^{-6} = 0.0852;$$

$$\alpha = \omega_0 \cdot \sqrt{[(r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3) \cdot C + L] / (r_1 + r_3)} = 7.65 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{[(100 \cdot 21 + 100 \cdot 24 + 21 \cdot 24) \cdot 0.53 \cdot 10^{-6} + 0.033] / (100 + 24)} = 11.65.$$

Фазочастотная характеристика является разностью аргументов числителя и знаменателя АЧХ. Соответствующие графики АЧХ и ФЧХ представлены на рис.34.

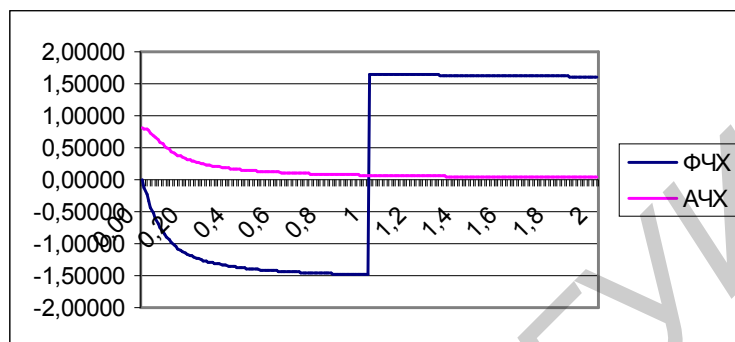


Рис. 34

Видно, что данная цепь является фильтром нижних частот (ФНЧ). На граничной частоте  $\Omega = 0,9$  АЧХ уменьшается до уровня 0,707 от максимального значения. На частоте  $\Omega = 1$  фаза меняет знак на противоположный.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зевеке Г.В., Ионкин П.А. и др. Основы теории цепей. М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1970.
3. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. М.: Высш. шк., 1990.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М.: Высш. шк., 1984.
5. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей. М.: Высш. шк., 1987.
6. Сборник задач по теоретическим основам электротехники/ Под ред. Л.А. Бессонова. М.: Высш. шк., 1988.
7. Федорова И.А. и др. Методическое пособие по использованию вычислительной техники при выполнении домашних, курсовых и лабораторных работ по курсам ТОЭ, ТЛЕЦ, ОТЦ. Ч.1. Ротапринт МРТИ, 1980.
8. Методические указания по выполнению контрольных заданий по курсу электротехника для студентов заочной формы обучения. Сост. Шевченко Ф.Г. Минск. БГУИР, 1998.
9. Методические указания к выполнению контрольных заданий по курсу электротехника для студентов специальности Т.09.01.01 заочной формы обучения. Сост. Шевченко Ф.Г. Минск. БГУИР, 2000.
10. Свито И.Л. Конспект лекции раздела курса ТОЭ и ОТЦ. “Расчет переходных процессов методом переменных состояния”. Минск. МРТИ, 1993.

Учебное издание

Шевченко Ф.Г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к выполнению контрольных заданий по курсу  
“Электротехника”  
для студентов специальности 39.01.01  
заочной формы обучения

Шевченко Феликс Георгиевич

Редактор  
Корректор Е.Н.Батурчик

---

Подписано в печать  
1/16

Бумага офсетная  
Уч.-изд.л. 3,0

Печать ризографическая.  
Тираж 150 экз.

Формат 60x84

Усл. печ. л.  
Заказ ,

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и  
радиоэлектроники»  
Лицензия ЛП №156 от 05.02.2001.  
Лицензия ЛП №509 от 03.08.2001.  
220013, Минск, П.Бровки,6