

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Учреждение образования  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

**Кафедра электроники**

**В.Т.Першин**

**ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ  
И СХЕМОТЕХНИКИ**

**Учебное пособие  
для студентов специальностей  
«41 01 02. МИКРОЭЛЕКТРОНИКА», «39 02 02. ПРОЕКТИРОВАНИЕ  
И ПРОИЗВОДСТВО РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ»  
И «41 01 01. ЭКОНОМИКА И УПРАВЛЕНИЕ НА ПРЕДПРИЯТИИ»  
ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ**

**Минск 2002**

УДК 621.37/39+681.3.06(075.8)

ББК 32.84+32.97 я 73

П27

Рецензент: Зав. кафедрой телекоммуникационных систем Высшего государственного колледжа связи, канд. техн. наук, доцент Н.И.Шатило

Першин В.Т.

Основы радиоэлектроники и схемотехники: Учеб. пособие для студентов специальностей «41 01 02. Микроэлектроника», «39 02 02. Проектирование и производство радиоэлектронных средств» и «41 01 01. Экономика и управление на предприятии» всех форм обучения /В.Т.Першин. –Мн.: БГУИР, 2002. –92 с.: ил.37.

ISBN 985-444-422-8.

П27 Учебное пособие состоит из восьми разделов и двух приложений, отражает основные идеи курса «Основы радиоэлектроники и схемотехники». Разделы пособия: гармонический анализ сигналов, амплитудно-модулированные колебания, сигналы с угловой модуляцией, случайные сигналы, дискретизация и квантование сигналов, прохождение сигналов через линейные цепи, расчет сложных цепей постоянного и переменного тока, темы практических занятий. Приложения представляют собой листинги программ математического пакета Mathcad 2000 Professional расчета прохождения одиночных прямоугольных импульсов и их последовательностей через простейшие линейные цепи: разделительные, дифференцирующие, интегрирующие.

Рассмотрены примеры расчетов, выполненных с помощью математического пакета Mathcad 2000 Professional, использующего средства символьной алгебры.

УДК 621.37/39+681.3.06(075.8)

ББК 32.84+32.97 я 73

ISBN 985-444-422-8

© В.Т.Першин, 2002

© БГУИР, 2002

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение

## 1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

- 1.1. Понятие периодического и непериодического сигнала
- 1.2. Понятие гармонического анализа
- 1.3. Спектральный анализ периодических сигналов
  - 1.3.1. Тригонометрическая форма ряда Фурье
  - 1.3.2. Комплексная форма ряда Фурье
- 1.4. Спектральный анализ непериодических сигналов
- 1.5. Сравнение спектров периодического и одиночного сигналов

## 2. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

- 2.1. Аналитическое выражение для тонального АМ-колебания
- 2.2. Спектр АМ-колебания
- 2.3. Мощность АМ-колебания

## 3. СИГНАЛЫ С УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

- 3.1. ФМ-колебания
- 3.2. ЧМ-колебания
- 3.3. Спектр сигнала с угловой модуляцией
  - 3.3.1. Спектр сигнала с узкополосной угловой модуляцией
  - 3.3.2. Спектр сигнала с широкополосной угловой модуляцией
- 3.4. Мощность сигнала с угловой модуляцией

## 4. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ СООБЩЕНИЙ И СИГНАЛОВ

- 4.1. Теорема Котельникова
- 4.2. Понятие об импульсно-модулированных колебаниях
- 4.3. Амплитудно-импульсная модуляция

## 5. СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

- 5.1. Основные понятия теории случайных сигналов
- .....5.2. Стационарные и нестационарные процессы
- 5.3. Ковариационная и корреляционная функции
- 5.4. Математическое ожидание, ковариационная и корреляционная функции стационарного в узком смысле случайного процесса
- 5.5. Спектральный анализ случайных процессов
  - 5.5.1. Случайный спектр
  - 5.5.2. Спектральная плотность
- 5.6. Свойства спектральной плотности
- 5.7. Понятие о ковариации (моменте связи) и коэффициенте ковариации
- 5.8. Корреляционная функция
- 5.9. Помехи. Их свойства и математическое описание
- 5.10. Сравнение случайных и детерминированных сигналов

## 6. АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

- 6.1. Порядок проведения анализа прохождения сигналов через

линейную цепь

6.2. Встроенные функции пакета Mathcad спектрального анализа сигналов

6.3. Анализ прохождения непериодического сигнала через линейную цепь

6.4. Анализ прохождения периодического сигнала через линейную цепь

6.5. Анализ прохождения дискретизированного сигнала через линейную цепь

6.5.1. Особые свойства дискретизированных функций

6.5.2. Задачи спектрального анализа дискретизированных сигналов

6.6. Работа с размерными переменными

7. РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО И ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

7.1. Анализ сложной электрической схемы путем составления уравнений по первому и второму законам Кирхгофа

7.2. Анализ сложной электрической схемы путем составления системы уравнений по методу контурных токов

7.3. Примеры решения задач на анализ сложных электрических схем постоянного и переменного тока

7.4. Методические рекомендации по решению задач

7.5. Решение задачи анализа сложной электрической схемы постоянного тока методом составления уравнений по первому и второму законам Кирхгофа

7.6. Решение задачи анализа сложной электрической схемы постоянного тока путем составления уравнений по методу контурных токов

7.7. Потенциальная диаграмма цепи постоянного тока

7.8. Решение задачи анализа сложной электрической схемы переменного тока путем составления уравнений по первому и второму законам Кирхгофа

7.9. Решение задачи анализа сложной электрической схемы переменного тока путем составления уравнений по методу контурных токов

7.10. Построение векторной диаграммы сложной электрической цепи

7.11. Решение системы матричных уравнений с помощью пакета Mathcad

8. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.

8.1. Анализ АЧХ и ФЧХ простейших радиотехнических цепей

8.2. Спектральный анализ непериодических сигналов

8.3. Спектральный анализ периодических сигналов

8.4. Модулированные колебания

8.5. Случайные сигналы

8.6. Исследование прохождения непериодических сигналов через линейные радиотехнические цепи

8.7. Исследование прохождения периодических сигналов

через линейные радиотехнические цепи

8.8. Анализ спектров дискретизированных сигналов

8.9. Анализ прохождения дискретизированных сигналов через линейные цепи

8.10. Анализ сложных цепей постоянного тока

8.11. Анализ сложных цепей переменного тока

ЛИТЕРАТУРА

Библиотека БГУИР

## Введение

Цель курса «Основы радиоэлектроники и схемотехники» состоит в изучении основ теории сигналов и электрических цепей, принципов работы и характеристик дискретных и интегральных элементов полупроводниковой техники, основ аналоговой и аналого-цифровой схемотехники, принципов построения и проектирования радиоэлектронных устройств на полупроводниковых приборах и интегральных схемах.

В результате изучения дисциплины будущие инженеры-конструкторы, инженеры-технологи, экономисты-менеджеры должны научиться понимать физические процессы, протекающие в радиоэлектронных цепях и устройствах, с учетом влияния паразитных параметров и отклонений параметров элементов схем от расчетных значений, ознакомиться с современными методами построения радиоэлектронных схем.

Главная задача курса «Основы радиоэлектроники и схемотехники» – получить знания, необходимые для обеспечения взаимопонимания между экономистом-менеджером, с одной стороны, и инженером-схемотехником и инженером-конструктором-технологом – с другой.

Особенно важно подчеркнуть роль этого учебного пособия для студентов заочной формы обучения, выполняющих контрольное задание по этому курсу.

Прежде всего, работать над изучением курса следует систематически, изучая тему за темой в порядке, указанном в «Методических материалах по курсу «Основы радиоэлектроники и схемотехники» для студентов специальности «Экономика и управление предприятием (фирмой)» заочной формы обучения», не допуская пропусков.

Материал каждой части курса может быть изучен в основном по одному из указанных в «Методических материалах» литературных источников. В тех случаях, когда порядок изложения материала отличается от программы курса, его следует изучать по рекомендуемой книге выборочно, руководствуясь содержанием темы. Закончив изучение темы, следует обязательно ответить на все приведенные вопросы для самопроверки.

Выполнив контрольные задания по курсу «Основы радиоэлектроники и схемотехники», студент сможет самостоятельно решать многие задачи по практическому использованию спектрального анализа одиночных, периодических и дискретизированных сигналов и исследованию условий их прохождения через простейшие линейные радиоэлектронные цепи, расчету сложных электрических цепей постоянного и переменного тока.

Без применения ЭВМ решение задач по спектральному анализу сигналов и условий их прохождения через линейные цепи, равно как и достаточно сложных схемотехнических устройств, содержащих 10 - 20 ветвей, представляется бесперспективным делом. В то же время есть немало специализированных математических пакетов для персональных ЭВМ, с помощью которых эти задачи решаются легко и просто. Поэтому заложенная в основу выполнения контрольного задания методика предполагает, что студент сначала должен разобраться в

существовании задачи, наметить ход ее решения, а потом обратиться, например, к пакету Mathcad и провести анализ физического смысла полученного решения.

При выполнении контрольного задания можно пользоваться любой версией математического пакета. Тем не менее следует иметь в виду, что эти пакеты постоянно совершенствуются, с каждой версией увеличиваются возможности решения новых задач. Поэтому надеемся, что выполнение контрольного задания с помощью математического пакета позволит освоить практику работы с этими средствами и использовать их для решения других задач, которые встретятся в дальнейшей практической деятельности.

В данном учебном пособии приведены также краткие теоретические сведения о встроенных функциях по спектральному анализу, расчету цепей с помощью составления и решения матричных уравнений и сведения о работе с пакетом. Это сделано специально для тех студентов, которые по разным причинам не овладели теоретическим материалом, необходимым для решения поставленных задач, или имеют слабые навыки пользования пакетом Mathcad.

Отметим, что все разделы этого учебного пособия могут оказаться весьма полезными студентам, изучающим курс «Радиотехнические цепи и сигналы».

## 1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

### 1.1. Понятие периодического и непериодического сигнала

Для изучения условий прохождения сигналов через линейные цепи целесообразно разделить все сигналы на две категории: периодические и непериодические.

К периодическим сигналам отнесем те, которые можно описать некоторой временной функцией  $s(t)$ , для которой можно указать какое-то число  $T$ , такое, что для всякого  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  будет выполняться условие  $s(t) = s(t + nT)$ . Если такое число  $T$  для функции  $s(t)$  указать невозможно, то тогда сигнал, описываемый функцией  $s(t)$ , называется непериодическим.

Число  $T$  называют периодом функции, а значит, и сигнала  $s(t)$  и для определенности полагают  $T > 0$ . Период сигнала связан с его частотой  $F$  известным соотношением  $T = 1/F$ . Частота колебания, имеющего период  $T = 1$  с, называется 1 Гц.

В радиотехнике широко используется так называемая циклическая частота  $\Omega = 2\pi F = 2\pi/T$  с размерностью радиан/с (рад/с).

При решении конкретных практических задач обязательно нужно иметь в виду различие между размерностями частоты  $F = 1/T$  колебания и циклической частоты  $\Omega = 2\pi/T$  этого же колебания. С физической точки зрения это различие заключается в том, что частота  $F$  показывает, сколько оборотов в единицу времени совершает, например, радиус-вектор вращающейся точки, а частота  $\Omega$  -

сколько радиан проходит в единицу времени тот же радиус-вектор вращающейся точки.

## 1.2. Понятие гармонического анализа

Гармонический анализ - это раздел математики, который изучает возможности представления функций в виде тригонометрических рядов и интегралов. Основным понятием в гармоническом анализе является гармоническое колебание, которое математически можно записать следующим образом:

$$s(t) = A \cos(\Omega t + \varphi),$$

где  $A$ ,  $\Omega$ ,  $\varphi$  – соответственно амплитуда, циклическая частота, начальная фаза колебания.

В гармоническом анализе вводится понятие  $n$ -й гармоники гармонического колебания частоты  $\Omega$ , под которой понимают опять же гармоническое колебание с частотой, в  $n$  раз превышающей частоту основного гармонического колебания. Математическое выражение для  $n$ -й гармоники  $s_n(t)$  основного тона  $\Omega$  можно записать следующим образом:

$$s_n(t) = A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n),$$

где  $A_n$ ,  $n\Omega$ ,  $\varphi_n$  – амплитуда, циклическая частота, начальная фаза  $n$ -й гармоники основного тона  $\Omega$  соответственно.

Следующим важным понятием является спектр сигнала. Под спектром сигнала понимают совокупность его гармонических составляющих.

## 1.3. Спектральный анализ периодических сигналов

### 1.3.1. Тригонометрическая форма ряда Фурье

Основа спектрального анализа периодических сигналов – ряд Фурье для периодической функции  $s(t)$ : практически всякую периодическую функцию  $s(t)$  можно представить в виде ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (1.1)$$

где  $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$  - соответствует постоянной составляющей сигнала, а

$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\Omega t dt$  и  $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\Omega t dt$  - представляют амплитуды косинусоидальных и синусоидальных гармоник сигнала соответственно.

На практике удобнее пользоваться представлением функции  $s(t)$  в виде суммы только косинусоидальных гармоник. Если в формуле (1.1) выражение, стоящее под суммой, умножить и разделить на  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , то получим:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n \cos n\Omega t}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} + \frac{b_n \sin n\Omega t}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right) \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Так как

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \leq 1, \quad \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \leq 1$$

и

$$\left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)^2 + \left( \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)^2 = 1,$$

то можно обозначить

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \varphi_n \quad \text{и} \quad \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin \varphi_n.$$

И тогда можно записать:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\Omega t - \varphi_n), \quad \varphi_n = \operatorname{arctg}(b_n / a_n).$$

Введя обозначения  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $c_0 = a_0$ , окончательно получим:

$$s(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega t - \varphi_n). \quad (1.2)$$

Из формул (1.1) и (1.2) следует, что спектр периодического сигнала дискретен. Спектр периодического сигнала состоит из отдельных частот, соответствующих дискретным частотам  $0, \Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$ . Важно отметить, что если периодический сигнал следует с частотой, например, 1 кГц, то в его спектре могут быть только частоты, кратные частоте 1 кГц, т.е. 0, 1 кГц, 2 кГц и т.д. Это означает, что в спектре такого периодического сигнала не может быть частот, отличных от вышеперечисленных, например, частоты 1,5 кГц или 1,2 кГц.

Графически спектр сигнала можно представить следующим образом. По оси ординат будем откладывать величины амплитуд гармонических составляющих сигнала, а по оси абсцисс - частоты этих гармоник. Для исчерпывающей характеристики спектра это графическое изображение нужно дополнить заданием начальной фазы каждой гармонической составляющей спектра. Это обстоятельство и определяет название спектра периодического сигнала: линейчатый,

или дискретный, спектр. Рис.1.1 дает общее представление об амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиках периодического сигнала, из которого видно, что частоты спектральных составляющих кратны частоте следования периодического сигнала.

Таким образом, структура спектра периодического сигнала полностью определяется двумя характеристиками: амплитудной и фазовой, т.е. модулем и аргументом комплексной амплитуды спектральной составляющей. Графическое изображение спектра дает наглядное представление об относительной величине отдельных составляющих, позволяя легко оценить техническую ширину спектра сигнала.

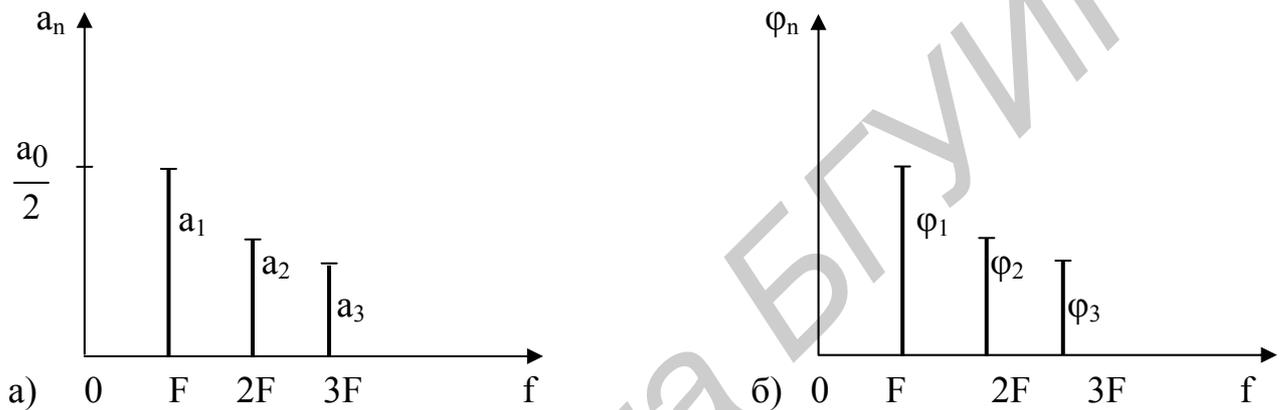


Рис.1.1. Амплитудно-частотная (а) и фазочастотная характеристики (б) периодического сигнала с периодом  $T = 1/F$

### 1.3.2. Комплексная форма ряда Фурье

В радиотехнических устройствах сигнал подвергается различным формам обработки. И для того, чтобы рассчитать результат этих преобразований, используется комплексная форма ряда Фурье. Эти преобразования имеют формальный характер и связаны с применением комплексной формы для представления функции вещественной переменной. Поэтому при проведении расчётов реальный сигнал можно представить в виде функции комплексной переменной, преобразовав его соответствующим образом, а затем снова перейти к вещественному представлению.

Для вывода ряда Фурье в комплексной форме за основу возьмём уравнение (1.2). Учитывая, что

$$\cos(n\Omega t - \varphi_n) = \frac{e^{i(n\Omega t - \varphi_n)} + e^{-i(n\Omega t - \varphi_n)}}{2},$$

подставим это выражение в (1.2). Получим

$$s(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{i(n\Omega t - \varphi_n)} + e^{-i(n\Omega t - \varphi_n)}}{2} =$$

$$= \frac{c_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i(n\Omega t - \varphi_n)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i(n\Omega t - \varphi_n)}.$$

Преобразуем третье слагаемое следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i(n\Omega t - \varphi_n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} c_{-n} e^{i(n\Omega t - \varphi_{-n})}$$

Теперь все три слагаемых можно записать в виде одной формулы

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{i(n\Omega t - \varphi_n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{-i\varphi_n} e^{in\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{c}_n e^{in\Omega t}, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{c}_n = a_n - ib_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\Omega t dt - i \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\Omega t dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\Omega t} dt. \end{aligned}$$

Входящая в (1.3) комплексная амплитуда  $\hat{c}_n$  связана с  $a_n$  и  $b_n$  очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{c}_n &= c_n e^{-i\varphi_n} = a_n - ib_n, \\ \hat{c}_{-n} &= c_n e^{i\varphi_n} = a_n + ib_n. \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что комплексные амплитуды  $\hat{c}_n$  и  $\hat{c}_{-n}$  являются взаимно сопряженными комплексными величинами

Нетрудно убедиться, что функция  $\varphi_n$  нечетная относительно  $n$ , а следовательно, и частоты, т.е.  $\varphi_n = -\varphi_{-n}$ . Четность модуля  $c_n$  вытекает непосредственно из его определения.

Отрицательные частоты, которые получаются в результате комплексного представления ряда Фурье, носят формальный характер и не имеют никакого физического смысла.

Сравним величины коэффициентов в выражениях (1.2) и (1.3) разложения функции  $s(t)$  в ряд Фурье при тригонометрической и комплексной формах представления ряда. Сравнивая выражения (1.2) и (1.3), обнаруживаем, что при  $n = 0$  имеет место равенство коэффициентов, рассчитанных по каждому из этих выражений. Сравнение же коэффициентов, рассчитываемых по каждому из этих рядов при других значениях  $n$ , приводит к следующему выводу. Коэффициент  $c_n$ , определяемый из ряда (1.3), составляет только половину такого же коэффициента, определяемого из ряда (1.2). Рис.1.2 и рис.1.3 показывают, как при переходе от тригонометрической к экспоненциальной форме ряда Фурье с искусственным введением в рассмотрение области отрицательных частот уменьшаются в два раза амплитудные значения коэффициентов разложения.

Конечно, для полного представления о коэффициентах соответствующего ряда должны быть учтены и фазы, обозначенные в выражениях (1.2) и (1.3) величиной  $\varphi_n$ .

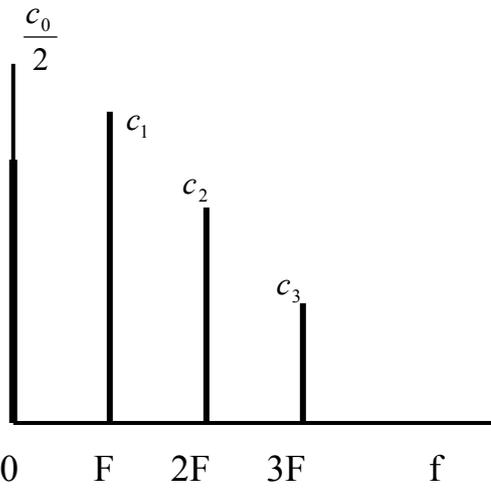


Рис.1.2. Форма спектра, полученная с помощью ряда Фурье в тригонометрической форме

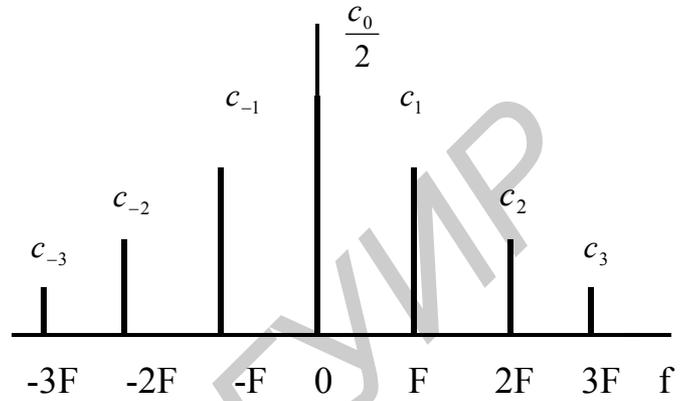


Рис.1.3. Форма спектра, полученная с помощью ряда Фурье в экспоненциальной форме

**Пример 1.1.** Найти спектр последовательности прямоугольных импульсов, имеющих амплитуду  $E$ , длительность  $\tau$  и следующих с периодом  $T$ .

Запишем анализируемый импульс в виде (рис. 1.4)

$$s(t) = \begin{cases} E, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & \tau/2 < t < T/2, -T/2 < t < -\tau/2. \end{cases}$$

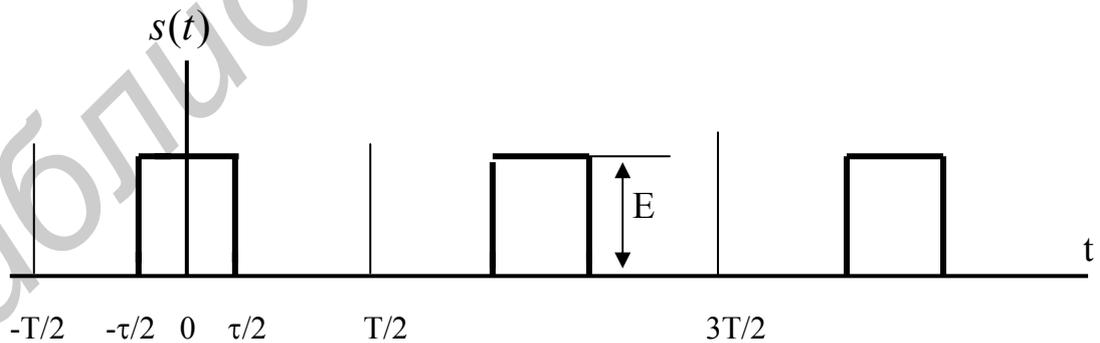


Рис.1.4. Последовательность прямоугольных импульсов, следующих с периодом  $T$  и описываемых четной функцией  $s(t)$

Так как функция  $s(t)$  чётная, то

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\Omega t dt = 0.$$

Тогда функцию  $s(t)$  можно представить в виде ряда

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t.$$

Найдем величину постоянной составляющей сигнала:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = \frac{E\tau}{T}.$$

Эта формула показывает, что постоянная составляющая исследуемого сигнала зависит от отношения длительности импульса  $\tau$  к его периоду следования  $T$ . Чем короче длительность импульса по отношению к периоду следования, тем меньше уровень постоянной составляющей сигнала. Полученная формула правильно оценивает также постоянную составляющую импульса с длительностью, равной периоду их следования ( $\tau = T$ ).

Теперь найдем амплитуды косинусоидальных составляющих сигнала

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cos n\Omega t dt = \frac{2E}{T} \frac{1}{n\Omega} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos n\Omega t d(n\Omega t) = \\ &= \frac{E}{\pi n} \sin n\Omega t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2E}{\pi n} \sin \frac{n\Omega\tau}{2} = \frac{2E\tau}{T} \frac{\sin \frac{\pi n\tau}{T}}{\frac{\pi n\tau}{T}}. \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что  $\Omega = 2\pi/T$ . Второй множитель в выражении для  $a_n$  представляет собой функцию  $\sin x/x$ , график которой показан на рис. 1.5 и является огибающей амплитуд спектральных составляющих исследуемого сигнала.

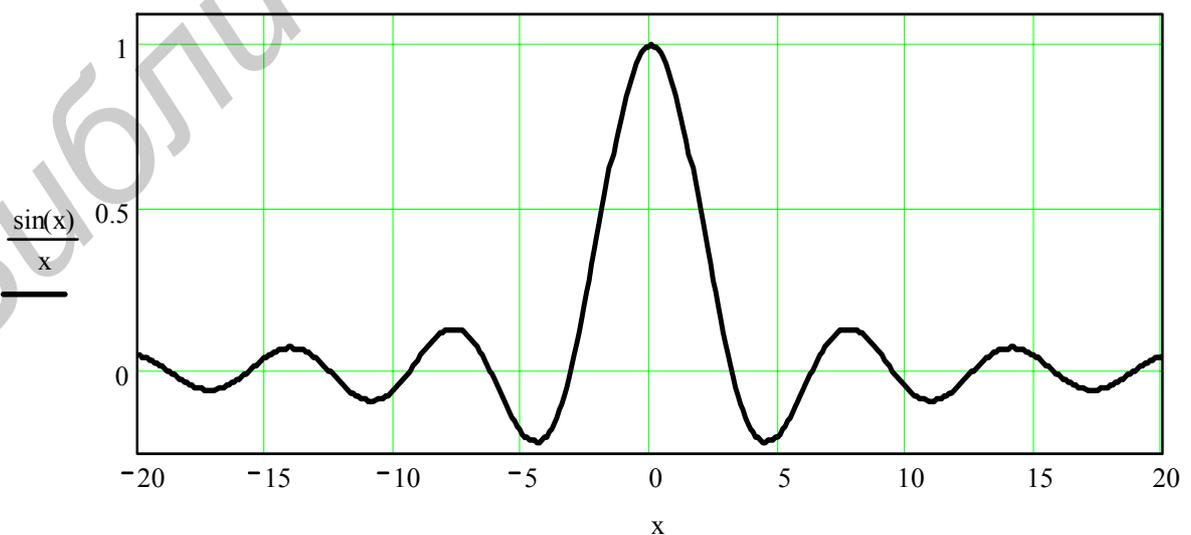


Рис.1.5. График функции  $\sin x/x$

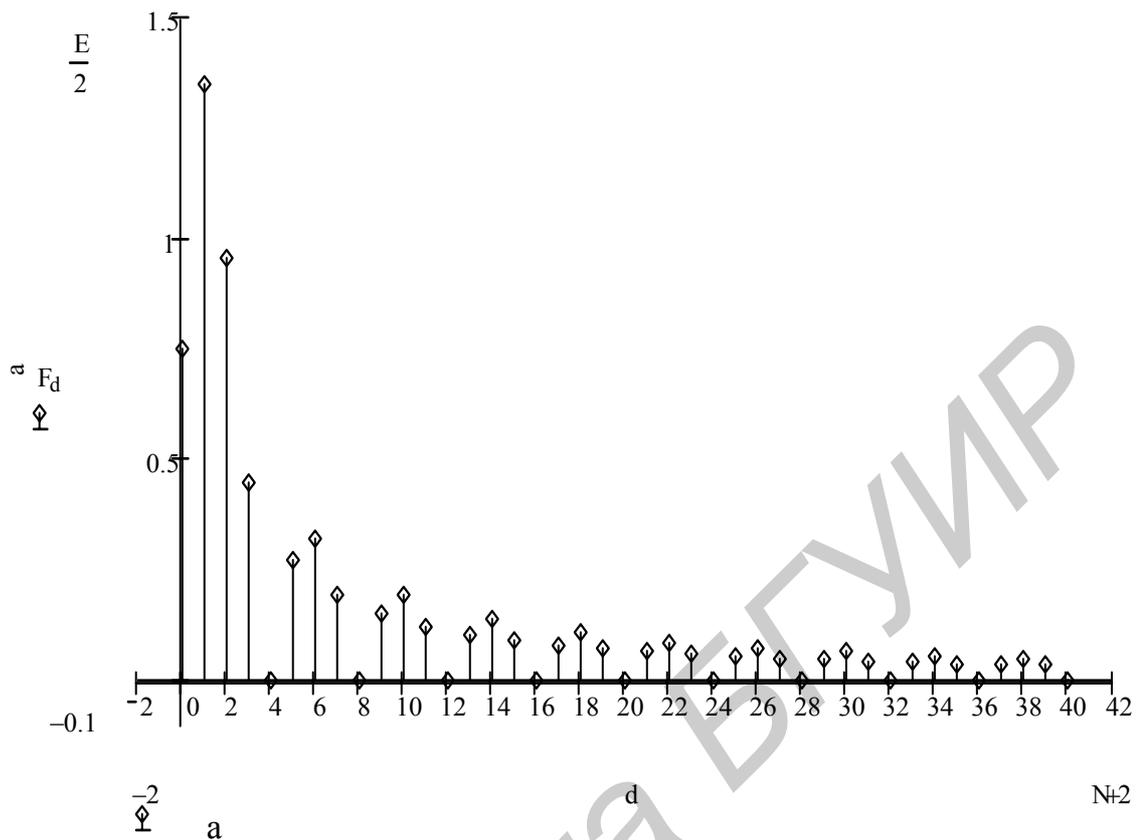


Рис.1.6. Спектр последовательности прямоугольных импульсов с отношением периода следования импульсов к их длительности, равным 4

Рассмотрим, как зависит распределение спектральных составляющих сигнала от отношения  $\tau/T$ . Амплитуды спектральных составляющих обращаются в нуль при  $\sin \frac{\pi n \tau}{T} = 0$ , т. е. при значениях аргумента синуса, равных  $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ . Определим номер гармоники, амплитуда которой первой обращается в нуль. Это произойдет при фазе синуса, равной  $\pi$ , т.е. при выполнении условия  $\frac{\pi n \tau}{T} = \pi$ , откуда  $n = T/\tau$ . Например, если мы имеем дело с последовательностью импульсов длительностью 1 мкс, следующих с периодом 4 мкс, то первой спектральной составляющей, амплитуда которой обратится в нуль, будет четвертая гармоника. Чтобы определить номер следующей спектральной составляющей, амплитуда которой обратится в нуль, надо составить уравнение, соответствующее фазе синуса, равной  $2\pi$ , т.е. записать  $\frac{\pi n \tau}{T} = 2\pi$ . Отсюда видно, что такой будет восьмая гармоника спектра сигнала (рис.1.6).

Если мы уменьшим длительность импульса вдвое, сохранив при этом период следования, то первой составляющей спектра, обратившейся в нуль, станет восьмая гармоника, а следующей – шестнадцатая (рис. 1.7).

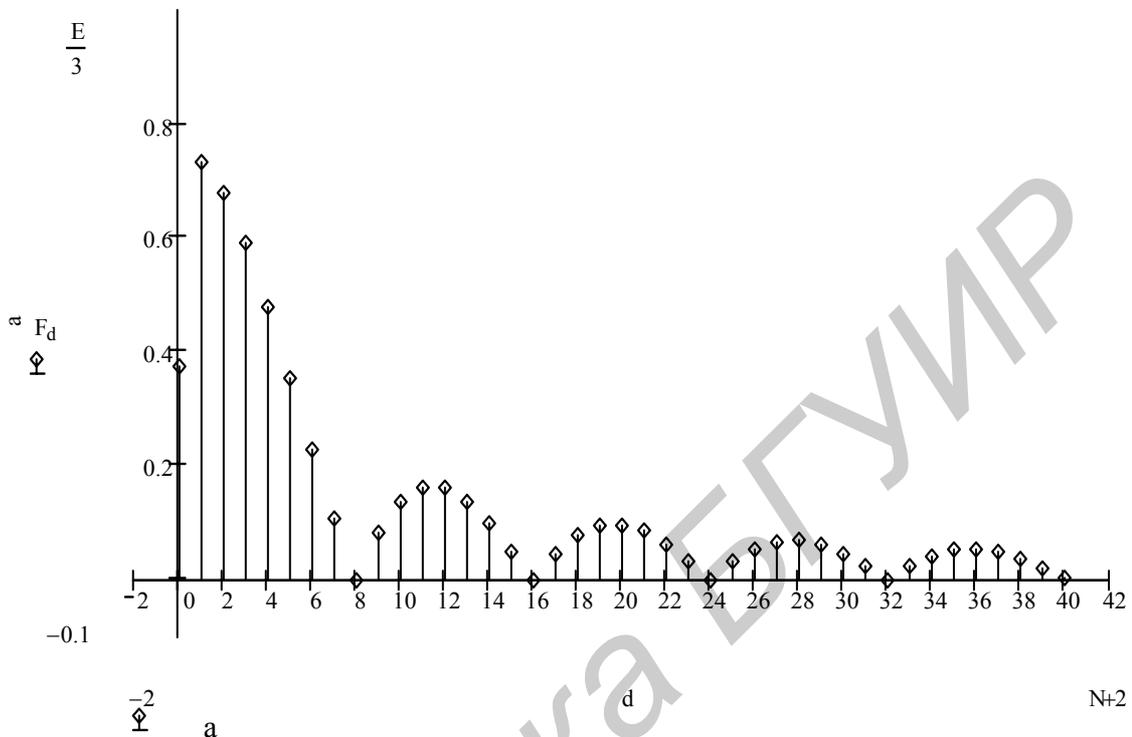


Рис.1.7. Спектр последовательности прямоугольных импульсов с отношением периода следования импульсов к их длительности, равным 8

Мы видим, что с уменьшением длительности импульса возрастает номер его спектральной составляющей, амплитуда которой первой обращается в нуль. Это обстоятельство хорошо иллюстрирует соотношение для простых сигналов  $\Delta f_{cn} = 1/\tau$ , связывающее техническую ширину спектра  $\Delta f_{cn}$  с длительностью сигнала  $\tau$ . Кроме того, с уменьшением длительности сигнала относительно периода следования спектр сигнала становится более насыщенным, что несомненно должно учитываться, например, при разработке хороших электронных музыкальных инструментов.

#### 1.4.Спектральный анализ непериодических сигналов

Для проведения гармонического анализа непериодического сигнала  $s(t)$ , действующего в конечном интервале  $t_1 < t < t_2$ , поступим следующим образом. Превратим наш непериодический сигнал  $s(t)$  в периодический путем повторения его с периодом  $T > t_2 - t_1$ . Теперь для этого сигнала можно записать

ряд Фурье. Устремив период  $T$  к бесконечности, в пределе получим бесконечно малые амплитуды гармонических составляющих, сумма которых изображает исходную непериодическую функцию  $s(t)$ , заданную в интервале  $t_1 < t < t_2$ .

Число гармонических составляющих, входящих в ряд Фурье для функции  $s(t)$ , будет при этом бесконечно большим, так как при  $T \rightarrow \infty$  частота первой гармоники функции  $\Omega = 2\pi/T \rightarrow 0$ . Это значит, что расстояние между спектральными линиями, равное первой гармонике сигнала, становится бесконечно малым и спектр становится сплошным.

Отсюда следует, что при гармоническом анализе непериодического сигнала получается сплошной спектр, состоящий из бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами.

Математически это можно выразить следующим образом (рис.1.8).

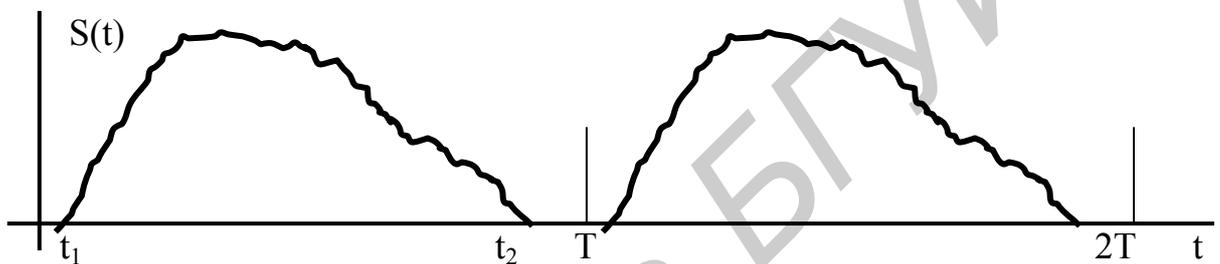


Рис.1.8. Одиночный (непериодический) сигнал с длительностью  $t_2 - t_1$ , представленный как периодический с периодом  $T \geq t_2 - t_1$

Полагая, что наш непериодический сигнал является периодическим, запишем для него ряд Фурье в комплексной форме:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{c}_n e^{in\Omega t}.$$

Подставим в этот ряд значение  $\hat{c}_n$ :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left( \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\Omega t} dt \right) e^{in\Omega t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left( \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\Omega t} dt \right) e^{in\Omega t} \Omega. \end{aligned}$$

Теперь устремим период  $T$  следования сигнала к бесконечности. При этом сигнал из периодического превращается в сигнал с бесконечно большим периодом, т.е. сигнал непериодический. Суммирование можно заменить интегрированием в бесконечных пределах. Частоту  $n\Omega$  заменим текущей частотой  $\omega$ , а частоту  $\Omega$  - приращением текущей частоты  $d\omega$ . Тогда получим:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.4)$$

где внутренний интеграл

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.5)$$

называется спектральной плотностью, или спектральной характеристикой сигнала  $s(t)$ .

Выражение (1.4) представляет непериодический сигнал в виде суммы (интеграла) гармонических колебаний с бесконечно малыми амплитудами. Сравнивая выражение (1.4) с выражением (1.3) ряда Фурье для периодического сигнала, мы видим, что амплитуды составляющих непериодического сигнала равны

$$\frac{1}{\pi} S(\varpi) d\varpi.$$

Выясним смысл названия спектральной плотности. Для этого выделим какую-либо дискретную частоту  $\Omega_n = n\Omega$ , соответствующую в случае периодической функции  $s(t)$   $n$ -й гармонике, и получим для амплитуды этой гармоники выражение

$$\hat{c}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-i\Omega_n t} dt.$$

В случае же непериодической функции, совпадающей с  $s(t)$  в интервале  $t_1 < t < t_2$ , получим для спектральной плотности, соответствующей той же частоте  $\Omega_n$ , следующее выражение:

$$S(\Omega_n) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-i\Omega_n t} dt.$$

Отсюда видно, что

$$S(\Omega_n) = T \frac{\hat{c}_n}{2} = \frac{\hat{c}_n}{F}.$$

Таким образом, значение спектральной плотности  $S(\Omega_n)$  получается путем деления амплитуды  $\hat{c}_n$  (поскольку одной действительной амплитуде спектральной составляющей сигнала соответствуют две спектральные составляющие с амплитудами  $\hat{c}_n/2$  и  $\hat{c}_{-n}/2$ ) гармоники на полосу частот  $F$ , отделяющую соседние линии дискретного спектра, т.е.  $S(\Omega)$  имеет смысл *плотности амплитуд* и размерность [амплитуда/герц].

Из полученного выражения вытекает также следующее важное положение: *огibaющая сплошного спектра (модуль спектральной плотности) непериодической функции и огibaющая линейчатого спектра периодической функции (полученной из непериодической путем продолжения ее с периодом  $T$ ) совпадают по форме и отличаются только масштабом и, конечно, размерностью.*

**Пример 1.2.** Оценить влияние грозových разрядов на приём сигналов радиовещательных станций, работающих в диапазонах ДВ, СВ, КВ, УКВ .

В качестве модели тока, формирующего грозовой разряд, возьмем уравнение  $i(t) = I_0 e^{-\alpha t}$ , где  $\alpha = 10^4 \dots 10^5 \text{ c}^{-1}$  характеризует скорость убывания тока грозowego разряда (рис.1.9). Чтобы оценить влияние грозowego разряда на прием вещательных станций, оценим спектр тока, формирующего этот разряд, и сделаем соответствующие выводы.

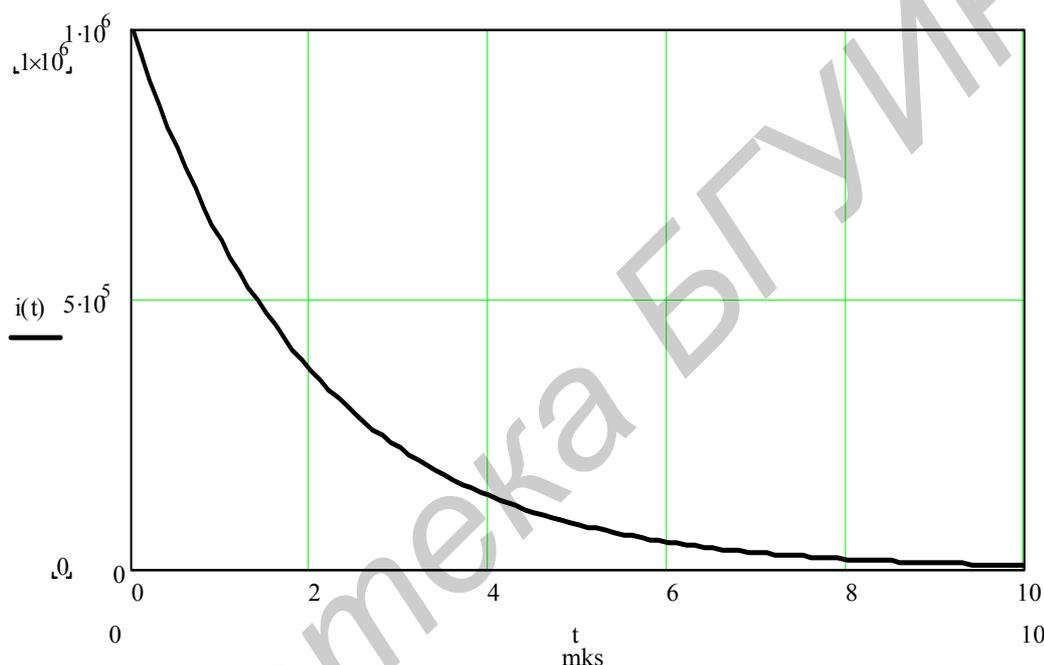


Рис.1.9. Временная диаграмма модели тока грозowego разряда

Итак, имеем

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} i(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} I_0 e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{I_0}{-(\alpha + i\omega)} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t} d[-(\alpha + i\omega)t] = \frac{I_0}{\alpha + i\omega}.$$

Поскольку для оценки влияния грозových разрядов на прием сигналов станций, работающих в диапазонах ДВ, СВ, КВ, УКВ, основное значение имеет амплитудный спектр излучения грозowego разряда, то запишем:

$$S(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Оценим частоту, на которой мощность излучения грозowego разряда умень-

шается вдвое. Это легко сделать, составив уравнение

$$\frac{I_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{zp}^2}} = \frac{I_0}{\alpha\sqrt{2}}.$$

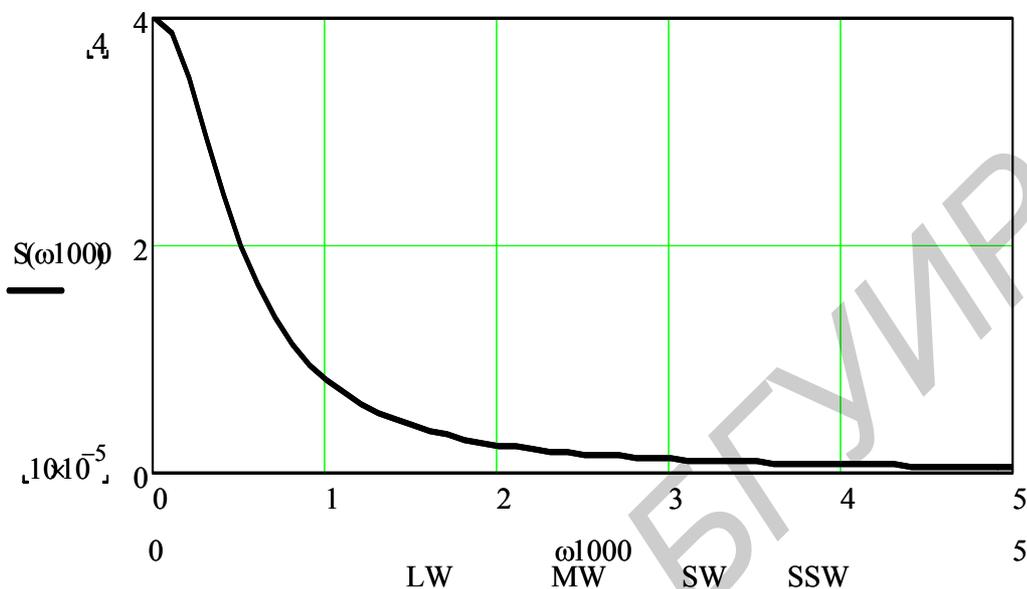


Рис.1.10. Огибающая спектра тока грозового разряда

Из этого уравнения легко находим  $\omega_{zp} = \alpha = 10^4 \dots 10^5 \text{ с}^{-1}$ . Это значит, что на частоте

$$f_{zp} = \omega_{zp} / 2\pi = (10^4 \dots 10^5) / 2\pi \approx 10^3 \dots 10^4 \text{ Гц}$$

мощность излучения грозового разряда составит половину от максимальной в начальный момент и с течением времени будет уменьшаться по тому же закону, по какому изменяется избирательность колебательного контура, поскольку график модуля спектральной плотности сигнала по форме напоминает форму резонансной кривой колебательного контура (рис.1.10). Этот результат дает возможность заключить, что наиболее сильно будет влиять излучение грозовых разрядов на прием сигналов станций, работающих в диапазоне ДВ, менее значительно оно будет сказываться на приеме сигналов радиостанций, работающих в диапазоне СВ и КВ, и почти никак не будет проявляться в диапазоне УКВ.

### 1.5. Сравнение спектров периодического и одиночного сигналов

Проведенный анализ показал, что периодический сигнал имеет линейчатый спектр, а одиночный сигнал – сплошной. Однако форма огибающих спектров этих сигналов отличается только масштабом.

Сравнивая значения постоянной составляющей периодического сигнала (это величина коэффициента  $a_0/2$  в разложении (1.1)) с выражением для постоянной составляющей одиночного сигнала (1.5), приходим к следующим выводам. В случае периодического сигнала коэффициент  $a_0/2$  имеет ту же размерность, что и сигнал, и представляет собой отношение площади сигнала к его периоду следования. Постоянная составляющая же непериодического сигнала представляет собой площадь сигнала и имеет размерность в виде произведения размерности сигнала на длительность сигнала. В частности, если сигнал представляет собой одиночный прямоугольный импульс напряжения  $U_0$ , то в этом случае постоянная составляющая его определяется произведением амплитуды импульса на длительность и имеет размерность [В·с]. Если этот импульс повторяется с периодом  $T$ , тогда постоянная составляющая такого сигнала имеет размерность [В] и зависит от отношения длительности импульса к его периоду следования. Таким образом, амплитуда основного лепестка спектральной диаграммы одиночного импульса определяется соотношением  $S_0 = U_0 \cdot \tau$ . При двух импульсах в сигнале величина  $S_0$  удваивается, отражая физический факт увеличения энергии сигнала в два раза.

Произведение технической ширины спектра периодического и непериодического сигналов на их длительности оказывается справедливым как для периодического, так и для одиночного сигнала, но размерности этих произведений для периодического и непериодического сигналов оказываются разными вследствие различия между величинами, определяющими спектральные характеристики этих сигналов. На практике, однако, это не имеет решающего значения.

Сигналы, для которых произведение технической ширины спектра на длительность равно примерно единице, называются *простыми*. В радиотехнике находят широкое использование сигналы, для которых это произведение имеет величину порядка нескольких тысяч. Такие сигналы называются *сложными*. Примером такого сигнала является прямоугольный импульс с линейной частотной модуляцией внутриимпульсного заполнения.

Результаты практических расчетов показывают, что если импульсы имеют крутые фронты, то в их спектре появляются значительной величины лепестки. Если же фронты у сигналов пологи, то величина лепестков уменьшается, а при гладких фронтах (экспоненциальный и косинусоидальный импульсы) они пропадают полностью. Из рассмотренных случаев наиболее сжатый спектр имеет косинусоидальный импульс.

Особенности спектров сигналов нужно учитывать при разработке радиотехнических систем разного назначения. При близком расположении по частоте каналов радиосвязи из-за размытости спектра излучения происходит их взаимное влияние друг на друга. В этих случаях следует выбирать такие формы сигнала, у которых спектр излучения по возможности сжат. Сужение ширины спектра излучения весьма существенно при решении проблемы электромагнитной совместимости. В других случаях, например в области разработки хороших электромузыкальных инструментов, спектр сигнала должен быть по возможно-

сти размыт в широкой полосе частот и поэтому следует выбирать сигнал, имеющий расширенный спектр излучения.

## 2. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

### 2.1. Аналитическое выражение для тонального АМ-колебания

Пусть в качестве модулирующего (управляющего) колебания используется гармоническое колебание

$$u_M(t) = U_M \cos \Omega t,$$

где  $U_M$  – амплитуда модулирующего напряжения.

При амплитудной модуляции изменение  $\Delta U(t)$  амплитуды  $U_m$  высокочастотного колебания (начальная фаза для простоты принята равной нулю)

$$U(t) = U_m \cos \omega_0 t$$

пропорционально управляющему сигналу:

$$\Delta U(t) = k_a u_M(t) = k_a U_M \cos \Omega t = \Delta U_m \cos \Omega t.$$

Поэтому для амплитудно-модулированного колебания можно записать:

$$U_{AM}(t) = (U_m + \Delta U(t)) \cos \omega_0 t = U_m \left(1 + \frac{\Delta U_m}{U_m} \cos \Omega t\right) \cos \omega_0 t,$$

или

$$U_{AM}(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t,$$

где  $m = \Delta U_m / U_m$  - коэффициент модуляции, который характеризует степень воздействия низкочастотного модулирующего колебания на высокочастотное (модулируемое) колебание. В обычных режимах работы АМ-передатчиков коэффициент модуляции изменяется от 0 до 1 или, если он измеряется в процентах, от 0 до 100%. При  $m > 1$  наступает «перемодуляция», в результате чего возникают искажения при передаче сообщений.

Изобразим графически АМ-колебание для случая тональной модуляции, у которого частота несущего колебания превышает частоту модуляции в 8 раз (рис.2.1).

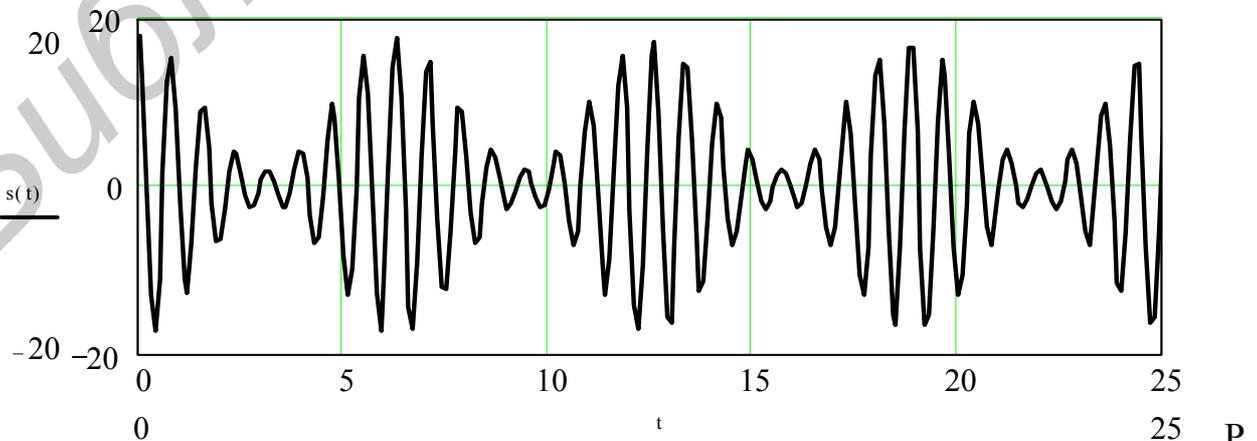


Рис.2.1. График АМ-колебания

Из рис.2.1 видим, что приращение амплитуды высокочастотного колебания составляет

$$\Delta U_m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2}.$$

Амплитуду высокочастотного колебания определим из того же рисунка:

$$U_m = \frac{U_{\max} + U_{\min}}{2}.$$

Это дает возможность получить простую расчетную формулу для экспериментальной оценки величины коэффициента модуляции:

$$m = \frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}.$$

## 2.2. Спектр АМ-колебания

Спектр – это совокупность гармонических составляющих сигнала. Чтобы получить информацию о спектре АМ-колебания, перепишем его аналитическое выражение иначе:

$$\begin{aligned} U_{AM}(t) &= U_m \cos \omega_0 t + m U_m \cos \Omega t \cos \omega_0 t = \\ &= U_m \cos \omega_0 t + \frac{m U_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m U_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что спектр тонально-модулированного по амплитуде колебания состоит из трех составляющих: несущей  $\omega_0$  с амплитудой  $U_m$ , равной амплитуде высокочастотного колебания, и двух боковых частот  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$  с одинаковыми амплитудами  $m U_m / 2$ , расположенными симметрично относительно несущей частоты  $\omega_0$ . Спектр амплитуд АМ-колебания представлен на рис. 2.2. Легко видеть, что ширина спектра АМ-колебания имеет величину, равную удвоенному значению частоты модуляции, т.е.

$$\Delta \omega_{sp} = 2 \Omega.$$

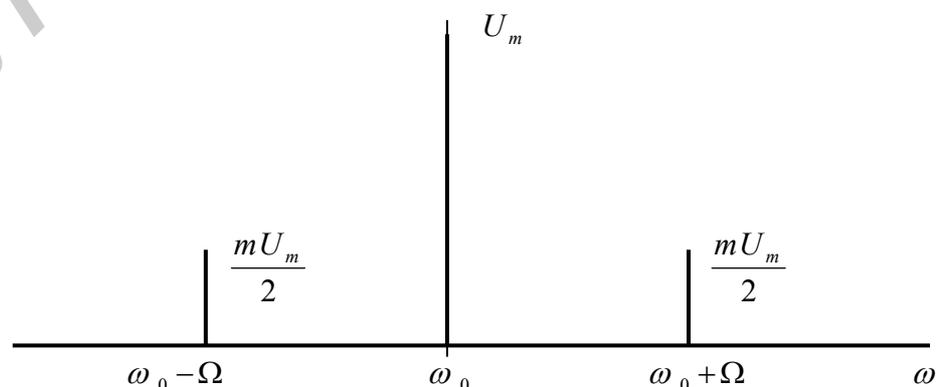


Рис.2.2. Спектр тонально-модулированного по амплитуде колебания

Если высокочастотное колебание модулируется сразу несколькими частотами (спектром частот), то легко понять, что поскольку каждая гармоника управляю-

шего (модулирующего) напряжения создает две боковые частоты в спектре радиосигнала, расположенные симметрично относительно несущей частоты колебания, то спектр такого АМ-колебания состоит из несущей и двух боковых полос – верхней и нижней (рис.2.3). Ширина каждой боковой полосы равна  $\Omega_{\max} - \Omega_{\min}$ , а ширина спектра АМ-колебания в этом случае получается равной

$$\Delta\omega_{\text{sp}} = 2\Omega_{\max}.$$

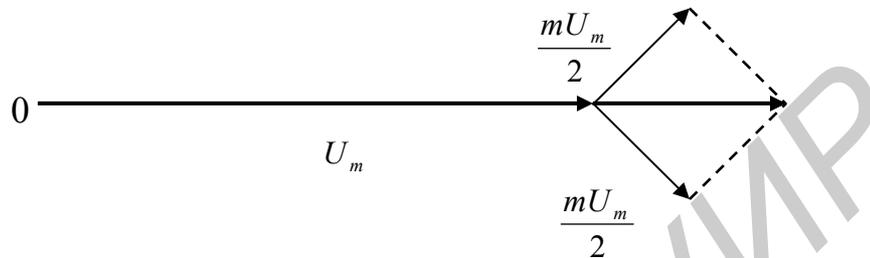


Рис.2.3. Векторная диаграмма колебания с тональной амплитудной модуляцией

На практике в вещании используют для передачи информации обе боковые полосы частот, хотя принципиальной необходимости в этом нет.

Графически спектр АМ-колебания можно представить векторной диаграммой в виде, показанном на рис.2.4.

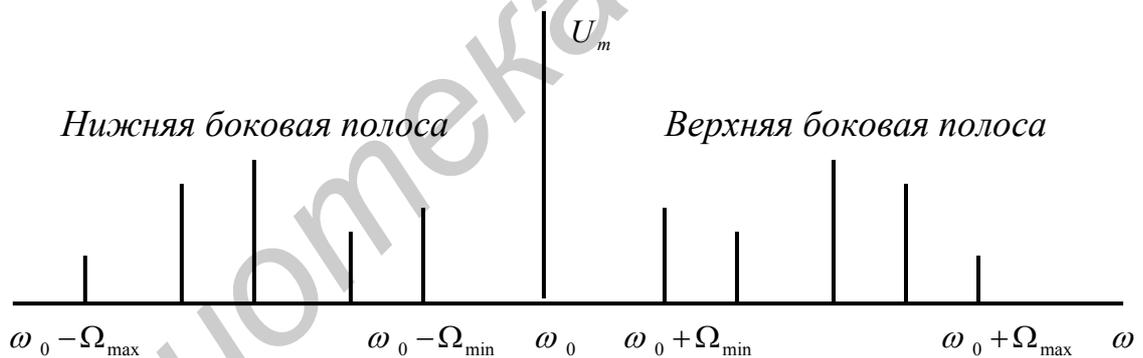


Рис.2.4. Спектр колебания, модулированного по амплитуде спектром частот

### 2.3. Мощность АМ-колебаний

Если модулирующий сигнал отсутствует (режим молчания), антенна, как нагрузка передатчика, эквивалентна некоторому активному сопротивлению  $R$ , питается током

$$i = I_m \cos \omega_0 t$$

и потребляет от передатчика мощность

$$P_n = \frac{1}{2} I_m^2 R,$$

которая называется мощностью в режиме несущей.

Само по себе несущее колебание не содержит передаваемой информации и служит для переноса высокочастотной энергии через окружающее пространство

к месту приема этой информации. С информационной точки зрения энергия, используемая для передачи несущего колебания, расходуется бесполезно. Понимая под эффективностью передачи отношение мощности сигналов, содержащих в себе передаваемую информацию, к мощности несущего колебания, оценим эффективность передачи информации с помощью амплитудной модуляции.

Сравним с этой мощностью мощности, характеризующие АМ-колебание в простейшем случае, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием, т.е. когда ток выражается соотношением

$$i = I_m \cos \omega_0 t + \frac{m I_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m I_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Найдем среднюю мощность за период  $T$  колебания низкой частоты - так называемую телефонную мощность:

$$P_T = \frac{1}{2} I_m^2 R + 2 \frac{1}{2} \left( \frac{m I_m}{2} \right)^2 R = P_H \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right).$$

Отсюда видно, что  $P_T$  может превышать мощность в режиме несущей при  $m = 1$  в 1,5 раза.

Найдем среднюю мощность  $P_\tau$  за период высокочастотного колебания. Так как амплитуда АМ-колебания меняется от максимального значения  $I_m(1 + m)$  до минимального  $I_m(1 - m)$  в течение периода модулирующего напряжения, то и мощность  $P_\tau$  от периода к периоду высокочастотного сигнала будет меняться. Оценим максимальную  $P_{\tau \max}$  и минимальную  $P_{\tau \min}$  мощности АМ-колебания за период высокочастотного колебания:

$$P_{\tau \max} = \frac{1}{2} [I_m(1 + m)]^2 R = \frac{1}{2} I_m^2 R (1 + m)^2 = P_H (1 + m)^2,$$

$$P_{\tau \min} = P_H (1 - m)^2.$$

Очевидно, что при  $m = 1$   $P_{\tau \max} = 4 P_H$ . Отсюда видно, что при амплитудной модуляции выходной каскад передатчика в случае, когда  $m = 1$ , кратковременно отдает в нагрузку (антенну) четырехкратную мощность по сравнению с мощностью в режиме молчания. Это является весьма существенным недостатком амплитудной модуляции, так как выходные каскады всегда оказываются недогруженными по мощности. Особенно это важно при конструировании передатчиков значительной мощности. Например, у передатчика с выходной мощностью 10 кВт выходные каскады должны быть рассчитаны на выходную мощность 40 кВт.

Оценим эффективность передачи в виде процентного содержания мощности боковых составляющих, в которых содержится передаваемая информация, в общей передаваемой мощности амплитудно-модулированного колебания:

$$\eta = \frac{m^2}{2 + m^2} 100 \ %.$$

При наибольшем коэффициенте модуляции эффективность передачи равна 33%, так как 67% мощности передается несущим колебанием и расходуется без всякой пользы. При  $m < 1$  эффективность передачи еще меньше, чем 33%. Од-

нако при однополосной амплитудной модуляции, когда несущая частота не излучается, эффективность передачи является высокой и равна 100%.

### 3. СИГНАЛЫ С УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Наиболее общим выражением для мгновенного значения радиосигнала является

$$u(t) = U_m(t) \cos \Psi(t),$$

где амплитуда и фазовый угол суть произвольные функции времени.

При амплитудной модуляции изменяется по закону управляющего напряжения амплитуда радиосигнала. Если амплитуда  $U_m$  постоянна при изменении фазового угла  $\Psi$  по закону управляющего сигнала, то модуляция называется угловой. Эта модуляция делится на фазовую и частотную.

При частотной модуляции происходит изменение несущей частоты по закону управляющего сигнала

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + k_\omega U_M(t).$$

При фазовой модуляции по закону управляющего сигнала изменяется фаза высокочастотного колебания

$$\varphi(t) = \varphi_0 + k_\varphi U_M(t).$$

В физическом смысле ЧМ и ФМ имеют сходство, т.е. колебание, модулированное по фазе, претерпевает изменение несущей частоты сигнала. Действительно, мгновенное значение частоты высокочастотного сигнала равно

$$\omega = \frac{d\Psi}{dt},$$

откуда

$$\Psi = \int_0^t \omega dt.$$

Производная показывает, что закон изменения фазы колебания определяет его частоту, а интеграл показывает, что всякое изменение частоты колебания отражается на изменении его фазы. При модуляции одним тоном ФМ- и ЧМ-колебания вообще неразличимы. Различие между ФМ- и ЧМ-сигналами проявляется лишь при модуляции спектром частот, в результате чего частотная модуляция получила более широкое распространение.

Рассмотрим более подробно ФМ- и ЧМ-колебания, модулированные одним тоном:

$$u_M(t) = U_M \cos \Omega t.$$

#### 3.1. ФМ-колебания

При фазовой модуляции фазовый угол изменяется по закону управляющего сигнала:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi(t) = \varphi_0 + k_\varphi u_M(t) = \varphi_0 + k_\varphi U_M \cos \Omega t = \varphi_0 + \beta \cos \Omega t,$$

где  $\beta = k_{\phi} U_M$  - индекс модуляции.

Индекс модуляции физически показывает наибольшее отставание или опережение по фазе модулированного напряжения по сравнению с фазой, которую имел бы немодулированный сигнал. Измеряется индекс модуляции в радианах.

При фазовой модуляции индекс модуляции зависит только от амплитуды управляющего сигнала и не зависит от его частоты (рис.3.1).

Так как мгновенное значение фазового угла модулированного колебания определяется формулой

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \beta \cos \Omega t,$$

то угловая частота, являющаяся производной фазового угла по времени, равна

$$\omega = \frac{d\Psi}{dt} = \omega_0 - \beta \Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \Delta\omega \sin \Omega t,$$

где  $\Delta\omega = \beta \Omega$  определяет амплитуду отклонения частоты модулированного колебания от значения  $\omega_0$  и называется девиацией частоты.

Как видно из рис.3.1, девиация частоты линейно зависит от частоты управляющего сигнала.

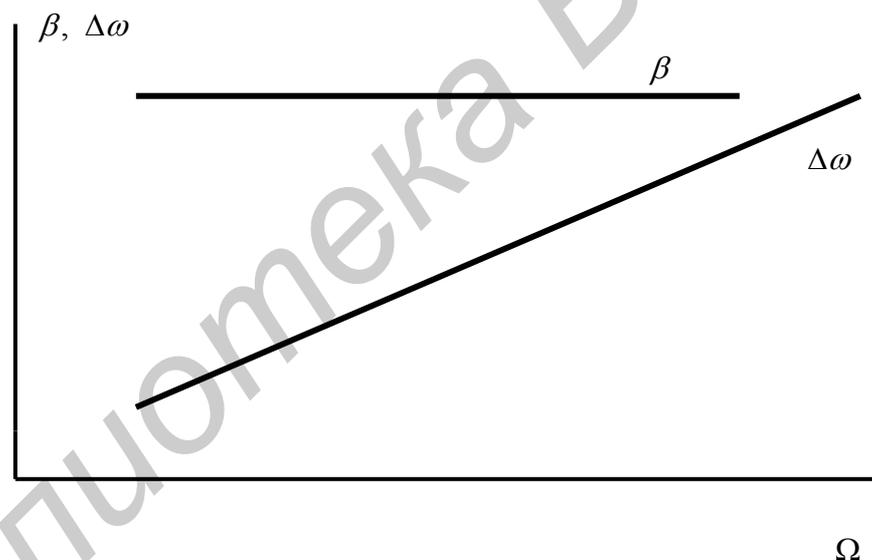


Рис.3.1. Зависимости индекса фазовой модуляции и девиации от частоты управляющего сигнала

Следовательно, при фазовой модуляции изменяется не только фаза колебания, но и его частота, причем величина отклонения частоты зависит как от амплитуды, так и от частоты управляющего сигнала.

Запишем выражение для мгновенного значения ФМ-колебания:

$$U_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \cos \Omega t + \varphi_0).$$

Полагая  $\varphi_0 = 0$ , имеем

$$U_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \cos \Omega t).$$

### 3.2. ЧМ-колебания

При частотной модуляции несущая частота изменяется по закону управляющего сигнала:

$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + k_{\text{ч}} U_{\text{М}}(t) = \omega_0 + k_{\text{ч}} U_{\text{М}} \cos \Omega t = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t$ ,  
где  $\Delta\omega = k_{\text{ч}} U_{\text{М}}$  - девиация частоты, которая физически представляет собой амплитуду отклонения несущей частоты от среднего значения  $\omega_0$ . При частотной модуляции девиация зависит только от амплитуды управляющего сигнала и не зависит от частоты модулирующего сигнала.

Учитывая, что угловая частота есть скорость изменения во времени фазового угла, имеем:

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}.$$

Отсюда

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \int (\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t + \varphi_0.$$

Положим  $\varphi_0 = 0$ , тогда

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t = \omega_0 t + \beta \sin \Omega t.$$

Величина  $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$  называется индексом частотной модуляции и измеряется в радианах. Индекс модуляции зависит и от амплитуды управляющего сигнала, и от его частоты. Физический смысл индекса частотной модуляции такой же, как и индекса фазовой модуляции. Таким образом, при частотной модуляции происходит изменение не только частоты несущего колебания, но и его начальной фазы. На рис. 3.2 показаны зависимости индекса частотной модуляции и девиации от частоты управляющего сигнала.

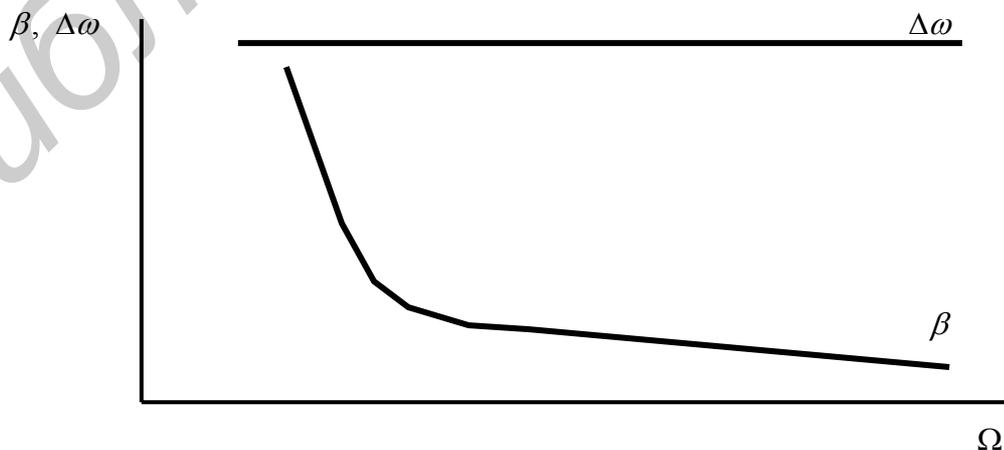


Рис.3.2. Зависимости индекса частотной модуляции и девиации от частоты управляющего сигнала

Запишем выражение для мгновенного значения ЧМ-колебания:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t).$$

Оно полностью совпадает с выражением для мгновенного значения фазомодулированного колебания. Следовательно, действительно при тональной модуляции ЧМ- и ФМ-колебания неразличимы. Но при модуляции широким спектром частот выявляются преимущества частотной модуляции, что и обусловило ее большее распространение.

### 3.3. Спектр сигнала с угловой модуляцией

Мгновенное значение ФМ- и ЧМ-сигнала, промодулированного напряжением

$$u(t) = U_M \cos \Omega t,$$

имеет вид

$$U_{\text{УМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t).$$

Запишем это выражение в другом виде:

$$U_{\text{УМ}}(t) = U_m \cos(\beta \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_m \sin(\beta \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Отсюда видно, что колебание с угловой модуляцией можно разложить на два колебания частоты  $\omega_0$  с амплитудами  $A_1 = U_m \cos(\beta \sin \Omega t)$  и  $A_2 = U_m \sin(\beta \sin \Omega t)$ . При этом интересны два случая:  $\beta \ll 1$  и  $\beta \gg 1$ , соответствующие узкополосной и широкополосной модуляции.

#### 3.3.1. Спектр сигнала с узкополосной угловой модуляцией

В случае узкополосной угловой модуляции

$$\cos(\beta \sin \Omega t) \approx 1, \quad \sin(\beta \sin \Omega t) \approx \beta \sin \Omega t.$$

Сигнал с тональной угловой модуляцией можно описать выражением

$$\begin{aligned} U_{\text{УМ}}(t) &= U_m \cos \omega_0 t - U_m \beta \sin \Omega t \sin \omega_0 t = \\ &= U_m \cos \omega_0 t + \frac{\beta U_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{\beta U_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что ФМ- и ЧМ-колебания с тональной модуляцией можно представить при  $\beta \ll 1$  как АМ-колебание в виде несущей и двух боковых частот.

Амплитудный спектр сигнала с узкополосной тональной угловой модуляцией совпадает со спектром АМ-колебания, показанным на рис.2.2, из которого видно, что такой сигнал занимает в эфире полосу частот шириной  $2\Omega$ . Роль коэффициента модуляции в таком сигнале играет индекс частотной модуляции. Однако используют узкополосную угловую модуляцию редко, поскольку ее помехозащищенность не превосходит помехозащищенности амплитудной модуляции. Чтобы оттенить разницу между тонально модулированным по амплитуде колебанием и колебанием с тональной угловой модуляцией, построим векторную диаграмму колебания с узкополосной тональной угловой модуляцией (рис. 3.3 ).

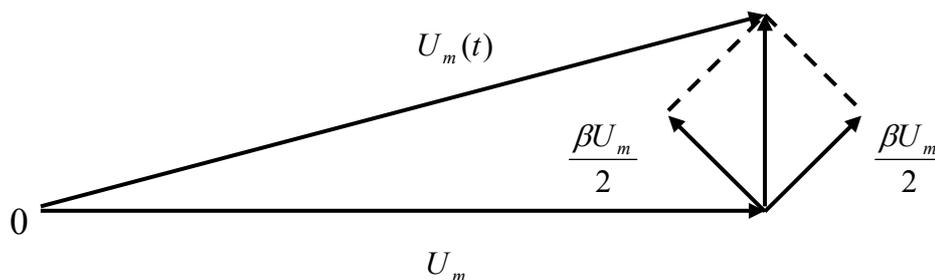


Рис.3.3. Векторная диаграмма колебания с узкополосной тональной угловой модуляцией

Сравнив рис.3.3 с рис.2.2, видим, что, действительно, этому колебанию присуще изменение фазового угла при модуляции, а также имеет место паразитное изменение амплитуды несущего колебания.

### 3.3.2. Спектр сигнала с широкополосной угловой модуляцией

Итак, мы убедились, что фазовая и частотная модуляции – это разные виды угловой модуляции, но различие между ними не столь существенно. При фазовой модуляции фаза изменяется линейно с модулирующей функцией, тогда как при частотной модуляции фаза изменяется линейно с интегралом от модулирующей функции.

Если проинтегрировать модулирующую функцию, а затем полученным колебанием модулировать несущую частоту по фазе, то получится сигнал с частотной модуляцией.

Если продифференцировать модулирующую функцию и полученное колебание использовать для модуляции частоты, то получим сигнал с фазовой модуляцией.

На практике легче получить сигнал с фазовой модуляцией, чем с частотной. Сначала интегрируют модулирующую функцию, а затем подают ее на фазовый модулятор, в результате чего получают сигнал с частотной модуляцией. Поэтому во многих системах сигналы с частотной модуляцией получают с помощью фазовых модуляторов, на которые в качестве модулирующей функции поступает напряжение, равное результату интегрирования той функции.

Девиация частоты при фазовой модуляции не постоянна, а пропорциональна частоте модулирующего напряжения. Следовательно, полоса частот, необходимая для передачи сигналов с фазовой модуляцией, не остается постоянной и сильно зависит от формы модулирующей функции.

Чтобы решить вопрос о спектре широкополосной частотной модуляции, представим аналитическое выражение частотно-модулированного колебания следующим образом:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos(\beta \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_m \sin(\beta \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Учитывая, что

$$\cos(\beta \sin \Omega t) = J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\Omega t + 2J_4(\beta) \cos 4\Omega t + \dots,$$

$$\sin(\beta \sin \Omega t) = 2J_1(\beta) \sin \Omega t + 2J_2(\beta) \sin 3\Omega t + \dots,$$

для сигнала с частотной модуляцией получим:

$$\begin{aligned} U_{\text{ЧМ}}(t) &= U_m [J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\Omega t + 2J_4(\beta) \cos 4\Omega t + \dots] \cos \omega_0 t - \\ &\quad - U_m [2J_1(\beta) \sin \Omega t + 2J_3(\beta) \sin 3\Omega t + \dots] \sin \omega_0 t = \\ &= U_m J_0(\beta) \cos \omega_0 t + U_m J_1(\beta) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \\ &\quad + U_m J_2(\beta) [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ &\quad + U_m J_3(\beta) [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, спектр частотно-модулированного колебания состоит из бесконечного числа составляющих, расположенных симметрично относительно несущей частоты  $\omega_0$  и отличающихся от последней на  $n\Omega$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Амплитуда составляющих равна

$$U_{nm} = U_m J_n(\beta),$$

т.е. амплитуда спектральных составляющих определяется величиной индекса частотной модуляции  $\beta$ .

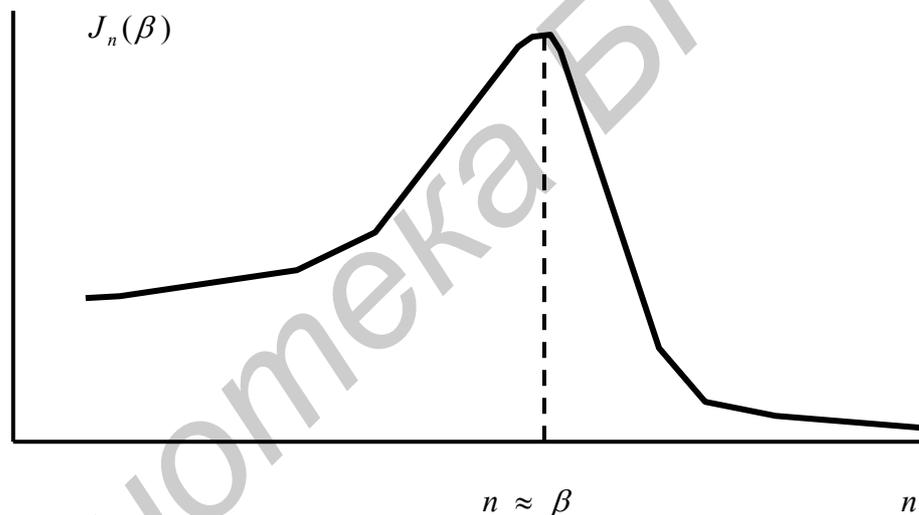


Рис.3.4. Зависимость значений функции Бесселя порядка  $n$  первого рода от  $n$

Оказывается, что при  $\beta \gg 1$  величина  $J_n(\beta)$  изменяется более или менее равномерно при всех значениях  $n$ , меньших  $\beta$  (рис.3.4). При  $n$ , близких к  $\beta$ , функция  $J_n(\beta)$  образует всплеск, и при дальнейшем увеличении  $n$  быстро убывает до нуля. Отсюда следует, что наивысший номер боковой спектральной составляющей, с амплитудой которой надо считаться, приблизительно равен индексу модуляции. Это позволяет оценить ширину спектра колебания с тональной частотной модуляцией:

$$\Delta\omega_{\text{сп}} \approx 2n_{\text{max}}\Omega \approx 2\beta\Omega = 2\Delta\omega.$$

Следовательно, при больших индексах модуляции ширина спектра модулированного колебания близка к удвоенной девиации частоты.

На практике используется более точная формула для оценки ширины спектра

$$\Delta\omega = 2(\Delta\omega + \Omega).$$

### 3.4. Мощность сигнала с угловой модуляцией

Мощность сигнала с угловой модуляцией равна сумме мощностей отдельных частотных составляющих спектра сигнала

$$P_{\text{УМ}} = \frac{I_m^2}{2} R \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n^2(\beta).$$

Можно показать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n^2(\beta) = 1.$$

Тогда

$$P_{\text{УМ}} = \frac{I_m^2}{2} R,$$

т.е. равна мощности немодулированного колебания.

Мощность на несущей частоте можно сделать как угодно малой, например, выбрав  $J_0(\beta) = 0$  при  $\beta = 2,405, 5,52$  и т.д. В этом случае почти вся мощность сигнала переносится боковыми составляющими. Следовательно, эффективность передачи можно довести до сколь угодно близкой к 100%. (При увеличении  $\beta$  растет число боковых составляющих и уменьшается  $J_0(\beta)$ , что и приводит к возрастанию эффективности передачи).

## 4. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ СООБЩЕНИЙ И СИГНАЛОВ

Операция замены непрерывного сигнала  $s(t)$  последовательностью его значений (выборок) в соответствии с теоремой Котельникова называется дискретизацией.

### 4.1. Теорема Котельникова

Если функция  $s(t)$  не содержит частот выше  $f_B$ , то она полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга на  $\Delta t = \pi / \omega_B = 1 / 2f_B$ .

Дополним функцию  $S(\omega)$  значениями, симметричными относительно нуля значениям на участке  $0 \dots \omega_B$ , и повторим ее с периодом  $2 \omega_B$ . Тогда функцию  $S(\omega)$  можно будет представить рядом Фурье

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \&_n e^{in \frac{2\pi}{2\omega_B} \omega} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \&_n e^{in \frac{\pi}{\omega_B} \omega}, \quad (4.1)$$

где

$$\&_n = \frac{2}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{-in \frac{2\pi}{2\omega_B} \omega} d\omega = \frac{1}{\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{-in \frac{\pi}{\omega_B} \omega} d\omega. \quad (4.2)$$

С другой стороны,

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{-in\frac{\pi}{\omega_B}\omega} d\omega = s(-n\Delta t). \quad (4.3)$$

Отсюда получаем:

$$\&_n = \frac{2\pi}{\omega_B} s(-n\Delta t) \quad (4.4)$$

Таким образом, коэффициенты ряда Фурье функции  $S(\omega)$  определяются через значения функции  $s(t)$  в точках отсчета.

Запишем ряд Фурье, определяющий спектральную плотность  $S(\omega)$ , по коэффициентам  $\&_n$ :

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\omega_B} s(-n\Delta t) e^{in\frac{\pi}{\omega_B}\omega} = \frac{\pi}{\omega_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(-n\Delta t) e^{in\frac{\pi}{\omega_B}\omega} = \frac{\pi}{\omega_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) e^{-in\frac{\pi}{\omega_B}\omega} \quad (4.5)$$

Полученное выражение означает, что функция  $s(t) = s(n\Delta t)$ , которой соответствует спектральная плотность  $S(\omega)$ , однозначна и проходит через заданные значения в точках отсчета  $n\Delta t$ , лежащих на расстоянии  $\Delta t = 1/2f_B$  одна от другой.

Запишем выражение для функции  $s(t)$ , подставив в (4.3) значение  $S(\omega)$ :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \frac{\pi}{\omega_B} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) e^{-in\frac{\pi}{\omega_B}\omega} \right) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \right) e^{i\omega(t - n\frac{\pi}{\omega_B})} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \frac{\sin \omega_B (t - n\Delta t)}{\omega_B (t - n\Delta t)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Если функция  $s(t)$  конечна в интервале  $T$ , а спектр ее ограничен полосой частот вплоть до  $\omega_B$ , то число дискретных значений (отсчетов) функции  $s(n\Delta t)$ , которое необходимо для полного задания ее в интервале  $T$ , будет равно

$$n = T/\Delta t + 1 = 2f_B T + 1 \approx 2f_B T, \quad (4.7)$$

так как  $T/\Delta t \gg 1$ .

Выражение для  $s(t)$  при этом принимает вид

$$s(t) = \sum_{n=-f_B T}^{n=f_B T} s(n\Delta t) \frac{\sin \omega_B (t - n\Delta t)}{\omega_B (t - n\Delta t)}. \quad (4.8)$$

Принципиальное отличие дискретизации с использованием ряда Котельникова заключается в том, что отсчеты мгновенных значений сигнала производятся непосредственно в процессе его поступления на вход преобразующего устройства, а для представления в виде ряда Фурье необходимо предварительно полностью зарегистрировать сигнал. Большим преимуществом ряда Котельникова является простота определения его коэффициентов. Полученные в процессе дискретизации мгновенные значения сигнала могут быть равны любой величине в диапазоне изменения сигнала  $s(t)$  от  $S_{\min}$  до  $S_{\max}$ .

**Пример 4.1.** Найти минимальное число отсчетов, с помощью которых можно передать информацию, содержащуюся в прямоугольном видеоимпульсе длительностью  $\tau = 1$  мкс.

Поскольку спектр видеоимпульса является бесконечно широким, то ограничимся его технической шириной, определяемой частотой, соответствующей первому нулю. Эта частота равна  $f_b = 1/\tau$ . Поэтому будем считать, что анализируемый видеоимпульс обладает финитным спектром с наивысшей частотой  $f_b = 10^6$  Гц = 1 МГц. В соответствии с требованиями теоремы Котельникова расстояние между отсчетами нужно выбирать равным  $1/2 f_b = 0,5$  мкс. Это значит, что достаточно трех выборок, чтобы передать информацию, содержащуюся в прямоугольном видеоимпульсе. Однако лучше выбрать пять отсчетов. При этом возрастет точность передачи передаваемой информации за счет ее количественного увеличения вследствие появления избыточности.

**Пример 4.2.** Изобразить спектральную диаграмму последовательности  $n = 5$  отсчетов, соответствующих дискретизированному видеоимпульсу длительностью 1 с.

Прежде всего отметим, что в отличие от спектра исходного видеоимпульса, который считается финитным и ограниченным верхней частотой  $f_b$ , спектр последовательности отсчетов является бесконечным, содержит гармоники, кратные частоте  $1/\Delta t$ , и имеет период  $n\Delta t$ , а огибающая описывается функцией  $\sin x/x$  (рис.4.1). Этот спектр соответствует ситуации, когда отсчеты формируются с помощью  $\delta$ -импульсов. Однако на практике моделью  $\delta$ -импульса часто

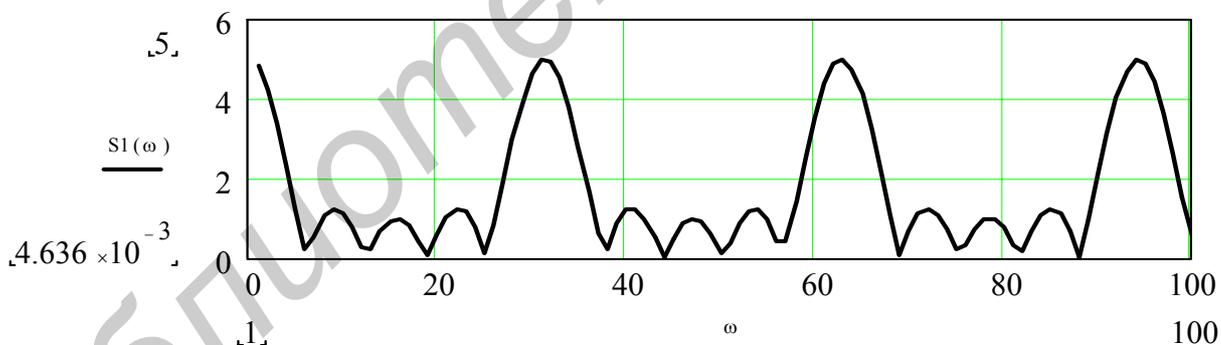


Рис. 4.1. Огибающая спектра дискретизованного сигнала, полученного из видеосигнала длительностью 1 мкс, с помощью пяти выборок, представляющих собой  $\delta$ -импульсы

служит прямоугольный видеоимпульс достаточно малой длительности. Если допустить, что длительность отсчетного импульса составляет 0,04 длительности исходного импульса, т.е. 40 мс, то его огибающая будет накладываться на бесконечный периодический спектр, изображенный на рис.4.1. При этом частота, соответствующая первому нулю огибающей спектра импульса длительностью 40 мс, равна 25 Гц (рис. 4.2).

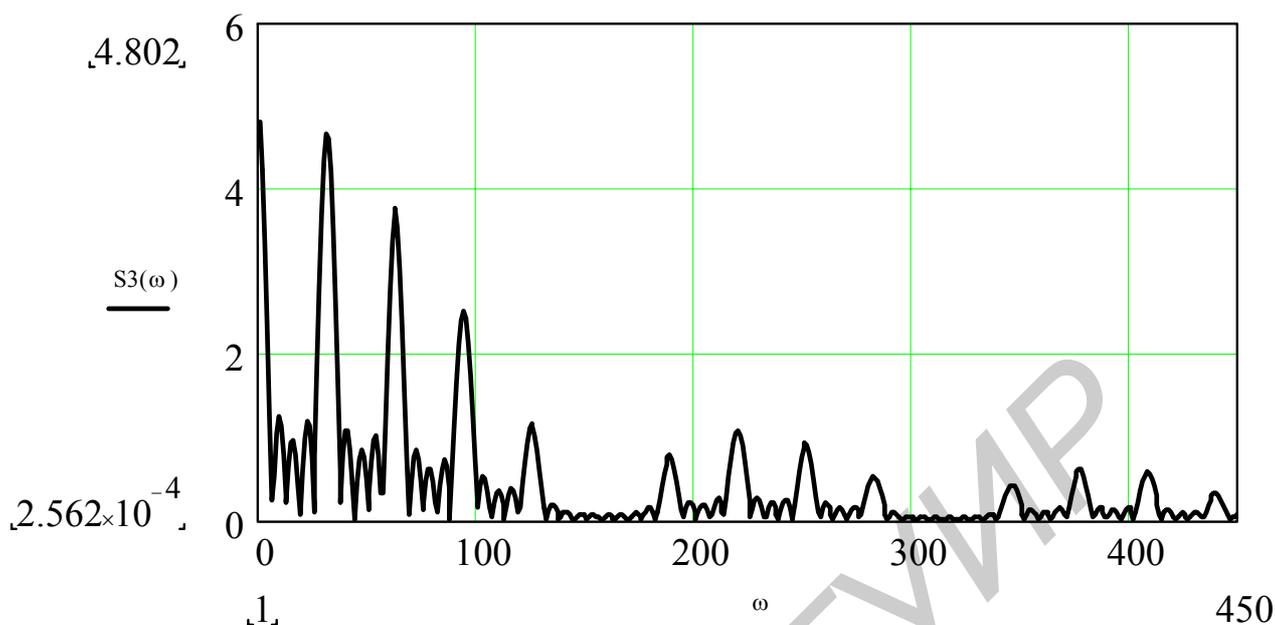


Рис.4.2. Огибающая спектра дискретизованного сигнала, полученного из видеосигнала длительностью 1 с с помощью пяти выборок, представляющих собой импульсы длительностью 40 мс

#### 4.2. Понятие об импульсно-модулированных колебаниях

Успехи в освоении СВЧ и развитие импульсной техники способствовали созданию новых видов управления колебаниями, а именно импульсной модуляции. Термин «импульсная модуляция» означает, по существу, выполнение двойной модуляции: первичной модуляции некоторой вспомогательной последовательности передаваемых сообщений и вторичной модуляции радиочастотного колебания (несущей) напряжением, полученным от первичной модуляции.

Вторичная модуляция, представляющая собой обычную амплитудную модуляцию несущего колебания импульсами, не требует дополнительного рассмотрения. Как и при простой амплитудной модуляции, спектр колебания в этом случае будет состоять из несущей частоты и двух симметричных полос боковых частот, каждая из которых определяется спектром импульсной последовательности.

В зависимости от выбора меняющегося параметра импульсная модуляция подразделяется на следующие виды:

- *амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)*, когда по закону управляющего сигнала меняется приращение амплитуды импульсов,
- *модуляция по длительности импульсов (ДИМ)*, когда по закону управляющего сигнала меняется длительность импульсов,
- *временная импульсная модуляция (ВИМ)*, когда по закону управляющего сигнала происходит смещение импульсов по временной оси. При этом ВИМ можно разделить на частотно-импульсную (ЧИМ) и фазоимпульсную (ФИМ), в

зависимости от того, изменяется ли положение импульса на оси времени пропорционально частоте или фазе передаваемого сигнала.

Теоретической базой всех перечисленных видов импульсной модуляции является теорема В.А.Котельникова, на основании которой выбирается тактовая частота следования импульсов.

### 4.3. Амплитудно-импульсная модуляция

АИМ – простейший вид импульсной модуляции, поскольку обладает наибольшей простотой как при получении модулированных колебаний, так и при их детектировании. Однако этому виду модуляции присущ недостаток – она не допускает амплитудного ограничения. В связи с этим АИМ мало пригодна в тех случаях, когда одним из главных требований является повышение помехоустойчивости радиоканала. АИМ находит применение в качестве промежуточного преобразования при осуществлении, а также при детектировании более сложных видов модуляции (ДИМ и ВИМ).

Определим спектр АИМ-колебания при модуляции прямоугольных видеоимпульсов напряжением  $s(t)$ . На рис.4.3,а изображена исходная периодическая последовательность  $s_n(t)$  прямоугольных импульсов, имеющих длительность  $\tau$  и период следования  $T$ , а на рис.4.3,б – та же последовательность, промодулированная сигналом  $s(t)$ , близким к гармоническому колебанию.

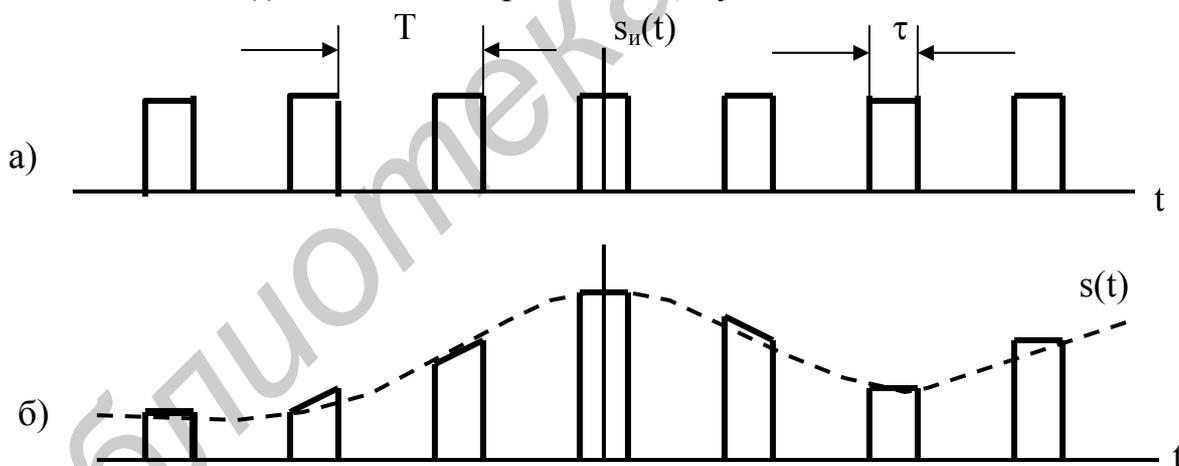


Рис.4.3. Преобразование электрического управляющего сигнала  $s(t)$  в управляющий сигнал для получения АИМ-сигнала

Тонально-модулированную последовательность видеоимпульсов в соответствии с законом модуляции  $s(t) = U_m \cos \Omega t$  можно записать:

$$s_{\text{АИМ}}(t) = (1 + m \cos \Omega t) \left[ \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_n t - \varphi_n) \right] =$$

$$= \left[ \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_n t - \varphi_n) \right] + \left[ \frac{m c_0}{2} \cos \Omega t + m \cos \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_n t - \varphi_n) \right] =$$

$$= \left[ \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_n t - \varphi_n) \right] + \\ + \left[ \frac{mc_0}{2} \cos \Omega t + \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos((n\omega_n + \Omega)t - \varphi_n) + \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos((n\omega_n - \Omega)t - \varphi_n) \right].$$

На основании этого выражения построим спектр модулированной импульсной последовательности (рис.4.4).

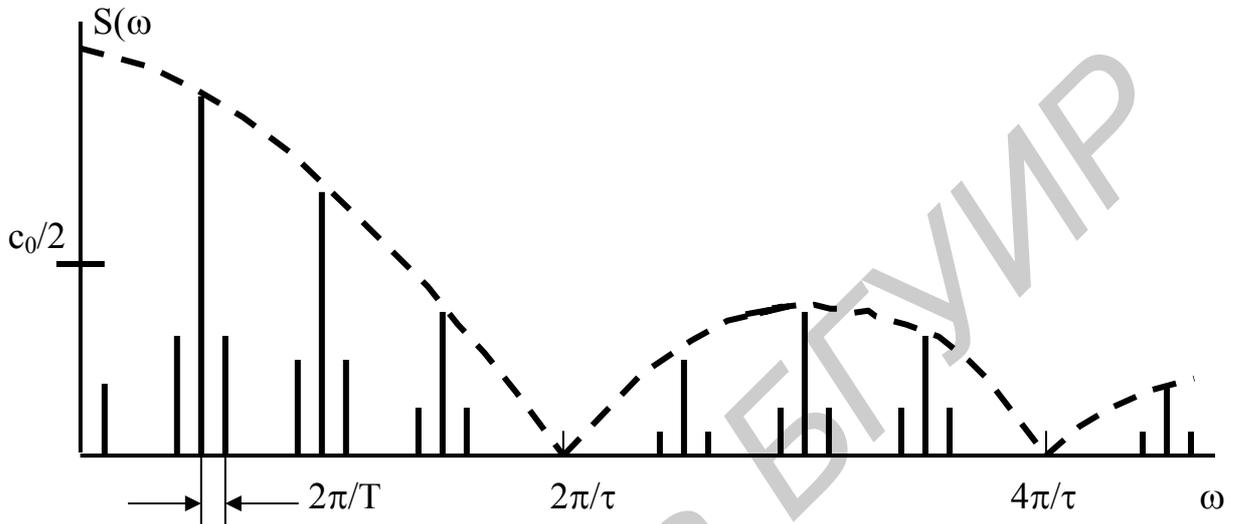


Рис.4.4. Спектр модулированной импульсной последовательности

Можно заметить, что при  $m = 0$  в правой части анализируемого соотношения остаются только первые два слагаемых, которые образуют спектр исходной периодической последовательности прямоугольных импульсов. Благодаря модуляции около каждой компоненты (включая нулевую составляющую  $c_0/2$ ), играющей роль несущей, появляются боковые составляющие с амплитудами  $mc_0/2$  и частотами  $n\omega_n \pm \Omega$ , в том числе низкочастотная составляющая с амплитудой  $mc_0/2$  и частотой модуляции  $\Omega$ .

В случае модуляции спектром частот в спектре АИМ-сигнала число боковых составляющих и составляющих низких частот модуляции возрастает. При АИМ около каждой гармонической составляющей спектра появляются боковые составляющие с частотами  $n\omega_n + \Omega$  и  $n\omega_n - \Omega$ . Если АИМ сигнал получен в результате модуляции спектром частот от 0 до  $\Omega_{\max}$ , то с обеих сторон каждой из составляющих спектра  $n\Omega_n$  появятся нижняя и верхняя боковые полосы частот шириной от 0 до  $\Omega_{\max}$ . При этом, чтобы боковые полосы при каждой следующей и предыдущей частотах  $n\omega_n$  не перекрывались, вследствие чего появились бы искажения при передаче сигнала, необходимо, чтобы частота следования импульсов  $f_n = \omega_n/2\pi = 1/\Delta t$  была не менее чем в два раза больше максимальной частоты спектра управляющего сигнала  $F_{\max} = 2\pi/\Omega_{\max}$ .

Наконец, при модуляции непериодическим сигналом, обладающим спектром  $S(\omega)$ , вместо отдельных пар боковых составляющих наблюдаются сплошные боковые полосы, смещенные на частоты  $n\omega_n$ , т.е. формируется спектр вида, полученный для дискретизированного по времени непрерывного сигнала.

Чтобы уменьшить ошибки дискретизации исходного колебания, возникающие при использовании АИМ, тактовую частоту  $\omega_{и} = 2\pi/\Delta t$  импульсов выбирают из условия  $\omega_{и} > (2...5)\omega_{в}$ , где  $\omega_{в} = 2\pi f_{в}$  – максимальная частота в спектре  $S(\omega)$  модулирующего сигнала. Этому условию соответствует интервал дискретизации  $\Delta t = 2\pi/\omega_{и}$ , меньший, чем интервал дискретизации, который определяется теоремой Котельникова:  $\Delta t < 1/(2...5)f_{в}$ . Поскольку передаваемое сообщение заложено в низкочастотную часть спектра АИМ, прилегающую к нулевой частоте, то для восстановления сообщения на приемном конце канала связи после амплитудного детектора достаточно использовать ФНЧ.

## 5. СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

До сих пор рассматривались модулирующие электрические и радиосигналы на основе детерминированных математических моделей. Такой подход позволил получить четкое представление о многих важных характеристиках и свойствах сигналов. Однако многие важные задачи радиоэлектроники детерминированные модели не позволяют решать. Основная трудность здесь в том, что практически все реальные модулирующие сигналы и принимаемые радиосигналы *недетерминированные*.

### 5.1. Основные понятия теории случайных сигналов

Сущность перехода к новым методам математического описания сигналов и новым методам решения задач при недетерминированных сигналах состоит в том, что в его основу положен статистический подход ко всем рассматриваемым проблемам. Согласно этому подходу в качестве модели недетерминированного сигнала предлагается использовать случайный процесс с подходящими вероятностными характеристиками.

Под случайным процессом мы будем понимать упорядоченные семейства случайных величин, поставленных в соответствие значениям некоторого неслучайного параметра, например, времени  $t$ , так, что для каждого значения  $t$  последнего мы имеем вполне определенную случайную величину  $X(t)$  с определенным законом распределения и, следовательно, с определенными характеристиками этого закона, такими, например, как *моментные функции*.

Введем обозначение  $X(t)$  для случайного процесса, который мы будем использовать в качестве математической модели некоторого недетерминированного сигнала. Если этот сигнал должен рассматриваться на интервале времени от 0 до  $T_{к}$ , то и процесс  $X(t)$  будем описывать на таком же интервале. Этот интервал обычно называют интервалом наблюдения длительности  $T_{к}$ . В частном случае  $T_{к}$  может быть неограниченно большим.

Определим те вероятностные характеристики процесса, которые оказываются наиболее существенными при решении основной задачи радиотехники -- передачи информации с помощью электромагнитных волн.

Говорят, что проводится одно испытание, если наблюдается процесс  $X(t)$  на интервале времени от  $t = 0$  до  $t = T_k$  с регистрацией появляющихся мгновенных значений этого процесса. В результате можно получить график функции времени, который называется *реализацией*  $x^{(1)}(t)$  случайного процесса  $X(t)$ . Для каждого момента времени  $t$  из интервала наблюдения эта реализация имеет вполне определенное значение, т.е. является детерминированной функцией времени. Совокупность всех разных реализаций, которые могут появиться при проведении испытаний, называется *ансамблем реализаций случайного процесса*. Подчеркнем, что каждая реализация случайного процесса является детерминированной функцией времени. Случайность любого процесса  $X(t)$  проявляется в том, что до проведения испытания нельзя предсказать, какая именно реализация из ансамбля появится в данном испытании.

*Моментные функции* представляют собой временные зависимости числовых характеристик одномерных распределений случайных процессов, поскольку сами функции распределения случайных процессов в отличие от функций распределения случайных величин в общем случае изменяют свою форму во времени.

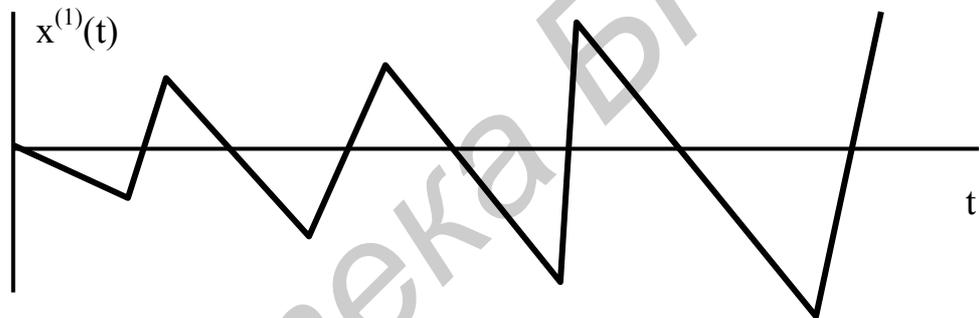


Рис.5.1. Реализация случайного процесса с постоянным математическим ожиданием и переменной дисперсией

На рис.5.1 изображена реализация случайного процесса, первая моментная функция которого (среднее значение) неизменна во времени и равна нулю, а вторая центральная моментная функция (дисперсия) вполне определенным образом зависит от времени.

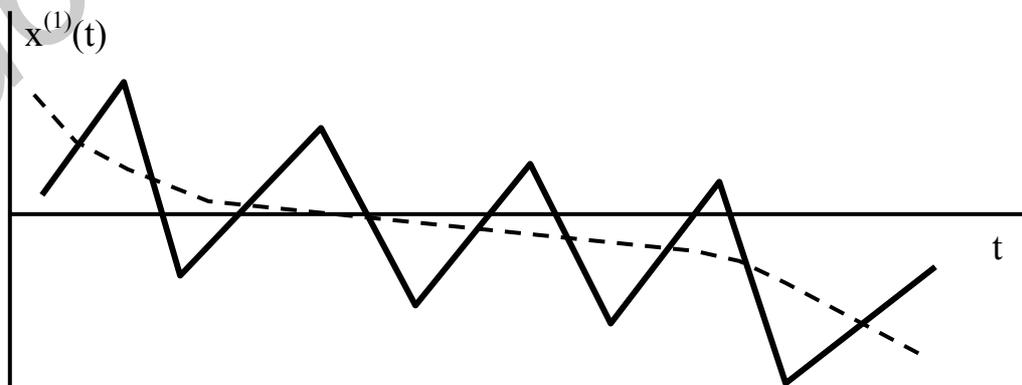


Рис.5.2. Реализация случайного процесса с переменным математическим ожиданием и постоянной дисперсией

На рис.5.2 показана реализация процесса с неизменной дисперсией и переменным во времени средним значением. На рис.5.3 показаны реализации процессов, имеющих одинаковые первые и вторые моментные функции, но отличающиеся скоростью протекания процесса, т.е. смешанной моментной функцией второго порядка. При этом начальный смешанный момент второго порядка называется *ковариационной* функцией, а центральный смешанный момент второго порядка – *корреляционной* функцией.

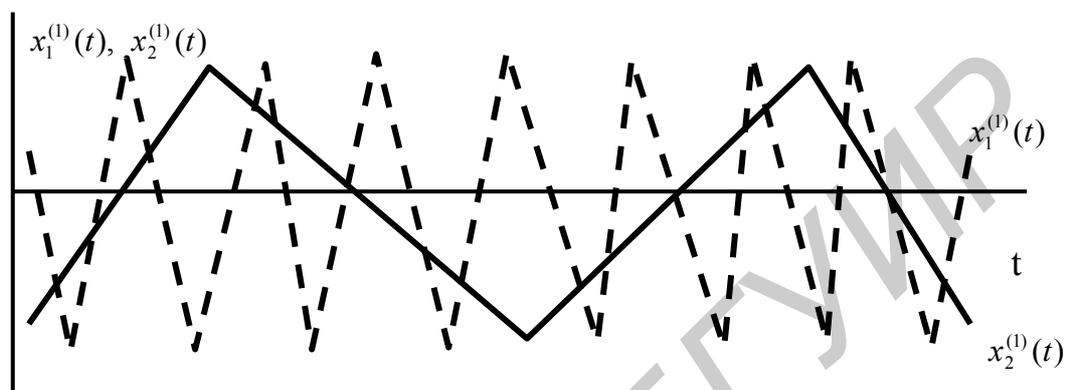


Рис.5.3. Реализации случайного процесса с постоянными математическими ожиданиями и дисперсиями, но разными корреляционными функциями

*Стационарный* случайный процесс – это такой процесс, для которого функция распределения не меняется при любом сдвиге всей группы наблюдаемых значений вдоль оси времени. Стационарные процессы имеют место в установившихся режимах работы устройств при неизменных внешних условиях и постоянстве параметров цепей, пропускающих эти сигналы.

Признаком *нестационарности* случайного процесса служит невыполнение условий неизменности распределений.

Опыт показывает, что в реальных условиях отдельно взятая реализация случайного процесса может служить представителем ансамбля. Процессы подобного рода называются *эргодическими*.

Стационарные случайные процессы могут и не обладать свойством эргодичности. Физической моделью неэргодического ансамбля может служить набор шумящих радиоприемников при произвольном положении регуляторов громкости в каждом из них. Характеристики, получаемые усреднением по отдельной реализации, в этом случае не обязательно совпадают с аналогичными характеристиками ансамбля.

В теории случайных процессов различают понятия *стационарности в узком и широком смысле*. Случайная функция стационарна в узком (строгом) смысле, если выполняются условия стационарности распределения  $W_n$ , каким бы то ни было число  $n$ . Если же это условие гарантируется лишь для  $n = 2$  (т.е. для функций распределения не выше второго порядка), то такой процесс называют стационарным в широком смысле. Изучение процессов последнего типа базируется на анализе одномерных моментов и корреляционных функций, а посвященный ему раздел теории назван корреляционной теорией случайных процессов.

## 5.2. Стационарные и нестационарные процессы

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется стационарным в узком (строгом) смысле, если все функции распределения вероятностей любого порядка инвариантны относительно сдвига по времени.

Стационарный в узком смысле случайный процесс протекает однообразно во времени. Такие процессы имеют место в установившемся режиме, например, автогенератора при неизменных внешних условиях.

Очевидно, что стационарный случайный процесс представляет собой частный случай процессов более широкого класса, который составляют нестационарные процессы. Примером нестационарного случайного процесса может служить возбуждение автогенератора при подаче на него питания. Нестационарный случайный процесс продолжается до тех пор, пока в генераторе не установится режим стационарной амплитуды колебаний.

При решении ряда статистических задач используют только математические ожидания и ковариационные или корреляционные функции. В связи с этим вводится понятие стационарности в широком смысле.

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется стационарным в широком (нестрогом) смысле, если его математическое ожидание и ковариационная функция инвариантны относительно сдвига по времени, т.е. математическое ожидание постоянно, а ковариационная функция зависит только от разности аргументов  $t_2 - t_1 = \tau$ . Очевидно, что стационарный в узком смысле случайный процесс стационарен и в широком смысле. Однако обратное утверждение в общем случае неверно.

**Пример 5.1.** Дано колебание  $\xi(t) = x(t) \psi(t)$ , где  $x(t)$  – случайный стационарный процесс,  $\psi(t)$  – неслучайная функция времени. Определить, является ли это колебание стационарным процессом.

Для определения стационарности колебания  $\xi(t)$  определим его математическое ожидание и дисперсию:

$$\begin{aligned} M[\xi(t)] &= M[x(t) \psi(t)] = \psi(t) M[x(t)], \\ D[\xi(t)] &= D[x(t) \psi(t)] = \psi(t)^2 D[x(t)]. \end{aligned}$$

Поскольку статистические характеристики  $\xi(t)$  зависят от времени, процесс  $\xi(t)$  является нестационарным.

**Пример 5.2.** Случайный процесс представлен в виде  $\xi(t) = \psi(t) + Y$ , где  $\psi(t)$  – стационарный эргодический процесс, а  $Y$  – случайная величина. Определить, является ли процесс  $\xi(t)$  эргодическим.

Поскольку математическое ожидание случайной величины  $Y$  не зависит от времени, а  $\psi(t)$  – стационарный случайный процесс, то  $\xi(t)$  представляет собой также стационарный процесс. Для эргодичности процесса  $\xi(t)$  требуется, чтобы и случайный процесс  $y(t)$ , в сечении которого в момент времени  $t = t_0$  получена случайная величина  $Y$ , был эргодическим.

**Пример 5.3.** Задан сигнал в виде постоянного напряжения случайного уровня  $\xi(t) = U$ . Можно ли процесс  $\xi(t)$  назвать стационарным и эргодическим?

Случайный процесс  $\xi(t)$  стационарен, так как при усреднении по множеству все статистические характеристики не зависят от времени. Процесс  $\xi(t)$  не явля-

ется эргодическим, так как при усреднении по времени результат будет зависеть от выбранной реализации.

### 5.3. Ковариационная и корреляционная функции

Важную роль в теории случайных процессов играет начальный момент

$$m_{11}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)], \quad (5.1)$$

называемый *ковариационной функцией* случайного процесса, и центральный момент

$$\mu_{11}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1))(\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2))], \quad (5.2)$$

называемый *корреляционной функцией* случайного процесса.

Из (5.1) и (5.2) можно установить связь между ковариационной и корреляционной функциями случайного процесса, а именно:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) + m_{\xi}(t_1)m_{\xi}(t_2). \quad (5.3)$$

Отсюда видно, что ковариационная функция отличается от корреляционной детерминированным слагаемым, представляющим собою произведение математических ожиданий  $m_{\xi}(t_1)$  и  $m_{\xi}(t_2)$ . Очевидно, что если математическое ожидание случайного процесса  $m_{\xi}(t) \equiv 0$ , то ковариационная и корреляционная функции совпадают. Если для случайного процесса  $R_{\xi}(t_1, t_2) \equiv 0$ , то

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = m_{\xi}(t_1)m_{\xi}(t_2) \quad (5.4)$$

и случайный процесс в этом случае называется *некоррелированным* случайным процессом (его функция корреляции равна нулю).

Если же  $K_{\xi}(t_1, t_2) \equiv 0$ , то рассматриваемые значения случайного процесса в момент времени  $t_1$  и  $t_2$  называются ортогональными.

В ряде случаев рассматривают нормированную корреляционную или взаимную корреляционную функции:

$$r_{\xi}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{\xi}(t_1)D_{\xi}(t_2)}}, \quad (5.5)$$

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{\xi}(t_1)D_{\eta}(t_2)}}. \quad (5.6)$$

Эти функции количественно характеризуют степень линейной зависимости между соответствующими величинами одного или двух случайных процессов.

### 5.4. Математическое ожидание, ковариационная и корреляционная функции стационарного в узком смысле случайного процесса

Из определения стационарности следует, что

$$p(x; t_1) = p(x; t_1 - t_1) = p_1(x), \quad (5.7)$$

т.е. одномерная функция плотности вероятности стационарного в узком смысле случайного процесса не зависит от времени. Это значит, что процесс, протекающий быстро или медленно, имеет одну и ту же одномерную плотность вероятности.

Математическое ожидание стационарного в узком смысле случайного процесса не зависит от времени:

$$m_{\xi} = M[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_1(x) dx. \quad (5.8)$$

Ковариационная  $K_{\xi}(t_1, t_2)$  и корреляционная  $R_{\xi}(t_1, t_2)$  функции зависят только от разности аргументов  $t_2 - t_1 = \tau$ . Действительно,

$$\begin{aligned} R_{\xi}(\tau) &= M[(\xi(t) - m_{\xi})(\xi(t + \tau) - m_{\xi})] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_{\xi})(x_2 - m_{\xi}) p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = \\ &= M[\xi(t)\xi(t + \tau) - m_{\xi}^2] = K_{\xi}(\tau) - m_{\xi}^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Дисперсия стационарного в узком смысле случайного процесса

$$\begin{aligned} D_{\xi} &= \sigma_{\xi}^2 = M[(\xi(t) - m_{\xi})^2] = R_{\xi}(\tau)|_{\tau=0} = R_{\xi}(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_{\xi})^2 p_1(x) dx = M[\xi^2(t)] - m_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

постоянна и равна значению корреляционной функции при  $\tau = 0$ .

## 5.5. Спектральный анализ случайных процессов

### 5.5.1. Случайный спектр

Для конкретной реализации процесса  $\xi(t)$  вводят спектральную функцию

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (5.11)$$

Для разных реализаций одного и того же процесса  $\xi(t)$  конечной мощности спектральная функция  $F(f)$  будет изменяться случайным образом и потому называется *случайным спектром*.

Случайный спектр содержит всю информацию о конкретной реализации  $\xi(t)$ , для которой он записан, так как анализируемая реализация может быть восстановлена по  $F(f)$  путем обратного преобразования Фурье. Поэтому для указанных процессов задачи анализа и синтеза можно перевести из временной области в частотную и в ней выполнять их решение. Случайный спектр – это случайный процесс. Применительно к стационарному в широком смысле случайному процессу  $\xi(t)$  математическое ожидание и ковариационная функция  $F(f)$  определяются выражениями

$$m_F = M[F(f)] = \int m_{\xi} e^{-i2\pi ft} dt = m_{\xi} \delta(f), \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
K_F(f_1, f_2) &= M[F(f_1, f_2)F^*(f_1, f_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[\xi(t_1)\xi(t_2)]e^{-i2\pi f_1 t_1 + i2\pi f_2 t_2} dt_1 dt_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t_1 - t_2)e^{-i2\pi f_1(t_1 - t_2) + i2\pi f_2(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(f_2 - f_1)t} dt \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{-2\pi f_1 \tau} d\tau = S(f_1)\delta(t_2 - t_1), \tag{5.13}
\end{aligned}$$

где

$$S(f) = \int K(\tau)e^{-2\pi f \tau} d\tau. \tag{5.14}$$

Функция  $S(f)$  – преобразование Фурье ковариационной функции  $K(\tau)$  - называется спектральной плотностью стационарного процесса  $\xi(t)$ . Из (5.11) следует, что случайный спектр  $F(f)$  – нестационарный случайный процесс даже для стационарного случайного процесса  $\xi(t)$ , причем значения  $F(f)$  для разных частот некоррелированы.

Полагая в (5.12)  $m_F(f) = 0$ , убеждаемся, что  $D_F(f) = K_F(f, f) = R_F(f, f)$  бесконечна. Процессы с корреляционной функцией вида (5.13) называются *белым шумом*. Следовательно, случайный спектр  $F(f)$  для стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  является процессом типа белого шума.

### 5.5.2. Спектральная плотность

Мы определили спектральную плотность  $S(f)$  стационарного в широком смысле случайного процесса  $\xi(t)$  как преобразование Фурье от ковариационной функции. На основании обратного преобразования Фурье имеем

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{i2\pi f \tau} df. \tag{5.15}$$

Таким образом, спектральная плотность и ковариационная функция - это пара взаимных преобразований Фурье.

Аналогичным образом связаны между собой спектральная плотность  $S_0(f)$  и корреляционная функция  $R(\tau)$  стационарного в широком смысле случайного центрированного процесса  $\xi_0(t) = \xi(t) - m_\xi$ :

$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i2\pi f \tau} d\tau, \tag{5.16}$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f)e^{i2\pi f \tau} df. \tag{5.17}$$

Подставив в (5.14) выражение ковариационной функции (5.3) через корреляционную и воспользовавшись определением дельта-функции, получим:

$$S(f) = S_0(f) + m_\xi^2 \delta(f). \tag{5.18}$$

Отсюда видно, что спектральная плотность стационарного процесса с не равным нулю математическим ожиданием отличается от спектральной плотности соответствующего центрированного процесса лишь наличием дискретной линии на нулевой частоте.

Формулы (5.14)-(5.17) – это формулы Винера--Хинчина.

Рассмотрим физический смысл спектральной плотности. Если понимать под  $\xi(t)$  случайный ток или напряжение, то величины  $S(f)$  и  $S_0(f)$  в (5.14) и (5.16) будут иметь размерность энергии. Полагая в (5.17)  $\tau = 0$ , имеем

$$D_{\xi} = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) df. \quad (5.19)$$

Эта формула показывает, что дисперсия («полная энергия») стационарного случайного процесса равна площади под кривой спектральной плотности. Величину  $S_0(f)df$  можно трактовать как долю «энергии», сосредоточенную в малом интервале частот от  $f - df/2$  до  $f + df/2$ .

### 5.6. Свойства спектральной плотности

1. Спектральная плотность стационарного вещественного или комплексного случайного процесса – неотрицательная величина, что является определяющим свойством процесса.

2. Спектральная плотность стационарного в широком смысле случайного процесса – всегда вещественная функция, так как  $K(-\tau) = K(\tau)$ , причем для вещественного процесса она – четная функция частоты. Так как корреляционная функция  $R(\tau)$  вещественного процесса – четная функция аргумента, то

$$S_0(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i2\pi f\tau} d\tau = S_0(f). \quad (5.20)$$

Учитывая четность спектральной плотности, формулы (5.17) и (5.18) можно переписать

$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau, \quad (5.21)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) \cos 2\pi f\tau df = 2 \int_0^{\infty} S_0(f) \cos 2\pi f\tau df. \quad (5.22)$$

Следовательно, спектральная плотность и корреляционная функция вещественного стационарного в широком смысле случайного процесса связаны друг с другом взаимными косинус-преобразованиями Фурье. Так как корреляционная функция вещественного процесса – вещественная функция аргумента, то из (5.21) видно, что спектральная плотность является также вещественной функцией частоты.

3. Чем шире спектр  $S_0(f)$ , тем уже корреляционная функция  $R(\tau)$ , и наоборот.

4. Спектральная плотность определена для положительных и отрицательных значений частоты, причем согласно (5.21) для вещественных случайных про-

цессов  $S_0(f) = S_0(-f)$ . В отличие от такого двустороннего «математического» спектра вводится односторонний «физический» спектр  $S_0^+(f)$ , отличный от нуля лишь при положительных частотах  $f \geq 0$

$$S_0^+(f) = S_0(f) + S_0(-f) = 2S_0(f). \quad (5.23)$$

Тогда из (5.21) и (5.22) получим следующие окончательные формулы Винера –Хинчина:

$$S^+(f) = 4 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad f \geq 0, \quad (5.24)$$

$$K(\tau) = \int S^+(f) \cos 2\pi f \tau df, \quad f \geq 0. \quad (5.25)$$

6.Эффективной шириной спектра называется «протяженность» спектральной плотности по оси частот. Ее определяют по-разному. Иногда указывают ширину  $\Delta f_{0,5}$  спектральной плотности на уровне  $0,5 S_0^+(f)$ .

7.Стационарный случайный процесс, спектральная плотность которого сконцентрирована в узкой полосе частот  $\Delta f$  около частоты  $f_0 \gg \Delta f$ , называется узкополосным случайным процессом. Если это неравенство не выполняется, то процесс не является узкополосным.

8.Формулам Винера –Хинчина можно придать другой вид, а именно:

$$S(\omega) = \int K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (5.26)$$

$$S_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.27)$$

Нулевой индекс часто опускают, помня, однако, что

$$S(\omega) = S_0(\omega) + 2\pi m^2 \delta(\omega). \quad (5.28)$$

9.В отличие от спектральной плотности детерминированного сигнала спектральная плотность случайного процесса не дает возможности восстановить какую-либо реализацию процесса, так как она не содержит сведений о фазах отдельных спектральных составляющих. Поэтому можно указать несколько различных по характеру случайных процессов, имеющих одинаковую спектральную плотность и корреляционную функцию. Отсюда следует, что эти две характеристики описывают случайный процесс явно неполно.

**Пример 5.4.** Найти корреляционную  $R(\tau)$  и спектральную  $S(\omega)$  функции для случайного процесса  $\xi(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , где  $A_m$  и  $\omega_0$  – постоянные амплитуда и угловая частота,  $\varphi$  – случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале  $[-\pi, \pi]$ , т.е.  $\rho(\varphi) = 1/2\pi$ .

В соответствии с определением корреляционной функции имеем

$$R_{\xi}(\tau) = M[\xi(t) \xi(t + \tau)] - m_{\xi}^2.$$

Так как

$$m_{\xi} = M[\xi(t, \varphi)] = \int_{-\pi}^{\pi} A_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \rho(\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{A_m}{2\pi} \int \sin(\omega_0 t + \varphi) d(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A_m}{2\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$K_{\xi}(\tau) = M[\xi(t, \varphi) \xi(t + \tau, \varphi)] = \int_{-\pi}^{\pi} A_m^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) \rho(\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{A_m^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi + \omega_0 \tau) d\varphi =$$

$$= \frac{A_m^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega_0 \tau)] d\varphi = \frac{A_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

Спектральную плотность найдем по формулам Винера – Хинчина:

$$S_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau =$$

$$= \frac{A_m^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\omega - \omega_0)\tau} + e^{-i(\omega + \omega_0)\tau}] d\tau = \frac{\pi A_m^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)],$$

так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau = \delta(\omega).$$

## 5.7. Понятие о ковариации (моменте связи) и коэффициенте ковариации

Простейшей характеристикой связи между случайными величинами  $X$  и  $Y$  служит математическое ожидание произведения отклонений  $X$  и  $Y$  от их центров, т.е.

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - M[X])(Y - M[Y])], \quad (5.29)$$

которая называется *ковариацией*, или начальным смешанным моментом второго порядка, или моментом связи. Выражение для ковариации можно преобразовать к  $\text{cov}(X, Y) = M[XY - YM[X] - XM[Y] + M[X]M[Y]] = M[XY] - M[X]M[Y]$ . (5.30)

Если величины  $X$  и  $Y$  независимы, то, поскольку математическое ожидание произведения независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  равно произведению их математических ожиданий, ковариация независимых ожиданий равна нулю. Величина  $\text{cov}(X, Y)$  зависит от единиц измерения, в которых выражаются  $X$  и  $Y$ , поэтому сама по себе она не может служить показателем связи. Чтобы иметь дело с безразмерным показателем, рассматривают ковариации нормированных отношений

$$X^* = \frac{X - M[X]}{\sigma_x} \quad \text{и} \quad Y^* = \frac{Y - M[Y]}{\sigma_y}. \quad (5.31)$$

Каждое из них имеет центром нуль и единичную дисперсию. Отношение

$$\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \rho_{XY} \quad (5.32)$$

называется коэффициентом ковариации случайных величин  $X$  и  $Y$ . Для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$   $\rho_{XY} = 0$ . Однако это не значит, что если  $\rho_{XY} = 0$ , то  $X$  и  $Y$  будут независимы: величины могут быть связаны функционально, а коэффициент ковариации при этом будет равен нулю. Например, при  $M[X] = 0$ ,  $Y = X^2$   $M[XY] = M[X^3] = 0 = M[X] M[Y]$  и, значит,  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , а также  $\rho_{XY} = 0$ , несмотря на то что  $Y$  является функцией  $X$ .

### 5.8. Корреляционная функция

Центральный смешанный момент второго порядка, записанный для двух случайных величин, называется корреляцией этих величин и характеризует связь между ними. Точно так же, как и ковариация, сама по себе корреляция отражает связь между величинами не очень рельефно. Поэтому на практике используют понятие коэффициента корреляции, представляющее собой отношение центрального смешанного момента к стандартным отклонениям соответствующих величин. Корреляция совпадает с ковариацией, если математические ожидания сравниваемых величин равны нулю.

Спектральный подход не всегда является подходящим для анализа сигналов. В качестве временной характеристики сигнала используется автокорреляционная функция, определяемая соотношением

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau) dt, \quad (5.33)$$

где  $\tau$  - величина временного сдвига сигнала.

Из выражения (5.33) следует, что  $\psi(\tau)$  характеризует степень связи (корреляцию) сигнала  $s(t)$  со своей копией, сдвинутой на величину  $\tau$  по оси времени.

Ясно, что функция  $\psi(\tau)$  достигает максимума при  $\tau = 0$ , так как любой сигнал полностью коррелирован сам с собой. Если рассматривать сигнал, представляющий собой напряжение или ток, выделяемые на резисторе величиной в 1 Ом, то при  $\tau = 0$

$$\psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E, \quad (5.34)$$

т.е. максимальное значение автокорреляционной функции равно энергии сигнала. С увеличением  $\tau$  функция  $\psi(\tau)$  убывает (не обязательно монотонно) и при относительном сдвиге сигналов  $s(t)$  и  $s(t-\tau)$  на величину, превышающую длительность сигнала, обращается в нуль.

Отметим, что нет абсолютно никакой разницы в том, какой сигнал сдвигается относительно какого, это значит, что автокорреляционная функция является четной. Поэтому справедливо

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau) dt. \quad (5.35)$$

Если случайный процесс образуется наложением одинаковых импульсов, беспорядочно расположенных на оси времени, то при значении  $\tau$ , превышающем длительность импульсов,  $\psi(\tau) = 0$ .

Если шум образуется хаотическим положением импульсов, длительность которых бесконечно мала, то и время корреляции стремится к нулю. Это означает, что корреляционная функция равна нулю для всех значений  $\tau \neq 0$  и обращается в бесконечность при  $\tau = 0$ . Иными словами, корреляционная функция приобретает характер дельта-функции  $\delta(t)$ . Подобный процесс называется дельта-коррелированным процессом или белым шумом.

Для периодического процесса автокорреляционная функция определяется выражением

$$\psi(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau) dt. \quad (5.36)$$

Отсюда видно, что для периодического сигнала  $s(t)$  функция  $\psi(\tau)$  также является периодической функцией. Период функции  $\psi(\tau)$  совпадает с периодом сигнала  $s(t)$ .

**Пример 5.5.** Построить автокорреляционную функцию гармонического напряжения  $s(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t - \varphi) \cos[\omega(t - \tau) - \varphi] dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t - \varphi) [\cos(\omega t - \varphi) \cos \omega \tau + \sin(\omega t - \varphi) \sin \omega \tau] dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \left[ \cos \omega \tau \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega t - \varphi) dt + \sin \omega \tau \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi) dt \right] = \frac{A^2}{T} \cos \omega \tau. \end{aligned}$$

Мы видим, что при  $\tau = 0$   $\psi(0) = A^2/2$ , т.е.  $\psi(0)$  представляет собой мощность гармонического колебания, определяемую амплитудой  $A$ . Кроме того, отметим, что автокорреляционная функция не дает никакой информации о начальной фазе сигнала  $\varphi$ .

Иначе обстоит дело со взаимной корреляционной функцией двух гармонических сигналов с одинаковыми частотами, но со сдвинутыми начальными фазами.

**Пример 5.6.** Пусть  $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ ,  $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$ . Выполнив вычисления, аналогичные предыдущим, получим

$$\psi_{12}(\tau) = \frac{A_1 A_2}{2} \cos[\omega \tau - (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Отсюда видно, что взаимная корреляционная функция для двух гармонических колебаний одинаковой частоты  $\omega$  зависит от разности фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Макси-

мум функции  $\psi_{12}(\tau)$  получим не при  $\tau = 0$ , как в случае автокорреляционной функции, а при  $\tau = (\varphi_1 - \varphi_2)/\omega$ .

Читателю предоставляется возможность рассмотреть случай с двумя гармоническими колебаниями с кратными частотами и начальными фазами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

### 5.9. Помехи. Их свойства и математическое описание

Помехой радиоприему называют стороннее возмущение, препятствующее приему радиосигнала. Большой частью помеха создается непреднамеренно в процессе развития различных физических явлений, никак не связанных с процессом передачи информации с помощью электромагнитных волн.

В процессе передачи информации помеха может воздействовать на сигнал практически в любой части канала связи, начиная с преобразования сообщения в электрический сигнал и кончая обратным преобразованием принятого электрического сигнала в сообщение, которое предоставляется получателю.

Разные помехи радиоприему, если их рассматривать как случайные процессы, имеют, вообще говоря, разные вероятностные характеристики.

При одновременном воздействии сигнала и помехи на входные цепи приемника возмущения, обусловленные ими, накладываются друг на друга. Математически такое взаимодействие сигнала и помехи можно записать следующим образом:

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (5.37)$$

где  $s(t)$  – функция времени, описывающая возмущение, вызванное воздействием на приемную антенну электромагнитной волны сигнала,  $n(t)$  – возмущение, обусловленное воздействием помехи,  $x(t)$  – отклик на одновременное воздействие сигнала и помехи.

Мы видим, что в каждый момент времени значение принятого сигнала равно сумме мгновенных значений сигнала и помехи. Такая смесь сигнала и помехи называется *аддитивной*.

Существует и другой вид помехи, при которой мощность сигнала на входе приемника случайным образом меняется во времени. Математически при такой помехе принимаемое колебание

$$x(t) = s(t) n(t). \quad (5.38)$$

Принятые здесь обозначения являются теми же, что и раньше, но предполагается, что  $n(t)$  – случайный процесс, реализации которого не могут принимать отрицательных значений. Таким образом, в данном случае имеем произведение сигнала на некоторый случайный процесс, который называется *мультипликативной помехой*.

В реальных каналах связи распространяющиеся электромагнитные волны подвергаются и более сложным преобразованиям, так что указанные аддитивная и мультипликативная помехи не исчерпывают возможных способов воздействия помех на сигналы.

## 5.10. Сравнение случайных и детерминированных сигналов

Детерминированный сигнал во временной области характеризуется временной функцией  $y(t)$  и, например, в случае описания напряжения имеет размерность [В], в частотной области он характеризуется спектральной плотностью  $S(f)$ , имеющую размерность [В/Гц].

Случайный сигнал во временной области характеризуется корреляционной функцией  $R(\tau)$ , имеющей размерность [В<sup>2</sup>], а в частотной области – энергетическим спектром  $W(f)$  с размерностью [В<sup>2</sup>/Гц].

Следовательно, если детерминированный сигнал описывается в координатах напряжение -- время и спектральная плотность – частота, то случайный сигнал в координатах мощность – время и энергетический спектр – частота. В этом различие в описании детерминированного и случайного сигналов.

Базовым соотношением для детерминированного сигнала, устанавливающим связь между временной и спектральной характеристиками, является прямое и обратное преобразование Фурье, определяемые соответствующими интегральными преобразованиями. Для случайного сигнала таким базовыми соотношениями являются формулы Винера -- Хинчина.

Как для простых детерминированных, так и для простых случайных сигналов справедливо соотношение, представляющее собой произведение ширины  $\Delta f$  спектра на длительность  $\tau$  и равное примерно единице. При этом длительности детерминированного сигнала соответствует время корреляции, при котором функция корреляции  $R(\tau)$  близка к нулю при случайном сигнале. Отсюда следует, что чем короче импульс или уже корреляционная функция, тем шире спектр сигнала. При расширении спектра его амплитуда пропорционально уменьшается.

При  $\tau \rightarrow 0$  величина  $\Delta f \rightarrow \infty$ . Такой случай соответствует сигналу, называемому белым шумом.

## 6. АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Два вида анализа имеют место при исследовании линейных устройств – временной и частотный. Соответственно и два вида характеристик определяют работу линейного устройства – временные и частотные.

Основа временного исследования – прямое и обратное преобразования Лапласа, частотного – преобразования Фурье. Согласно преобразованию Лапласа определяется передаточная функция устройства, позволяющая найти временные характеристики. Согласно преобразованию Фурье определяется коэффициент передачи, определяющий частотные свойства объекта. Поскольку интегралы Фурье являются частным случаем преобразования Лапласа, то между передаточной характеристикой и коэффициентом передачи существует прямая связь, позволяющая осуществить переход от частотных характеристик цепи к

временным и наоборот. Мы рассмотрим здесь спектральный метод анализа прохождения сигналов через линейные цепи.

### 6.1. Порядок проведения анализа прохождения сигналов через линейную цепь

Порядок проведения анализа прохождения сигналов через линейную цепь спектральным методом состоит в следующем:

- по известной временной функции  $S_{\text{вх}}(t)$ , описывающей изменения сигнала во времени на входе линейной цепи, определим его спектральную плотность  $S_{\text{вх}}(\omega)$ ;
- полагая известным комплексный коэффициент передачи линейной цепи  $\hat{K}(\omega)$ , представляющий собой отношение комплексной амплитуды выходного напряжения к комплексной амплитуде входного как функцию частоты соответствующих гармонических составляющих, составим аналитическое выражение для спектральной плотности выходного сигнала  $S_{\text{вых}}(\omega) = \hat{K}(\omega) S_{\text{вх}}(\omega)$ ;
- по известной спектральной плотности  $S_{\text{вых}}(\omega)$ , выполнив операцию обратного преобразования Фурье над  $S_{\text{вых}}(\omega)$ , получим временную функцию  $s_{\text{вых}}(t)$ , описывающую поведение выходного сигнала во времени.

Выполнив эти операции, мы получаем исчерпывающую информацию о прохождении сигнала через линейную цепь с известным комплексным коэффициентом передачи, т.е. мы можем построить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики комплексного коэффициента передачи линейной цепи, входного и выходного сигналов, спектральных плотностей входного и выходного сигналов. Используя графические системы пакета, можно получить графические изображения всех этих зависимостей.

### 6.2. Встроенные функции пакета Mathcad спектрального анализа сигналов

Для анализа прохождения непериодического сигнала через линейную цепь с комплексным коэффициентом передачи  $\hat{K}(\omega)$  воспользуемся функциями  $fft(v)$  и  $ifft(v)$ . При этом функция  $fft(v)$  представляет собой преобразование Фурье действительных данных вектора  $v$ ,  $k$  – й элемент которого дается формулой

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_k v_k e^{i(2\pi j/n)k},$$

где  $n$  – число элементов в  $v$ .

Функция  $ifft(v)$  возвращает вектор  $v$ , если  $u = fft(v)$ , т.е. выполняет обратное преобразование Фурье, соответствующее функции  $fft$ . Результат вы-

полнения функции  $\text{ifft}(u)$  представляет собой вектор, содержащий  $2^m$  элементов,  $k$  – й элемент которого определяется формулой

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_k u_k e^{-i(2\pi j/n)k},$$

где  $n$  – число элементов в векторе  $v$ .

### 6.3. Анализ прохождения неперiodического сигнала через линейную цепь

Для задания временной функции, описывающей сигнал, поступающий на вход линейной цепи, используем встроенный модуль, содержащий основные элементы входного языка системы Mathcad, такие как `if`, `otherwise`, `add line` и др. Рассмотрим задачу о прохождении импульса прямоугольной формы с заданными амплитудой и длительностью (рис.6.1) через разделительную  $RC$  – цепь с постоянной времени  $\tau = RC$ . Опишем это входное воздействие средствами входного языка системы Mathcad. Имеем

$$s_{\text{ex}}(t) := \begin{cases} E & \text{if } 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

где  $E = 3$ , а время  $t$  изменяется дискретно от 0 до 10 с шагом 0.01, т.е.  $t := 0, 0.01..10$ .

График входного сигнала построим с помощью графического модуля, входящего в систему Mathcad.

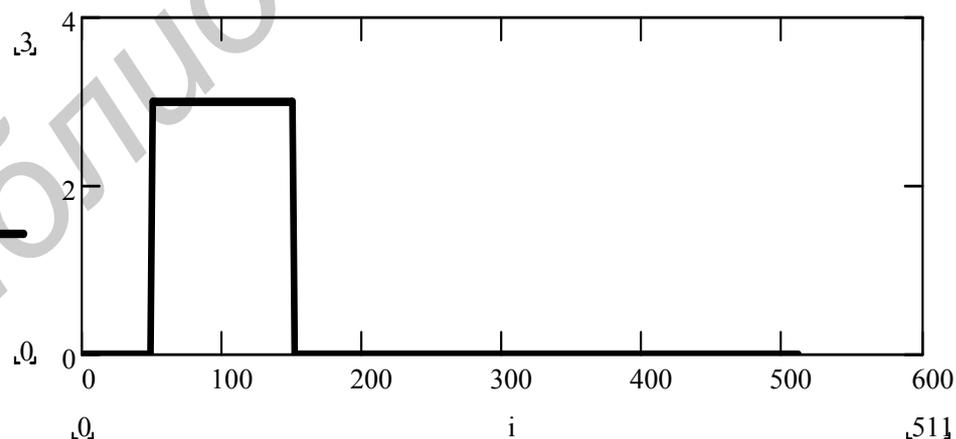


Рис.6.1. Сигнал на входе разделительной  $RC$ -цепи

Комплексный коэффициент передачи разделительной  $RC$  – цепи запишем в виде

$$\hat{K}(\omega) := \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}} = |\hat{K}(\omega)|e^{i\varphi(\omega)},$$

где  $|\hat{K}(\omega)|$ ,  $\varphi(\omega)$  – соответственно амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики разделительной цепи, а  $\omega$  – угловая частота, изменяющаяся в пределах  $\omega := 1..120$ .

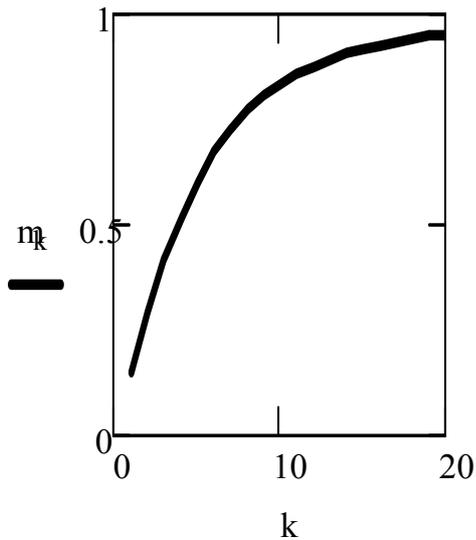


Рис.6.2. График АЧХ комплексного коэффициента передачи  $RC$ -цепи

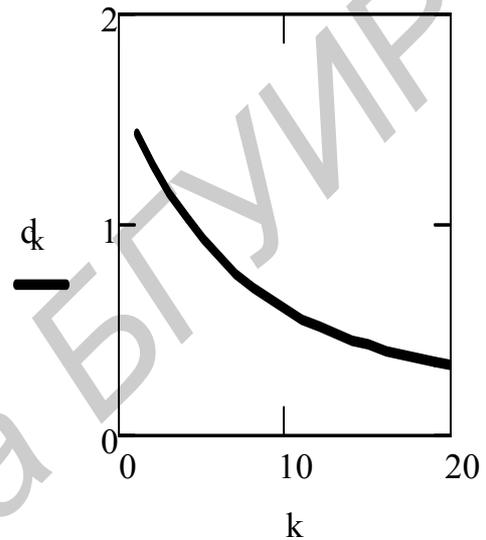


Рис.6.3. График ФЧХ комплексного коэффициента передачи  $RC$ -цепи

С помощью графического модуля системы Mathcad построим графики  $|\hat{K}(\omega)|$  (рис.6.2) и  $\varphi(\omega)$  (рис.6.3).

Проведем расчет спектра входного сигнала, используя встроенную функцию  $fft(s)$ . Имеем

$$c := fft(s_{ex}).$$

Поскольку результат выполнения этой функции представляет собой набор комплексных чисел вида

$$c := \text{Re}(c) - \text{Im}(c)i,$$

то для построения графических зависимостей АЧХ и ФЧХ входного сигнала запишем их аналитические зависимости в виде

$$|c| := \sqrt{\text{Re}(c)^2 + \text{Im}(c)^2}$$

и

$$\varphi_{\text{вх}} := a \tan \frac{\text{Im}(c)}{\text{Re}(c)}.$$

Графики этих зависимостей имеют вид, показанный на рис.6.4 и рис.6.5.

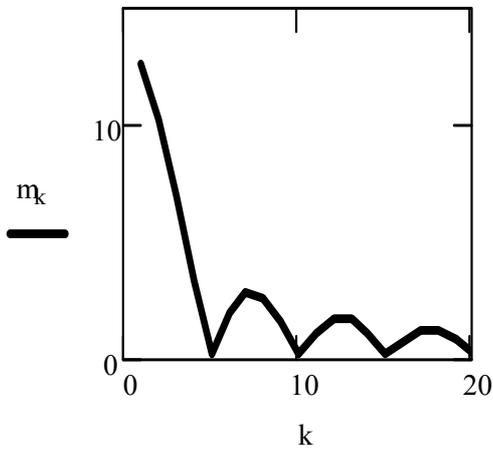


Рис.6.4. График АЧХ входного сигнала

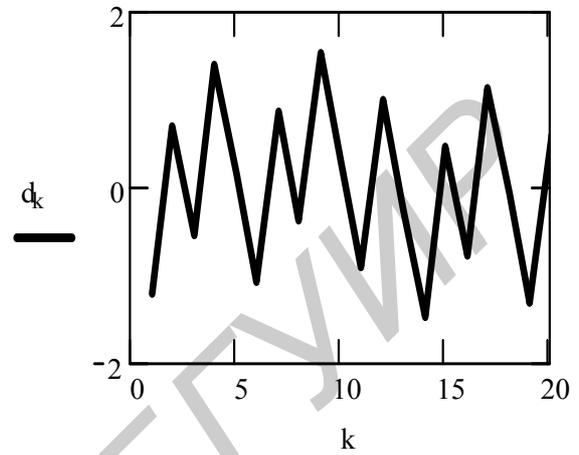


Рис.6.5. График ФЧХ входного сигнала

Проведем расчет спектра выходного сигнала

$$S_{\text{вых}}(\omega) := \hat{K}(\omega) S_{\text{вх}}(\omega) = |S_{\text{вых}}(\omega)| e^{\varphi_{\text{вых}}(\omega)}$$

и построим графики АЧХ (рис.6.6) и ФЧХ (рис.6.7) спектра выходного сигнала.

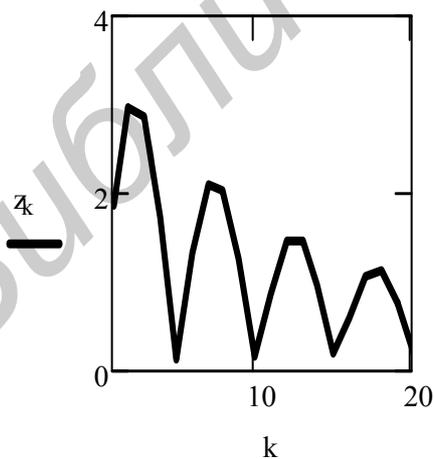


Рис.6.6. График АЧХ выходного сигнала

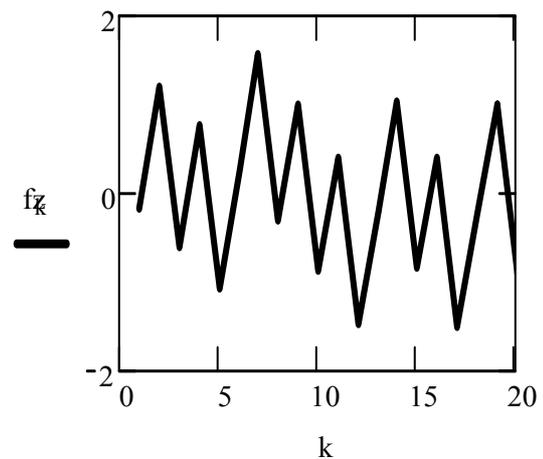


Рис.6.7. График ФЧХ выходного сигнала

Теперь для завершения анализа прохождения прямоугольного видеоимпульса через разделительную  $RC$  – цепь достаточно получить информацию о форме

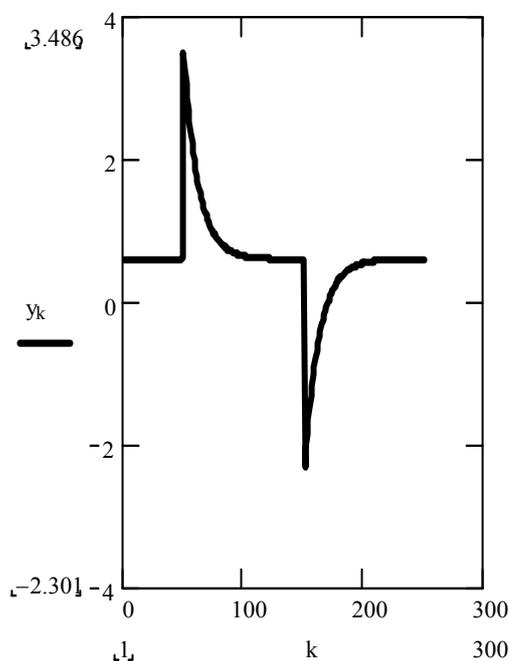


Рис.6.8. Форма выходного сигнала  $RC$ -цепи с малым значением постоянной времени

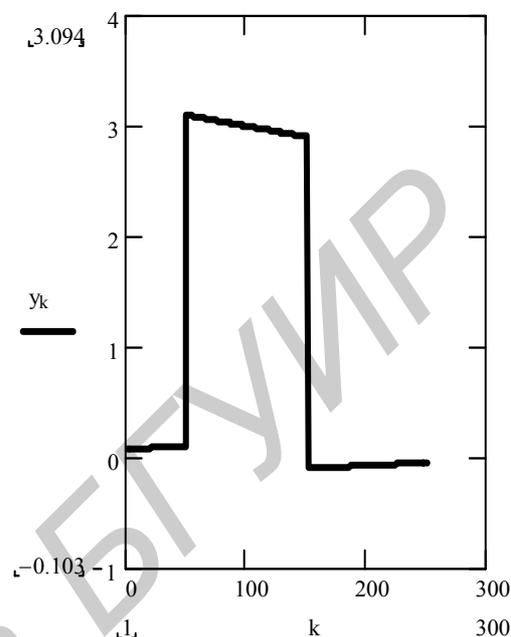


Рис.6.9. Форма выходного сигнала  $RC$ -цепи с большим значением постоянной времени

выходного сигнала. Для этого можно воспользоваться встроенной функцией  $ifft(t)$  системы. Графики функции, описывающей форму выходного сигнала, сильно зависят от величины постоянной времени разделительной  $RC$  – цепи и показаны на рис. 6.8 и рис. 6.9 для двух различных значений постоянной времени  $\tau = RC$ : малого и большого. Мы видим отчетливое изменение формы выходного сигнала в зависимости от параметров линейной цепи, через которую этот сигнал проходит. Пользуясь изложенной методикой, легко перейти к построению любой формы входного сигнала и оценить форму и спектр сигнала, получающегося на выходе практически любой конфигурации линейной цепи.

#### 6.4. Анализ прохождения периодического сигнала через линейную цепь

Для проведения этого анализа достаточно описать поведение сигнала на одном его периоде. Для этого используем те же возможности пакета, которые мы применили для задания формы непериодического сигнала. Рассмотрим прохождение последовательности прямоугольных импульсов, следующих друг за

другом с периодом  $T$  через ту же разделительную  $RC$  – цепочку. Запишем аналитическое выражение для входного сигнала

$$s_{ex}(t) := \begin{cases} E & \text{if } 0 \leq \tau \leq 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

предварительно определив длительность периода  $T := 100$ .

Используя графический модуль пакета Mathcad, построим график последовательности прямоугольных импульсов, следующих с периодом  $T$ .

Отдельно можно рассмотреть вопросы, связанные с проявлением эффекта Гиббса при построении результатов суммирования рядов Фурье разрывных функций, однако здесь мы это не будем делать. Отметим только, что величина выбросов в точках разрыва функции не зависит от количества суммируемых членов ряда и величина длительности выброса сокращается с увеличением числа суммируемых членов ряда. Эти явления очень наглядно демонстрируются путем непосредственного выполнения суммирования рядов Фурье.

В используемом для проведения гармонического анализа пакете нет встроенных функций, аналогичных тем, которые мы применяли для анализа прохождения непериодического сигнала через линейную цепь. Поэтому нужно обратиться к модулю программирования, входящему в состав системы Mathcad, и составить программу для вычисления спектра входного сигнала (рис.6.10).

```

FC(f, N, L) := R<0> ← (
    1 / (2·L) · ∫-LL f(x) dx
    0
    0
)
for n ∈ 1..N
    R<n> ← (
    1 / L · ∫-LL f(x) · cos(n·π·x / L) dx
    1 / L · ∫-LL f(x) · sin(n·π·x / L) dx
    n
)
RT

res:=FC(f, N, L)    A:=res<0>    B:=res<1>    C:=res<2>
    
```

Рис.6.10. Программный модуль вычисления коэффициентов ряда Фурье

Мы видим, что спектр входного сигнала, приведенный на рис.6.11, является линейчатым, а форма огибающей спектра этого сигнала совпадает с формой огибающей неперiodического сигнала. Это обстоятельство дает возможность

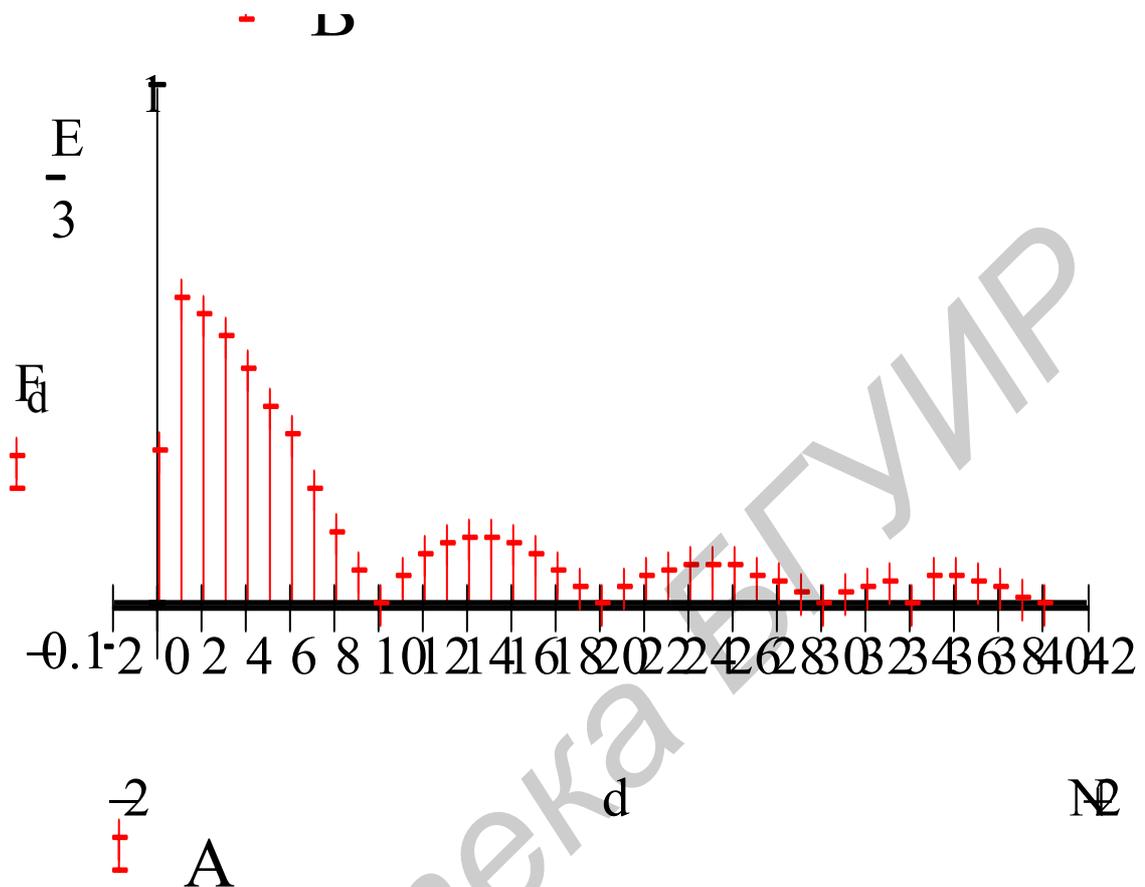


Рис.6.11. График АЧХ спектра последовательности прямоугольных импульсов с отношением периода следования импульсов к его длительности, равным десяти

оценивать техническую ширину спектра как периодических, так и неперiodических сигналов исходя из одних и тех же предпосылок. При этом очевидно, что спектр одиночного сигнала является сплошным, а спектр периодического сигнала -- дискретным, причем расстояния между частотными составляющими равны или кратны (при нулевых величинах амплитуд некоторых гармоник) частоте следования периодического сигнала.

Для того чтобы получить спектр выходного сигнала, достаточно перемножить выражения, определяющие спектр входного сигнала и комплексный коэффициент передачи разделительной  $RC$  – цепи. Для получения формы выходного сигнала нужно сложить гармонические составляющие спектра выходного сигнала, т.е. нужно выполнить операцию, определяемую выражением

$$s_{\text{вых}}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t).$$

График выходного сигнала приведен на рис.6.12.

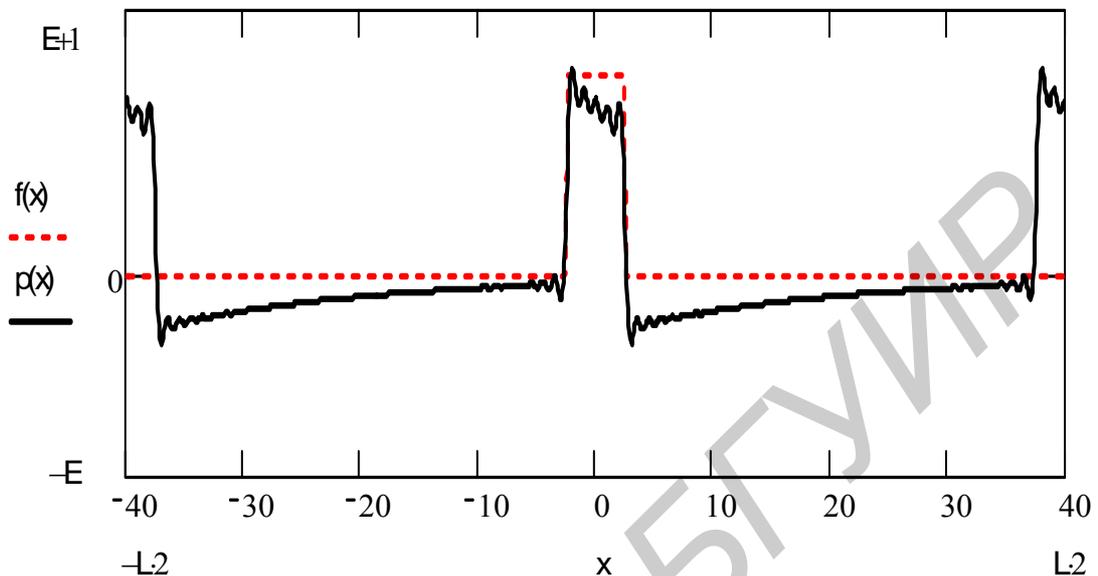


Рис.6.12. Форма периодического сигнала на выходе линейной RC-цепи

Приведенная на рис.6.12 форма сигнала на выходе линейной цепи показывает, как искажается выходной сигнал при прохождении линейной цепи с недостаточно большой постоянной времени. Кроме того, на этом рисунке заметны явления, обусловленные эффектом Гиббса, проявляющимся всегда, когда в ряд Фурье разлагается функция, претерпевающая разрыв. Взяв другие исходные данные для исследуемой цепи, можно показать, что возникающие всплески у фронтов выходного импульса сохраняют свою величину, несмотря на увеличивающееся количество членов суммируемого ряда. Последнее обстоятельство приобретает исключительно важное значение в связи с неуклонным ростом тактовой частоты современных компьютеров и учетом влияния всплесков на фоне прямоугольных импульсов при разработке печатных плат устройств вычислительной техники.

### 6.5. Анализ прохождения дискретизированного сигнала через линейную цепь

На практике исходные характеристик непрерывны и их дискретизация сводится к тому, что в фиксированные моменты времени берутся отсчеты непрерывных величин. Несмотря на то что эта операция является чрезвычайно простой, при переходе к частотному ее представлению возникают сложные вопросы, так как вместо одного спектра исходной непрерывной функции появляется

множество спектров, часто усложняющих обработку информации. При дискретизации непрерывных сигналов возникает необходимость в определении условий, при которых возможно восстановление сигнала по его отсчетам и когда это сделать невозможно.

Кроме того, важно отметить, что с дискретными процессами часто приходится встречаться вне зависимости от того, что они могли быть получены при дискретизации непрерывных процессов.

### 6.5.1. Особые свойства дискретизированных функций

С переходом от исходной непрерывной функции  $s = f(t)$  к дискретизированной  $s_\tau = f_\tau(t)$  кардинальным образом изменяется ее спектральное представление. Вместо одного спектра непрерывной функции при ее дискретизации получается последовательность периодически повторяющихся спектров. В зависимости от частоты дискретизации получаются различные спектры дискретизированной функции.

Актуален вопрос оптимального выбора интервалов дискретизации. Для функций, имеющих спектр, ограниченный частотой  $f_{\max}$ , ответ на этот вопрос дает теорема В.А.Котельникова. Согласно этой теореме любую функцию, спектр которой содержит частоты от 0 до  $f_{\max}$ , можно с любой степенью точности представить отсчетами, следующими один за другим через интервалы времени  $\tau = 1/2 f_{\max}$ . Если интервалы дискретизации выбирать больше этого значения, то тогда нарушается однозначность представления исходной функции по этим отсчетам. Уменьшение интервалов дискретизации по сравнению с требуемым теоремой В.А.Котельникова теоретически ничего не дает. Однако на практике интервал между отсчетами часто берется в 2-5 раз меньшим, чем  $1/2 f_{\max}$ .

### 6.5.2. Задачи спектрального анализа дискретизированных сигналов

При изучении вопросов, связанных с прохождением дискретизированных сигналов через линейные цепи, важно обратить внимание на следующие моменты, обсуждение которых позволит более глубоко понять суть спектральных преобразований дискретизируемых сигналов. Это относится к исследованию зависимости спектра сигнала на выходе дискретизатора от длительности импульсов управления  $\tau$ . Далее, важной является зависимость спектра сигнала на выходе дискретизатора от частоты входного сигнала. И, наконец, представляется необходимым рассмотреть вопрос получения спектра дискретизированного сигнала при специфических отношениях периода следования дискретизируемых сигналов и периода взятия выборок, равных целой степени числа два.

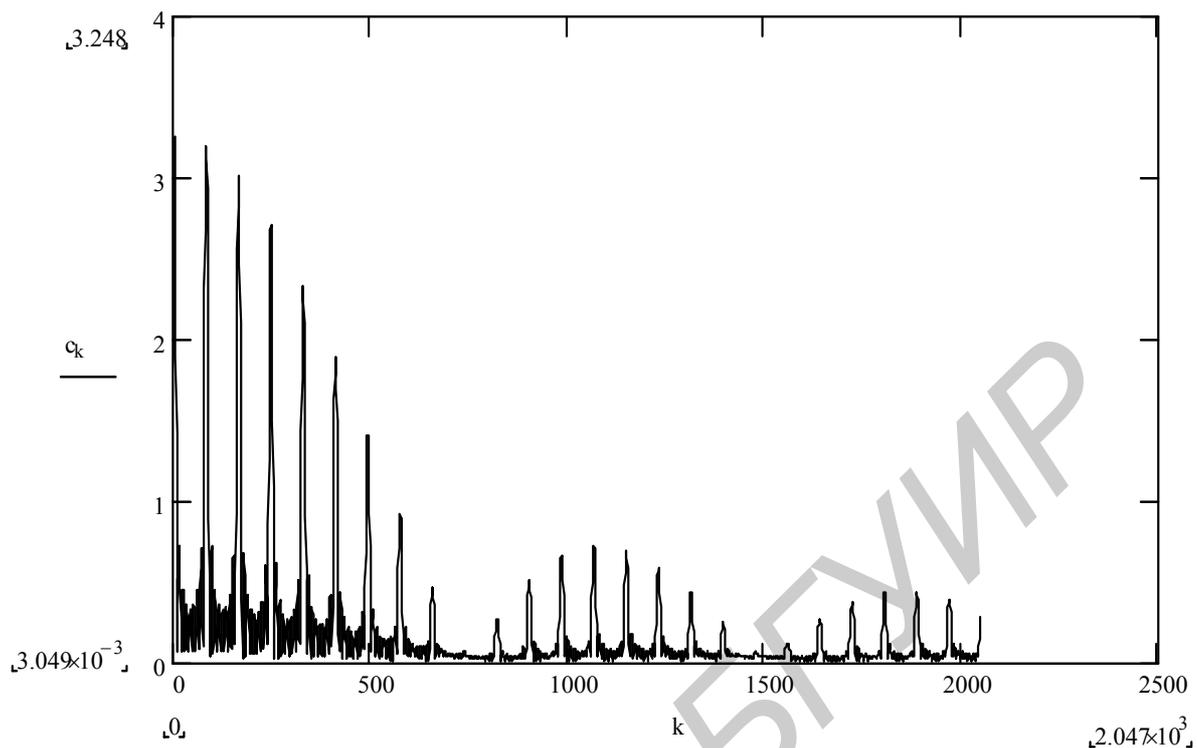


Рис.6.13. Спектр прямоугольного импульса общей продолжительностью 810 ед., представленного 10 отсчетами длительностью по 10 ед.

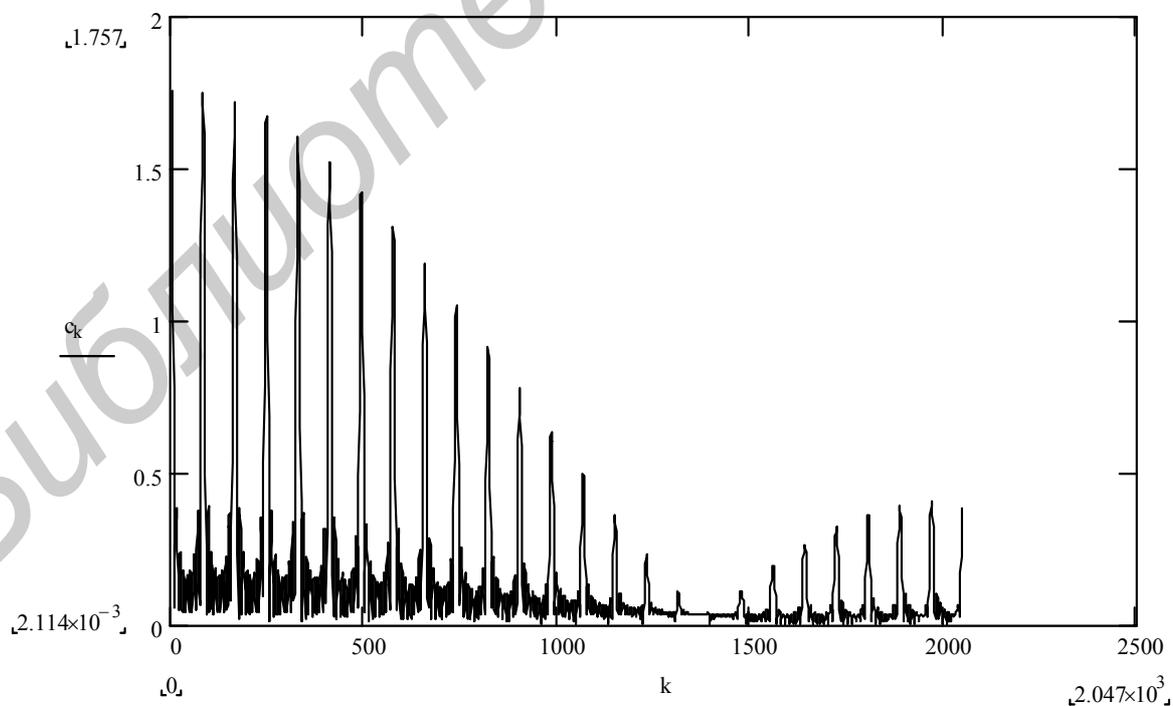


Рис. 6.14. Спектр прямоугольного импульса продолжительностью 805 ед., представленного 10 отсчетами длительностью по 5 ед.

Из сравнения спектров прямоугольных импульсов практически одинаковой длительности, приведенных на рис.6.13 и 6.14, мы заключаем, что чем короче длительность импульса отсчета, тем полнее и насыщеннее получается спектр импульса.

Процесс анализа прохождения дискретизированного импульса через линейную цепь остается тем же, что и при анализе прохождения периодических или непериодических сигналов. Однако в этом случае нужно учитывать специфические особенности представления непрерывных сигналов последовательностями импульсов отсчета.

## 6.6. Работа с размерными переменными

Данные и переменные могут быть размерными, т.е. характеризоваться не только своими численными значениями, но и указанием физической величины, значение которой они хранят. Для присваивания таким переменным значений используются обычные знаки присваивания, но после численного значения со знаком умножения или пробела указывается единица измерения. Ее удобно выбирать из окна размерных величин, которое появляется при активации кнопки с изображением мерной кружки на стандартной панели инструментов. Можно также вызвать это окно, исполнив команду Units в позиции Insert главного меню.

Mathcad допускает записывать значения размерных величин символами национальных алфавитов (в том числе буквами русского языка) и задавать свои единицы размерных величин. В процессе вычислений Mathcad следит за соответствием размерных величин и выдает сигнал ошибки в случае нарушения такого соответствия.

Проведение расчетов с размерными величинами и переменными особенно удобно при решении различных физических задач. При этом правильная размерность результата является дополнительным фактором, свидетельствующем о корректности таких расчетов.

Например, спектр периодического сигнала представляется отрезками, длина которых численно равна амплитудам гармонических составляющих. Эти отрезки расставляются по оси частот с указанием начальной фазы каждой составляющей спектра. Понятие спектра непериодического сигнала сложнее. Если выделить какую-либо дискретную частоту, соответствующую в случае периодической функции  $s(t)$   $n$ -й гармонике, тогда для непериодической функции, совпадающей с  $s(t)$  на временном участке, равном ее периоду, мы приходим к понятию спектральной плотности непериодического сигнала. Спектральная плотность непериодического сигнала определяется путем деления амплитуды  $n$ -й гармонике периодического сигнала на полосу частот, отделяющую соседние линии дискретного спектра, т.е. спектральная плотность имеет смысл плотности амплитуд на оси частот и имеет размерность [амплитуда/Герц].

Поэтому огибающая сплошного спектра (модуль спектральной плотности или АЧХ сигнала) непериодической функции и огибающая линейчатого спектра периодической функции (полученной из непериодической путем продолжения ее с периодом  $T$ ) совпадают по форме и различаются только масштабом.

Обратите внимание на то обстоятельство, что размерности спектра периодической и непериодической функции разные. Особенность спектра непериодической функции позволяет очень рельефно выявить система Mathcad, работающая с размерными величинами данных и переменных. Поэтому рекомендуем использовать эту возможность Mathcad при выполнении задания.

## **7. РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО И ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

Описываемые ниже методы анализа сложных электрических цепей применимы для цепей постоянного и переменного тока. Задача анализа предполагает, что в схеме, содержащей  $p$  ветвей и  $q$  узлов, известны параметры источников ЭДС (величина ЭДС и внутреннее сопротивление каждого источника) и величины всех сопротивлений, входящих в каждую ветвь схемы. Искомыми являются токи в ветвях схемы. Следовательно, для решения поставленной задачи нужно научиться правильно составлять и решать системы независимых линейных уравнений с количеством уравнений в них, равным числу ветвей схемы.

Напомним, что под ветвью электрической цепи будем понимать ту ее часть, в пределах которой сохраняется постоянной величина проходящего по ней тока, а под узлом – точку, в которой соединяются более двух ветвей анализируемой схемы.

### **7.1. Анализ сложной электрической схемы путем составления уравнений по первому и второму законам Кирхгофа**

Первый закон Кирхгофа выражает равенство нулю алгебраической суммы токов в узле. По первому закону Кирхгофа можно составить  $q-1$  независимых уравнений.

Второй закон Кирхгофа выражает равенство алгебраической суммы ЭДС в замкнутом контуре алгебраической сумме падений напряжений, создаваемых токами, протекающими по сопротивлениям, входящим в этот замкнутый контур. Для электрической схемы, содержащей  $p$  ветвей, по второму закону достаточно составить  $p-(q-1)=p-q+1$  независимых уравнений.

Для того чтобы уравнения по второму закону Кирхгофа, а следовательно, и сами контуры были независимыми, достаточно, чтобы каждый последующий контур отличался от предыдущего хотя бы одной новой ветвью.

Возьмем в качестве примера схему, приведенную на рис.7.1, и составим для расчета токов в ней систему уравнений по законам Кирхгофа.

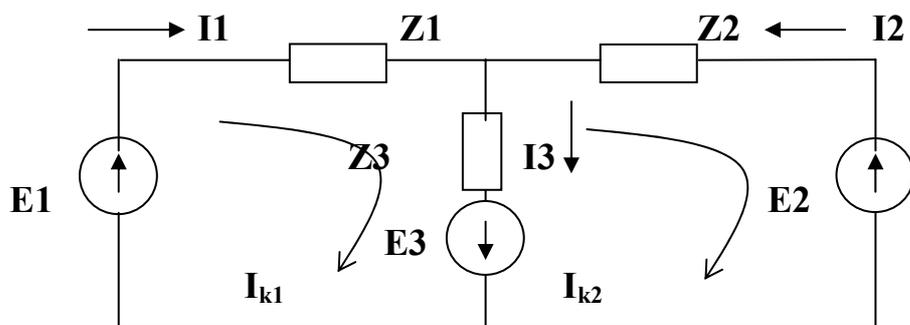


Рис. 7.1. Электрическая схема с контурными токами

Данная схема содержит три ветви и два узла. Поэтому для расчета токов, протекающих в каждой ветви, надо составить систему из трех независимых уравнений. Поскольку в схеме есть два узла, то можно составить только одно уравнение по первому закону Кирхгофа. Два других уравнения составляем по второму закону Кирхгофа. Итак, получаем такую систему:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0, \\ I_1 Z_1 + I_3 Z_3 &= E_1 + E_3, \\ -I_2 Z_2 - I_3 Z_3 &= E_2 - E_3. \end{aligned}$$

Решение этой системы не вызывает никаких трудностей, поэтому перейдем к составлению уравнений по методу контурных токов.

## 7.2. Анализ сложной электрической схемы путем составления системы уравнений по методу контурных токов

Идея метода контурных токов заключается в том, что с его помощью можно вместо составления одной системы уравнений, содержащей  $p$  неизвестных (по числу ветвей), составить две формально не зависящих друг от друга системы уравнений, одна из которых составляется по первому закону Кирхгофа и содержит  $q-1$  уравнений, а другая – по второму закону Кирхгофа и содержит  $p-(q-1)$  уравнений. В настоящее время этот метод не имеет того значения, какое он имел до появления современных вычислительных средств, так как в былые времена решать систему из  $p$  уравнений было намного сложнее, чем решать две системы, одна из которых содержала  $q-1$  уравнений, а другая –  $p-(q-1)$  уравнений.

Составим уравнения для расчета токов в той же схеме, что приведена на рис.7.1, на которой токи  $I_{k1}$  и  $I_{k2}$  - контурные токи. Токи  $I_1$  и  $I_2$ , протекающие по сопротивлениям  $Z_1$  и  $Z_2$ , равны соответствующим контурным токам  $I_{k1}$  и  $I_{k2}$ . При этом ток, протекающий по сопротивлению  $Z_3$ , общему для обоих контуров, равен разности контурных токов  $I_{k1}$  и  $I_{k2}$ , так как эти токи направлены в ветви с  $Z_3$  навстречу друг другу. Само собой разумеется, что если положительное направление искомого тока в ветви с  $Z_3$  принять совпадающим с направлением тока  $I_1$ , то ток в ветви с  $Z_3$  будет равен  $I_1 - I_2$ . В противном случае он будет равен  $I_2 - I_1$ .

Надо сказать, что контурные токи являются фиктивными, поскольку их введение предполагает постоянство тока в каждой точке замкнутого контура, хотя на самом деле в различных частях этого контура протекают разные токи.

Уравнения системы, составленной по методу контурных токов, получают следующим образом. Число уравнений, записываемых для контурных токов по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров, т.е. для электрической схемы с числом узлов  $q$  и числом ветвей  $p$  достаточно записать  $p-(q-1)$  уравнений. Так, в схеме рис.7.1  $q=2$ ,  $p=3$ , следовательно, число уравнений, соответствующих числу независимых контуров, равно  $3-(2-1)=2$ .

Положительные направления контурных токов задаются произвольно. Направление обхода каждого контура принимается обычно совпадающим с выбранным положительным направлением контурного тока. Поэтому при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа падение напряжения от данного контурного тока в собственном сопротивлении контура берется со знаком плюс. При этом собственное сопротивление контура представляет собой сумму комплексных сопротивлений, входящих в контур.

Падение напряжения, создаваемого током смежного контура в общем сопротивлении, принадлежащем одновременно двум или нескольким контурам, берется со знаком минус, если контурные токи в этом сопротивлении направлены навстречу друг другу, как это имеет место в схеме рис.7.1, где в качестве положительного направления обоих контурных токов выбрано направление по ходу часовой стрелки. Для схемы рис.7.1 можно записать два уравнения в соответствии со вторым законом Кирхгофа, а именно:

$$\begin{aligned}(Z_1 + Z_2)I_{k1} - Z_2I_{k2} &= E_1 + E_3, \\ -Z_3I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 &= -E_2 - E_3.\end{aligned}$$

Здесь  $Z_1 + Z_2$  и  $Z_2 + Z_3$  - собственные сопротивления контуров;  $Z_3$  - общее сопротивление контуров.

Решая эту систему, мы находим величины контурных токов, а так как контурные токи в данном случае совпадают с реальными токами  $I_1$  и  $I_2$ , то приходим к выводу, что  $I_1 = I_{k1}$  и  $I_2 = I_{k2}$ .

Чтобы определить величину тока  $I_3$ , полученную систему уравнений надо дополнить уравнением, составленным по первому закону Кирхгофа:

$$I_{k1} + I_{k2} - I_3 = 0.$$

Отсюда легко находим  $I_3 = I_{k1} + I_{k2}$ .

### **7.3.Примеры решения задач на анализ сложных электрических схем постоянного и переменного тока**

**Задача 1.** Составить электрическую схему, содержащую десять ветвей и шесть узлов. Предусмотреть в каждой ветви наличие источника постоянной ЭДС. Составить систему уравнений по первому и второму законам Кирхгофа. Решить эту систему. Записать выражения для токов в каждой ветви. Составить

систему уравнений по методу контурных токов. Решить эту систему. Сравнить результаты расчета схемы, полученные двумя разными способами.

Задача 2. Составить электрическую схему, содержащую десять ветвей и шесть узлов. Предусмотреть в каждой ветви наличие источника переменной ЭДС, постоянного сопротивления и хотя бы одной реактивности. Составить систему уравнений по первому и второму законам Кирхгофа. Решить эту систему. Записать выражения для токов в каждой ветви. Затем составить систему уравнений по методу контурных токов. Решить эту систему. Сравнить результаты расчета, полученные двумя разными способами.

#### **7.4.Методические рекомендации по решению задач**

При проведении анализа следует придерживаться следующего плана работы.

1.Сосчитать число ветвей в схеме и обозначить его буквой  $p$  (в данном случае  $p=10$ ).

2.Обозначить направления токов в каждой ветви. Этот пункт выполняется формально, так как истинное направление тока до решения задачи неизвестно. Если направление какого-то тока будет выбрано ошибочно, то в ответе получится знак минус. Тогда мы изменим направление стрелки, указывающей направление этого тока.

3.Выбрать в качестве положительного направления обхода замкнутого контура направление движения часовой стрелки.

4.При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа направления токов, втекающих в узел, будем считать положительным, а вытекающих – отрицательным.

5.При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа падения напряжения, создаваемые током, движущимся в положительном направлении, брать со знаком плюс, а падения напряжения, создаваемые током, движущимся в отрицательном направлении, - со знаком минус.

#### **7.5.Решение задачи анализа сложной электрической схемы постоянного тока методом составления уравнений по первому и второму законам Кирхгофа**

В качестве примера рассмотрим анализ схемы, приведенной на рис.7.2. На этой схеме обозначим направления токов в каждой ветви. Затем составим уравнения по первому закону Кирхгофа. Таких уравнений можно составить только  $q-1=6-1=5$ . Еще пять уравнений составим по второму закону Кирхгофа. Для этого выберем независимые контуры  $E1-R1-R2-E2$ ,  $E2-R2-R3-E3-R5-E5-R4-E4$ ,  $E5-R5-E6-R6-R8-E8-R7-E7$ ,  $E8-R8-E9-R9$ ,  $R9-E9-R10-R10$  и для каждого выбранного контура запишем уравнение по второму закону Кирхгофа.

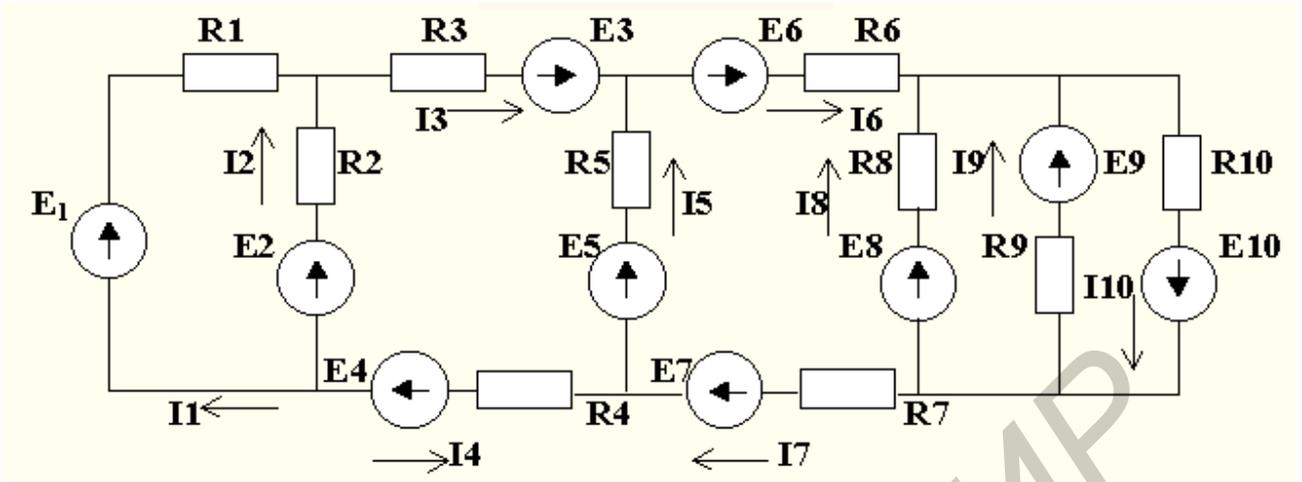


Рис. 7.2. Электрическая схема постоянного тока

Получим следующую систему уравнений для расчета токов в электрической схеме.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1 + I_2 + I_4 = 0, \\ I_3 + I_5 - I_6 = 0, \\ I_4 - I_5 + I_7 = 0, \\ I_6 + I_8 + I_9 - I_{10} = 0, \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2, \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_5 R_5 = E_2 + E_3 + E_4 - E_5, \\ I_5 R_5 + I_6 R_6 + I_7 R_7 - I_8 R_8 = E_5 + E_6 + E_7 - E_8, \\ I_8 R_8 - I_9 R_9 = E_8 - E_9, \\ I_9 R_9 + I_{10} R_{10} = -E_9 + E_{10}. \end{cases}$$

Теперь подставим численные значения. Будем полагать, что  $R_1=1$  Ом,  $R_2=2$  Ом, ...,  $R_{10}=10$  Ом,  $E_1=1$  В,  $E_2=2$  В, ...,  $E_{10}=10$  В.

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1 + I_2 + I_4 = 0, \\ I_3 + I_5 - I_6 = 0, \\ I_4 - I_5 + I_7 = 0, \\ I_6 + I_8 + I_9 - I_{10} = 0, \\ I_1 - 2I_2 = -1, \\ 2I_2 + 3I_3 - 4I_4 - 5I_5 = 4, \\ 5I_5 + 6I_6 - 7I_7 - 8I_8 = 10, \\ 8I_8 - 9I_9 = -1, \\ 9I_9 + 10I_{10} = 1. \end{cases}$$

Представим эту систему в виде матричного уравнения  $Ax=B$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 10 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение матричного уравнения получаем в виде

$$x = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.068 \\ 0.534 \\ 0.603 \\ -0.603 \\ 0.257 \\ 0.86 \\ 0.86 \\ 0.308 \\ 0.385 \\ 1.553 \end{bmatrix}.$$

Число в четвертой строке решения уравнения записано со знаком минус. Это говорит о том, что предварительно установленное направление тока в соответствующей ветви схемы выбрано ошибочно и должно быть изменено на обратное.

Делаем вывод, что в схеме протекают токи  $I_1 = 0,068 \text{ A}$ ,  $I_2 = 0,534 \text{ A}$ , ...,  $I_{10} = 1,553 \text{ A}$ .

### 7.6. Решение задачи анализа сложной электрической схемы постоянного тока путем составления уравнений по методу контурных токов

Теперь составим уравнения по методу контурных токов для рассматриваемой схемы, приведенной на рис.7.2. Поскольку схема содержит шесть узлов, то по второму закону Кирхгофа для контурных токов  $I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}, I_{k4}, I_{k5}$  составим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_{k1}(R1 + R2) - I_{k2}R2 = E1 - E2, \\ -I_{k1}R2 + I_{k2}(R2 + R3 + R4 + R5) - I_{k3}R5 = E2 + E3 + E4 - E5, \\ -I_{k2}R5 + I_{k3}(R5 + R6 + R7 + R8) - I_{k4}R8 = E5 + E6 + E7 - E8, \\ -I_{k3}R8 + I_{k4}(R8 + R9) - I_{k5}R9 = E8 - E9, \\ -I_{k4}R9 + I_{k5}(R9 + R10) = E9 + E10. \end{cases}$$

После подстановки в эту систему числовых параметров она приобретает вид

$$\begin{cases} 3I_{k1} - 2I_{k2} = -1, \\ -2I_{k1} + 14I_{k2} - 5I_{k3} = 4, \\ -5I_{k2} + 26I_{k3} - 8I_{k4} = 10, \\ -8I_{k3} + 17I_{k4} - 9I_{k5} = -1, \\ -9I_{k4} + 19I_{k5} = 19. \end{cases}$$

Решая эту систему с помощью пакета Mathcad, получаем для контурных токов  $I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}, I_{k4}, I_{k5}$  матричное уравнение  $Cy=D$ , где

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 14 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 26 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 19 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 10 \\ -1 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Решение, полученное с помощью пакета, имеет вид

$$y = C^{-1}D = \begin{bmatrix} 0.056 \\ 0.583 \\ 0.855 \\ 1.165 \\ 1.553 \end{bmatrix},$$

откуда следует, что величины контурных токов равны  $I_{k1} = 0,056 \text{ A}$ ,  $I_{k2} = 0,583 \text{ A}$ ,  $I_{k3} = 0,855 \text{ A}$ ,  $I_{k4} = 1,165 \text{ A}$ ,  $I_{k5} = 1,553 \text{ A}$ . Обратившись к схеме, приведенной на рис. 7.2, видим, что контурный ток  $I_{k1}$  совпадает с током, протекающим в первой ветви, поэтому делаем вывод, что  $I_1 = I_{k1}$ . Аналогично получаем  $I_3 = -I_4 = I_{k2}$ ,  $I_6 = I_7 = I_{k3}$ ,  $I_{10} = I_{k5}$ . Остается определить токи  $I_2, I_5, I_8$  и  $I_9$ . Для расчета этих токов составим систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_3 + I_5 - I_6 = 0, \\ I_{k4} - I_{k5} + I_9 = 0, \\ I_{k3} - I_{k4} + I_8 = 0, \end{cases}$$

решить которую не представляет никакого труда. Сравнивая оба решения, приходим к выводу, что задача решена правильно. Проведенный анализ показывает, что действительно, если бы мы решали эту задачу вручную, т.е. без применения средств вычислительной техники, то применение метода контурных токов предпочтительнее, поскольку решение двух систем линейных уравнений, состоящих из пяти уравнений каждая, значительно проще, чем решение одной системы с десятью неизвестными. Однако применение ЭВМ для решения систем линейных уравнений сводит это преимущество метода контурных токов на нет.

### 7.7. Потенциальная диаграмма цепи постоянного тока

Исследования электрических цепей, изучение режимов их работы значительно упрощаются, если для цепи ввести вспомогательное понятие о потенциале. При вычислении потенциалов отдельных точек электрической цепи потенциал точки, соединенной с землей, принимается равным нулю. При этом под потенциалом точки электрической цепи понимают напряжение между этой точкой и землей.

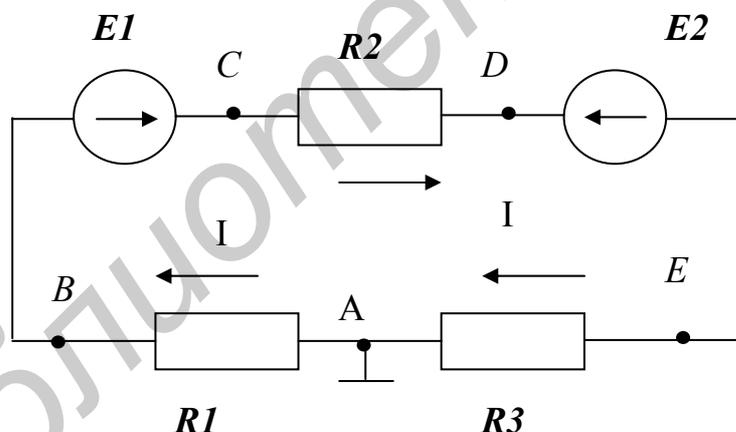


Рис.7.3 Схема электрической цепи постоянного тока

Графическое изображение распределения потенциала в электрической цепи в зависимости от сопротивления участков цепи называется *потенциальной диаграммой*. При построении потенциальной диаграммы по оси абсцисс откладываются в масштабе сопротивления в том порядке, в котором они следуют друг за другом в цепи ( иногда вместо сопротивлений по оси абсцисс откладываются длины участков, из которых составлена цепь), а по оси ординат – значения потенциала.

**Пример 7.3.** Построить потенциальную диаграмму для цепи, изображенной на рис.7.3, по следующим данным:  $R1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $r_{01} = r_{02} = r_0 = 1 \text{ Ом}$ ,  $E1 = 18 \text{ В}$ ,  $E2 = 46 \text{ В}$ .

Сначала вычислим ток в цепи:

$$I = \frac{E2 - E1}{R1 + R2 + R3 + r_{01} + r_{02}} = 2 \text{ А.}$$

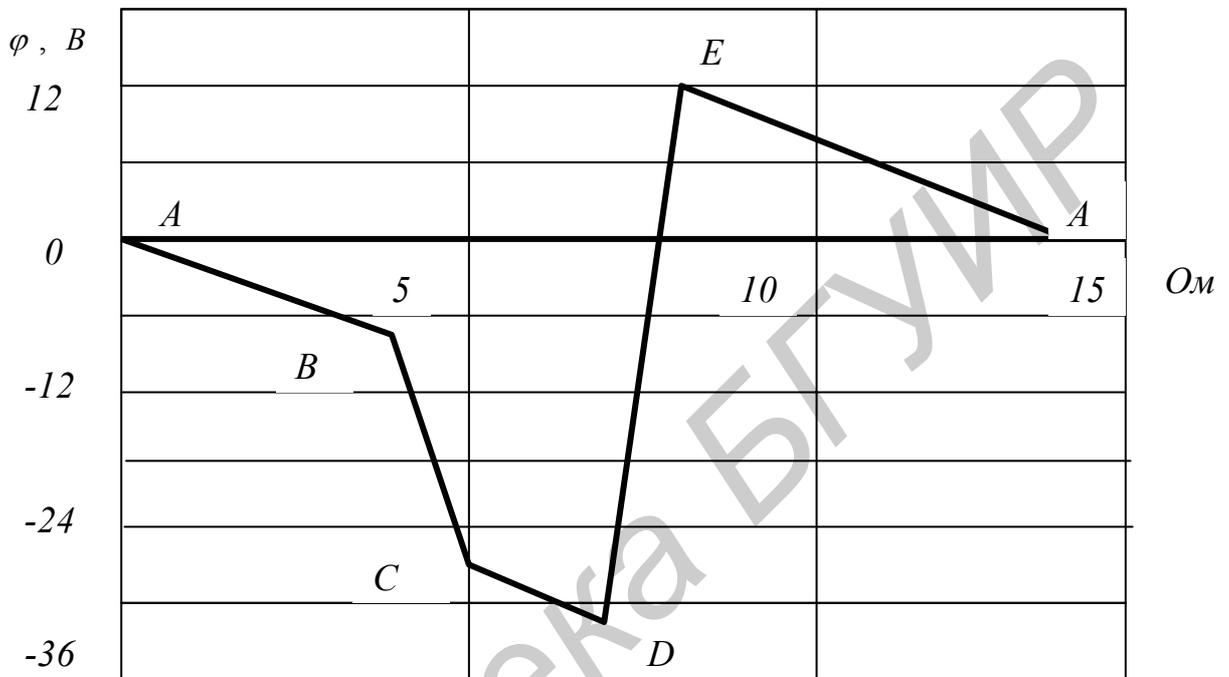


Рис. 7.4. Потенциальная диаграмма к схеме рис.7.3

Проведем расчет потенциалов всех точек. Потенциал точки  $A$ , соединенной с землей, примем равным нулю:  $\varphi_A = 0$ . Из уравнения  $\varphi_A - \varphi_B = I R1$  найдем:  $\varphi_B = \varphi_A - I R1 = -8 \text{ В}$ .

Между точками  $B$  и  $C$  в анализируемой цепи включен источник ЭДС, работающий в режиме потребителя. Разность потенциалов на его зажимах  $\varphi_B - \varphi_C = E1 + I r_0$ , откуда  $\varphi_C = -28 \text{ В}$ .

Потенциал точки  $D$  найдем из уравнения  $\varphi_D - \varphi_C = E2 - I R2$ , откуда  $\varphi_D = -32 \text{ В}$ .

Положительный зажим второго источника ЭДС, работающего в режиме генератора, присоединен к точке  $E$ , а отрицательный – к точке  $D$ , поэтому  $\varphi_E - \varphi_D = E2 - I r_0$ , откуда  $\varphi_E = 12 \text{ В}$ .

Наконец из уравнения  $\varphi_E - \varphi_A = I R3$  убеждаемся, что  $\varphi_A = \varphi_E - I R3 = 0$ .

На рис.7.4 представлена потенциальная диаграмма к схеме рис.7.3, построенная по полученным результатам.

### 7.8.Решение задачи анализа сложной электрической схемы переменного тока путем составления уравнений по первому и второму законам Кирхгофа

Составим уравнения по первому и второму законам Кирхгофа для схемы, показанной на рис. 7.5.

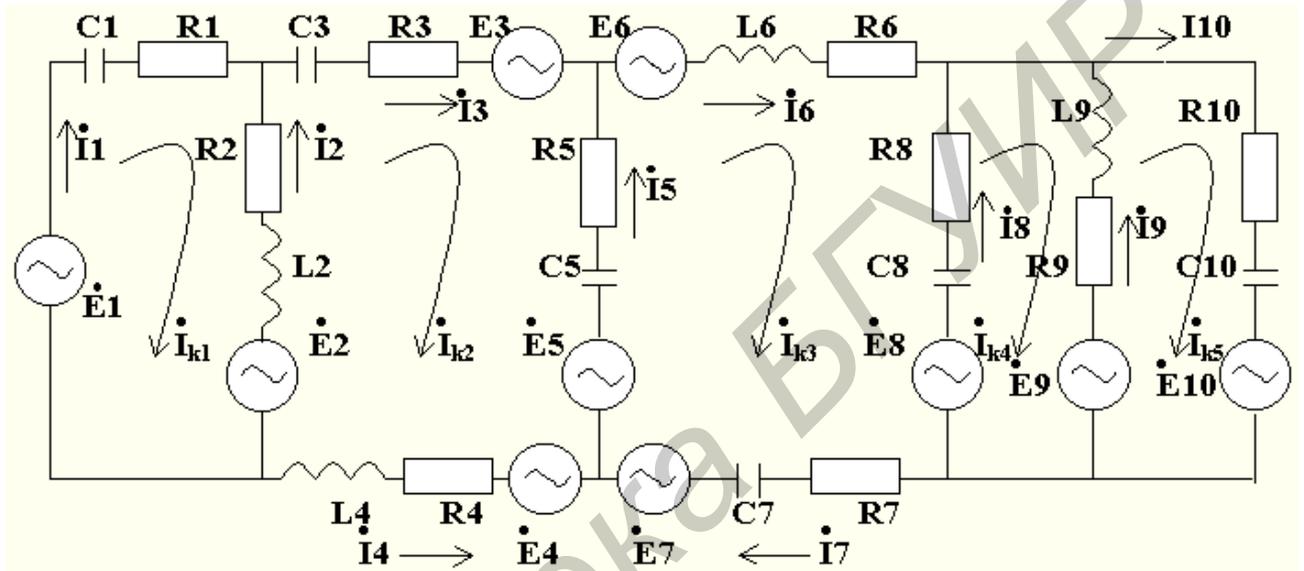


Рис.7.5. Электрическая схема переменного тока

Имеем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1(R_1 - iX_{C1}) + I_2(R_2 + iX_{L2}) = E_1 - E_2, \\ -I_2(R_2 + iX_{L2}) + I_3(R_3 - iX_{C3}) + I_4(R_4 + iX_{L4}) - I_5(R_5 - iX_{C5}) = \\ = E_2 + E_3 + E_4 - E_5, \\ I_5(R_5 - iX_{C5}) + I_6(R_6 + iX_{C6}) + I_7(R_7 - iX_{C7}) - I_8(R_8 - iX_{C8}) = \\ = E_5 + E_6 + E_7 - E_8, \\ I_8(R_8 - iX_{C8}) - I_9(R_9 + iX_{L9}) = E_8 - E_9, \\ I_9(R_9 + iX_{L9}) + I_{10}(R_{10} - iX_{C10}) = E_9 + E_{10}, \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_3 + I_5 - I_6 = 0, \\ I_6 + I_8 + I_9 + I_{10} = 0, \\ -I_7 - I_8 - I_9 + I_{10} = 0, \\ -I_4 - I_5 + I_7 = 0. \end{array} \right.$$

Первые пять уравнений этой системы записаны по второму закону Кирхгофа для независимых контуров, указанных стрелками на рис.7.5. Следующие пять

уравнений записаны в соответствии с требованиями первого закона Кирхгофа. Методика составления этих уравнений полностью совпадает с уже рассмотренной выше при составлении систем уравнений, описывающих работу схемы, анализ которой проводился на постоянном токе. Однако легко видеть, что уровень анализа электрических схем на переменном токе значительно выше уровня анализа схем, работающих на постоянном токе. Поэтому, чтобы овладеть методикой такого анализа, надо хорошо изучить возможности анализа схем на постоянном токе, и, только усвоив практику составления уравнений для схем на постоянном токе, можно переходить к анализу схем, работающих на переменном токе.

После подстановки числовых данных в каждое уравнение системы ее можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} I_1 (1 - i) - I_2 (2 + 2i) = -1, \\ -I_2 (2 + 2i) + I_3 (3 - 3i) + I_4 (4 + 4i) - I_5 (5 - 5i) = 4, \\ I_5 (5 - 5i) + I_6 (6 + 6i) + I_7 (7 - 7i) - I_8 (8 - 8i) = 10, \\ I_8 (8 - 8i) - I_9 (9 + 9i) = -1, \\ I_9 (9 + 9i) + I_{10} (10 - i10) = 19, \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_3 + I_5 - I_6 = 0, \\ I_6 + I_8 + I_9 - I_{10} = 0, \\ -I_7 - I_8 - I_9 + I_{10} = 0, \\ -I_4 - I_5 + I_7 = 0. \end{cases}$$

Представим в матричной форме эту систему  $Cu=D$ , где матрицы  $C$  и  $D$  составлены из комплексных в общем случае коэффициентов, стоящих перед соответствующими токами в записанной системе уравнений и отражающих наличие реактивных сопротивлений в анализируемой схеме. Применительно к рассматриваемой задаче эти матрицы имеют следующий вид:

$$C = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-2i & 3-3i & 4+4i & -5+5i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-5i & 6+6i & 7-7i & -8+8i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8-8i & -9-9i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9+9i & 10-10i \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 10 \\ -1 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение этого уравнения получаем в форме  $y = C^{-1} D$ , где  $y$  представляет собой вектор-столбец, составленный из токов в соответствующих ветвях анализируемой схемы. Таким образом, элементом этого вектора-столбца является ток, протекающий в соответствующей ветви схемы. В общем случае этот ток представляет собой комплексное число, которое отражает комплексный характер анализируемой схемы. Благодаря использованию средств вычислительной техники решение таких систем не представляет трудности, однако требуется некоторый опыт, чтобы правильно интерпретировать результаты выполненных расчетов. По данным параметрам анализируемой схемы решение системы уравнений, описывающей ее поведение, можно записать в следующем виде:

$$y = \begin{bmatrix} 0.2 + 0.348i \\ 0.424 - 0.35i \\ 0.624 - 0.002i \\ -0.624 + 0.002i \\ 0.116 + 0.268i \\ 0.74 + 0.267i \\ 0.74 + 0.267i \\ -0.105 + 0.331i \\ 0.35 + 0.038i \\ 0.984 + 0.635i \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что  $I_1 = 0,2 + 0,348 A$ ,  $I_2 = 0,424 - 0,35i A$ ,  $I_3 = 0,624 - 0,002i A$ ,  
 $I_4 = -0,624 + 0,002i A$ ,  $I_5 = 0,116 + 0,0268i A$ ,  $I_6 = 0,74 + 0,267i A$ ,  $I_7 = 0,74 + 0,276i A$ ,  
 $I_8 = -0,105 + 0,331i A$ ,  $I_9 = 0,35 + 0,038i A$ ,  $I_{10} = 0,984 + 0,635i A$ .

### 7.9. Решение задачи анализа сложной электрической схемы переменного тока путем составления уравнений по методу контурных токов

Теперь составим уравнения по методу контурных токов. Оставим те же контуры, что и при решении предыдущей задачи, и выберем те же направления контурных токов. Поскольку схема содержит шесть узлов, то мы можем выделить пять независимых контуров с протекающими в них контурными токами и составить пять независимых линейных уравнений для расчета контурных токов, протекающих в контурах этой схемы.

Имеем

$$\begin{aligned}
 I_{k1}[R1 + R2 + i(X_{L2} - X_{C1})] - I_{k2}(R2 + iX_{L2}) &= E1 - E2, \\
 -I_{k1}(R2 + iX_{L2}) + I_{k2}[R2 + R3 + R4 + R5 + \\
 + i(X_{L2} - X_{C3} + X_{L4} - X_{C5})] - I_{k3}(R8 - iX_{C5}) &= E2 + E3 + E4 - E5, \\
 -I_{k2}(R2 - iX_{C2}) + I_{k3}[R5 + R6 + R7 + R8 + \\
 + i(-X_{C5} + X_{L6} - X_{C7} - X_{C8})] - I_{k4}(R8 - iX_{C8}) &= E5 + E6 + E7 - E8, \\
 -I_{k3}(R8 - iX_{C8}) + I_{k4}[R8 + R9 + i(-X_{C8} + X_{L9})] - \\
 - I_{k5}(R9 + iX_{L9}) &= E8 - E9, \\
 -I_{k4}(R9 + iX_{L9}) + I_{k5}[R9 + R10 + i(X_{L9} - X_{C10})] &= E9 + E10
 \end{aligned}$$

Эта система после подстановки в нее числовых величин  $E1=1$  В,  $E2=2$  В, ...,  $E10=10$  В,  $R1=1$  Ом,  $R2=2$  Ом, ...,  $R10=10$  Ом,  $C1=1$  Ом,  $C3=3$  Ом,  $C5=5$  Ом,  $C7=7$  Ом,  $C8=8$  Ом,  $C10=10$  Ом,  $L2=2$  Ом,  $L4=4$  Ом,  $L6=6$  Ом,  $L9=9$  Ом принимает вид

$$\begin{cases}
 I_{k1}(3 + i) - I_{k2}(2 + 2i) = -1, \\
 -I_{k1}(2 + 2i) + I_{k2}(14 - 2i) - I_{k3}(5 - 5i) = 4, \\
 -I_{k2}(5 - 5i) + I_{k3}(26 - 14i) - I_{k4}(8 - 8i) = 10, \\
 -I_{k3}(8 - 8i) + I_{k4}(17 + i) - I_{k5}(9 + 9i) = -1, \\
 -I_{k4}(9 + 9i) + I_{k5}(19 - i) = 19.
 \end{cases}$$

Для решения этой системы с помощью пакета Mathcad 2000 запишем ее в матричной форме  $Ez = F$ , где

$$E = \begin{bmatrix} 3+i & -2-2i & 0 & 0 & 0 \\ -2-2i & 14-2i & -5+5i & 0 & 0 \\ 0 & -5+5i & 26-14i & -8+8i & 0 \\ 0 & 0 & -8+8i & 17+i & -9-9i \\ 0 & 0 & 0 & -9-9i & 19-i \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 10 \\ -1 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Решение этого уравнения:

$$z = E^{-1} F = \begin{bmatrix} 0.2 + 0.348i \\ 0.624 - 0.002i \\ 0.74 + 0.267i \\ 0.635 + 0.597i \\ 0.984 + 0.635i \end{bmatrix}$$

Поскольку контурные токи  $I_{k1} = I_1$ ,  $I_{k2} = I_3 = I_4$ ,  $I_{k3} = I_6 = I_7$ ,  $I_{k5} = I_{10}$ , то теперь остается найти только токи  $I_2$ ,  $I_5$ ,  $I_8$ ,  $I_9$ . Для их расчета составим систему уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_3 + I_5 - I_6 = 0, \\ I_8 = I_{k3} - I_{k4}, \\ I_9 = I_{k4} - I_{k5}. \end{cases}$$

Решение этой системы приводит к тем же результатам, что и решение системы уравнений, составленной по первому и второму законам Кирхгофа.

### 7.10. Построение векторной диаграммы сложной электрической схемы

Легко видеть, что полученные результаты позволяют немедленно построить векторную диаграмму для токов, протекающих в схеме, приведенной на рис.7.6.

Можно также построить и векторную диаграмму всех напряжений на элементах анализируемой схемы, предварительно рассчитав их величины с помощью пакета Mathcad 2000 Professional или микрокалькулятора

Для построения векторной диаграммы напряжений выбираем контур, например,  $E1 - C1 - R1 - R2 - L2 - E2$ . Легко вычислить падение напряжения на резисторе  $R1$ :  $\vec{U}_{R1} = \bar{I}_1 R1$ . Вектор напряжения  $\vec{U}_{R1}$  коллинеарен

вектору тока  $\dot{I}_1$ . Вычислим напряжение на емкости  $C1$ :  $\dot{U} = \dot{I} X_{C1}$ . Вектор напряжения  $\dot{U}_{C1}$  отстает от вектора напряжения  $\dot{U}_{R1}$  на  $90^\circ$ . Поэтому его легко построить, изобразив в конце вектора напряжения  $\dot{U}_{R1}$  вектор напряжения  $\dot{U}_{C1}$ . Тем самым мы получили вектор, соответствующий напряжению  $\dot{U}_{R1C1} = \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{C1}$ , как векторную сумму напряжений на резисторе  $R1$  и емкости  $C1$ .

Затем переходим к построению вектора напряжения, выделяющегося на цепи  $R2 - L2$ . По этой цепи протекает ток  $\dot{I}_2$ . Поэтому аналогичным образом строим вектор напряжения на резисторе  $R2$  по направлению, совпадающему с направлением вектора  $\dot{I}_2$ . Затем строим вектор напряжения, действующего на индуктивности  $L2$  и т.д.

Векторные диаграммы токов и напряжений, построенные для всей электрической схемы, дают наглядное представление о распределении величин и фаз токов и напряжений, действующих на каждом элементе схемы. Они позволяют легко определить величину напряжения между двумя любыми точками рассматриваемой схемы. Поэтому построение векторных диаграмм токов и напряжений для сложных схем представляет собой основу схемотехнических расчетов.

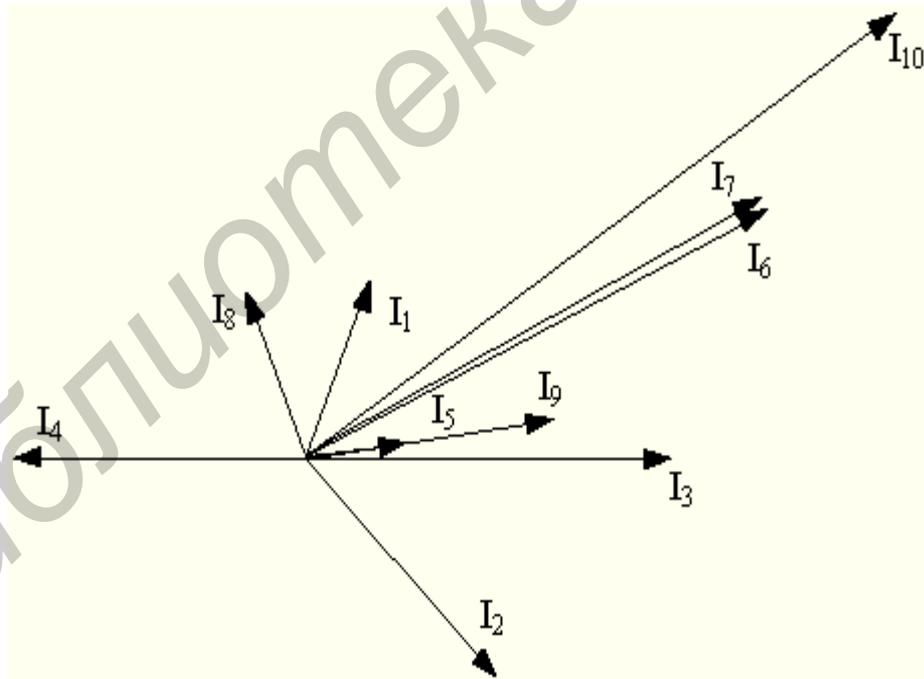


Рис.7.6. Векторная диаграмма токов, протекающих в схеме, приведенной на рис.7.5

Выполнив задание на хорошем уровне, каждый студент сможет получить необходимые навыки проведения схемотехнического анализа цепей переменного тока.



Примечание. Курсор в Mathcad 2000 Professional может иметь три формы: + (crosshair), | (insertion point) и (selection box). Если нажать клавишу “стрелка вниз”, то selection box переходит в insertion point. Если нажать клавишу “стрелка вверх”, то insertion point переходит в selection box.

## 8. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

### 8.1. Анализ АЧХ и ФЧХ простейших радиотехнических цепей

1. Изучить возможности пакета Mathcad составления функций пользователя и научиться составлять эти функции применительно к анализу простейших разделительных, дифференцирующих, интегрирующих и фильтрующих звеньев электрических цепей.

Изучить работу пакета Mathcad с размерными переменными, для чего надо прочесть подраздел 6.6. «Работа с размерными переменными» настоящего пособия.

Освоить работу с графическим модулем пакета.

2. Составить аналитическое выражение для комплексного коэффициента передачи разделительной RC-цепи. Выбрать параметры этой цепи, когда она будет выполнять роль разделительной или дифференцирующей цепи для прямоугольного импульса, длительность которого равна 10 мкс.

Составить функцию пользователя для расчета АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи разделительной или дифференцирующей цепи.

Построить графики АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи.

Научиться использовать логарифмический масштаб представления этих зависимостей.

3. Составить аналитическое выражение для коэффициента передачи интегрирующей RC-цепи. Выбрать параметры этой цепи для прямоугольного импульса длительностью 10 мкс.

4. Построить графики АЧХ и ФЧХ фильтров Баттерворта а также схемы Вина - Робертсона.

5. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю для защиты.

### 8.2. Спектральный анализ непериодических сигналов

1. Ознакомиться со встроенной функцией  $\text{fft}(v)$  пакета, представляющей собой преобразование Фурье действительных данных вектора  $v$  и позволяющей проводить спектральный анализ непериодических сигналов. Прочесть подраздел 1.3 «Спектральный анализ непериодического сигнала» и решить пример 1.2 с помощью пакета, т.е. построить временные графики экспоненциального сигнала, а также АЧХ и ФЧХ его спектра.

2. Построить график прямоугольного положительного импульса, имеющего длительность 10 мкс и амплитуду 10 В, и вычислить его спектр. Записать данные расчета для первых 10 точек анализа.

Построить графики АЧХ и ФЧХ спектра прямоугольного импульса. Оценить техническую ширину спектра прямоугольного импульса. На оси частот отметить частоты с нулевыми амплитудами и установить длительность импульса сначала 1 мкс, а затем 100 мкс. Сравнить распределение частот с нулевыми амплитудами для трех рассмотренных случаев. Убедиться в выполнении равенства, согласно которому произведение длительности импульса на техническую ширину его спектра приблизительно равно единице для импульсов разных длительностей.

3. Вычислить спектр симметричного треугольного импульса с длительностью по основанию 20 мкс и амплитудой 20 В. Построить графики его АЧХ и ФЧХ. Оценить техническую ширину спектра треугольного импульса. На оси частот отметить частоты с нулевыми амплитудами. Установив длительность треугольного импульса по основанию 2 мкс, а затем 200 мкс, зарисовать АЧХ и ФЧХ получающихся спектров.

4. Выполнить аналогичные операции для импульса, представляющего собой положительную полуволну гармонического напряжения частотой 500 кГц и амплитудой 20 В.

5. Убедиться в выполнении равенства: произведение длительности импульса на техническую ширину его спектра приблизительно равно единице для импульсов разных форм и длительностей.

6. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю для защиты.

### **8.3. Спектральный анализ периодических сигналов**

1. Ознакомиться с идеологией программирования, заложенной в пакет Mathcad. Прочитать подраздел 1.3 «Спектральный анализ периодических сигналов» данного методического пособия. Составить программу вычисления коэффициентов ряда Фурье. Заново решить пример 1.1 из подраздела 1.3.2 с помощью пакета, т.е. построить графики прямоугольного сигнала, а также АЧХ и ФЧХ его спектра.

2. Вычислить спектр последовательности положительных прямоугольных импульсов, имеющих амплитуду 10 В, длительность 10 мкс и следующих друг за другом с частотой 10 кГц. Построить АЧХ и ФЧХ для этой последовательности. На оси частот отметить частоты с нулевыми амплитудами гармонических составляющих. Сначала уменьшив длительность импульса в два раза, а затем увеличив ее до 20 мкс, построить новые графики АЧХ и ФЧХ спектра этих последовательностей.

3. Вычислить спектры последовательностей положительных прямоугольных импульсов, имеющих амплитуду 10 В, длительность 10 мкс и следующих друг за другом с частотами 5; 10 и 20 кГц. Зарисовать графики АЧХ и ФЧХ в едином масштабе.

4. Вычислить спектр последовательности положительных треугольных импульсов с периодом 200 мкс и длительностью 20 мкс и амплитудой 10 В. Построить АЧХ и ФЧХ спектра этой последовательности. На оси частот отметить

частоты гармонических составляющих с нулевыми амплитудами. Оценить техническую ширину спектра этой последовательности. Сначала уменьшив длительность импульса в два раза, а затем увеличив ее до 40 мкс, построить новые графики АЧХ и ФЧХ спектра этих последовательностей.

5. Вычислить спектры последовательностей симметричных положительных треугольных импульсов, имеющих амплитуду 10 В, длительность по основанию 10 мкс и следующих друг за другом с частотами 5; 10 и 20 кГц. Зарисовать графики АЧХ и ФЧХ в едином масштабе.

6. Выполнить аналогичные операции по расчету спектра для последовательности импульсов, представляющих собой положительную половину гармонического напряжения с амплитудой 10 В и длительностью по основанию 5; 10, 20 мкс, следующих друг за другом с частотой 5; 10 и 20 кГц.

7. Убедиться в выполнении равенства: произведение длительности импульса на техническую ширину его спектра приблизительно равно единице для импульсов разных форм и длительностей.

8. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю для защиты.

#### 8.4. Модулированные колебания

1. Записать аналитическое выражение для тонально-модулированного по амплитуде колебания, представляющего собой напряжение с амплитудой  $U_m = 100$  В, частотой несущего колебания  $f_n = 100$  кГц, частотой модулирующего колебания  $F_m = 5$  кГц и коэффициентом модуляции  $m = 0,5$ . Построить временные диаграммы этого колебания с помощью пакета Mathcad, приняв условно отношение  $f_n/F_m = 20$  для различных величин коэффициента модуляции  $m = 0,2; 0,7$  и  $1,0$ .

2. Записать аналитическое выражение для тонально-модулированного по частоте сигнала с частотной модуляцией, представляющего собой напряжение с амплитудой несущей  $U_m = 100$  В, частотой несущего колебания  $f_n = 100$  кГц, частотой модулирующего колебания  $F_m = 5$  кГц и индексом частотной модуляции  $\beta$ . Построить временные диаграммы этого колебания с помощью пакета Mathcad, приняв условно отношение  $f_n/F_m = 20$  для различных величин индекса частотной модуляции  $\beta = 0,8; 2,405; 10$ . С помощью пакета Mathcad вычислить спектральный состав этого колебания для каждого случая и представить его в виде спектральной диаграммы.

3. Записать аналитическое выражение для прямоугольного радиоимпульса с частотно-модулированным заполнением, имеющего длительность 1 мс, амплитуду 5 В при изменении мгновенной частоты по закону  $f(t) = f_{\min} + kt$ ,  $0 \leq t \leq 1$  мс, где  $f_{\min} = 5 \cdot 10^4$  Гц,  $k = 2 \cdot 10^7$  с<sup>-2</sup> – скорость изменения частоты. С помощью пакета Mathcad построить временные диаграммы этого колебания при различных величинах  $k$ . Рассчитать спектральный состав этого колебания и представить его в виде спектральной диаграммы.

4. Построить временные диаграммы АМ-, ЧМ- и ФМ-колебаний, модулированных треугольным импульсом, и провести их сравнительный анализ. Пред-

ставить информацию о спектральном составе этих колебаний в виде спектральных диаграмм, построенных для каждого колебания.

5. Рассмотреть классическим методом с помощью пакета Mathcad прохождения прямоугольного радиоимпульса с линейной внутриимпульсной модуляцией через колебательный контур. Рассмотреть случаи, когда выходное напряжение выделяется на индуктивности, резисторе или емкости контура.

### 8.5. Случайные сигналы

1. С помощью пакета Mathcad найти взаимную корреляционную функцию двух прямоугольных импульсов с параметрами  $U_1 = 1$  мВ,  $\tau_1 = 1$  мс и  $U_2 = 2$  мВ,  $\tau_2 = 0,5$  мс. Оценить интервал корреляции.

2. Спектральная плотность мощности  $W(\omega)$  стационарного процесса  $x(t)$  имеет прямоугольную форму. С помощью пакета Mathcad определить дисперсию и корреляционную функцию процесса, указать их размерности и дать графическое представление корреляционной функции.

3. Дан стационарный случайный процесс  $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , В. В этом процессе амплитуда  $U_0$  и частота  $\omega_0$  - детерминированные величины,  $\varphi$  - случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . С помощью пакета Mathcad найти его ковариационную и корреляционную функции и представить их в виде графиков.

4. Задан узкополосный нормальный процесс  $x(t)$  с корреляционной функцией  $R_x(\tau) = A \exp(-\beta^2 \tau^2 / 2) \cos \omega \tau$ . Определить энергетический спектр огибающей этого процесса. Для  $A = 0,25$  В<sup>2</sup> построить график спектральной плотности огибающей.

5. Корреляционная функция имеет вид треугольника. С помощью пакета Mathcad рассчитать энергетический спектр и построить графики спектра и корреляционной функции для различных длительностей корреляционной функции.

6. Вычислить корреляционную функцию синусоидального сигнала. Результаты расчета представить в виде графиков.

7. Корреляционная функция некоторого процесса представляет собой экспоненциальную функцию с показателем степени, возведенным в степень  $\gamma$ . Составить программу расчета энергетического спектра и представить результаты расчета в виде графиков для  $\gamma = 2$ .

8. В результате измерений получена осциллограмма случайного процесса  $y(t)$ . С помощью сплайн-интерполяции аппроксимировать исходную функцию  $y(t)$ , рассчитать корреляционную функцию и энергетический спектр процесса  $y(t)$ .

### 8.6. Исследование прохождения непериодических сигналов через линейные радиотехнические цепи

1. Изучить теоретическую часть поставленной задачи, прочитав подраздел 6.1 «Порядок проведения анализа прохождения сигналов через линейную цепь» данного учебного пособия. Изучить работу встроенной функции  $\text{ifft}(v)$ , выполняющей обратное преобразование Фурье, соответствующее функции встроен-

ной функции  $\text{fft}(v)$ , прочитав подраздел 6.2 «Встроенные функции пакета Mathcad спектрального анализа сигналов». Выполнить операции над прямоугольным импульсом, описанные в подразделе 6.3 «Анализ прохождения непериодического сигнала через линейную цепь» настоящего учебного пособия.

Изучить порядок выполнения расчета параметров выходного импульса по приложению 2 «Анализ прохождения одиночного импульса через простейшую интегрирующую RC-цепь»

2. Убедиться в работоспособности пары преобразований Фурье  $\text{fft}(v)$  и  $\text{ifft}(v)$ , вычислив сначала спектр, например, положительного прямоугольного импульса длительностью 10 мкс и амплитудой 10 В, а затем к полученному спектру применить функцию  $\text{ifft}(v)$  и построить график восстановленного сигнала. То же самое проделать для импульса треугольной формы и импульса, представляющего собой положительную полуволну периода гармонического сигнала.

3. Составить аналитическое выражение функции пользователя для дифференцирующей, интегрирующей или разделительной RC-цепи. Рассчитать спектр выходного сигнала, осуществив перемножение выражений для спектра входного сигнала и комплексного коэффициента передачи.

4. Применить к полученному спектру выходного сигнала встроенную функцию  $\text{ifft}(v)$ . Составить аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ выходного сигнала разделительной, дифференцирующей или интегрирующей RC-цепочек.

5. Выполнить эти операции также для изучения условий прохождения сигнала через компенсированный делитель напряжения, фильтр Баттерворта, мостовую схему Вина - Робинсона.

6. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю для защиты.

### **8.7. Исследование прохождения периодических сигналов через линейные радиотехнические цепи**

1. Изучить теоретическую часть поставленной задачи, прочитав подраздел 6.1 «Порядок проведения анализа прохождения сигналов через линейную цепь» данного учебного пособия. Выполнить операции над прямоугольным импульсом, описанные в подразделе 6.4 «Анализ прохождения периодического сигнала через линейную цепь» настоящего пособия.

Изучить программу вычисления коэффициентов ряда Фурье, приведенную в приложении 2 «Анализ прохождения последовательности прямоугольных импульсов через простейшую интегрирующую RC-цепь».

2. Воспользоваться программой вычисления коэффициентов ряда Фурье, которая составлялась при расчете спектра периодического сигнала. То же самое проделать для последовательностей импульсов треугольной формы и импульсов, представляющих собой положительные полуволны периода гармонического сигнала.

3. Составить аналитическое выражение функции пользователя для дифференцирующей, интегрирующей или разделительной RC-цепи. Рассчитать спектр

выходного сигнала, осуществив перемножение выражений для спектра входного сигнала и комплексного коэффициента передачи.

4. Применить к полученному спектру выходного сигнала процедуру вычисления коэффициентов ряда Фурье с помощью составленной для этого программы. Составить аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ выходного сигнала делительной, дифференцирующей или интегрирующей RC-цепочек.

5. Выполнить эти операции также для изучения условий прохождения сигнала через компенсированный делитель напряжения, фильтр Баттерворта, мостовую схему Вина - Робинсона.

6. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю для защиты.

### **8.8. Анализ спектров дискретизированных сигналов**

1. Ознакомиться со встроенными функциями  $\text{fft}(v)$  и  $\text{ifft}(v)$  пакета, представляющими собой преобразования Фурье действительных данных вектора  $v$  и позволяющими проводить спектральный анализ непериодических сигналов. Прочитать подраздел 6.5 «Анализ прохождения дискретизированного сигнала через линейную цепь» и выполнить примеры, приведенные в этом параграфе, с помощью пакета, т.е. построить графики прямоугольного сигнала, заданного своими выборками, а также АЧХ и ФЧХ его спектра.

2. Построить график прямоугольного положительного импульса, имеющего длительность 10 мкс и амплитуду 10 В, заданного своими тремя, пятью или десятью выборками, и вычислить спектры для каждого случая. Записать данные расчета для первых десяти точек анализа.

Построить графики АЧХ и ФЧХ спектра прямоугольного импульса. Оценить техническую ширину спектра прямоугольного импульса. На оси частот отметить частоты с нулевыми амплитудами и установить длительность импульса сначала 1 мкс, а затем 100 мкс. Сравнить распределение частот с нулевыми амплитудами для трех рассмотренных случаев.

3. Вычислить спектр симметричного треугольного импульса с длительностью по основанию 20 мкс и амплитудой 20 В, заданного своими выборками. Построить графики его АЧХ и ФЧХ. Оценить техническую ширину спектра треугольного импульса. На оси частот отметить частоты с нулевыми амплитудами. Установив длительность треугольного импульса по основанию 2 мкс, а затем 200 мкс, зарисовать АЧХ и ФЧХ получающихся спектров.

4. Выполнить аналогичные операции для импульса, представляющего собой положительную полуволну гармонического напряжения частоты 500 кГц и имеющего амплитуду 20 В, заданного своими выборками, следующими с одинаковыми интервалами, но различной длительности.

5. Убедиться в выполнении равенства: произведение длительности импульса на техническую ширину его спектра приблизительно равно единице для импульсов разных форм и длительностей.

6. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю для защиты.

## 8.9. Анализ прохождения дискретизированных сигналов через линейные цепи

1. Изучить теоретическую часть поставленной задачи, прочитав подраздел 6.5 «Анализ прохождения дискретизированного сигнала через линейную цепь» данного учебного пособия. Изучить работу встроенной функции  $\text{ifft}(v)$ , выполняющей обратное преобразование Фурье, соответствующее встроенной функции  $\text{fft}(v)$ , прочитав подраздел 6.2 «Встроенные функции пакета Mathcad спектрального анализа сигналов». Выполнить операции над прямоугольным импульсом, описанные в подразделе 6.3 «Анализ прохождения непериодического сигнала через линейную цепь» настоящего учебного пособия.

2. Убедиться в работоспособности пары преобразований Фурье  $\text{fft}(v)$  и  $\text{ifft}(v)$  также применительно к дискретизированным сигналам, вычислив сначала спектр, например, положительного прямоугольного импульса длительностью 10 мкс и амплитудой 10 В, заданного своими тремя - пятью выборками. Затем к полученному спектру применить функцию  $\text{ifft}(v)$  и построить график восстановленного сигнала. Обратит внимание на то, что функция  $\text{ifft}(v)$  восстанавливает именно дискретизированный сигнал. То же самое проделать для импульса треугольной формы и импульса, представляющего собой положительную полуволну периода гармонического сигнала.

3. Составить аналитическое выражение функции пользователя для дифференцирующей, интегрирующей или разделительной RC-цепи. Рассчитать спектр выходного сигнала, осуществив перемножение выражений для спектра входного сигнала и комплексного коэффициента передачи.

4. Применить к полученному спектру выходного сигнала встроенную функцию  $\text{ifft}(v)$ . Составить аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ выходного сигнала разделительной, дифференцирующей или интегрирующей RC-цепочек.

5. Выполнить эти операции также для изучения условий прохождения сигнала через компенсированный делитель напряжения, фильтр Баттерворта, мостовую схему Вина - Робинсона.

6. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю для защиты.

## 8.10. Анализ сложных цепей постоянного тока

1. Ознакомиться с возможностями пакета решения систем линейных алгебраических уравнений. Прочитать подраздел 7.11 «Решение системы матричных уравнений с помощью пакета Mathcad» данного пособия.

2. Получить у преподавателя схему, содержащую десять ветвей и пять узлов. Все другие элементы этой схемы также указаны на ней.

3. Составить систему уравнений для расчета, предварительно прочитав подразделы 7.1 «Анализ сложной электрической схемы путем составления уравнений по первому и второму законам Кирхгофа», 7.2 «Анализ сложной электрической схемы путем составления системы уравнений по методу контурных токов» данного учебного пособия. Используя вычислительные возможности пакета, решить эту систему.

4. Составить пять новых уравнений в соответствии с требованиями второго закона Кирхгофа по методу контурных токов и решить ее. Если получатся те же величины токов, что и при решении системы уравнений с десятью неизвестными, то можно считать, что задача решена правильно. Если величины токов окажутся другими, то нужно искать ошибку, появившуюся при составлении либо первой, либо второй систем уравнений.

5. Построить потенциальную диаграмму рассмотренной схемы. Как это сделать, описано в подразделе 7.7 «Потенциальная диаграмма цепи постоянного тока» настоящего пособия.

6. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю.

### **8.11. Анализ сложных цепей переменного тока**

1. Получить у преподавателя новую схему, в которой заменены источники постоянного напряжения источниками переменного напряжения с теми же внутренними сопротивлениями, а постоянные резисторы дополнены либо конденсаторами, либо индуктивностями. Составить матричные уравнения для расчета токов в этой схеме и решить их.

2. Затем составить еще пять уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа и решить их. Если ответы совпадут с данными, полученными в предыдущем пункте, то можно считать, что уравнения составлены правильно, и приступить к составлению векторной диаграммы, иллюстрирующей работу анализируемой схемы.

3. Построить векторную диаграмму рассмотренной схемы. Как это сделать, подробно описано в подразделе 7.10 «Построение векторной диаграммы сложной электрической схемы» настоящего пособия.

4. Оформить отчет о проделанной работе и представить преподавателю для защиты.

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Методические материалы по курсу «Основы радиоэлектроники и схемотехники» для студентов специальности «Экономика и управление предприятием (фирмой)» заочной формы обучения. /Сост. В.Т.Першин, Д.В.Гололобов–Мн.: БГУИР, 2000. С.30.

2. Першин В.Т. Методическое пособие по расчету сложных цепей на ПЭВМ с использованием пакета Mathcad PLUS 6 для студентов специальности «Э.01.03.00. Экономика и управление на предприятии». –Мн.: БГУИР, 1999. С.18.

3. Атабеков Г.Н. Основы теории цепей. -М.: Энергия, 1969. 386 с.

4. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. – М.: Энергия, 1972. 830 с.

5. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. –М.: Сов. радио, 1986. 608 с.

6. Евдокимов В.Е. Теоретические основы электротехники. – М.: Высш. шк., 1985. 450 с.