Конечномерные моменты стационарных случайных процессов и их оценки

Муха В.С., Козячий А.Н.
Кафедра ИТАС, факультет информационных технологий и управления
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Беларусь
e-mail: mukha@bsuir.by

***Аннотация* – Разработана теория конечномерных моментов многомерно-матричных стационарных случайных процессов, получены выражения их оценок по одной реализации и по набору реализаций, доказаны свойства синтезированных оценок, обсуждены области применения.**

Ключевые слова: случайные процессы, конечномерные распределения, конечномерные моменты, оценки моментов распределений

I. Введение

Семейство конечномерных распределений случайного процесса является основным понятием теории случайных процессов. В то же время понятие конечномерных моментов случайного процесса едва ли встречается в литературе. Между тем конечномерные моменты находят применение в практических приложениях. Например, конечномерные моменты первого и второго порядков используются в алгоритмах линейного статистического прогнозирования случайных процессов [1, 2]. Традиционно эти моменты определяются не непосредственно, а с помощью функции математического ожидания и ковариационной функции случайного процесса, т.е. моментных функций первого и второго порядков. Возникает также необходимость в использовании конечномерных моментов порядков выше второго. Так, в алгоритме квадратичного статистического прогнозирования случайной последовательности [3] используются конечномерные моменты 3-го и 4-го порядков. Естественным представляется желание получить эти конечномерные моменты с помощью моментных функций 3-го и 4-го порядков. Однако на этом пути возникают непреодолимые трудности, связанные с громоздкостью и плохой формализуемостью условий симметрии моментных функций, особенно для стационарных процессов. При отсутствии формализованных условий симметрии становится невозможным получение оценок моментных функций для всех возможных комбинаций значений их аргументов. Работа же с конечномерными моментами непосредственно по их определению снимает все препятствия на пути получения их оценок. В данной работе разрабатывается теория конечномерных моментов случайного процесса и синтезируются их оценки по отдельной реализации стационарного случайного процесса и по набору реализаций. Для достижения исчерпывающей теоретической и алгоритмической общности рассматривается случай многомерно-матричного случайного процесса.

II. Конечномерные моменты многомерно-матричного случайного процесса

Многомерно-матричным (p-мерно-матричным) случайным процессом $\xi(\omega,t)$ назовем организованную в виде p-мерной матрицы совокупность действительных функций $\xi_{i_{(p)}}(\omega,t)$, $i_{(p)}=(i_1,i_2,...,i_p)$, $i_\alpha=\overline{1,n_\alpha}$, $\alpha=\overline{1,p}$, которые при каждом фиксированном значении переменной $t\in R$ являются измеримыми функциями $\omega\in\Omega$ на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$.

Для p-мерно-матричного случайного процесса будем применять обозначение:

$$\xi(t)=(\xi_{i_{(p)}}(t)),\ i_{(p)}=(i_1,i_2,...,i_p). \quad (1)$$

Начальным конечномерным (s-мерным) моментом k-го порядка p-мерно-матричного случайного процесса (1) называется $k(p+1)$-мерная матрица

$$\bar{\nu}^{(k)}_{\xi_s}(\bar{t}_s)=E(\bar{\xi}^k_s(\bar{t}_s)),$$

где $\bar{\xi}_s(\bar{t}_s)=(\xi_{i_{(p)}}(t_j))$, $j=\overline{1,s}$, $\bar{t}_s=(t_1,...,t_s)$, – набор s сечений случайного процесса ($(p+1)$-мерная матрица), $\bar{\xi}^k_s(\bar{t}_s)$ – k-я $(0,0)$-свернутая степень матрицы $\bar{\xi}_s(\bar{t}_s)$ [4].

Аналогичным образом определяются центральные конечномерные моменты, а также смешанные начальные и центральные конечномерные моменты случайных процессов.

Конечномерные моменты можно было бы определить также посредством моментных функций соответствующих порядков случайного процесса. Однако, как отмечено выше, моментные функции порядка выше второго обладают трудно формализуемыми свойствами симметрии, особенно для стационарных процессов, что не позволяет практически реализовать эту возможность.

Преимуществом конечномерных моментов случайных процессов по сравнению с моментными функциями является то, что для стационарных случайных процессов они, как и конечномерные распределения, инвариантны к сдвигу по оси времени. Это позволяет сравнительно легко получать их оценки и, как следствие, использовать в практических приложениях.

III. Оценки конечномерных моментов многомерно-матричных случайных процессов

Пусть известна реализация $x(jT)$, $j=\overline{1,n}$, T – интервал дискретизации, p-мерно-матричной стационарной случайной последовательности $\xi(jT)$, для которой существуют s-мерные начальные и центральные моменты k-го порядка $\bar{\nu}^{(k)}_{\xi_s}(\bar{t}_s)$,

$\overline{\mu}^{(k)}_{\xi_s}(\bar{t}_s)$, и требуется по этой реализации найти оценки $\overline{\overline{\nu}}^{(k)}_{\xi_s}(\bar{t}_s)$, $\overline{\overline{\mu}}^{(k)}_{\xi_s}(\bar{t}_s)$ этих моментов.

В силу инвариантности конечномерных моментов стационарной случайной последовательности к сдвигу τ по оси времени можно воспользоваться минимальным сдвигом $\tau = T$ и предложить оценки вида

$$\overline{\overline{\nu}}^{(k)}_{\xi_s} = \frac{1}{n-s+1}\sum_{j=1}^{n-s+1}(\bar{x}_s(\overline{jT}))^k ,$$

$$\overline{\overline{\mu}}^{(k)}_{\xi_s} = \frac{1}{n-s+1}\sum_{j=1}^{n-s+1}(\overset{*}{\bar{x}}_s(\overline{jT}))^k ,$$

где $\bar{x}_s(\overline{jT}) = \left(x(jT),...,x((j+s-1)T)\right)$ – набор из s сечений реализации с начальным сечением в момент времени jT, а $\overset{*}{\bar{x}}_s(\overline{jT}) = \bar{x}_s(\overline{jT}) - \overline{\overline{\nu}}^{(1)}_{\xi_s}$. Аналогично получаем оценки смешанных конечномерных моментов $\overline{\nu}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r}$, $\overline{\mu}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r}$ в случае примыкающих друг к другу наборов сечений $\overline{\xi}_s$ и $\overline{\eta}_r$:

$$\overline{\overline{\nu}}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r} = \frac{1}{n-s-r+1}\sum_{j=1}^{n-s-r+1}\left(\bar{x}_s(\overline{jT})\right)^k\left(\bar{x}_r(\overline{(j+s)T})\right)^q ,$$

$$\overline{\overline{\mu}}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r} = \frac{1}{n-s-r+1}\sum_{j=1}^{n-s-r+1}\left(\overset{*}{\bar{x}}_s(\overline{jT})\right)^k\left(\overset{*}{\bar{x}}_r(\overline{(j+s)T})\right)^q$$

где

$$\overset{*}{\bar{x}}_s(\overline{jT}) = \bar{x}_s(\overline{jT}) - \overline{\overline{\nu}}^{(1)}_{\xi_s} ,$$

$$\overset{*}{\bar{x}}_r(\overline{(j+s)T}) = \bar{x}_r(\overline{(j+s)T}) - \overline{\overline{\nu}}^{(1)}_{\xi_r} .$$

На практике встречается случай, когда вместо одной достаточно длинной реализации стационарной случайной последовательности имеется ряд более коротких реализаций, полученных в различные интервалы времени, и требуется по ним получить оценки конечномерных моментов последовательности. Необходимость модификации оценок для этого случая обоснована в работе [5].

Пусть имеется m независимых реализаций $x_\nu(jT)$ различной длины l_ν, $\nu = \overline{1,m}$, p-мерно-матричной стационарной случайной последовательности $\xi(jT)$, и требуется по ним получить оценки $\overline{\overline{\nu}}^{(k)}_{\xi_s}$, $\overline{\overline{\mu}}^{(k)}_{\xi_s}$, $\overline{\overline{\nu}}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r}$, $\overline{\overline{\mu}}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r}$ генеральных моментов $\overline{\nu}^{(k)}_{\xi_s}$, $\overline{\mu}^{(k)}_{\xi_s}$, $\overline{\nu}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r}$, $\overline{\mu}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r}$ этой последовательности. В этом случае целесообразно сначала найти оценки, приведенные выше, по отдельным реализациям, а затем усреднить полученные оценки по всем реализациям. При усреднении оценок по множеству реализаций целесообразно их суммировать с весами, пропорциональными количеству наблюдений, по которым они получены. В результате будем иметь следующие оценки:

$$\overline{\overline{\nu}}^{(k)}_{\xi_s} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{l_\nu-s+1}(\bar{x}_{\nu,s}(\overline{jT}))^k ,$$

$$\overline{\overline{\mu}}^{(k)}_{\xi_s} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{l_\nu-s+1}(\overset{*}{\bar{x}}_{\nu,s}(\overline{jT}))^k ,$$

$$\overline{\overline{\nu}}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{l_\nu-s-r+1}(\bar{x}_{\nu,s}(\overline{jT}))^k(\bar{x}_{\nu,r}(\overline{(j+s)T}))^q ,$$

$$\overline{\overline{\mu}}^{(k+q)}_{\xi_s,\eta_r} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{l_\nu-s-r+1}(\overset{*}{\bar{x}}_{\nu,s}(\overline{jT}))^k(\overset{*}{\bar{x}}_{\nu,r}(\overline{(j+s)T}))^q ,$$

где

$$M = u - m(s-1),\ N = u - m(s+r-1),\ u = \sum_{i=1}^{m} l_i ,$$

$$\bar{x}_{\nu,s}(\overline{jT}) = \left(x_\nu(jT),...,x_\nu((j+s-1)T)\right),$$

$$\overset{*}{\bar{x}}_{\nu,s}(\overline{jT}) = \bar{x}_{\nu,s}(\overline{jT}) - \overline{\overline{\nu}}^{(1)}_{\xi_s}(\overline{jT}) .$$

Предложенные оценки являются несмещенными, либо асимптотически несмещенными и, при выполнении определенных условий эргодичности, состоятельными.

[1] V. S. Mukha. "Statistical weather forecasting". Computer Data Analysis and Modeling. Robustness and Computer Intensive Methods. Proceeding of the Seventh International Conference (Minsk, September, 6 – 10, 2004). Vol. 2, pp. 142 – 145.

[2] В. С. Муха. "Статистическое векторное прогнозирование количественных характеристик погоды". Информационные системы и технологии (IST'2004). Материалы междунар. конф., Минск, Беларусь, 8 – 10 ноября 2004. Часть 2. Минск., 2004, с. 195 – 200.

[3] В. С. Муха, А.Н. Козячий. "Квадратичное прогнозирование векторной случайной последовательности". Доклады БГУИР. 2011, № 3 (57), с. 25 – 28.

[4] В.С. Муха. "Анализ многомерных данных". Минск, Технопринт, 2004, 368 с.

[5] В. С. Муха, А.Ф. Трофимович. "Оценивание математического ожидания и ковариационной функции стационарной случайной последовательности усреднением по времени и множеству реализаций". Доклады БГУИР. 2009, № 1 (39), с. 93 – 99.