

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Выполнено сравнение точности оценивания параметров линейной модели по измерениям её входа и выхода с ошибками методами классической линейной регрессии и симметричной аппроксимации. Получены условия предпочтительного использования рассмотренных методов.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача линейной аппроксимации детерминированного объекта по измерениям с ошибками входных и выходных переменных, не получившая к настоящему времени достаточно полного разрешения.

I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Будем исходить из следующей математической модели рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} H &= \alpha + \beta \Xi, \\ X &= \Xi + E, \\ Y &= H + \Delta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $H = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ — векторы фактических значений входной и выходной переменных соответственно,

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — векторы измеренных значений входной и выходной переменных соответственно,

$E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — векторы независимых ошибок измерений значений входной и выходной переменных соответственно, распределенных по нормальному закону: $\varepsilon_i = N(0, \sigma_\varepsilon)$, $\delta_i = N(0, \sigma_\delta)$, $i = \overline{1, n}$,

α, β — фактические значения параметров модели: постоянной составляющей и коэффициента усиления соответственно.

Требуется по результатам измерений значений переменных X, Y найти оценки $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ параметров модели α, β .

II. ОЦЕНИВАНИЕ ТОЧНОСТИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

В работе было выполнено сравнение точности оценок классической линейной регрессии [1] и симметричной аппроксимации [2, 3] для объекта со скалярными входом и выходом, в зависимости от значений параметров модели α, β , а также от значений с. к. о. ошибок измерений $\sigma_\varepsilon, \sigma_\delta$.

Будный Роман Игоревич, магистрант кафедры информационных технологий автоматизированных систем БГУИР, budnyjj@gmail.com.

Научный руководитель: Муха Владимир Степанович, профессор кафедры информационных технологий автоматизированных систем БГУИР, доктор технических наук, профессор, mukha@bsuir.by.

Значения ξ_i выбирались из равномерного в $[0, 10]$ распределения. Для получения каждой оценки (α, β) использовались результаты ста наблюдений (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, $n = 100$.

В качестве величины, характеризующей точность оценок, использовалось среднее Евклидово расстояние в пространстве параметров:

$$d = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sqrt{(\hat{\alpha}_j - \alpha)^2 + (\hat{\beta}_j - \beta)^2}. \quad (2)$$

Расчеты расстояний (2) производились в узлах сетки значений $\sigma_\varepsilon, \sigma_\delta$ в прямоугольнике $[0, 2] \times [0, 2]$ с шагом 0,1. В каждом узле сетки вычислялось $k = 100$ оценок.

III. ВЫВОДЫ

Моделирование показало, что точность оценивания параметров зависит не только от с.к.о. ошибок измерений $\sigma_\varepsilon, \sigma_\delta$, но и от величины коэффициента усиления β .

Для принятия решения о том, какой метод даёт более точные оценки параметров, предлагается использовать следующее эмпирическое правило:

$$\sigma_\delta \leq (0,7 + |\beta|)\sigma_\varepsilon \quad (3).$$

Если условие (3) выполняется, то при данных значениях $\beta, \sigma_\varepsilon, \sigma_\delta$ симметричная аппроксимация даёт более точные оценки параметров, чем классическая линейная регрессия. В противном случае использование классической регрессии является более предпочтительным.

IV. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муха, В. С. Статистические методы обработки данных: учеб. пособие. / В. С. Муха // Минск: издат. центр БГУ. — 2009. — 183 с.
2. Pearson, K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space / K. Pearson // Philosophical Magazine. — 1901. — V. VI. — №2. — P. 559 — 572.
3. Муха, В. С. Симметричная аппроксимация векторных статистических данных линейными многообразиями / В. С. Муха // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2016. — №4. — С. 23–31.