

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информационных радиотехнологий

А. Н. Надольский

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия
для специальностей 1-39 01 01 «Радиотехника (по направлениям)»,
1-39 01 02 «Радиоэлектронные системы», 1-39 01 03 «Радиоинформатика»,
1-39 01 04 «Радиоэлектронная защита информации»*

Минск БГУИР 2014

УДК 621.396(075.8)
ББК 32.84я73
Н17

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра телекоммуникационных систем учреждения образования
«Высший государственный колледж связи»
(протокол №5 от 22.01.2014 г.);

доцент кафедры информационно-вычислительных систем учреждения
образования «Военная академия Республики Беларусь»,
доцент А. И. Хилько

Надольский, А. Н.

Н17 Теоретические основы радиотехники : учеб.-метод. пособие /
А. Н. Надольский. – Минск : БГУИР, 2014. – 202 с. : ил.
ISBN 978-985-543-052-1.

Изложены основы построения и методы анализа автогенераторов гармонических колебаний и параметрических устройств. Особое внимание уделено вопросам статистической радиотехники, в частности, методам анализа случайных сигналов и их преобразований, методам решения классических задач оптимальной обработки сигналов.

УДК 621.396(075.8)
ББК 32.84я73

ISBN 978-985-543-052-1

© Надольский А. Н., 2014
© УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники», 2014

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические основы радиотехники – это базовая дисциплина в системе профессиональной подготовки специалистов в области радиотехники, радиоэлектроники, радиоинформатики. Ее основной задачей является изучение методов и технических средств формирования и обработки радиотехнических сигналов. Знание этой информации необходимо для решения конкретных практических задач в области радиотехники, в частности, для создания современных радиотехнических систем, состоящих из большого количества различных устройств.

Данное учебно-методическое пособие является продолжением учебного пособия [1], в котором были изложены основы теории детерминированных сигналов, методы анализа линейных и нелинейных цепей, принципы построения и функционирования различных устройств, используемых в составе радиотехнических систем. Вне рамок настоящего пособия остались вопросы, связанные с построением и анализом автогенераторов гармонических колебаний и параметрических устройств. Кроме того, не рассматривались проблемы статистической радиотехники, в частности, методы анализа случайных сигналов и их преобразований, методы решения классических задач оптимальной обработки сигналов в условиях помех. Изложению указанных вопросов и посвящены разделы данного пособия.

В первом разделе с должным обоснованием раскрыты фундаментальные проблемы, связанные со структурной и функциональной организацией автогенераторов гармонических колебаний с внешней и внутренней обратной связью. При этом рассмотрена общая идеология построения автогенераторов, изложены особенности их схемного построения и методы анализа основных режимов работы. Во втором разделе с единых позиций рассмотрены проблемы построения и анализа параметрических усилителей. Основное внимание при этом обращалось на физическую интерпретацию теоретических положений.

В последующих разделах изложены фундаментальные проблемы статистической радиотехники, решение которых немислимо без широкого кругозора в области методов анализа случайных сигналов и их преобразований, методов решения классических задач оптимальной обработки сигналов в условиях помех. При этом рассмотрены статистические характеристики случайных сигналов и физико-математические аспекты их линейных и нелинейных преобразований различными радиотехническими устройствами. Приведены математические принципы и качественные показатели оптимальной обработки сигналов. С достаточным математическим и физическим обоснованием раскрыты проблемы оптимальной линейной фильтрации сигналов в условиях помех.

Содержание настоящего пособия базируется на материалах, имеющихся в опубликованной литературе, и материалах дисциплин, читаемых автором для студентов факультета радиотехники и электроники БГУИР.

При изложении основных вопросов учтены современное состояние теоретической радиотехники и ее роль в развитии информационных технологий.

Материал данного учебно-методического пособия является по существу базовым для подготовки инженеров по специальностям, связанным в той или иной мере с радиотехникой (радиотехника, телекоммуникационные системы, радиотехнические системы, радиоинформатика и др.). Успешное изучение этого материала позволит сформировать такой объем теоретических и физических знаний, который обеспечит понимание и последующее изучение основных проблем синтеза и анализа сложных радиотехнических систем, оценку их качества по различным критериям. Полученные знания могут быть использованы в качестве основы при изучении последующих специальных дисциплин.

Библиотека БГУИР

1. АВТОГЕНЕРАТОРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

1.1. Общие сведения

Генерирование электрических колебаний – это процесс формирования переменных напряжений или токов определенной формы и частоты. Устройства, реализующие этот процесс, называются генераторами. Они широко используются в составе радиотехнических систем (генераторы несущего колебания, генераторы тактовой частоты, гетеродины, задающие генераторы и др.).

В зависимости от режима работы различают генераторы с внешним возбуждением (ждущие генераторы) и генераторы с самовозбуждением (автогенераторы). Форма генерируемых колебаний может быть различной. Широко используют генераторы гармонических колебаний и генераторы релаксационных (импульсных) колебаний. Особую группу представляют генераторы случайных колебаний – так называемые генераторы шума.

Генераторы с внешним возбуждением – это устройства, осуществляющие формирование и усиление колебаний при поступлении на вход сигналов возбуждения. По существу это неавтономные устройства, которые переходят в режим генерации только под воздействием внешних сигналов запуска. Они позволяют из запускающих сигналов любой формы и длительности получить колебания (чаще всего импульсные) с необходимыми параметрами. Эти параметры зависят не только от схемы и режима работы, но и от параметров сигнала возбуждения. Схемотехнически генераторы с внешним возбуждением представляют собой усилители, работающие в регенеративном режиме. В этом режиме реализуется переходной процесс в цепи, охваченной положительной обратной связью.

Генераторы с самовозбуждением, или автогенераторы, работают автономно. Детальное изучение их функциональной и структурной организации позволяет получить полную информацию о физических основах процесса генерации, в частности, о механизме и условиях возникновения колебаний, режимах работы и степени устойчивости автоколебательной системы, методах обеспечения стабильности основных параметров. Это наиболее интересная и полезная информация для пользователей и разработчиков генераторов всех типов.

В дальнейшем речь будет идти об автогенераторах, формирующих гармонические (синусоидальные) колебания.

1.2. Схема и принцип работы автогенератора

Автогенератор гармонических колебаний преобразует энергию источника питания в энергию колебаний. Процесс такого преобразования сопровождается спектральными изменениями, которые возможны только при использовании нелинейных устройств. В свою очередь автогенератор должен содержать в

своей структуре цепи, обеспечивающие возникновение, усиление и поддержание на соответствующем уровне гармонических колебаний определенной частоты. Это возможно реализовать при использовании избирательных цепей и обратных связей, осуществляющих компенсацию потерь энергии в нагрузке автогенератора.

Таким образом, общую структурную схему автогенератора гармонических колебаний можно представить в виде рис. 1.1. В качестве нелинейного и усиливающего устройства можно применить нелинейный усилитель. Избирательная цепь может быть построена с использованием различных фильтров. Цепь обратной связи пассивная и линейная. Следовательно, автогенератор – это по существу нелинейный усилитель, охваченный положительной обратной связью.



Рис. 1.1. Структурная схема автогенератора

Принцип работы автогенератора рассмотрим от момента возникновения и нарастания колебаний до установления стационарного режима.

При включении источника питания в цепях генератора возникают свободные колебания. Эти колебания усиливаются, причем процесс усиления происходит непрерывно, благодаря наличию положительной обратной связи. Усилитель при этом выступает в роли устройства, регулирующего поступление энергии в нагрузку.

На начальном этапе, когда амплитуда колебаний мала, усиление происходит в линейном режиме. Усилитель передает в нагрузку за один период колебаний энергию, большую, чем энергия потерь. Благодаря этому происходит нарастание амплитуды колебаний на выходе генератора, т. е. генератор работает в так называемом переходном режиме.

По мере нарастания амплитуды колебаний начинает проявляться нелинейность вольт-амперной характеристики усилительного элемента и усиление уменьшается. При этом замедляется нарастание амплитуды колебаний. Нарастание амплитуды прекращается, когда усиление уменьшится до уровня, при котором усилитель передает в нагрузку энергию, равную энергии потерь. В гене-

раторе устанавливается стационарный режим, при котором формируются колебания с постоянной амплитудой (рис. 1.2). Следовательно, для стационарного режима основную роль играет нелинейность системы.

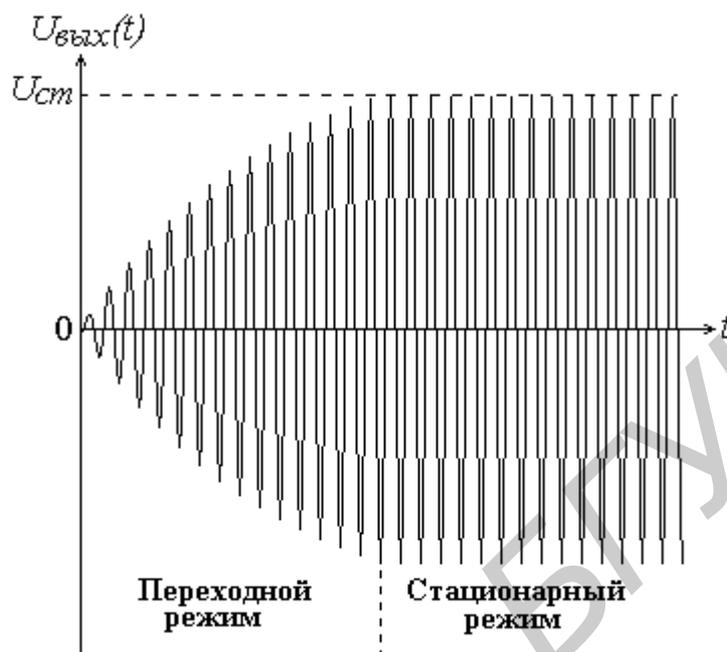


Рис. 1.2. Установление колебаний на выходе генератора

Коэффициент передачи нелинейного усилителя на частоте генерируемого напряжения зависит от амплитуды входного напряжения и определяется выражением

$$\dot{K}_y(U_{\text{вх}}) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}},$$

где $\dot{U}_{\text{вх}}$ и $\dot{U}_{\text{вых}}$ – комплексные амплитуды напряжений на входе и выходе усилителя.

В свою очередь коэффициент передачи цепи обратной связи равен

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{U}_{\text{ос}}}{\dot{U}_{\text{вых}}} = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{U}_{\text{вых}}}.$$

Очевидно, что в стационарном режиме соблюдается равенство

$$\dot{K}_y(U_{\text{вх}}) \cdot \dot{\beta} = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} \cdot \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{U}_{\text{вых}}} = 1.$$

Учитывая, что коэффициенты передачи усилительного звена и цепи обратной связи являются комплексными величинами, последнее равенство можно представить в виде следующих двух равенств:

$$K_y(U_{\text{вх}}) \cdot \beta = 1; \quad \varphi_y + \varphi_{\text{ос}} = 2\pi n,$$

где $K_y(U_{ex})$, β – коэффициенты усиления усилителя и цепи обратной связи на частоте генерируемых колебаний;
 φ_y и φ_{oc} – фазовые сдвиги сигналов, обеспечиваемые усилителем и цепью обратной связи на частоте генерируемых колебаний.

Данные равенства называются балансом амплитуд и балансом фаз.

В переходном режиме баланс амплитуд имеет вид $K_y(U_{ex}) \cdot \beta > 1$, так как только в этом случае возможно нарастание амплитуды выходного напряжения.

1.3. Способы создания обратной связи в автогенераторах

Способ создания обратной связи определяет тип автогенератора.

1. Автогенераторы с внешней обратной связью

Эти генераторы могут быть построены на базе LC -контуров с цепью, обеспечивающей компенсацию потерь. В качестве такой цепи используется усилитель с положительной обратной связью. Если контур подключен к транзистору усилителя двумя точками, а обратная связь является индуктивной и трансформаторной, то такие генераторы называются LC -генераторами. Если же контур подключен к транзистору усилителя тремя точками, а обратная связь является индуктивной (автотрансформаторной) или емкостной, то такие генераторы называются трехточечными LC -генераторами (индуктивная и емкостная трехточка).

Кроме того, автогенераторы с внешней обратной связью могут быть построены с использованием усилителей и избирательных RC -фильтров в цепи обратной связи. Такие генераторы называются RC -генераторами.

2. Автогенераторы с внутренней обратной связью

В таких генераторах нет четко выделенной цепи обратной связи. Эффект обратной связи сосредоточен внутри усилителя за счет использования в схеме элемента с отрицательным сопротивлением, т. е. с вольт-амперной характеристикой, имеющей падающий участок (туннельный диод).

Сформулируем основные проблемы, которые необходимо рассмотреть с целью анализа функциональной и структурной организации автогенераторов.

1. Математическая формулировка условий возникновения колебаний.
2. Анализ режимов самовозбуждения.
3. Анализ процесса генерации в динамике (с момента возбуждения до установления стационарного режима).
4. Анализ стационарного режима работы автогенератора с определением основных параметров генерируемых колебаний (амплитуды, частоты).
5. Схемотехнические решения основных типов автогенераторов гармонических колебаний.

Первые четыре проблемы будем рассматривать на примере LC -генератора.

Как было сказано выше, функциональная структура автогенераторов, формирующих гармонические (синусоидальные) колебания, содержит колебательную систему и электронные компоненты, которые обеспечивают возбуждение и усиление колебаний, а также компенсацию потерь в колебательной системе. Поэтому для получения начальных сведений об условиях возникновения автоколебаний целесообразно рассмотреть динамику основных процессов в простейшей колебательной системе – колебательном контуре.

1.4. Анализ процессов в колебательной системе

Для замкнутого колебательного контура (рис. 1.3) справедливо соотношение (второй закон Кирхгофа)

$$u_L + u_C + u_R = 0. \quad (1.1)$$

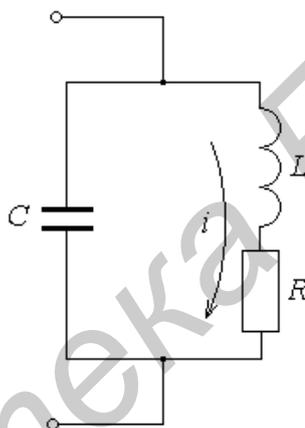


Рис. 1.3. Схема колебательного контура

Умножим обе части данного уравнения на ток i и учтем, что

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_R = iR.$$

Тогда получим

$$Li \frac{di}{dt} + Cu_C \frac{du_C}{dt} + Ri^2 = 0.$$

Слагаемые данной суммы – это мощности в реактивных и резистивном элементах. Равенство суммы нулю отражает баланс мощности в замкнутом контуре: мощность, потребляемая резистивным элементом, равна сумме мощностей, отдаваемых реактивными элементами в интервале убывания их энергий. Сказанное можно представить таким образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C^2}{2} \right) = -Ri^2.$$

Выражение в скобках (под знаком производной) – это сумма энергий в контуре, т. е. полная энергия контура, а вся левая часть равенства характеризует изменение энергии. Судя по знаку в правой части, энергия контура будет убывать, если сопротивление R положительно, и увеличиваться, если R отрицательно.

Уравнение (1.1) можно записать в виде

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + Ri = 0, \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \omega_p^2 i = 0, \quad (1.2)$$

где $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$ – резонансная частота контура.

Общее решение уравнения (1.2) имеет вид

$$i(t) = I_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.3)$$

где I_0 и φ_0 – амплитуда и фаза тока в контуре, определяемые начальными условиями (количеством начальной энергии, введенной в контур);

α – коэффициент затухания;

ω_0 – частота свободных колебаний.

Коэффициент затухания α и частота свободных колебаний ω_0 определяются выражениями

$$\alpha = R/2L \quad \text{и} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2} \approx \omega_p.$$

Частота свободных колебаний высокодобротного контура, у которого $\omega_p^2 \gg \alpha^2$, определяется в основном его резонансной частотой.

Как видно из выражения (1.3), характер свободных колебаний в контуре определяется знаком коэффициента затухания. При $\alpha > 0$ амплитуда свободных колебаний уменьшается, т. е. колебания в контуре будут затухающими. В свою очередь, при $\alpha < 0$ (в контуре элемент с отрицательным сопротивлением) амплитуда колебаний увеличивается, т. е. колебания в контуре будут нарастающими. Если же $\alpha = 0$ (контур без потерь), амплитуда свободных колебаний постоянна (рис. 1.4)

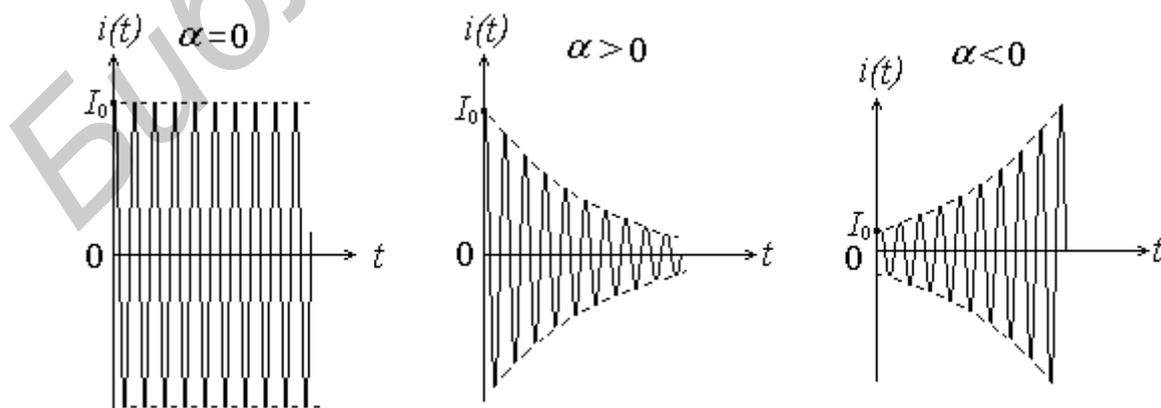


Рис. 1.4. Колебания в контуре при различных значениях коэффициента затухания

Значение и знак коэффициента затухания зависят от величины и знака сопротивления резистивного элемента контура.

В обычном колебательном контуре сопротивление положительно, при этом часть энергии контура поглощается, превращаясь в тепло. Следовательно, для создания условий, обеспечивающих генерацию незатухающих колебаний, необходимо компенсировать энергетические потери (обозначим W_n) энергией другого источника (обозначим W_k), т. е. обеспечить подкачку энергии в контур от этого источника таким образом, чтобы $W_k = W_n$. Условие $W_k = W_n$ называется балансом амплитуд. Таким источником обычно являются собственные колебания, снятые с контура и усиленные усилителем, а средством подкачки – цепь обратной связи.

Подкачка энергии в контур должна производиться в ритм с колебаниями в самом контуре. Аналогия: качели, как известно, можно раскачать лишь в том случае, если раскачивающая сила определенной величины действует в ритм (в фазе) с их собственными колебаниями. Другими словами, внешний источник энергии должен подкачивать в колебательный контур энергию определенной величины с частотой собственных колебаний в контуре и в определенный момент времени, т. е. с определенной начальной фазой.

Потери энергии в контуре в общем случае пропорциональны квадрату амплитуды колебаний в контуре, т. е. $W_n = kU_m^2$. Энергия W_k , компенсирующая потери в контуре, будет также зависеть от квадрата амплитуды колебаний в контуре. Однако характер этой зависимости не очевиден, так как именно она определяет возможность обеспечения непрерывности колебаний в контуре.

На рис. 1.5 представлены графики, характеризующие энергетические соотношения в колебательной системе в случае линейной и нелинейной зависимости энергии, компенсирующей потери, от квадрата амплитуды колебаний в контуре.

В случае линейной зависимости $W_k = f(U_m^2)$ (рис. 1.5, а) условие $W_k = W_n$ выполняется только при $U_m = 0$. При других значениях амплитуды колебаний в контуре возможны условия либо $W_k < W_n$ (колебания затухающие), либо $W_k > W_n$ (колебания нарастающие). Следовательно, в этом случае колебания с постоянной амплитудой в системе невозможны.

В случае нелинейности, изображенной на рис. 1.5, б, условие $W_k = W_n$ выполняется при $U_m = 0$ и в точке пересечения графиков – при $U_m = U_{m1}$. Однако состояние баланса в точке пересечения неустойчиво, так как следствием уменьшения U_m будет $W_k < W_n$ и колебания затухают, а следствием увеличения U_m будет $W_k > W_n$ и колебания нарастают. Состояние баланса в начале координат устойчиво. Следовательно, в этом случае колебания с постоянной амплитудой также невозможны.

В случае нелинейности, изображенной на рис. 1.5, в, условие $W_k = W_n$ выполняется при $U_m = 0$ и в точке пересечения графиков – при $U_m = U_{m1}$. Состояние баланса в точке пересечения характеризует устойчивое состояние, так как следствием уменьшения U_m будет $W_k > W_n$, что приводит к увеличению U_m , а следствием увеличения U_m будет $W_k < W_n$, что приводит к уменьшению U_m . Состояние баланса в начале координат неустойчиво. Следовательно, в этом случае возможны колебания с постоянной амплитудой, а возникновение колебаний возможно при появлении незначительных колебаний флуктуационного характера (режим самовозбуждения).

В случае нелинейности, изображенной на рис. 1.5, з, условие $W_k = W_n$ выполняется при $U_m = 0$ и в двух точках пересечения – при U_{m1} и U_{m2} . Первая точка пересечения характеризует неустойчивый режим (сравнить с рис 1.5, б), а вторая точка – устойчивый режим (сравнить с рис 1.5, в). Следовательно, в этом случае возможны колебания с постоянной амплитудой U_{m2} . Состояние баланса в начале координат устойчиво. Поэтому самовозбуждение в таких системах невозможно. Для возбуждения колебаний требуется вывести систему за пределы, характеризуемые первой точкой пересечения, т. е. установить начальную амплитуду колебаний больше чем U_{m1} .

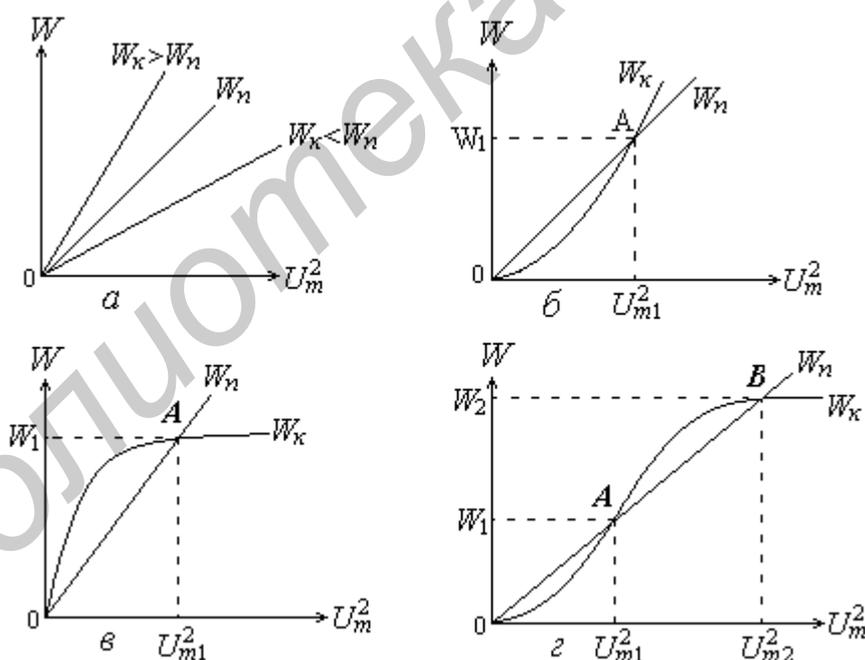


Рис. 1.5. Энергетические соотношения в колебательной системе

Процесс компенсации потерь является по существу внесением в контур отрицательного сопротивления. Если это сопротивление будет равно по абсолютной величине активному сопротивлению контура, то колебания в контуре будут незатухающими, а если больше, то колебания будут нарастающими. В динамике общее сопротивление контура в таком случае должно быть нелиней-

ным и зависеть от амплитуды колебаний. В режиме возбуждения и при малых амплитудах колебаний оно должно быть отрицательным, а при больших амплитудах – равно нулю, что будет соответствовать стационарному режиму.

1.5. LC-генератор гармонических колебаний

1.5.1. Схема LC-генератора

LC-генератор гармонических колебаний, упрощенная схема которого приведена на рис. 1.6, представляет собой резонансный усилитель с цепью положительной обратной связи, образованной индуктивно связанными катушками с коэффициентом взаимной индукции M . Коэффициент передачи цепи обратной связи равен $\beta = M/L$.

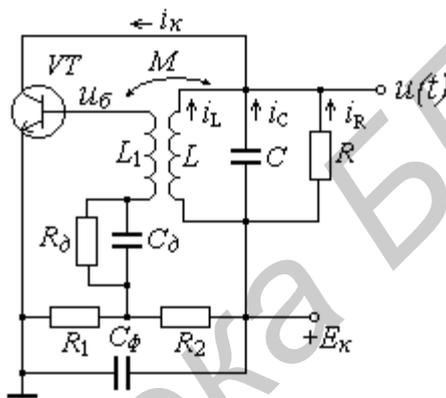


Рис. 1.6. Схема LC-генератора

Такие генераторы имеют сравнительно высокую стабильность частоты колебаний, устойчиво работают при значительных изменениях параметров транзисторов, обеспечивают получение колебаний, имеющих малый коэффициент гармоник. К их недостаткам относятся трудности изготовления высокостабильных температурно-независимых индуктивностей, а также высокая стоимость и громоздкость последних. Особенно это проявляется при создании автогенераторов диапазона инфранизких частот, в которых даже при применении ферромагнитных сердечников габаритные размеры, масса и стоимость получаются большими.

В LC-генераторах форма выходного напряжения весьма близка к гармонической. Это обусловлено хорошими фильтрующими свойствами колебательного контура. Усилитель в составе таких генераторов работает в режиме с отсечкой тока, при котором форма выходного тока значительно отличается от гармонической.

Для анализа условий и механизма возникновения колебаний в автогенераторе воспользуемся дифференциальным уравнением, характеризующим его работу в режиме малых амплитуд.

1.5.2. Дифференциальное уравнение автогенератора

Как видно из рис. 1.6, ток в цепи коллектора равен

$$i_k = i_L + i_C + i_R. \quad (1.4)$$

В этом выражении $i_C = C \frac{du}{dt}$, $i_R = \frac{u}{R}$, $i_k = u_{\bar{\sigma}} S$,

где u – напряжение на выходе генератора;

$u_{\bar{\sigma}}$ – напряжение на базе транзистора;

$S(u_{\bar{\sigma}})$ – крутизна вольт-амперной характеристики транзистора, которая является нелинейной функцией от напряжения на базе.

В режиме малых амплитуд можно положить $S(u_{\bar{\sigma}}) = S = \text{const}$. Напряжение на базе транзистора – это по существу напряжение на выходе цепи обратной связи, т. е. $u_{\bar{\sigma}} = u\beta$. Следовательно, можно записать

$$\frac{SM}{L}u = \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \quad \text{или} \quad C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} - \frac{SM}{L}u + \frac{1}{L} \int u dt = 0.$$

Продифференцировав левую и правую части данного уравнения, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - \frac{SM}{L} \right) \frac{du}{dt} + \omega_p^2 u &= 0; \\ \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_p^2 u &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\alpha = \frac{1}{2C} \left(\frac{1}{R} - \frac{SM}{L} \right)$ – коэффициент, характеризующий затухание колебательного контура;

$\omega_p = 1/\sqrt{LC}$ – резонансная частота колебательного контура.

Получено дифференциальное уравнение автогенератора в режиме малых амплитуд, которое позволяет установить условия самовозбуждения колебаний и характер переходных процессов в автогенераторе.

Коэффициент α можно записать следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{2C} \left(\frac{1}{R} - \frac{SM}{L} \right) = \frac{1}{2L} \left(\frac{L}{RC} - \frac{SM}{C} \right).$$

Из анализа данного выражения можно получить весьма важный вывод, имеющий простую физическую интерпретацию, а именно за счет положительной обратной связи в контур вносится отрицательная проводимость, модуль которой равен $\frac{SM}{L}$. С другой стороны, учитывая, что величина $\frac{L}{RC}$ – это сопротивление контура на резонансной частоте, можно сказать, что за счет положительной обратной связи в контур вносится отрицательное сопротивление,

модуль которого равен $\frac{SM}{C}$. Именно этот факт обеспечивает возможность возбуждения и нарастания колебаний на выходе генератора.

Общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$u(t) = U_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.6)$$

где U_0 и φ_0 – амплитуда и фаза тока в контуре, определяемые начальными условиями;

$\omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 - \alpha^2} \approx \omega_p$ – частота свободных колебаний, которая определяется в основном резонансной частотой высокодобротного контура.

Выражение (1.6) для напряжения на выходе генератора подобно выражению (1.3) для тока в контуре. Поэтому графики для $u(t)$, которые иллюстрируют физический смысл α как коэффициента затухания, будут такие же, как графики для $i(t)$, приведенные на рис. 1.4. Они позволяют определить знак коэффициента α , при котором колебания возрастают.

В результате получаем условие возникновения и возрастания колебаний:

$$\alpha = \frac{1}{2C} \left(\frac{1}{R} - \frac{SM}{L} \right) < 0; \quad \frac{1}{R} < \frac{SM}{L}; \quad \frac{1}{SR} < \frac{M}{L}; \quad K_y \beta > 1, \quad (1.7)$$

где $K_y = SR$ – коэффициент усиления усилителя на резонансной частоте.

Пользуясь полученным выражением, можно оценить влияние основных параметров усилителя в схеме генератора на процесс возникновения колебаний. Чем больше крутизна ВАХ транзистора, тем меньше значение может иметь коэффициент обратной связи, что способствует процессу самовозбуждения. В свою очередь, увеличение потерь в контуре требует увеличения коэффициента обратной связи, что затрудняет самовозбуждение генератора.

Неравенство (1.7) является фундаментальным условием самовозбуждения автогенератора. Оно позволяет оценить влияние крутизны ВАХ и сопротивления нагрузки, а также коэффициента обратной связи (а значит, индуктивности контура и коэффициента взаимной индукции) на возникновение колебаний. Чем больше коэффициент усиления усилителя и больше сопротивление нагрузки, тем меньше требуемое усиление обратной связи и тем легче возникают автоколебания.

При малых амплитудах колебаний работа происходит в пределах линейного участка вольт-амперной характеристики, т. е. при $S = \text{const}$. При этом реализуется линейный процесс усиления. Непрерывное нарастание амплитуды обусловлено положительной обратной связью, благодаря которой энергия, передаваемая в нагрузку за один период колебаний, больше, чем энергия, расходуемая в нагрузке.

По мере роста амплитуды колебаний должна проявляться нелинейность ВАХ, что не учитывается рассмотренным выше дифференциальным уравнени-

ем. Поэтому неравенство $K_y \beta > 1$ является условием самовозбуждения автогенератора. В то же время определенный интерес представляет механизм ограничения амплитуды колебаний с целью установления стационарного режима, т. е. режима генерации колебаний с постоянной амплитудой. Этот механизм зависит от схемного построения автогенераторов.

В принципе ограничение амплитуды колебаний по мере ее роста достигается автоматически за счет нелинейности ВАХ, приводящей к уменьшению средней крутизны. Этого можно достичь также с помощью фильтра в цепи базы, который смещает рабочую точку на нижний сгиб ВАХ с меньшей крутизной (фильтр $R_D C_D$, см. рис. 1.6). В любом случае ток коллектора приобретает импульсную форму, что видно из рис. 1.7.

1.6. Анализ стационарного режима работы автогенератора

1.6.1. Средняя крутизна ВАХ

В общем случае дифференциальное уравнение, описывающее работу автогенератора, является нелинейным в силу зависимости средней крутизны от амплитуды напряжения на базе транзистора. При составлении уравнения учитывались основные свойства автогенератора. Поэтому решение уравнения в принципе позволяет определить условия самовозбуждения, параметры переходного и стационарного режимов.

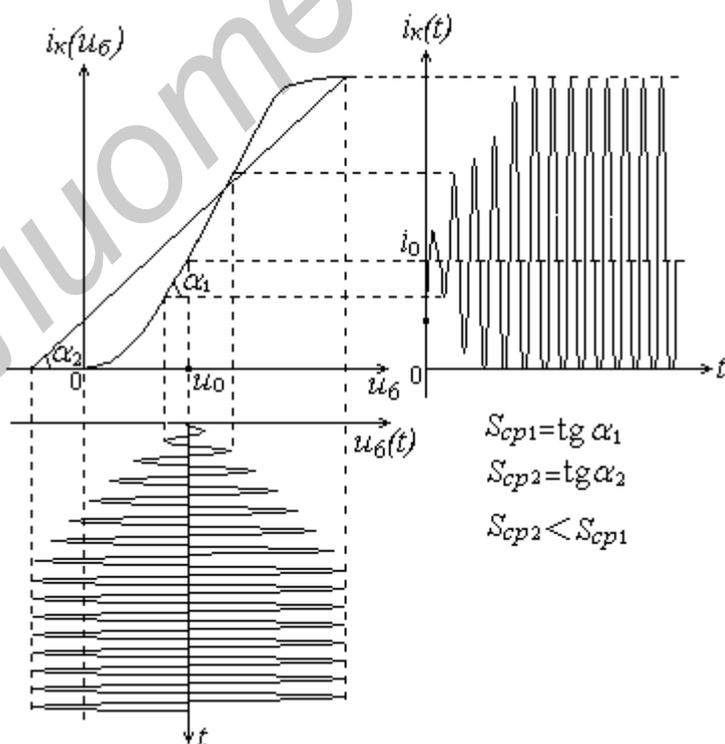


Рис. 1.7. Изменение средней крутизны ВАХ с ростом амплитуды колебаний

Однако точных аналитических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений нет. Разработаны приближенные методы, среди которых необходимо выделить квазилинейный метод, метод фазовой плоскости, метод медленно меняющихся амплитуд, метод линеаризации. Для анализа стационарного режима работы автогенератора с целью определения амплитуды и частоты генерируемых колебаний наиболее часто используется квазилинейный метод.

Содержание метода рассмотрим на примере LC -генератора, схема которого представлена на рис. 1.6. Возможность применения данного метода обусловлена наличием в структуре автогенератора нелинейного усилителя с узкополосной избирательной цепью (высокодобротным контуром), что позволяет «работать» только с первой гармоникой спектра импульсов тока в цепи коллектора и комплексными амплитудами.

В стационарном режиме усилитель в составе генератора работает с отсечкой коллекторного тока. При этом ток в цепи коллектора представляет собой периодическую последовательность импульсов, которую можно представить в виде ряда Фурье в комплексной форме:

$$i_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{I}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad \dot{I}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_k(t) e^{-jk\omega_1 t} dt,$$

где ω_1 – частота импульсов тока в цепи коллектора.

В основу метода положено использование такого усредненного параметра вольт-амперной характеристики, как средняя крутизна, – отношение комплексной амплитуды первой гармоники тока в цепи коллектора к комплексной амплитуде напряжения на базе транзистора, т. е.

$$\dot{S}_{cp} = \frac{I_1}{U_b}. \quad (1.8)$$

Другие составляющие спектра коллекторного тока не представляют интереса, так как они отфильтровываются контуром. Средняя крутизна при таком ее определении будет зависеть от амплитуды колебаний, оставаясь неизменной в течение одного периода.

В общем случае средняя крутизна является комплексной величиной. Объясняется это тем, что при работе на достаточно высоких частотах проявляют себя частотные свойства транзистора вследствие конечного времени прохождения носителей. Поэтому первая гармоника тока в цепи коллектора отстает по фазе от напряжения на базе и средняя крутизна в этом случае становится величиной комплексной. Следовательно, можно записать $\dot{S}_{cp} = S_{cp} e^{i\varphi_s}$.

1.6.2. Баланс амплитуд и баланс фаз

Учитывая частотно-избирательные свойства колебательного контура в цепи коллектора, в силу которых в формировании выходного напряжения бу-

дет участвовать только первая гармоника тока, комплексные амплитуды напряжений на выходе генератора \dot{U} и на входе усилителя \dot{U}_β (на базе транзистора) будут иметь вид

$$\dot{U} = \dot{I}_1 \dot{Z} = \dot{I}_1 Z_0 e^{j\varphi_\kappa}; \quad \dot{U}_\beta = \dot{U} \dot{\beta} = \dot{I}_1 Z_0 e^{j\varphi_\kappa} \beta e^{j\varphi_\beta},$$

где \dot{Z} – комплексное сопротивление контура;

Z_0 – сопротивление контура на резонансной частоте;

$\dot{\beta}$ – коэффициент передачи цепи обратной связи;

φ_κ и φ_β – фазовые сдвиги колебательного контура и цепи обратной связи на генерируемой частоте.

С другой стороны, применяя формулу (1.8) для средней крутизны, можно записать

$$\dot{U}_\beta = \dot{U}_\beta S_{cp} e^{j\varphi_s} Z_0 e^{j\varphi_\kappa} \beta e^{j\varphi_\beta}.$$

Отсюда получаем

$$S_{cp} e^{j\varphi_s} Z_0 e^{j\varphi_\kappa} \beta e^{j\varphi_\beta} = 1, \text{ или } K_y \beta e^{j(\varphi_s + \varphi_\kappa + \varphi_\beta)} = 1, \quad (1.9)$$

где $\dot{K}_y = \dot{S}_{cp} Z = K_y e^{j(\varphi_s + \varphi_\kappa)}$ – комплексный коэффициент передачи усилителя;

φ_s – аргумент средней крутизны, характеризующий фазовый сдвиг на генерируемой частоте за счет комплексности средней крутизны.

Последние рассуждения позволяют назвать данный метод квазилинейным, так как создается впечатление, что система работает с единственным гармоническим колебанием без каких-либо искажений, т. е. работает как линейное устройство.

Рассмотрим физический смысл полученного комплексного уравнения (1.9) генератора. В стационарном режиме коэффициент передачи разомкнутой цепи генератора равен единице. Отсюда можно получить два условия, обеспечивающие устойчивую работу генератора по формированию гармонического колебания с постоянной амплитудой:

1. $S_{cp} \cdot Z_0 \cdot \beta = K_y \cdot \beta = 1$ – баланс амплитуд.

2. $\varphi_s + \varphi_\kappa + \varphi_\beta = 2\pi n$ – баланс фаз.

Соблюдение баланса амплитуд обеспечивает адекватную компенсацию потерь, а баланс фаз – фазирование напряжений на базе транзистора и на выходе цепи обратной связи. В формуле для баланса амплитуд только крутизна зависит от амплитуды выходного напряжения. Следовательно, данное условие может соблюдаться только при определенной амплитуде, которая и будет амплитудой генерируемых колебаний. В свою очередь, условие баланса фаз соблюдается на одной частоте, которая равна частоте генерируемых колебаний.

1.6.3. Определение амплитуды колебаний в стационарном режиме

Определение амплитуды колебаний с помощью графика $K_y(U_{\delta})$

Определение амплитуды колебаний на выходе автогенератора в стационарном режиме U_{cm} предполагает использование характеристик, определяющих зависимость коэффициента передачи усилительного элемента от амплитуды напряжения на базе U_{δ} , а также колебательных характеристик. Колебательная характеристика – это зависимость амплитуды первой гармоники импульсов тока в цепи коллектора от амплитуды U_{δ} . Вид этих характеристик зависит от режима самовозбуждения генератора, который определяется положением рабочей точки на ВАХ транзистора.

Пользуясь полученными соотношениями, определим формулы, связывающие коэффициент передачи усилительного элемента с амплитудой U_{δ} , и формулу колебательной характеристики.

Известно, что $\dot{K}_y = \dot{S}_{cp} Z = K_y e^{j(\varphi_s + \varphi_k)}$. Следовательно, характер зависимости коэффициента усиления от амплитуды напряжения на входе $K_y(U_{\delta})$ определяется зависимостью средней крутизны от этого же напряжения $S_{cp}(U_{\delta})$, т. е.

$$K_y = S_{cp} Z_0 = \frac{I_1}{U_{\delta}} Z_0 = \frac{I_1}{U_{\delta} \beta} Z_0. \quad (1.10)$$

В свою очередь, характер зависимости $S_{cp}(U_{\delta})$ определяется выбором рабочей точки.

Рассматривают два режима:

- мягкий режим, при котором рабочая точка расположена на участке ВАХ с максимальной крутизной (на линейном участке характеристики);
- жесткий режим, при котором рабочая точка расположена на нижнем сгибе ВАХ.

На рис 1.8 представлены графики, характеризующие зависимость коэффициента передачи K_y усилительного элемента от амплитуды U_{δ} для мягкого и жесткого режимов.

В мягком режиме средняя крутизна ВАХ при малых значениях U_{δ} (в пределах линейного участка ВАХ) практически не изменяется, а затем уменьшается с возрастанием U_{δ} . Учитывая формулу (1.10), такую же зависимость от U_{δ} будет иметь и коэффициент передачи K_y (рис. 1.8, а).

В жестком режиме средняя крутизна ВАХ сначала увеличивается, что характерно для нижнего сгиба ВАХ, а затем уменьшается. Аналогично ведет себя и коэффициент усиления (рис. 1.8, б).

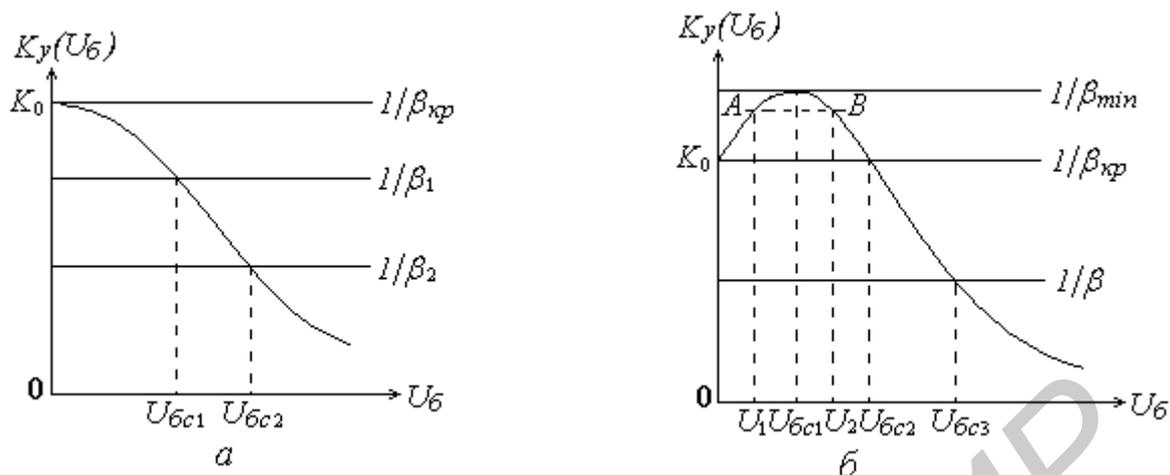


Рис. 1.8. Зависимость коэффициента усиления нелинейного усилителя от амплитуды напряжения:
a – мягкий режим; *б* – жесткий режим

Для определения амплитуды напряжения на входе усилителя в стационарном режиме воспользуемся условием баланса амплитуд, записав его в следующем виде:

$$K_y(U_{\delta}) = 1/\beta.$$

Это условие показывает, что рост амплитуды напряжения на входе усилителя прекращается, когда коэффициент усиления K_y уменьшится до величины, равной $1/\beta$. Таким образом, стационарную амплитуду можно определить, построив на одном графике зависимость $K_y(U_{\delta})$ и линию обратной связи $1/\beta$. Абсцисса точки пересечения графиков $K_y(U_{\delta})$ и $1/\beta$ определяет стационарную амплитуду напряжения $U_{\delta c}$ на входе усилителя, а значит, и на выходе генератора, так как $U = U_{\delta} / \beta$.

Пользуясь полученными графиками, рассмотрим зависимость амплитуды колебаний от величины коэффициента обратной связи.

Мягкий режим (рис. 1.8, а и рис. 1.9, а)

Линия обратной связи лежит выше кривой $K_y(U_{\delta})$, если $\beta < \beta_{кр}$. В этом случае автоколебания невозможны, так как в этом случае $K_y \beta < 1$, т. е. не соблюдается баланс амплитуд.

Линия обратной связи пересекает кривую $K_y(U_{\delta})$, если $\beta \geq \beta_{кр}$. При $\beta = \beta_{кр}$ возникают колебания. В ходе дальнейшего роста β линия обратной связи опускается. При этом точка пересечения графиков $K_y(U_{\delta})$ и $1/\beta$ сдвигается вправо, что приводит к плавному росту амплитуды $U_{\delta c}$. С уменьшением

β линия обратной связи поднимается. Точка пересечения сдвигается влево, что приводит к плавному уменьшению амплитуды $U_{\text{бс}}$ (см. рис. 1.9, а).

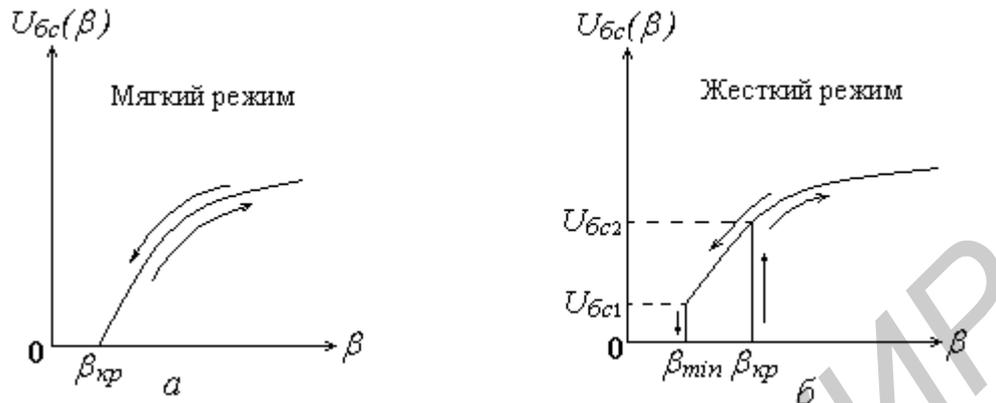


Рис. 1.9. Зависимость амплитуды колебаний от коэффициента обратной связи:
а – мягкий режим; б – жесткий режим

Жесткий режим (рис. 1.8, б и рис. 1.9, б)

Самовозбуждение не наступает до тех пор, пока связь не достигает $\beta_{\text{кр}}$. При этом амплитуда скачком увеличивается до $U_{\text{бс}2}$ и далее растет с ростом β . При обратном движении колебания не срываются вплоть до значения $\beta = \beta_{\text{min}} < \beta_{\text{кр}}$, когда их амплитуда уменьшается до $U_{\text{бс}1}$ (см. рис. 1.9, б).

В области $\beta_{\text{min}} < \beta < \beta_{\text{кр}}$ самовозбуждение не наступает. Однако если систему принудительно вывести за неустойчивую точку A , то она перейдет в точку B , т. е. в режим стационарных колебаний с амплитудой U_2 .

Таким образом, жесткий режим колебаний генератора характеризуется скачкообразным возникновением колебаний значительной амплитуды при увеличении коэффициента обратной связи и срывом колебаний определенной амплитуды при уменьшении обратной связи.

Мягкий режим предпочтителен с точки зрения легкости возбуждения автоколебаний, однако он характеризуется относительно невысоким КПД, так как работа ведется с углами отсечки $\theta > 90^\circ$. В жестком режиме $\theta < 90^\circ$ и можно получить высокий КПД, но следует принимать специальные меры для возбуждения системы, что неудобно.

В этом смысле представляют интерес схемы с автоматическим смещением, у которых в отсутствие колебаний рабочая точка лежит в линейной части характеристики, и поэтому генератор возбуждается как мягкая система. По мере увеличения амплитуды колебаний за счет импульсов тока базы конденсатор C_∂ в цепи автоматического смещения заряжается и рабочая точка перемещается к нижнему сгибу характеристики, так что установившийся режим оказыва-

ется жестким, угол отсечки получается малым, а КПД – большим. Другими словами, применение автосмещения позволяет совместить мягкий режим при пуске генератора с жестким режимом при стационарной работе.

Определение амплитуды колебаний с помощью графика $I_1(U_\delta)$

Колебательная характеристика – это зависимость амплитуды первой гармоники импульсов тока в цепи коллектора от амплитуды U_δ при разорванной цепи обратной связи. Вид этой характеристики зависит от формы и параметров ВАХ, а также от режима самовозбуждения генератора. Формулу колебательной характеристики можно получить из выражения (1.8)

$$I_1 = S_{cp} U_\delta; \quad I_1(U_\delta) = S_{cp}(U_\delta) \cdot U_\delta.$$

На рис. 1.10, *а* изображена колебательная характеристика для мягкого режима самовозбуждения.

Колебательная характеристика в этом режиме при малых амплитудах линейно растет, так как рабочая точка расположена на линейном участке ВАХ. При больших амплитудах рост замедляется в связи с тем, что уменьшается коэффициент передачи усилительного звена за счет уменьшения средней крутизны ВАХ.

При небольших амплитудах напряжения U_δ характеристика линейна, так как соответствует участку ВАХ с постоянной крутизной. По мере роста U_δ средняя крутизна ВАХ уменьшается, следствием чего является уменьшение амплитуды первой гармоники тока (падающий участок колебательной характеристики). Ограничение колебательной характеристики усилителя при больших амплитудах U_δ обусловлено также ростом напряжения смещения за счет цепи автоматического смещения (цепочка $R_\delta C_\delta$), в силу чего рабочая точка ВАХ перемещается на участок с меньшей крутизной.

Колебательная характеристика для жесткого режима самовозбуждения изображена на рис. 1.10, *б*. Она не имеет линейно растущих участков. Изгиб характеристики в середине объясняется особенностью зависимости $S_{cp}(U_\delta)$. Так как рабочая точка находится на нижнем сгибе ВАХ, то при небольших амплитудах напряжения U_δ колебательная характеристика имеет изгиб, обусловленный ростом крутизны ВАХ на начальном этапе изменения U_δ .

Для определения амплитуды колебаний на входе усилительного элемента при наличии цепи обратной связи воспользуемся линией обратной связи, характеризующей зависимость напряжения на выходе цепи обратной связи от величины амплитуды тока в колебательном контуре. Эта связь определяется линейными элементами схемы генератора, в частности, цепью обратной связи и сопротивлением контура на резонансной частоте. Для схемы, показанной на рис. 1.6, можно записать следующее:

$$U_{\delta} = I_1 Z_0 \beta = I_1 Z_0 \frac{M}{L} \quad \text{или} \quad I_1(U_{\delta}) = \frac{U_{\delta}}{Z_0 \beta} = \frac{L}{Z_0 M} \cdot U_{\delta}.$$

Данные выражения позволяют построить линию обратной связи на графике колебательной характеристики.

Мягкий режим. На рис. 1.10, а изображена колебательная характеристика для мягкого режима и несколько линий обратной связи для различных значений $\beta = M/L$. Стационарному режиму соответствуют точки пересечения колебательной характеристики и линий обратной связи, так как для них справедливо следующее:

$$S_{cp}(U_{\delta}) \cdot U_{\delta} = \frac{L}{Z_0 M} U_{\delta}; \quad S_{cp}(U_{\delta}) \cdot Z_0 = \frac{L}{M} \quad \text{или} \quad K_y \cdot \beta = 1.$$

При определенных значениях β линии обратной связи имеют две точки пересечения с колебательной характеристикой. Такой линией является, например, линия при $\beta = \beta_2$. Точка 0 при значениях $U_{\delta} = I_1 = 0$ соответствует неустойчивому состоянию равновесия генератора. Вторая точка пересечения A имеет координаты, соответствующие амплитуде напряжения на входе усилительного элемента и амплитуде первой гармоники тока в колебательном контуре в стационарном режиме. Заметим, что точка A соответствует устойчивому режиму работы генератора, так как при случайных отклонениях напряжения или тока от стационарных значений обеспечивается возврат их значений в исходное состояние, т. е. в точку A .

Как видно из рис. 1.10, а, стационарный режим работы автогенератора будет устойчивым, если в точке A крутизна колебательной характеристики меньше крутизны характеристики обратной связи. В противном случае режим будет неустойчивым.

Жесткий режим. На рис. 1.10, б изображена колебательная характеристика для жесткого режима и несколько линий обратной связи для различных значений β . При значении $\beta = \beta_2$ линия обратной связи имеет три точки пересечения с колебательной характеристикой. Точка 0 при значениях $U_{\delta} = I_1 = 0$ соответствует устойчивому состоянию равновесия генератора. Вторая точка пересечения A соответствует также устойчивому режиму работы генератора и имеет координаты, соответствующие амплитуде напряжения на входе усилительного элемента и амплитуде первой гармоники тока в колебательном контуре в стационарном режиме. Точка B соответствует неустойчивому режиму работы генератора.

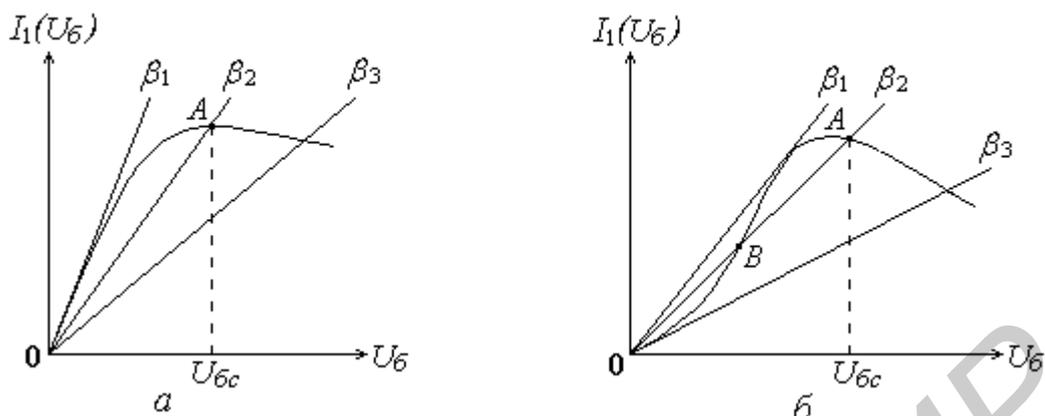


Рис. 1.10. Колебательные характеристики:
a – мягкий режим; *б* – жесткий режим

Пользуясь рис. 1.10 и логикой рассуждений при построении графиков $U_{6c}(\beta)$, можно определить зависимость амплитуды первой гармоники тока от коэффициента обратной связи, т. е. зависимость $I_1(\beta)$. Эти зависимости для мягкого и жесткого режимов работы изображены на рис. 1.11.

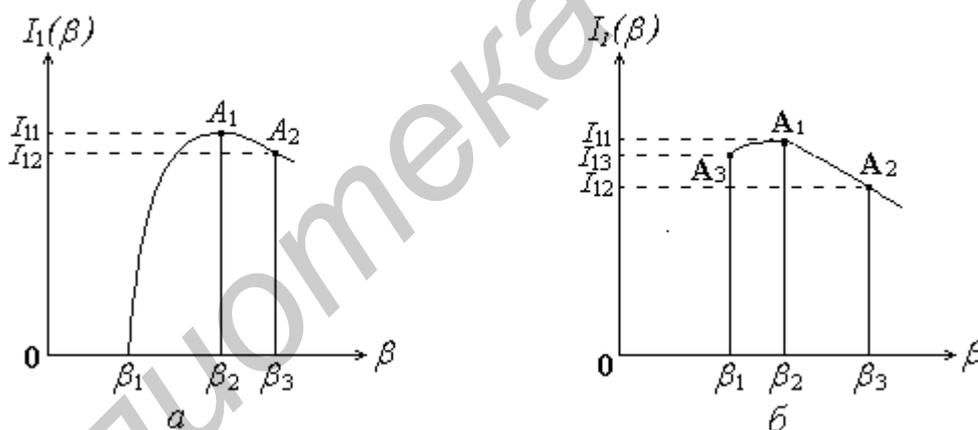


Рис. 1.11. Зависимость амплитуды первой гармоники тока от коэффициента обратной связи:
a – мягкий режим; *б* – жесткий режим

1.6.4. Определение частоты генерируемых колебаний

Частоту генерируемых колебаний можно определить исходя из условия баланса фаз:

$$\varphi_s + \varphi_k + \varphi_\beta = 2\pi n.$$

Комплексное входное сопротивление контура в составе генератора определяется формулой [1]

$$Z(j\omega) = \frac{Z_0}{1 + j\frac{\rho}{R}\xi} = \frac{Z_0}{1 + jQ\xi} = \frac{Z_0}{1 + jQ\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}},$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_p$, ω_p – резонансная частота контура.

Следовательно, можно записать $\varphi_\kappa = -\arctg Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_p}$.

Тогда

$$-\arctg Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_p} = 2\pi n - \varphi_s - \varphi_\beta; \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_p} = \frac{1}{2Q} \operatorname{tg}(\varphi_s + \varphi_\beta);$$

$$\omega = \omega_0 = \omega_p \left[1 + \frac{1}{2Q} \operatorname{tg}(\varphi_s + \varphi_\beta) \right].$$

Таким образом, частота генерируемых колебаний в основном определяется резонансной частотой контура. Влияние фазового сдвига, вносимого средней крутизной ВАХ и цепью обратной связи, зависит от добротности контура. Чем выше добротность контура, тем меньше частота генерируемых колебаний отличается от его резонансной частоты.

1.7. Нелинейное уравнение автогенератора

Дифференциальное уравнение $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - \frac{SM}{L} \right) \frac{du}{dt} + \omega_p^2 u = 0$, получен-

ное в п. 1.5.2, описывает работу автогенератора в режиме малых амплитуд. При этом предполагалось соблюдение условия $S = \text{const}$.

Для описания работы автогенератора в переходном и стационарном режимах необходимо отказаться от условия независимости средней крутизны от напряжения. При этом получим уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - \frac{S(u)M}{L} \right) \frac{du}{dt} + \omega_p^2 u = 0,$$

являющееся нелинейным дифференциальным уравнением автогенератора.

При симметричной ВАХ и положении рабочей точки, соответствующей мягкому режиму работы автогенератора, аппроксимируем функцию $S(u)$ с использованием полинома вида $i_\kappa = i_0 + a_1 u - a_3 u^3$, где коэффициент a_1 является крутизной S_0 линейной части ВАХ. При этом получаем

$$S(u) = \frac{di_\kappa}{du} = S_0 - 3a_3 u^2.$$

Подставим полученное выражение в дифференциальное уравнение и положим, что частота напряжения на выходе генератора равна резонансной частоте контура, т. е. $\omega_0 = \omega_p$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - \frac{(S_0 - 3a_3u^2)M}{L} \right) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0.$$

Выполним некоторые преобразования:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left[\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - \frac{S_0M}{L} \right) - \frac{3a_3Mu^2}{LC} \right] \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0.$$

Обозначим $\gamma = 3a_3\omega_0^2M$, учтем принятое в п. 1.5.2 обозначение коэффициента, характеризующего затухание колебательного контура $\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - \frac{S_0M}{L} \right) = 2\alpha$, и запишем

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (2\alpha - \gamma u^2) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0.$$

Учитывая, что $K_0 = S_0R$, $\beta = \frac{M}{L}$ и $\tau = RC$, можно записать

$$2\alpha = \frac{1}{\tau} (1 - K_0 \beta).$$

Перейдем к безразмерному напряжению, осуществив замену $u_0 = u \sqrt{\frac{\gamma}{2\alpha}}$,

разделим на ω_0^2 и введем параметр $\varepsilon = \frac{2\alpha}{\omega_0^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_0}{dt^2} + 2\alpha(1-u_0^2) \frac{du_0}{dt} + \omega_0^2 u_0 &= 0; & \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2u_0}{dt^2} + \frac{2\alpha}{\omega_0^2} (1-u_0^2) \frac{du_0}{dt} + u_0 &= 0; \\ \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2u_0}{dt^2} + \frac{1}{\omega_0} \varepsilon (1-u_0^2) \frac{du_0}{dt} + u_0 &= 0. \end{aligned}$$

Приведем полученное уравнение к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$. При этом

$$\frac{du_0}{dt} = \omega_0 \frac{du_0}{d\tau}; \quad \frac{d^2u_0}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2u_0}{d\tau^2}.$$

Окончательно получаем уравнение, которое называется уравнением Ван-дер-Поля.

$$\frac{d^2u_0}{d\tau^2} + \varepsilon (1-u_0^2) \frac{du_0}{d\tau} + u_0 = 0. \quad (1.11)$$

Полученное уравнение хорошо описывает работу автогенератора в мягком режиме для случая фиксированной рабочей точки. В принципе, как показывает опыт, этого достаточно для полного анализа поведения автогенератора на всех стадиях процесса установления колебаний.

При малых напряжениях, когда $u_0^2 \ll 1$, полученное уравнение становится линейным. При увеличении напряжения проявляется нелинейность, обусловленная составляющей u_0^2 .

Нет методов, позволяющих получить точное решение уравнения Ван-дер-Поля. Существуют приближенные методы, среди которых достаточные для практики результаты дает метод медленно меняющихся амплитуд и метод фазовой плоскости.

Метод медленно меняющихся амплитуд основан на вполне обоснованном предположении, что выходное напряжение генератора имеет вид высокочастотного гармонического колебания

$$u(t) = U(t) \cos \omega_0 t,$$

у которого огибающая $U(t)$ является медленно меняющейся функцией времени, т. е. функцией, удовлетворяющей условию

$$\left| \frac{dU(t)}{dt} \right| \frac{T_0}{U} \ll 1; \quad \left| \frac{dU(t)/dt}{U} \right| \ll \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Физический смысл условия – относительное изменение амплитуды колебания за период является малой величиной. Справедливость этого условия обусловлена тем, что при высокочастотном колебательном контуре в составе генератора существенного изменения амплитуды (запасенной в контуре энергии) за период высокочастотного колебания не произойдет.

В процессе достаточно громоздкого решения [2] находится огибающая $U(t)$. При этом не рассматриваются слагаемые, содержащие производные второго порядка, и гармонические составляющие с частотой выше ω_0 . Выражение для огибающей имеет вид

$$U(t) = \frac{U_{cm}}{\sqrt{1 + (U_{cm}^2 / U_0^2 - 1) e^{-2|\alpha|t}}},$$

где U_{cm} – амплитуда колебаний в стационарном режиме;

U_0 – амплитуда колебаний, определяемая начальными условиями.

На начальном этапе запуска автогенератора, когда $U_{cm} / U_0 \gg 1$, огибающая равна

$$U(t) = \frac{U_{cm}}{\sqrt{1 + (U_{cm}^2 / U_0^2 - 1) e^{-2|\alpha|t}}} \approx \frac{U_{cm}}{(U_{cm} / U_0) e^{-|\alpha|t}} \approx U_0 e^{|\alpha|t}.$$

Тогда выходное напряжение генератора равно

$$u(t) = U_0 e^{|\alpha|t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Данное выражение имеет вид, свойственный переходному режиму работы генератора.

При $t \rightarrow \infty$

$$U(t) = \frac{U_{cm}}{\sqrt{1 + U_{cm}^2/U_0^2 - 1}} \approx U_{cm}.$$

Тогда выходное напряжение генератора равно

$$u(t) = U_{cm} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Данное выражение имеет вид, свойственный стационарному режиму работы генератора.

Процесс установления колебаний зависит от коэффициента затухания $2\alpha = \frac{1}{\tau}(1 - K_0 \beta)$. Рост амплитуды колебаний происходит при $\alpha < 0$, т. е. при $K_0 \beta > 1$. А это и есть условие самовозбуждения генератора. Можно сделать очевидный вывод, что чем больше величина $K_0 \beta$, тем меньше время установления стационарного режима. Таким образом, время установления колебаний на выходе генератора зависит от величины начальной амплитуды U_0 , а также от параметров усилителя и цепи обратной связи в составе генератора.

1.8. RC-генераторы

1.8.1. Структурная схема RC-генератора

Рассмотренные ранее LC-генераторы формируют гармонические колебания с частотой, которая определяется параметрами колебательной системы. Применение таких генераторов для формирования колебаний низкой частоты (100 кГц и ниже) затруднено, так как индуктивности и емкости колебательных систем имеют в данном случае большие величины. Возникают проблемы конструктивного (габариты, вес) и функционального (трудности обеспечения перестройки частоты) характера. В связи с этим для формирования гармонических колебаний с частотами от нескольких герц до десятков килогерц применяют генераторы с избирательной системой в виде RC-фильтров, которые получили название RC-генераторов. Наиболее часто используют трехзвенные или четырехзвенные фазосдвигающие RC-фильтры (рис. 1.12, а, б) и полосовой фильтр, называемый мостом Вина (рис. 1.12, в). Их обычно включают в цепь положительной обратной связи апериодических или операционных усилителей.

RC-фильтры представляют собой цепи, в которых могут происходить колебания энергии между реактивными накопительными элементами (например конденсаторами, которые разделены резисторами), так же как и в LC-контурах.

В этом можно убедиться, рассмотрев динамические процессы в RC -фильтре (см. рис. 1.12, в), описываемые соответствующим дифференциальным уравнением.

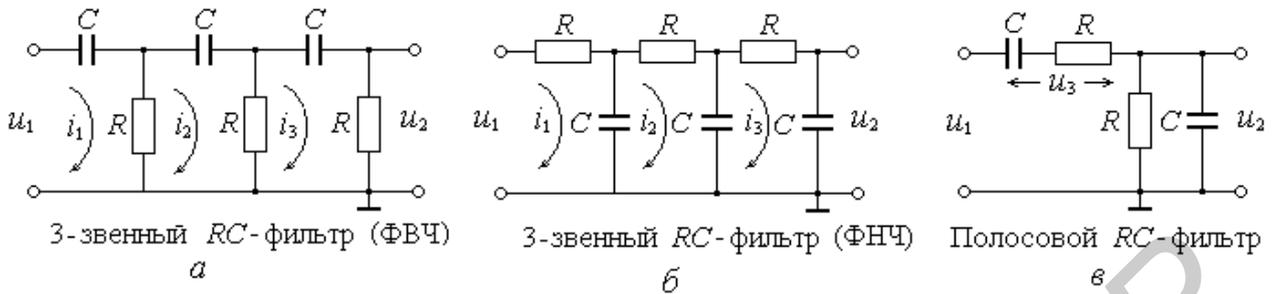


Рис. 1.12. Фильтры, используемые в RC -генераторах

Процессы в этой схеме описываются дифференциальным уравнением, которое получается следующим образом:

1. $i = i_C + i_R; \quad i = C \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R}.$
2. $u_3 + u_2 = u_1; \quad u_3 = iR + \frac{1}{C} \int idt.$
3. $\left(C \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R} \right) R + \frac{1}{C} \int \left(C \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R} \right) dt + u_2 = u_1;$
4. $\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2} u_2 = \frac{1}{RC} \frac{du_1}{dt}.$

$$\text{Окончательно} \quad \frac{d^2 u_2}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_2}{dt} + \omega_0^2 u_2 = \delta \frac{du_1}{dt}, \quad (1.12)$$

$$\text{где } 2\alpha = \frac{3}{RC}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}, \quad \delta = \frac{1}{RC}.$$

По своим свойствам данный фильтр эквивалентен колебательному контуру, представленному на рис. 1.13, если его эквивалентные параметры связаны соответствующим образом с параметрами фильтра.

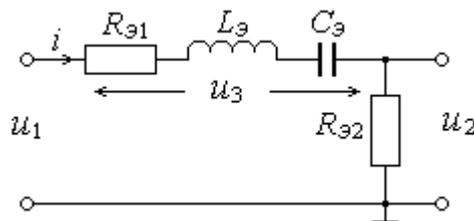


Рис. 1.13. Схема колебательного контура, эквивалентного полосовому RC -фильтру

Для того чтобы определить эту связь, воспользуемся дифференциальным уравнением, описывающим процессы в колебательном контуре.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & i = \frac{u_2}{R_{\mathcal{E}2}}. \\
 2. \quad & u_3 + u_2 = u_1; \quad u_3 = iR_{\mathcal{E}1} + \frac{1}{C_{\mathcal{E}}} \int idt + L_{\mathcal{E}} \frac{di}{dt}. \\
 3. \quad & \frac{R_{\mathcal{E}1}}{R_{\mathcal{E}2}} u_2 + \frac{1}{R_{\mathcal{E}2} C_{\mathcal{E}}} \int u_2 dt + \frac{L_{\mathcal{E}}}{R_{\mathcal{E}2}} \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1; \\
 & \frac{L_{\mathcal{E}}}{R_{\mathcal{E}2}} \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \left(1 + \frac{R_{\mathcal{E}1}}{R_{\mathcal{E}2}} \right) \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{R_{\mathcal{E}2} C_{\mathcal{E}}} u_2 = \frac{du_1}{dt}. \\
 4. \quad & \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{R_{\mathcal{E}1} + R_{\mathcal{E}2}}{L_{\mathcal{E}}} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L_{\mathcal{E}} C_{\mathcal{E}}} u_2 = \frac{R_{\mathcal{E}2}}{L_{\mathcal{E}}} \frac{du_1}{dt}; \\
 & \frac{d^2 u_2}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_2}{dt} + \omega_0^2 u_2 = \delta \frac{du_{ex}}{dt}, \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

где $2\alpha = \frac{R_{\mathcal{E}1} + R_{\mathcal{E}2}}{L_{\mathcal{E}}}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathcal{E}} C_{\mathcal{E}}}}$, $\delta = \frac{R_{\mathcal{E}2}}{L_{\mathcal{E}}}$.

Сравнение дифференциальных уравнений (1.12) и (1.13) позволяет определить эквивалентные параметры контура:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \delta = \frac{R_{\mathcal{E}2}}{L_{\mathcal{E}}} = \frac{1}{RC}. \text{ Положим, что } R_{\mathcal{E}2} = R, \text{ тогда } L_{\mathcal{E}} = R^2 C. \\
 2. \quad & \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathcal{E}} C_{\mathcal{E}}}} = \frac{1}{RC}; \quad C_{\mathcal{E}} = C. \\
 3. \quad & 2\alpha = \frac{3}{RC} = \frac{R_{\mathcal{E}1} + R_{\mathcal{E}2}}{L_{\mathcal{E}}}; \quad \frac{3}{RC} = \frac{R_{\mathcal{E}1} + R}{R^2 C}; \quad R_{\mathcal{E}1} = 2R.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в системе с RC -фильтрами могут происходить колебания энергии, близкие к гармоническим. Однако в силу широкополосности цепей с такими фильтрами, они обладают низкими фильтрующими свойствами. Для получения более узкой амплитудно-частотной характеристики используют несколько идентичных RC -фильтров, разделенных линейными усилителями. При этом цепь по своим резонансным свойствам будет близка к узкополосному контуру.

Это не единственный способ обеспечения условий для установления автоколебаний в системе с RC -фильтрами. Проще воспользоваться селективными свойствами не амплитудно-частотной, а фазочастотной характеристики такой системы. При этом для получения устойчивой генерации на определенной частоте необходимо построить замкнутую систему с положительной обратной связью таким образом, чтобы сумма фазовых сдвигов при обходе замкнутого кольца была равной $2\pi n$. Такую систему можно построить на основе аперио-

дического (с резистивной нагрузкой) или операционного усилителя с RC-фильтром в цепи положительной обратной связи (рис. 1.14).

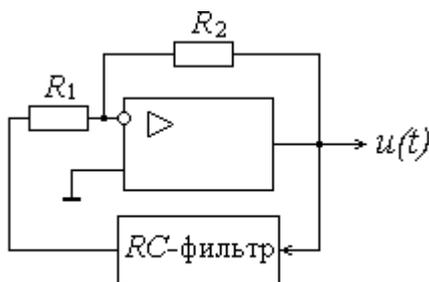


Рис. 1.14. Вариант структурного построения RC-генератора

Требования к коэффициенту усиления и фазовому сдвигу усилителя определим в результате анализа характеристик различных RC-фильтров.

1.8.2. Частотные характеристики RC-фильтров

Определим частотные характеристики RC-фильтров, изображенных на рис. 1.12, пользуясь методом контурных токов.

Частотный коэффициент передачи ФВЧ (см. рис. 1.12, а)

$$\begin{cases} i_1(R + x_c) - i_2R = u_1, \\ i_2(2R + x_c) - i_1R - i_3R = 0, \\ i_3(2R + x_c) - i_2R = 0. \end{cases}$$

$$i_1 = \frac{u_1 + i_2R}{R + x_c}; \quad i_2 = \frac{u_1R + i_3R(R + x_c)}{(2R + x_c)(R + x_c) - R^2}; \quad i_3 = \frac{u_1R^2}{R^3 + 6R^2x_c + 5Rx_c^2 + x_c^3}.$$

Учитывая, что $x_c = \frac{1}{j\omega C}$, $u_2 = i_3R$ (см. рис. 1.12, а), и обозначая $\tau = RC$,

получаем выражение для частотного коэффициента передачи ФВЧ

$$K_{\text{вч}}(j\omega) = -\frac{1}{(5/\omega^2\tau^2 - 1) + j(6/\omega\tau - 1/\omega^3\tau^3)}. \quad (1.14)$$

Тогда АЧХ и ФЧХ фильтра равны

$$K_{\text{вч}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(5/\omega^2\tau^2 - 1)^2 + (6/\omega\tau - 1/\omega^3\tau^3)^2}}; \quad (1.15)$$

$$\varphi_{\text{вч}}(\omega) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{6/\omega\tau - 1/\omega^3\tau^3}{5/\omega^2\tau^2 - 1}. \quad (1.16)$$

Частотный коэффициент передачи ФНЧ (см. рис. 1.12, б)

$$\begin{cases} i_1(R + x_c) - i_2x_c = u_1, \\ i_2(R + 2x_c) - i_1x_c - i_3x_c = 0, \\ i_3(R + 2x_c) - i_2x_c = 0. \end{cases}$$

$$i_1 = \frac{u_1 + i_2x_c}{R + x_c}; \quad i_2 = \frac{u_1x_c + i_3x_c(R + x_c)}{(R + 2x_c)(R + x_c) - x_c^2}; \quad i_3 = \frac{u_1x_c^2}{R^3 + 5R^2x_c + 6Rx_c^2 + x_c^3}.$$

Учитывая, что $u_2 = i_3x_c$ (см. рис. 1.12, б), получаем выражение для частотного коэффициента передачи ФНЧ

$$K_{\text{нч}}(j\omega) = -\frac{1}{(5\omega^2\tau^2 - 1) + j(\omega^3\tau^3 - 6\omega\tau)}. \quad (1.17)$$

Тогда АЧХ и ФЧХ фильтра равны

$$K_{\text{нч}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(5\omega^2\tau^2 - 1)^2 + (\omega^3\tau^3 - 6\omega\tau)^2}}; \quad (1.18)$$

$$\varphi_{\text{нч}}(\omega) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega^3\tau^3 - 6\omega\tau}{5\omega^2\tau^2 - 1}. \quad (1.19)$$

На рис. 1.15 и 1.16 представлены для RC-фильтров (ФВЧ и ФНЧ) графики АЧХ в линейном и в логарифмическом масштабах, а на рис. 1.17 – графики ФЧХ. Как видно из графиков рис. 1.17, фильтры обеспечивают фазовый сдвиг, равный 180° , только на одной частоте. Определим эту частоту для каждого фильтра.

$$\text{ФВЧ} \quad 6/\omega\tau - 1/\omega^3\tau^3 = 0; \quad \omega_0 = 1/\sqrt{6}\tau.$$

$$\text{ФНЧ} \quad \omega^3\tau^3 - 6\omega\tau = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{6}/\tau.$$

Именно на этих частотах возможна генерация при использовании данных фильтров в цепях обратной связи генераторов. Подставляя полученные значения частот в формулу для АЧХ, получим модули коэффициентов передачи фильтров:

$$K_{\text{вч}}(\omega_0) = \frac{1}{29} \quad \text{и} \quad K_{\text{нч}}(\omega_0) = \frac{1}{29}.$$

Полученные результаты позволяют предъявить некоторые требования к усилителю в составе генератора. Во-первых, для соблюдения баланса фаз $\varphi_y + \varphi_{oc} = 2\pi n$ усилитель должен обеспечить сдвиг фазы входного сигнала на 180° . Во-вторых, для соблюдения баланса амплитуд $K_y \beta_{oc} = 1$ усилитель в стационарном режиме должен иметь коэффициент усиления, равный $K_y = 29$.

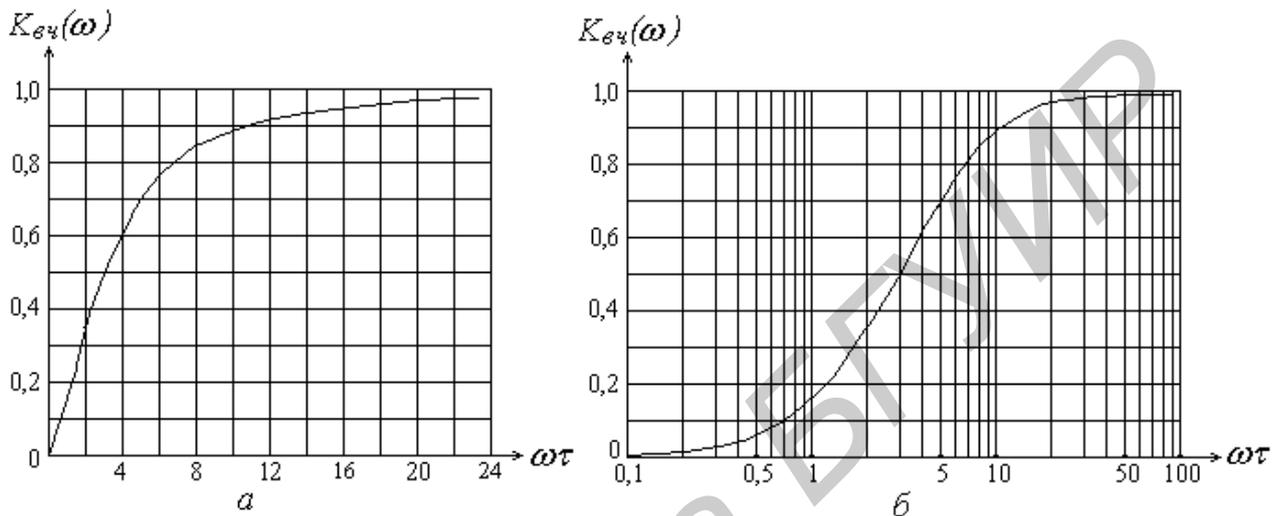


Рис. 1.15. Амплитудно-частотная характеристика RC -фильтра (ФВЧ):
 а – линейный масштаб; б – логарифмический масштаб

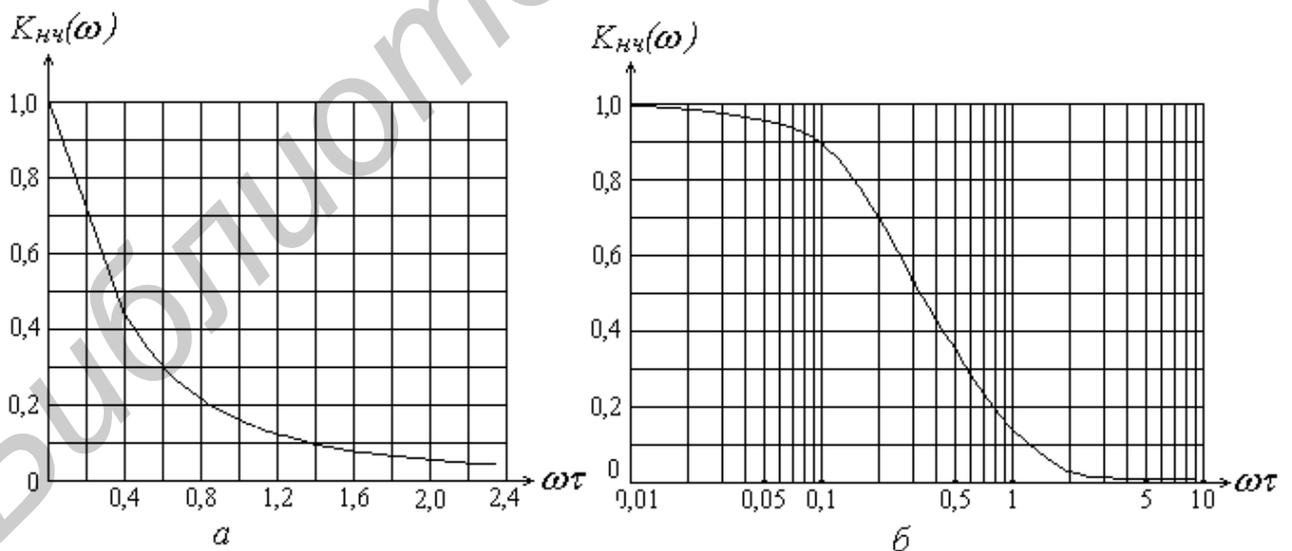


Рис. 1.16. Амплитудно-частотная характеристика RC -фильтра (ФНЧ):
 а – линейный масштаб; б – логарифмический масштаб

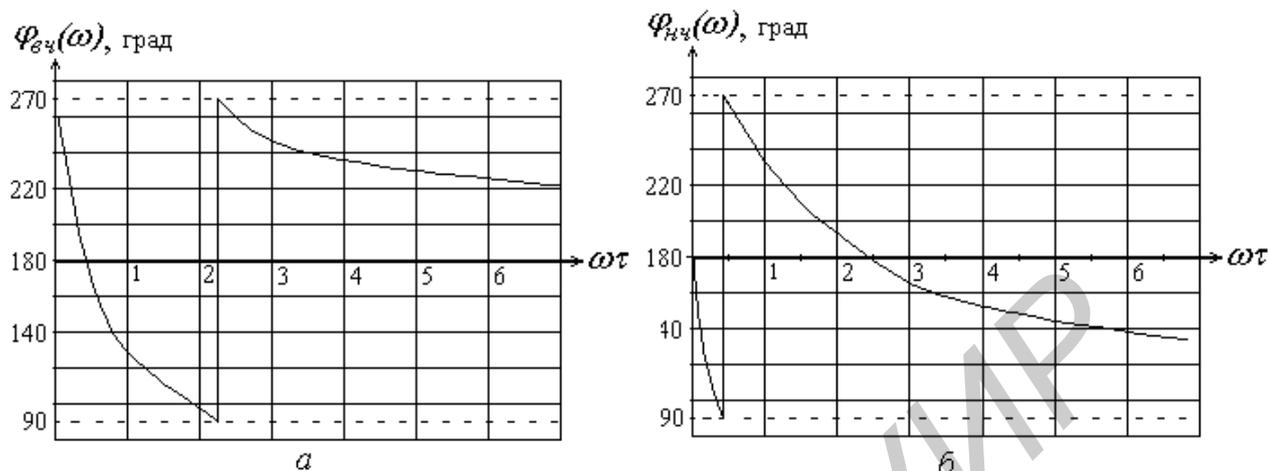


Рис. 1.17. Фазочастотные характеристики RC-фильтров:
 а – ФВЧ; б – ФНЧ

Частотный коэффициент передачи полосового RC-фильтра (см. рис. 1.12,в)

$$i(R + x_c) + i \frac{R \cdot x_c}{R + x_c} = U_1; \quad i = \frac{U_1(R + x_c)}{(R + x_c)^2 + R \cdot x_c}; \quad U_2 = i \frac{R \cdot x_c}{R + x_c};$$

$$K_{nl}(j\omega) = \frac{R \cdot x_c}{(R + x_c)^2 + R \cdot x_c} = \frac{R \cdot x_c}{R^2 + 2R \cdot x_c + x_c^2 + R \cdot x_c} = \frac{1}{R/x_c + 3 + x_c/R}.$$

Подставим $x_c = \frac{1}{j\omega C}$ и обозначим $\tau = RC$. Тогда

$$K_{nl}(j\omega) = \frac{1}{3 + j(\omega\tau - 1/\omega\tau)}. \quad (1.20)$$

Таким образом, АЧХ и ФЧХ фильтра равны

$$K_{nl}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + (\omega\tau - 1/\omega\tau)^2}}; \quad \varphi_{nl}(\omega) = -\text{arctg} \frac{\omega\tau - 1/\omega\tau}{3}. \quad (1.21)$$

Графики АЧХ и ФЧХ фильтра приведены на рис. 1.18 и 1.19.

Как видно из графика рис. 1.19, фильтры обеспечивают фазовый сдвиг, равный 0° , только на одной частоте. Эта частота равна $\omega_0 = 1/\tau$.

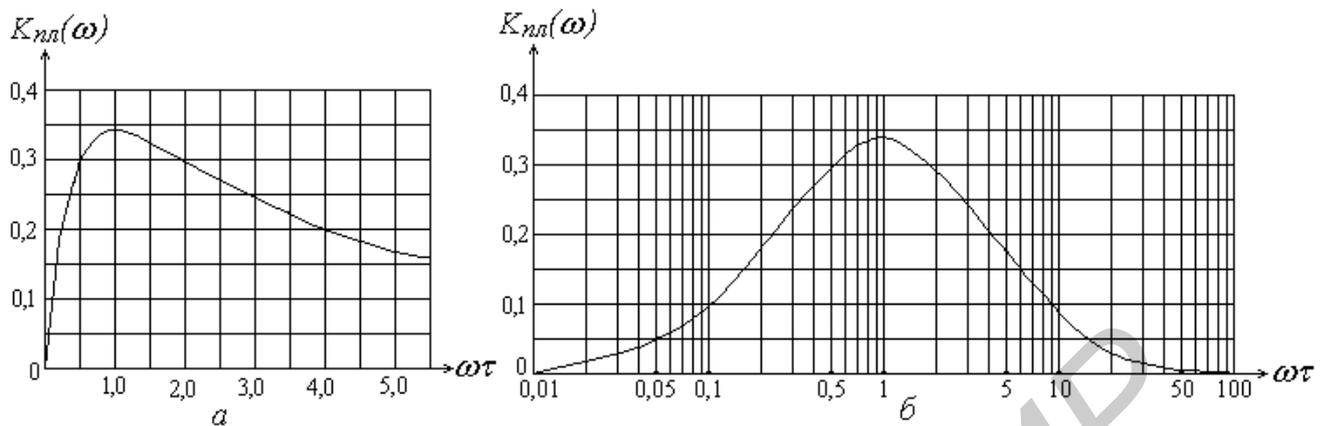


Рис. 1.18. Амплитудно-частотная характеристика полосового RC -фильтра:
 a – линейный масштаб; b – логарифмический масштаб

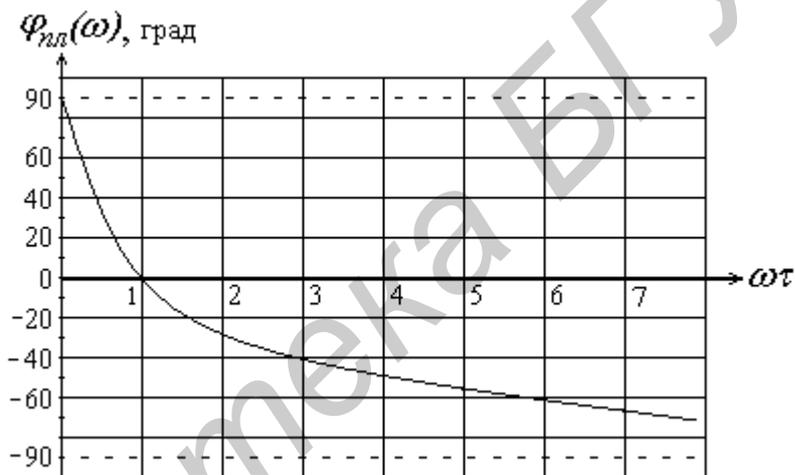


Рис. 1.19. Фазочастотная характеристика полосового RC -фильтра

Именно на этой частоте возможна генерация при использовании данного фильтра в цепях обратной связи генераторов. Подставляя полученное значение частоты в формулу для АЧХ, получим модуль коэффициента передачи фильтра:

$$K_{nl}(\omega_0) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, для соблюдения баланса фаз $\varphi_y + \varphi_{oc} = 2\pi n$ усилитель не должен сдвигать по фазе входной сигнал. Для соблюдения баланса амплитуд $K_y \beta_{oc} = 1$ усилитель в стационарном режиме должен иметь коэффициент усиления, равный $K_y = 3$.

1.8.3. Схемы RC-генераторов

Известно, что для установления стационарного режима работы генератора необходимо создать условия для надежного ограничения амплитуды колебаний. Способ ограничения, который реализован в LC-генераторах, предусматривает уменьшение коэффициента усиления усилителя за счет уменьшения средней крутизны (при увеличении амплитуды колебаний) до уровня, обеспечивающего баланс амплитуд, т. е. $K_y = 1/\beta$. Применение такого способа в RC-генераторах может привести к значительным искажениям формы колебаний, так как в этих генераторах отсутствует качественная фильтрация высших гармоник.

Данная проблема в RC-генераторах решается не за счет уменьшения коэффициента усиления усилителя в процессе увеличения амплитуды колебаний, а за счет уменьшения коэффициента обратной связи β . Для этого используется отрицательная обратная связь в виде инерционной нелинейности (терморезистора) или транзисторной схемы с выпрямителем выходного напряжения. При увеличении амплитуды генерируемых колебаний сопротивление цепи отрицательной обратной связи увеличивается.

На рис. 1.20 приведены схемы RC-генераторов на операционных усилителях с 3-звенным RC-фильтром (рис. 1.20, а) и мостом Вина (рис. 1.20, б).

В схеме генератора, показанного на рис. 1.20, б, напряжение отрицательной обратной связи подается на инвертирующий вход усилителя с помощью делителя R_3 и R_1 . Резистор R_3 шунтируется полевым транзистором VT. При отсутствии напряжения на выходе генератора напряжение на затворе транзистора равно 0 и сопротивление резистора R_3 шунтируется незначительным сопротивлением сток – исток транзистора. При этом глубина отрицательной обратной связи минимальна и она незначительно компенсирует положительную обратную связь. При росте амплитуды колебаний напряжение на выходе выпрямителя растет и запирает транзистор. Увеличивается глубина отрицательной обратной связи, следствием чего является уменьшение коэффициента обратной связи β , обеспечивая баланс амплитуд $\beta = 1/K_y$.

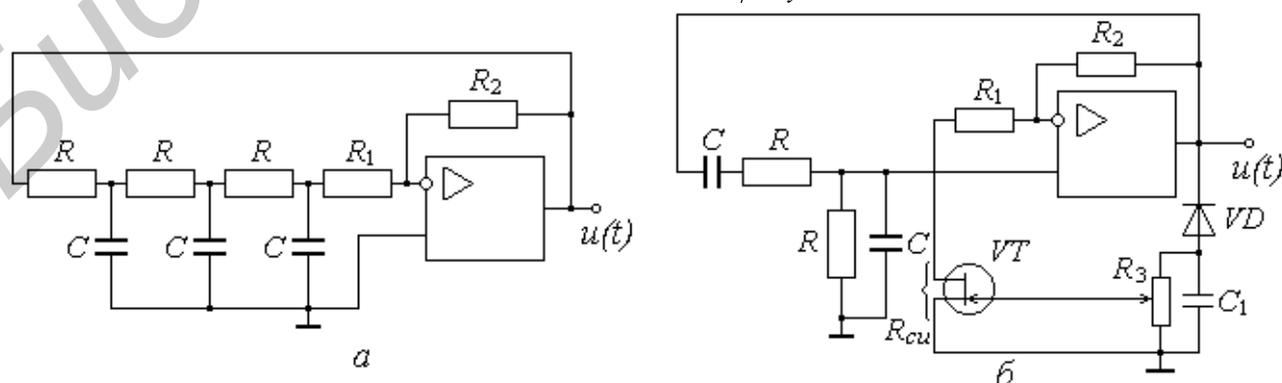


Рис. 1.20. Схемы RC-генераторов:
а – с 3-звенным RC-фильтром; б – с полосовым фильтром

1.9. Трехточечные автогенераторы

Многочисленные схемы LC -генераторов различаются в основном схемами формирования сигнала обратной связи и способами подключения колебательного контура к усилителю. Кроме трансформаторной обратной связи, рассмотренной выше, часто используется автотрансформаторная обратная связь. При этом получается, что усилительный элемент подключается к трем точкам контура.

В общем виде эквивалентная схема трехточечного генератора представлена на рис. 1.21.

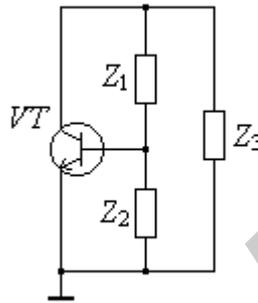


Рис. 1.21. Эквивалентная схема трехточечного генератора

Избирательная цепь представляет собой высокодобротный контур, который содержит емкостные и индуктивные элементы с комплексными сопротивлениями Z_1 , Z_2 и Z_3 , т. е.

$$Z_i = jx_L = j\omega L \text{ или } Z_i = -jx_C = -j\frac{1}{\omega C},$$

где $x_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление;

$$x_C = \frac{1}{\omega C} \text{ – емкостное сопротивление.}$$

Сопротивления Z_1 и Z_2 представляют собой делитель, обеспечивающий обратную связь с коэффициентом передачи, равным

$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Учитывая, что выходное напряжение усилительного элемента сдвинуто по фазе относительно входного на угол π , то для соблюдения баланса фаз $\varphi_y + \varphi_{oc} = 2\pi n$ необходимо, чтобы цепь обратной связи также обеспечивала сдвиг по фазе на угол π , т. е. коэффициент передачи обратной связи должен быть отрицательным. Основываясь на приведенной выше формуле для β , рассмотрим характер реактивностей в колебательном контуре для достижения этого условия.

1. Пусть $Z_2 = jx_L = j\omega L$. Тогда

$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{jx_L}{Z_1 + jx_L}.$$

Коэффициент β будет отрицательным в том случае, если $Z_1 = -jx_C$ и $|x_C| > |x_L|$. При этом цепь Z_1, Z_2 имеет емкостный характер. Избирательность цепи Z_1, Z_2 и Z_3 обеспечивается в том случае, если сопротивление Z_3 будет индуктивным, т. е. $Z_3 = jx_L$.

2. Пусть $Z_2 = -jx_C = -j\frac{1}{\omega C}$.

Тогда

$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = -\frac{jx_C}{Z_1 - jx_C}.$$

Коэффициент β будет отрицательным в том случае, если $Z_1 = jx_L$ и $|x_L| > |x_C|$. При этом цепь Z_1, Z_2 имеет индуктивный характер. Избирательность цепи Z_1, Z_2 и Z_3 обеспечивается в том случае, если сопротивление Z_3 будет емкостным, т. е. $Z_3 = -jx_C$.

Из приведенных рассуждений можно сделать следующий вывод. Реактивности комплексных сопротивлений Z_1 и Z_2 различны, а реактивности сопротивлений Z_2 и Z_3 одинаковы. Следовательно, эквивалентные схемы генераторов с расшифровкой реактивностей можно представить в виде рис. 1.22. Для схемы с индуктивной связью (рис. 1.22, а), используют термин «индуктивная трехточка», а для схемы с емкостной связью (рис. 1.22, б) – «емкостная трехточка».

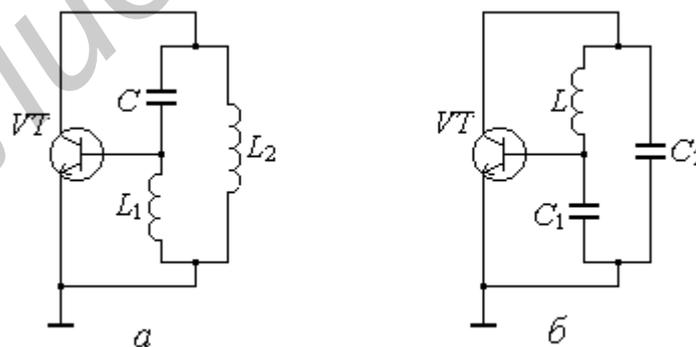


Рис. 1.22. Эквивалентные схемы трехточечных генераторов:
а – индуктивная трехточка; б – емкостная трехточка

Определим коэффициент передачи цепи обратной связи генераторов на частоте выходного напряжения, которая определяется резонансной частотой контура.

1. Индуктивная трехточка.

Частота генерируемого напряжения равна $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$, где $L_0 = L_1 + L_2$.

Тогда

$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega_0 L_1}{-j\frac{1}{\omega_0 C} + j\omega_0 L_1} = \frac{L_1}{L_1 - L_0} = -\frac{L_1}{L_2}.$$

2. Емкостная трехточка.

Частота генерируемого напряжения равна $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$, где $C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Тогда

$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{-j\frac{1}{\omega_0 C_1}}{j\omega_0 L - j\frac{1}{\omega_0 C_1}} = \frac{C_0}{C_0 - C_1} = -\frac{C_2}{C_1}.$$

На рис. 1.23, *а* приведена принципиальная схема трехточечного генератора, в котором напряжение обратной связи снимается с индуктивности L_1 (индуктивная трехточка). Источник питания подключен к части витков катушки индуктивности для уменьшения его шунтирующего действия, что повышает добротность контура.

На рис. 1.23, *б* приведена схема генератора, в котором напряжение обратной связи снимается с конденсатора C_1 (емкостная трехточка). Для уменьшения шунтирующего действия источник питания подключен к контуру через емкостной делитель напряжения. Дроссель $L_{\text{др}}$ разъединяет по переменной составляющей емкость C_1 от корпуса.

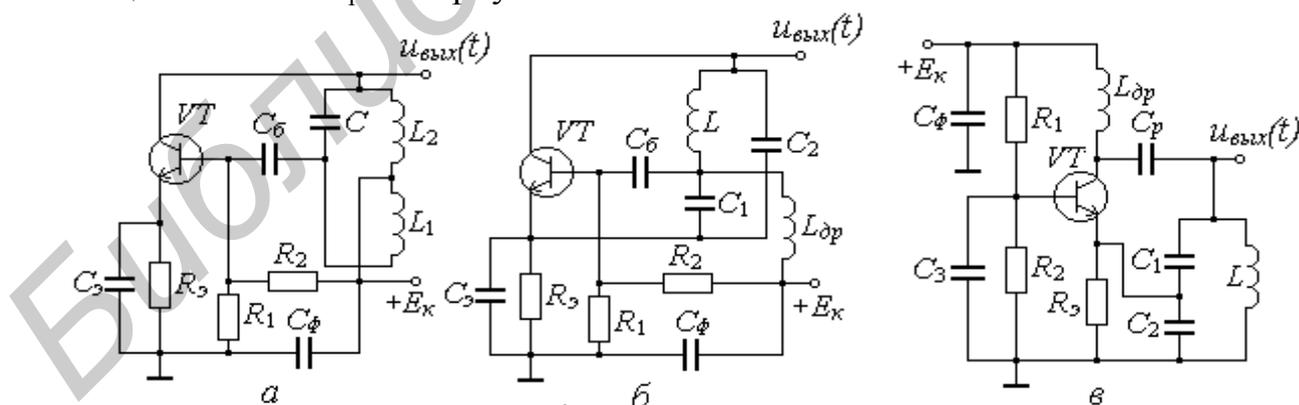


Рис. 1.23. Схемы трехточечных автогенераторов:
а – индуктивная трехточка; *б* – емкостная трехточка;
в – схема с общей базой

С повышением частоты генерируемых напряжений проявляет себя комплексность крутизны ВАХ транзистора в силу возрастания фазового сдвига между током коллектора и током базы. При этом может нарушиться условие баланса фаз, что приводит к невозможности самовозбуждения генератора. Поэтому в коротковолновом диапазоне большое распространение получили генераторы, построенные по схеме с общей базой, один из вариантов которой представлен на рис. 1.23, в.

1.10. Генераторы гармонических колебаний с внутренней обратной связью (с отрицательным сопротивлением)

1.10.1. Некоторые сведения о туннельном диоде

При рассмотрении принципа работы LC -генератора с трансформаторной обратной связью было показано, что положительная обратная связь обеспечивает внесение в контур отрицательной проводимости при надлежащем выборе фазового сдвига цепи обратной связи. Это обеспечивает компенсацию потерь в контуре.

Существуют электронные элементы, которые характеризуются отрицательным сопротивлением. К таким элементам относится *туннельный диод*. Вольт-амперная характеристика туннельного диода, характеризующая зависимость прямого тока диода от напряжения (рис. 1.24), имеет два восходящих участка и падающий участок в интервале $U_1..U_2$, на котором с ростом напряжения ток уменьшается. Этот участок характеризуется отрицательным дифференциальным сопротивлением, т. е. на этом участке $R_- = du/di < 0$. Причем модуль отрицательного сопротивления имеет значение порядка $5...500$ Ом.

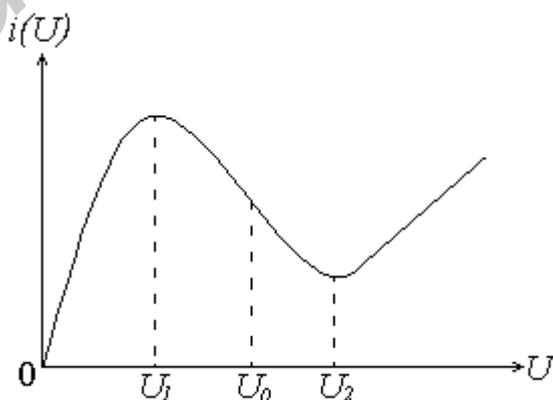


Рис. 1.24. Вольт-амперная характеристика туннельного диода

Эквивалентная схема туннельного диода, соответствующая участку ВАХ, на котором внутреннее сопротивление диода отрицательно, приведена на рис. 1.25. В этой схеме $R_{\partial} = 0,1 \dots 1$ Ом – сопротивление материала, $L_{\partial} = 10^{-8} \dots 10^{-10}$ Гн – индуктивность вводов, $C_{\partial} = 1 \dots 200$ пФ – емкость p - n -перехода.

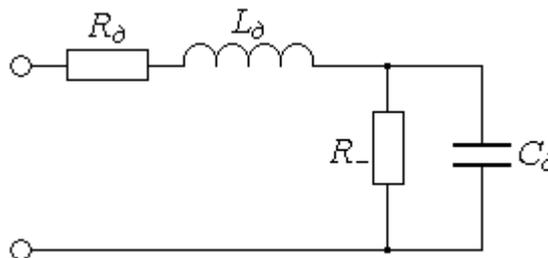


Рис. 1.25. Эквивалентная схема туннельного диода

1.10.2. Схемы подключения туннельного диода к колебательному контуру

Подключая туннельный диод непосредственно в контур, можно обеспечить условия генерации колебаний без внешней обратной связи. Возможны две схемы подключения элемента с отрицательным сопротивлением к колебательному контуру: последовательное (рис. 1.26, а) и параллельное (рис. 1.26, б).

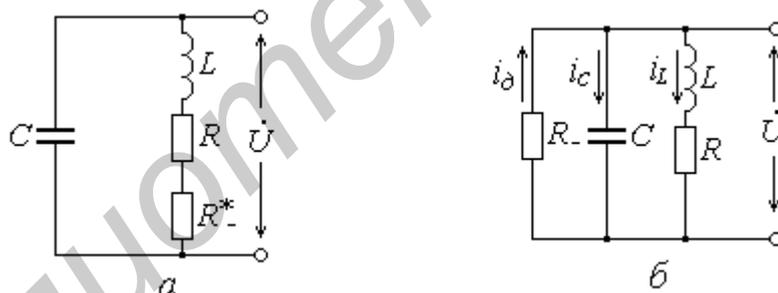


Рис. 1.26. Подключение к контуру отрицательного сопротивления:
а – последовательное; б – параллельное

Для схемы с последовательным подключением туннельного диода условие самовозбуждения – $|R_{-}^*| > R$, условие стационарного режима – $|R_{-}^*| = R$.

Условия самовозбуждения и стационарного режима для схемы с параллельным подключением туннельного диода определим следующим образом.

Как следует из рис. 1.26, б,

$$i_{\partial} = i_L + i_c = i_L + C \frac{du}{dt}.$$

Учитывая, что $u = R i_L + L \frac{di_L}{dt}$, можно записать

$$i_\delta = i_L + RC \frac{di_L}{dt} + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}.$$

С другой стороны, $i_\delta = -\frac{u}{R_-} = -\frac{R i_L + L \frac{di_L}{dt}}{R_-}$.

Тогда

$$-\frac{R i_L + L \frac{di_L}{dt}}{R_-} = i_L + RC \frac{di_L}{dt} + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2};$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_-} \right) \frac{di_L}{dt} + \frac{1 + R/R_-}{LC} i_L = 0.$$

Для того чтобы амплитуда генерируемых колебаний при возбуждении нарастала, коэффициент при первой производной должен быть отрицательным, т. е.

$$\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_-} < 0, \text{ или } |R_-| < \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} = \rho Q = R_0,$$

где $R_0 = \frac{R}{LC}$ – резонансное сопротивление контура.

Стационарный режим генерации устанавливается, когда сопротивление $|R_-|$, которое зависит от амплитуды генерируемого колебания, увеличится до $|R_-| = R_0$.

Этот же результат для схемы с параллельным подключением туннельного диода можно получить несколько иначе. Преобразуем схему с параллельным подключением отрицательного сопротивления к контуру в эквивалентную схему с последовательным подключением (рис. 1.25, а), пользуясь известной формулой преобразования $R_-^* = \frac{L}{R_- C}$. Условие самовозбуждения будет иметь вид

$$|R_-^*| > R, \text{ или } \left| \frac{L}{R_- C} \right| > R.$$

Тогда

$$|R_-| < \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} = \rho Q = R_0.$$

Аналогично рассуждая, получим условие стационарного режима

$$|R_-| = \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} = \rho Q = R_0.$$

1.10.3. Схемы генераторов с внутренней обратной связью

При построении схем генераторов с внутренней обратной связью используют параллельные и последовательные колебательные контуры.

Схема с параллельным контуром (рис. 1.27) обычно применяется на низких частотах. На этих частотах можно пренебречь индуктивностью вводов L_∂ и емкостным сопротивлением материала диода R_∂ , показанных на эквивалентной схеме туннельного диода (рис. 1.25). Источник смещения и делитель напряжения R_1 , R_2 обеспечивают необходимый режим по постоянному току, т. е. устанавливают напряжение рабочей точки, соответствующее середине падающего участка ВАХ диода. Шунтирующая емкость $C_{ш}$ обеспечивает короткое замыкание источника E по переменному току. Она реализует при этом параллельное подключение туннельного диода к колебательному контуру.

Схемы с последовательным колебательным контуром (рис. 1.28) применяются на высоких частотах. В этих схемах колебательный контур составлен из катушки индуктивности L_k и последовательно включенной емкости C_∂ , соответствующей p - n -переходу диода. Условия самовозбуждения и стационарного режима для схемы с последовательным подключением туннельного диода $|R_-^*| > R$ и $|R_-^*| = R$. Применение данной схемы ограничено, так как источник питания влияет на частоту генерируемых колебаний и искажается форма колебаний.

Для сохранения формы гармонических колебаний необходимо подключить конденсатор параллельно катушке индуктивности. В свою очередь, стабильность частоты можно обеспечить путем подключения конденсатора параллельно диоду. Такую схему (рис. 1.28, б) часто называют параллельно-последовательной.

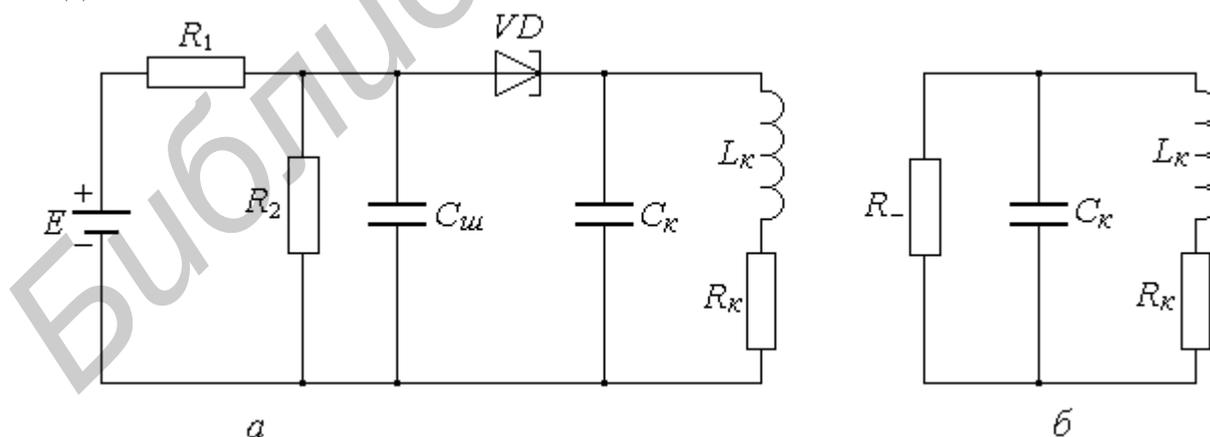


Рис. 1.27. Схема генератора с параллельным колебательным контуром и его эквивалентная схема

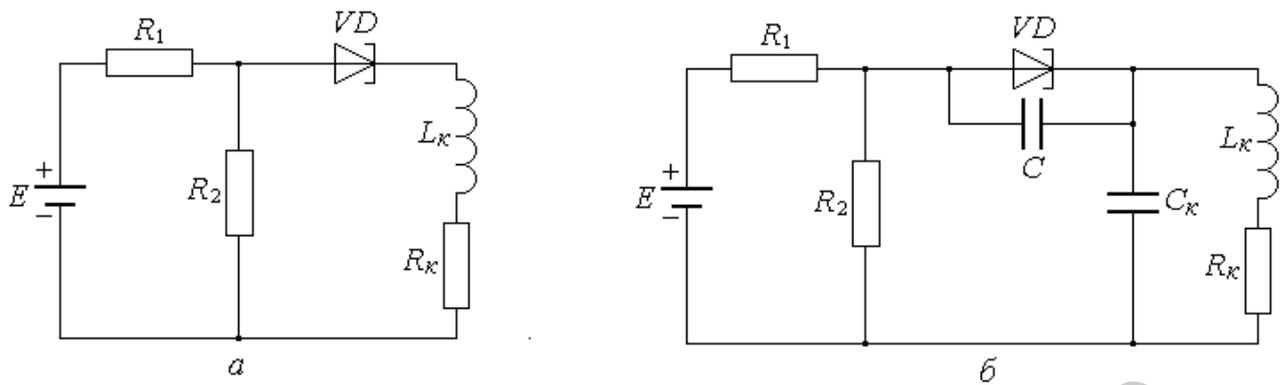


Рис. 1.28. Схемы генераторов с последовательным колебательным контуром

1.11. Стабилизация частоты в автогенераторах

1.11.1. Кварцевая стабилизация частоты

Генерирование колебаний с высокой стабильностью частоты является наиболее важным требованием, предъявляемым к автогенераторам. Отклонение частоты колебаний генераторов, используемых в составе сложных радиотехнических систем, приводит к нежелательным последствиям в их работе. Возможно появление взаимных помех радиоприему соседних по частоте радиостанций, нарушение настройки радиоприемного тракта на принимаемую станцию, отсутствие синхронизации в работе различных устройств системы и др.

Частота колебаний автогенератора может отклоняться от необходимого значения под действием таких дестабилизирующих факторов, как изменение температуры, влажности, атмосферного давления, изменение питающих напряжений и сопротивления нагрузки, шумы электровакуумных и полупроводниковых приборов и т. д. Воздействие этих факторов приводит к изменению величин индуктивностей, емкостей и сопротивлений избирательных систем в составе автогенератора.

Для характеристики устойчивости частоты колебаний генераторов по отношению к дестабилизирующим факторам используют коэффициент относительной нестабильности частоты:

$$k_n = \Delta f / f_k,$$

где $\Delta f = f_m - f_k$ — абсолютная нестабильность частоты;

f_m — текущее значение частоты;

f_k — номинальное значение частоты.

Так, в системах радиовещания на коротких и ультракоротких волнах допускаемое значение коэффициента относительной нестабильности частоты равно $k_n < 2 \cdot 10^{-5}$.

Для повышения устойчивости частоты колебаний генераторов по отношению к дестабилизирующим факторам, т. е. для уменьшения k_n до $10^{-6} - 10^{-10}$, применяют соответствующие методы стабилизации частоты. Наиболее распространена кварцевая стабилизация частоты, при которой в качестве колебательного контура в составе генератора используют электромеханическую колебательную систему – пьезоэлектрический кварцевый резонатор. Кварцевый резонатор – это пластина натурального или искусственного кварца, который обладает прямым и обратным пьезоэффектом. Приложенное к нему электрическое поле вызывает упругие колебания кристалла (обратный пьезоэффект), а эти колебания, в свою очередь, генерируют напряжение на гранях кристалла (прямой пьезоэффект). В этом случае кристалл ведет себя как сложный параллельный колебательный контур, эквивалентная схема которого приведена на рис. 1.29. Емкость C_1 – это емкость кварца (сотые доли пикофарад), а емкость C_2 – это статическая емкость пластин кварцедержателя (десятки пикофарад).

Резонансная частота параллельного колебательного контура равна

$$f_p = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где L – индуктивность кварца;

C – эквивалентная емкость, равная

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

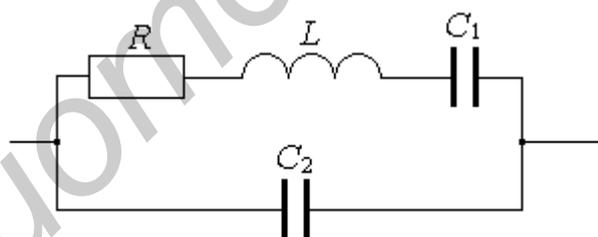


Рис. 1.29. Эквивалентная схема кварцевого резонатора

Сложность рассматриваемого контура обуславливает возможность дополнительного резонанса, возникающего в ветви, которая представляет собой последовательный контур. Частота этого резонанса определяется индуктивностью L и емкостью C_1 кварца. Так как $C_2 \gg C_1$, то резонансные частоты параллельного и последовательного контуров отличаются друг от друга не более чем на 1 %.

В целом кварцевый резонатор ведет себя как высокодобротный (до 10^7) резонансный контур, имеющий высокую устойчивость параметров к внешним воздействиям. Резонатор включается в положительную обратную связь, причем в участки схемы, реактивное сопротивление которых должно иметь индуктив-

ный характер для выполнения условия баланса фаз. Автоколебания возникают на частоте между частотами последовательного и параллельного резонанса.

Радиотехнические устройства с кварцевой стабилизацией частоты широко применяют в радиопередатчиках средней и большой мощности, эталонах и стандартах времени и частоты, в генераторах систем многоканальной связи и т. д.

1.11.2. Схемы кварцевых генераторов

На рис. 1.30 приведены две схемы кварцевых автогенераторов. Это трехточечные LC -генераторы, в колебательную систему которых включается кварцевый резонатор. При этом используется полоса частот кварцевого резонатора, имеющая индуктивное реактивное сопротивление, т. е. резонатор включается в качестве индуктивности.

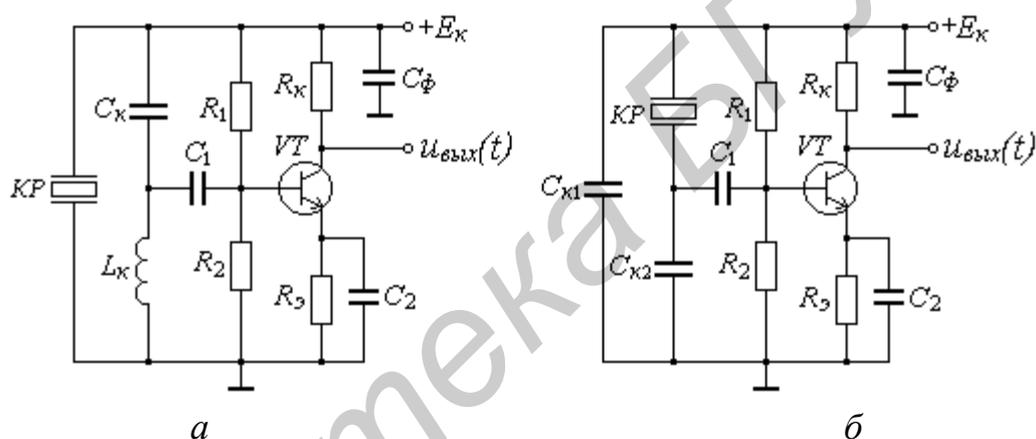


Рис. 1.30. Схемы кварцевых автогенераторов:
а – индуктивная трехточка; *б* – емкостная трехточка

Биполярные транзисторы имеют малое входное сопротивление, что ограничивает возможность построения генераторов с требуемыми характеристиками. Поэтому в настоящее время кварцевые генераторы часто строят с использованием полевых транзисторов, в которых отсутствует указанный выше недостаток (рис. 1.31).

На рис. 1.31, *а* представлен генератор гармонических колебаний, который известен как генератор Пирса. Кварцевый резонатор обеспечивает сдвиг фазы выходного сигнала 180° . При этом суммарный сдвиг фазы по отношению к сигналу на затворе достигает 2π , что приводит к возникновению колебаний на резонансной частоте кварца.

На рис. 1.31, *б* представлен генератор гармонических колебаний, который известен как генератор Колпитца. Кварцевый резонатор в данной схеме являет-

ся колебательным контуром. Коэффициент неустойчивости такого генератора $k_n \leq 10^{-6}$.

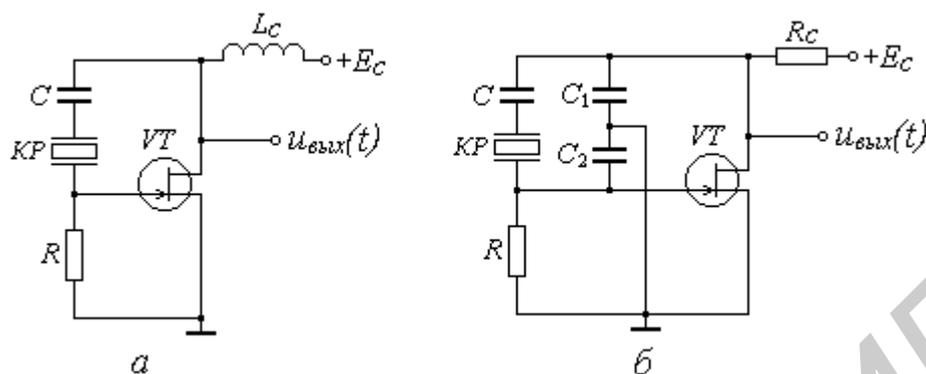


Рис. 1.31. Схемы кварцевых автогенераторов на полевых транзисторах:
a – генератор Пирса; *б* – генератор Колпитца

1.12. Использование метода фазовой плоскости для анализа работы автогенераторов

1.12.1. Фазовая плоскость

Метод фазовой плоскости используется для качественного анализа систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Это частный случай метода фазового пространства, который применяется для анализа систем, описываемых дифференциальными уравнениями n -го порядка.

Необходимость этого метода анализа систем обусловлена тем, что не все нелинейные дифференциальные уравнения имеют точные методы решения. Результат решения дифференциального уравнения – это математическая формула, описывающая зависимость координат системы (например, выходных сигналов) от параметров и времени. Формула – это конечная комбинация элементарных, известных функций. В то же время решение уравнения может представлять собой новый класс функций, который не может быть представлен в виде конечной комбинации известных элементарных функций.

При проектировании и анализе систем не всегда существует необходимость в точном решении дифференциального уравнения. В этом нет необходимости, например, для определения устойчивости системы. Достаточно иметь какой-либо качественный метод. Именно таким методом является метод фазовой плоскости.

Методом фазовой плоскости можно исследовать автономные системы, описываемые однородными дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(x)\frac{dx}{dt} + a_0(x)x = 0. \quad (1.22)$$

Это качественный метод анализа, который изредка позволяет получить и количественные решения.

Как видно из уравнения (1.22), пара величин $x(t)$ и $\frac{dx(t)}{dt}$ в некоторый момент времени t однозначно определяет состояние системы в этот момент времени. При этом основные особенности процесса $x(t)$ можно установить по зависимости $y = f(x)$, где $y = \frac{dx}{dt}$. Определение зависимости $y = \frac{dx}{dt}$ является более простой процедурой, чем определение $x(t)$ при решении дифуравнения. В то же время, зная зависимость $y = \frac{dx}{dt}$, можно определить не только основные особенности процесса $x(t)$, но и найти $x(t)$ путем определенных геометрических построений.

Зависимость $y = \frac{dx}{dt}$ принято изображать на плоскости. На оси абсцисс откладывается x , а на оси ординат – ее производная, т. е. $y = \frac{dx}{dt}$. Плоскость с координатами x и y называется фазовой плоскостью, зависимость $y(x)$ – фазовой траекторией, семейство фазовых траекторий – фазовым портретом, а точка, соответствующая значениям $x(t)$ и $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ в момент времени t , – изображающей точкой.

1.12.2. Свойства фазовых траекторий

1. В верхней полуплоскости скорость $y = \frac{dx}{dt}$ положительна. При этом изменению скорости соответствует увеличение координаты x . Следовательно, в верхней полуплоскости точка фазовой траектории движется слева направо. В нижней полуплоскости скорость $y = \frac{dx}{dt}$ отрицательна, т. е. изменению скорости соответствует уменьшение координаты x . Следовательно, в нижней полуплоскости точка фазовой траектории движется справа налево (рис. 1.32).

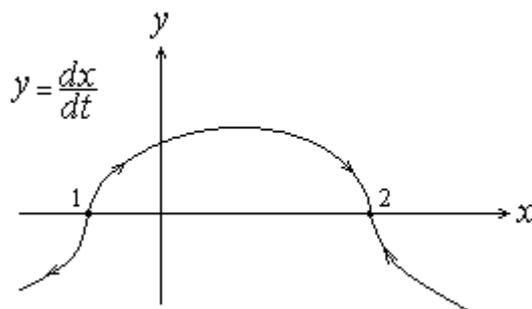


Рис. 1.32. Фазовый портрет

2. Устойчивость точек пересечения фазовой траектории с осью абсцисс, в которых $y = 0$, определяется знаком производной dx/dt . Устойчивы только те точки, в которых $dx/dt < 0$ (точка 2 на рис. 1.32). Это свойство является следствием первого свойства.

3. Фазовые траектории периодических колебаний представляют собой замкнутые кривые. Это свойство следует из повторяемости значений x и y через время, соответствующее периоду колебаний.

Доказательство

Пусть $x(t) = U \sin \omega t$ (рис. 1.33). Определим вид зависимости $y = f(x)$,

где $y = \frac{dx}{dt}$.

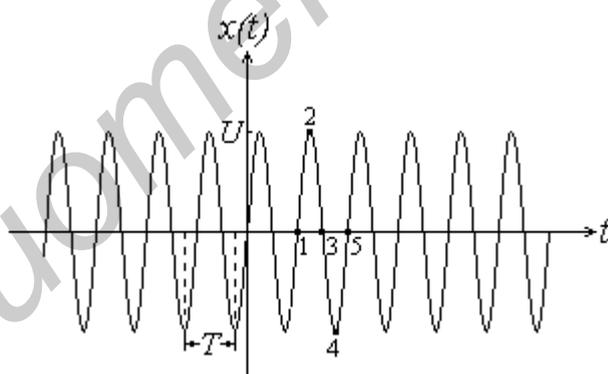


Рис. 1.33. Гармоническое колебание

$$x(t) = U \sin \omega t; \quad x^2(t) = U^2 \sin^2 \omega t; \quad \sin^2 \omega t = \frac{x^2(t)}{U^2};$$

$$y(t) = U\omega \cos \omega t; \quad y^2(t) = U^2 \omega^2 \cos^2 \omega t; \quad \cos^2 \omega t = \frac{y^2(t)}{U^2 \omega^2};$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1; \quad \frac{x^2(t)}{U^2} + \frac{y^2(t)}{U^2 \omega^2} = 1.$$

Получено уравнение, соответствующее эллипсу (рис. 1.34).

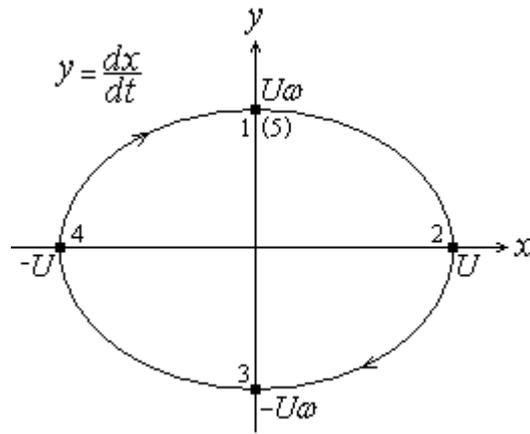


Рис. 1.34. Фазовый портрет с траекторией гармонического колебания

Следует обратить внимание на точки 1, 2, 3, 4, 5, отмеченные на рис.1.33 и 1.34. Этим точкам соответствуют определенные значения x и y .

4. Две различные фазовые траектории не пересекаются в одной точке, если она не относится к числу особых точек.

Доказательство

Пусть точка пересечения – это состояние системы в момент $t = 0$. Каково будет движение системы в дальнейшем? Известно, что при заданных начальных условиях получается однозначное решение дифференциального уравнения. Это значит, что дальнейшее движение системы определяется однозначно. Поэтому из конкретной точки фазовой плоскости может исходить одна фазовая траектория.

5. Фазовые траектории пересекают ось абсцисс ($y = 0$) под прямым углом:

$$y = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dy/dt}{dy/dx} = 0. \quad (1.23)$$

Производная $\frac{dy}{dx}$ – это тангенс угла касательной к фазовой траектории.

Из уравнения 1.23 видно, что $y = 0$ при $\frac{dy}{dx} = \infty$, если $x < 0$, а также при

$\frac{dy}{dx} = -\infty$, если $x > 0$.

1.12.3. Уравнение фазовой траектории

Пусть система описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(x) \frac{dx}{dt} + a_0(x)x = 0.$$

Подставим в это уравнение $y = \frac{dx}{dt}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + a_1(x)y + a_0(x)x &= 0; & \frac{dy}{dt} &= -a_1(x)y - a_0(x)x; \\ \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dx} &= -a_1(x)y - a_0(x)x; \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{a_1(x)y + a_0(x)x}{dx/dt} = -\frac{a_1(x)y + a_0(x)x}{y} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Получено уравнение фазовой траектории в дифференциальной форме. Оно имеет следующий физический смысл.

Известно, что $\frac{dy}{dx}$ – это тангенс угла наклона касательной к фазовой траектории в данной точке. Другими словами, это направление бесконечно малого отрезка фазовой траектории, проходящего через данную точку. Таким образом, уравнение (1.24) задает направление фазовой траектории в любой не особой точке. В особых точках данное уравнение не дает возможности определить направление фазовой траектории.

В принципе решением уравнения (1.24) является функция $y = f(x)$. Однако аналитического решения уравнения нет, так как переменные y и x не разделяются. Уравнение можно решить графически или графоаналитически. Один из методов называется методом *изоклин*.

1.12.4. Особые точки

Точка – частный случай фазовой траектории. Если траектория состоит из одной точки, то соответствующая ей система с течением времени не изменяет своего состояния. Она находится в равновесии.

Уравнение (1.24) не позволяет определить направление фазовой траектории в том случае, когда результат неоднозначен или не определен. Если функция $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ неоднозначна, то направление касательной не определено.

Это особые точки, через них проходит более чем одна фазовая траектория.

Неопределенность будет и в том случае, если $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{0}{0}$, т. е. если

$P(x, y) = Q(x, y) = 0$. В этом случае не существует определенное направление касательной к траектории в данной точке. Очевидно, что если для некоторой точки $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$, то координаты такой точки неизменны. Система находится в равновесии. Особые точки соответствуют состояниям равновесия. Ли-

нейная система имеет одно состояние равновесия, нелинейная система может иметь несколько точек равновесия.

1.12.5. Изоклина

В случае линейного дифференциального уравнения ФТ можно определить с помощью уравнения (1.24). В более общем случае нелинейного уравнения ФТ строится с помощью метода *изоклин*. Изоклина – это кривая равного наклона, или геометрическое место точек фазовой плоскости, в которых ФТ имеют касательные с фиксированным угловым коэффициентом k .

Получим уравнение изоклины. Для этого запишем уравнение (1.24) в следующем виде:

$$\frac{dy}{dx} + a_1(x) + \frac{1}{y} a_0(x)x = 0. \quad (1.25)$$

В результате решения этого уравнения можно получить функцию $y = \frac{dx}{dt} = f(x)$. Однако решить данное уравнение аналитически невозможно (переменные не разделяются). Применяют графоаналитические методы. Один из этих методов – метод изоклин.

Можно задать определенное значение тангенса угла наклона касательной в некоторой точке фазовой траектории, равное k , т. е.

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{a_1(x)y + a_0(x)x}{y} = k.$$

Тогда уравнение (1.25) можно записать в виде

$$y = - \frac{a_0(x)x}{k + a_1(x)}. \quad (1.26)$$

Уравнение дает геометрическое место точек, через которые ФТ проходит под углом, тангенс которого равен k . Это уравнение изоклин.

Рассмотрим алгоритм построения ФТ методом изоклин.

1. Задаваясь значениями x при различных постоянных k и вычисляя y , строят семейство изоклин (рис. 1.35).

2. На каждую изоклину наносят засечки, показывающие, под каким углом проходит фазовая траектория.

3. Из точки A с координатами x_0, y_0 , соответствующими начальным условиям, проводят две линии до пересечения со следующей изоклиной. Одна линия параллельна засечке данной изоклины, а другая параллельна засечке соседней изоклины.

4. Между этими линиями проводят фазовую траекторию до точки B .

5. Процесс повторяется применительно к точке B до получения точки C .

6. С определенной точностью получается фазовая траектория при соединении полученных точек A, B, C, \dots

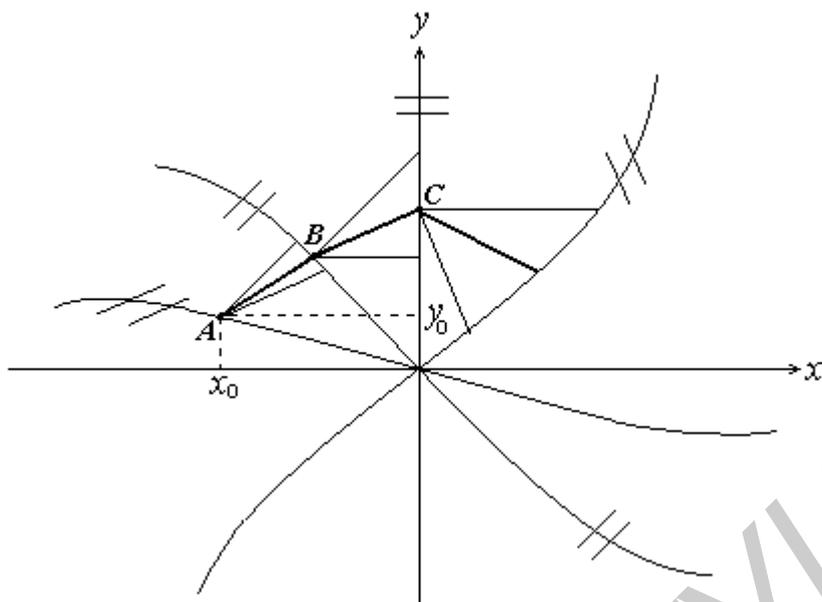


Рис. 1.35. Построение фазовой траектории по методу изоклин

Построение можно выполнять с любой точностью в зависимости от количества построенных изоклин.

Однако конечной целью решения дифференциального уравнения является получение временной функции процесса, т. е. зависимости $x(t)$. Эту зависимость можно построить по изображению фазовой траектории.

1.12.6. Практическое применение метода фазовой плоскости

Решение дифференциального уравнения

Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(x) \frac{dx}{dt} + a_0(x)x = 0.$$

1. Составляем уравнение изоклины

$$y = -\frac{a_0(x)x}{k + a_1(x)}.$$

2. Для наиболее очевидных значений k ($0, -1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \dots$) составляем уравнение главных изоклин.

3. Графически строим фазовую траекторию методом изоклин для требуемых начальных условий.

4. Строим график $x(t)$, пользуясь фазовой траекторией. Для каждого отрезка прямых линий траектории запишем уравнение

$$y = \frac{dx}{dt} = kx + b.$$

Отсюда $dx = (kx + b)dt$; $dt = \frac{dx}{kx + b}$.

Тогда
$$\Delta t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \ln(kx+b) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{k} \ln \frac{kx_2+b}{kx_1+b} = \frac{1}{k} \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Так как $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, то время, в течение которого изображающая точка

ФТ проходит данный отрезок, равно

$$\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Построение

1. На фазовой траектории выбираем отрезок $y_2 - y_1$ (рис. 1.36).
2. Определяем по фазовой траектории отрезок $x_2 - x_1$ и вычисляем Δt .
3. Значения x_1 и x_2 наносим на график $x(t)$.
4. Выбираем следующий отрезок и процедура повторяется.

Очевидно, что первым отрезком для построения должен быть выбран отрезок, у которого значения y_1 и x_1 соответствуют начальным условиям. Причем, чем меньше длина отрезка $y_2 - y_1$, тем выше точность полученного решения дифференциального уравнения.

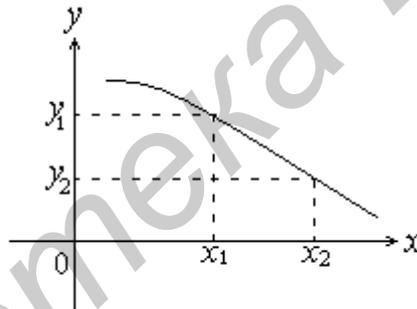


Рис. 1.36. К расчету $x(t)$

Использование метода фазовой плоскости для анализа режимов работы генератора

В установившемся режиме процесс в контуре генератора гармонических колебаний будет таким же, как в контуре без потерь. При этом напряжение $u(t)$ на выходе генератора имеет синусоидальную форму, а на фазовой плоскости – форму эллипса или круга (см. рис. 1.34). Характер переходного режима зависит от начальных условий.

1. Если начальные условия u_0 и $u'_0 = \frac{du}{dt}$ таковы, что точка находится

внутри круга (начальная амплитуда меньше амплитуды колебаний в стационарном режиме), то колебания в контуре будут нарастать (рис. 1.37). Так как огибающая изменяется по экспоненте, то фазовая траектория имеет вид разворачивающейся спирали. Витки спирали изнутри навиваются на эллипс или окружность, которые называются *предельным циклом*.

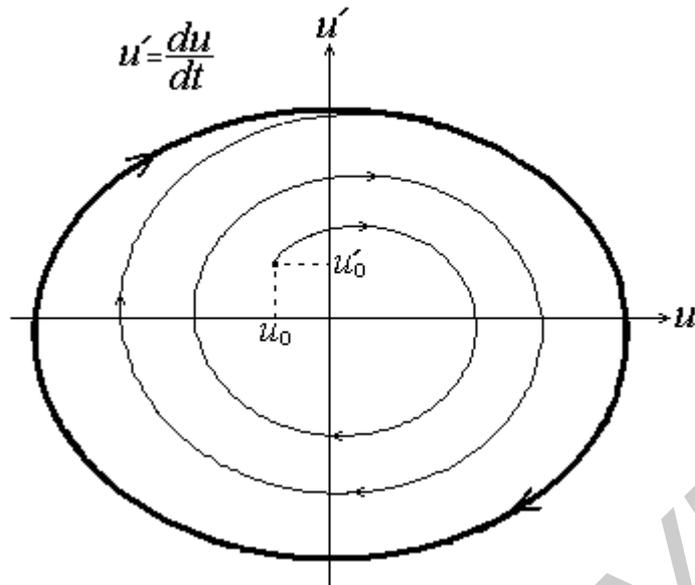


Рис. 1.37. Фазовая траектория нарастающего колебания

2. Если начальные условия таковы, что точка находится вне круга (начальная амплитуда больше амплитуды колебаний в стационарном режиме), то колебания в контуре будут затухать (рис. 1.38). Фазовая траектория имеет вид сворачивающейся спирали. Витки спирали навиваются на эллипс или окружность, которые также называются предельным циклом.

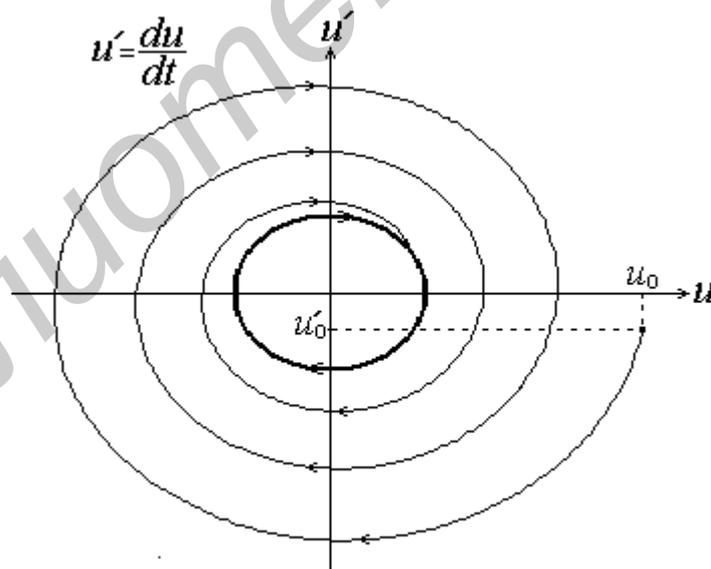


Рис. 1.38. Фазовая траектория затухающего колебания

С энергетической точки зрения процесс возникновения устойчивых колебаний рассмотрен в подразд. 1.4 (см. рис. 1.5).

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

2.1. Параметрические элементы

Параметрическая цепь – это цепь с переменными во времени параметрами. В составе таких цепей имеются элементы, основные параметры которых изменяются во времени по определенному закону. Такими элементами являются резистивные параметрические элементы: сопротивление $R(t)$ или проводимость $G(t) = 1/R(t)$ и реактивные параметрические элементы: емкость $C(t)$ и индуктивность $L(t)$. В таких элементах существует определенная связь между током и напряжением.

Для резистивного параметрического элемента $R(t)$:

$$u_R(t) = R(t) \cdot i(t); \quad i(t) = G(t) \cdot u_R(t).$$

Для реактивного параметрического элемента $C(t)$:

$$q(t) = C(t) \cdot u_c(t); \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C(t) \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) \frac{dC(t)}{dt};$$
$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C(t)} = \frac{1}{C(t)} \int i(t) dt,$$

где $q(t)$ – заряд на конденсаторе.

Для реактивного параметрического элемента $L(t)$:

– магнитный поток проводящего контура (поток магнитной индукции) с током $i(t)$

$$\Phi(t) = L(t) \cdot i(t);$$

– закон электромагнитной индукции Фарадея

$$u_L(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L(t) \frac{di(t)}{dt} + i(t) \frac{dL(t)}{dt};$$
$$i(t) = \frac{\Phi(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} \int u_L(t) dt.$$

Изменение параметров во времени осуществляется электрическим путем. С этой целью в составе параметрической цепи имеется специальный источник колебаний. Процесс изменения параметров называется модуляцией параметра. Благодаря модуляции параметра параметрические цепи позволяют реализовать многие преобразования, которые сопровождаются изменением спектра сигналов.

Пример 1

Пусть проводимость резистора изменяется по закону

$$G(t) = G_0(1 + m \cos \Omega t),$$

где G_0 – среднее значение проводимости;

m – коэффициент модуляции параметра.

К резистору приложено напряжение $u(t) = U \cos \omega_0 t$. Тогда

$$\begin{aligned} i(t) &= G(t) \cdot u(t) = G_0 U (1 + m \cos \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t = \\ &= G_0 U \left[\cos \omega_0 t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \right]. \end{aligned}$$

Анализ полученного выражения позволяет сделать вывод, что с помощью цепей с параметрическими элементами можно реализовать операции, которые сопровождаются преобразованиями спектра. Другими словами, параметрические элементы подобно нелинейным элементам обогащают спектр сигнала, т. е. преобразуют спектры воздействующих на них сигналов.

Таким образом, в цепях с параметрическими элементами сигнал претерпевает нелинейные изменения. Поэтому такие цепи могут быть использованы для осуществления нелинейных преобразований сигналов. На их основе создаются умножители и преобразователи частоты, модуляторы, детекторы и др.

В то же время параметрические цепи обладают еще одним специфическим свойством. Это свойство обусловлено тем, что для изменения параметра элемента используется специальный источник колебаний, т. е. дополнительный источник энергии. Благодаря этому в цепь при определенных условиях может вноситься дополнительная энергия, т. е. происходит накачка энергии. Это наиболее характерно для цепей с параметрическими реактивностями. Такие цепи можно использовать в качестве параметрических усилителей или генераторов.

В параметрических цепях отсутствует активный элемент, в силу чего они имеют малый уровень шумов. Поэтому такие цепи используются в качестве усилителей слабых сигналов в диапазоне СВЧ (от сотен мегагерц до десятков гигагерц).

Наиболее часто применяют переменную емкость $C(t)$, реализуемую с помощью плоскостных параметрических диодов – варикапов. У таких диодов барьерная емкость (емкость p - n -перехода) зависит от обратного напряжения (современные варикапы допускают изменение емкости в пределах 5...30 пФ). Таким образом, изменение параметра можно осуществить электронным методом с помощью специального управляющего сигнала.

Варикапы, используемые для изменения резонансной частоты колебательных систем (в системах автоматической настройки, в управляемых фильтрах), называются подстроечными варикапами. Варикапы, используемые для умножения частоты сигнала (в генераторах, смесителях, частотных преобразователях), называются умножительными варикапами, или варакторами.

Основными параметрами варикапов являются:

1. Номинальная емкость при заданном обратном напряжении $U_{обр}$.

2. Добротность, определяемая выражением $Q = \frac{Z_e}{R_{ном}}$, т. е. отношением

реактивного сопротивления варикапа к сопротивлению потерь.

На рис. 2.1. показан пример использования варикапа для изменения резонансной частоты колебательного контура. Конденсатор C предотвращает замыкание напряжения E индуктивностью L . Его емкость значительно превышает емкость варикапа. Поэтому резонансная частота контура равна

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_6(t)}},$$

где $C_6(t)$ – изменяющаяся емкость варикапа.

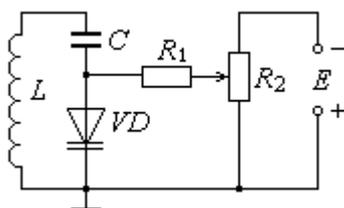


Рис. 2.1. Схема включения варикапа

Изменение емкости варикапа, а следовательно, и резонансной частоты контура, осуществляется регулировкой напряжения с помощью потенциометра R_2 через резистор R_1 . Последний предотвращает шунтирование колебательного контура при перемещении движка потенциометра. Величина сопротивления R_1 значительно больше резонансного сопротивления контура.

Наличие в структуре дополнительного источника энергии (напряжения накачки) для изменения параметра является характерной чертой параметрической цепи. При этом параметрический элемент выступает в роли посредника, передающего при определенных условиях часть энергии от дополнительного источника к цепям, связанным с полезным сигналом

2.2. Физические явления в контуре с переменной емкостью

Пусть имеется высокочастотный контур, в котором возбуждены собственные колебания с частотой $\omega_p = 1/\sqrt{LC_0}$. Емкость конденсатора контура периодически изменяется по закону, приведенному на рис. 2.2. Дважды за период в моменты, когда напряжение на конденсаторе принимает положительные и отрицательные амплитудные значения, емкость скачком уменьшается на величину $2\Delta C$. В моменты, когда напряжение равно нулю, емкость возрастает до исходного значения $C_0 + \Delta C$.

Докажем, что в этом случае будет наблюдаться однонаправленный приток энергии в колебательный контур.

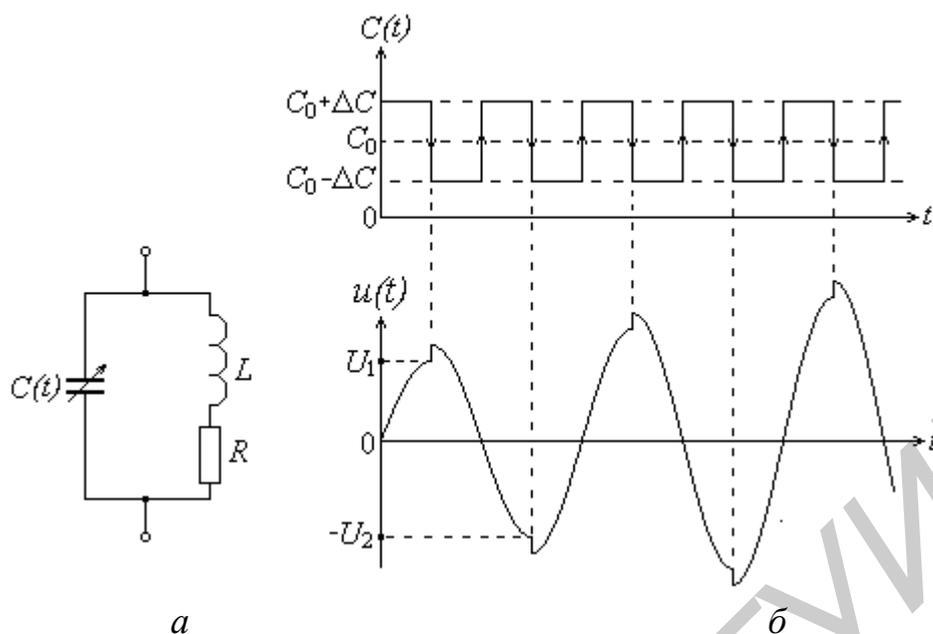


Рис. 2.2. Колебания в контуре с переменной емкостью:
a – колебательный контур; *б* – собственные колебания в контуре

При постоянном заряде q напряжение на конденсаторе равно $U = q/C$, а энергия W определяется выражениями

$$W = \frac{CU^2}{2}; \quad W = \frac{Cq^2}{2C^2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Следовательно, при постоянном заряде на конденсаторе с уменьшением величины емкости энергия конденсатора растет.

Математически это можно показать, дифференцируя последнее соотношение по параметру C :

$$\frac{dW}{dC} = -\frac{q^2}{2C^2}; \quad dW = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{C^2} dC = -\frac{W}{C} dC.$$

Таким образом, при изменении емкости на величину ΔC энергия, запасенная на конденсаторе, изменится на величину $\Delta W = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{C^2} \Delta C$. Причем, если емкость конденсатора уменьшается, энергия его электрического поля увеличивается (знак минус).

Аналогичный результат можно получить для напряжения на конденсаторе, учитывая, что $U = \frac{q}{C}$. В самом деле,

$$\frac{dU}{dC} = -\frac{q}{C^2}; \quad dU = -\frac{q}{C^2} dC = -\frac{U}{C} dC.$$

Следовательно, при уменьшении емкости на величину ΔC напряжение на контуре увеличится на величину $\Delta U = -\frac{U}{C} \Delta C$.

Физически данный факт можно пояснить так.

Известно, что емкость конденсатора определяется следующим выражением:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{x},$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость;

S – площадь обкладки конденсатора;

x – расстояние между обкладками.

Когда $u(t) = U_1$, т. е. конденсатор заряжен до амплитудного значения, пластины притягиваются с максимальной силой. В это время внешняя сила уменьшает емкость конденсатора, как бы увеличивая расстояние между обкладками x путем разведения пластин. При этом внешняя сила преодолевает притяжение пластин, затрачивая определенную энергию. Эта энергия вносится в контур (см. рис. 2.2).

Когда $u(t) = 0$, пластины не притягиваются и не отталкиваются. В этот момент емкость увеличивается, т. е. пластины возвращаются в исходное состояние. Это происходит без затраты какой-либо энергии.

Аналогичная ситуация создается, если конденсатор заряжается до напряжения $u(t) = -U_2$.

Таким образом, если уменьшение емкости будет происходить при $u(t) = U_1$ и при $u(t) = -U_2$, а увеличение – при $u(t) = 0$, то энергия в контуре будет увеличиваться.

Вывод. Соблюдая соответствующие фазовые соотношения (баланс фаз) и изменяя емкость на определенную величину (баланс амплитуд), в параметрической цепи можно реализовать эффект усиления либо генерации.

2.3. Энергетические соотношения в контуре с переменной емкостью

2.3.1. Мощность в контуре с переменной емкостью

Для управления величиной емкости наиболее просто и эффективно изменять напряжение (напряжение накачки), изменяющееся по гармоническому закону.

Пусть напряжение накачки $u_n(t) = U_n \cos(\omega_n t + \varphi)$ приложено к варикапу совместно с постоянным напряжением U_0 , которое обеспечивает выбор рабочей точки на вольт-фарадной характеристике варикапа. Тогда закон изменения барьерной емкости p - n -перехода варикапа можно представить так [2]:

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \cos(\omega_H t + \varphi)},$$

где C_0 – дифференциальная емкость в рабочей точке вольт-фарадной характеристики варикапа;

m – глубина модуляции емкости, равная $m = \Delta C / C_0$.

Величина m зависит от амплитуды напряжения накачки и вида вольт-фарадной характеристики.

Заметим, что выражение для закона изменения барьерной емкости p - n -перехода варикапа получено в предположении, что вольт-фарадная характеристика варикапа аппроксимируется полиномом второй степени.

При $m < 1$, что обычно соблюдается на практике, можно получить несколько другую формулу, а именно:

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{C_0}{1 + m \cos(\omega_H t + \varphi)} = \frac{C_0 [1 - m \cos(\omega_H t + \varphi)]}{[1 + m \cos(\omega_H t + \varphi)][1 - m \cos(\omega_H t + \varphi)]} = \\ &= \frac{C_0 [1 - m \cos(\omega_H t + \varphi)]}{1 - m^2 \cos^2(\omega_H t + \varphi)} \approx C_0 [1 - m \cos(\omega_H t + \varphi)]. \end{aligned}$$

Полагаем, что колебания в контуре равны $u(t) = U_0 \cos \omega_0 t$. Тогда, учитывая, что энергия в цепи $W = \frac{CU^2}{2}$, мощность $P = \frac{dW}{dt}$, а напряжение и емкость являются функциями времени, получаем

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{U^2}{2} \frac{dC}{dt} + CU \frac{dU}{dt} = P_c + P_u,$$

где P_c – мощность в цепи за счет изменения емкости;

P_u – мощность в цепи за счет собственных колебаний контура.

2.3.2. Энергия, вносимая в контур при изменении емкости

Как видно из рис. 2.2, для соблюдения фазовых соотношений необходимо, чтобы частота накачки и собственных колебаний контура удовлетворяли условию $\omega_H = 2\omega_0$. Учтем это условие при определении величины энергии, вносимой в контур за счет изменения емкости в течение одного периода колебаний, полагая при этом, что $C(t) = C_0 [1 - m \cos(\omega_H t + \varphi)]$.

$$\begin{aligned} W_c &= \int_0^T P_c dt = \frac{1}{2} \int_0^T U^2 \frac{dC}{dt} dt = \frac{1}{2} U_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) \omega_H m C_0 \sin(\omega_H t + \varphi) dt = \\ &= \frac{1}{2} U_0^2 \omega_H \Delta C \int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega_0 t)}{2} \right) \sin(\omega_H t + \varphi) dt = \frac{1}{8} U_0^2 \omega_H \Delta C T \sin \varphi. \end{aligned}$$

Окончательно получаем $W_c = \frac{1}{4} U_0^2 \omega_0 \Delta C T \sin \varphi$.

Анализ данного выражения позволяет сделать следующие выводы:

1. Энергия, вносимая в контур при изменении емкости, может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от соотношения фаз напряжения накачки и собственных колебаний контура.

2. При уменьшении емкости ($\Delta C < 0$) данное выражение будет положительным, если $\sin \varphi < 0$.

3. Максимальная энергия будет вноситься при $\sin \varphi = -1$, т. е. $\varphi = -\pi/2$.

В результате можно записать

$$W_{c \max} = \left| -\frac{1}{4} U_0^2 \omega_0 \Delta C T \right| = \left| -\frac{\pi}{2} U_0^2 \Delta C \right|.$$

4. Вносимая в контур энергия в результате изменения величины емкости (при соблюдении определенных фазовых соотношений между напряжением накачки и собственными колебаниями контура) постоянна и зависит от амплитуды колебаний контура и девиации емкости. Последняя зависит от амплитуды напряжения накачки. Данный вывод очевиден и из физических соображений.

2.3.3. Определение глубины модуляции

Определим критичное значение глубины модуляции, что позволит предъявить определенные требования к параметрам напряжения накачки.

Известно, что при $W_c = \text{const}$ вносимая мощность за период T собственных колебаний контура равна $P_c = W_c/T$. Следовательно,

$$P_c = \frac{\pi}{2} U_0^2 \Delta C \sin \varphi / T = \frac{1}{4} U_0^2 \omega_0 \Delta C \sin \varphi.$$

В свою очередь известно, что $P = UI = U^2 G = U_0^2 G/2$, где G – проводимость. Сравнивая данное выражение с предыдущей формулой, можно записать

$$G_c = \frac{1}{2} \omega_0 \Delta C \sin \varphi.$$

При $\varphi = -\pi/2$ получаем

$$G_c = -\frac{1}{2} \omega_0 \Delta C, \quad \text{или} \quad G_c = -\frac{1}{2} m \omega_0 C_0.$$

Отрицательная проводимость характеризует приток энергии от источника накачки, при этом в контур вносится дополнительное затухание

$$d_{\text{вн}} = 1/Q_c = \frac{1}{R_c/\rho} = \frac{\rho}{R_c} = \rho G_c = \frac{1}{\omega_0 C_0} \cdot \frac{-m \omega_0 C_0}{2} = -\frac{m}{2}.$$

Для возбуждения колебаний необходимо, чтобы соблюдалось неравенство $|d_{\text{вн}}| \geq d$, где d – затухание контура. Следовательно, можно определить предельное значение глубины модуляции емкости $|m_{\text{кр}}| = 2d$.

Обычно для получения эффекта усиления достаточно обеспечить ΔC в пределах единиц пикофарад.

2.4. Уравнение Матье

2.4.1. Вывод уравнения Матье

Наиболее полно анализ работы цепи с параметрической емкостью проводится с помощью уравнения Матье. Уравнение получается достаточно просто при рассмотрении свойств колебательного контура, емкость которого изменяется по закону

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \cos \omega_n t}. \quad (2.1)$$

Известно, что для контура без внешнего воздействия справедливы следующие равенства:

$$U_L + U_R + U_C = 0; \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0.$$

Получено интегродифференциальное уравнение.

Для того чтобы получить дифференциальное уравнение, сделаем замену переменных. Учитывая, что величина тока определяется скоростью изменения заряда, т. е. $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, и тот факт, что емкость является функцией времени, можно записать

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1 + m \cos \omega_n t}{LC_0} q = 0.$$

Обозначим $\alpha = \frac{R}{2L}$ – коэффициент, характеризующий затухание контура.

В свою очередь отметим, что $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ – это резонансная частота контура без учета сопротивления потерь и в отсутствие параметрического явления, т. е. при $m = 0$.

Тогда можно записать

$$\ddot{q} + 2\alpha \dot{q} + \omega_0^2 (1 + m \cos \omega_n t) q = 0.$$

Это и есть уравнение Матье.

Для практической работы с данным уравнением его представляют в канонической форме. С этой целью используется подстановка $q(t) = y(t)e^{-\alpha t}$, позволяющая исключить из уравнения первую производную:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{y}e^{-\alpha t} - \alpha ye^{-\alpha t}; \\ \ddot{q} &= \ddot{y}e^{-\alpha t} - \alpha \dot{y}e^{-\alpha t} - \alpha \dot{y}e^{-\alpha t} + \alpha^2 ye^{-\alpha t} = \ddot{y}e^{-\alpha t} - 2\alpha \dot{y}e^{-\alpha t} + \alpha^2 ye^{-\alpha t}; \\ \ddot{y} - 2\alpha \dot{y} + \alpha^2 y + 2\alpha \dot{y} - 2\alpha^2 y + \omega_0^2 y + \omega_0^2 m \cos(\omega_H t) y &= 0; \\ \ddot{y} - \alpha^2 y + \omega_0^2 y + \omega_0^2 m \cos(\omega_H t) y &= 0; \\ \ddot{y} + (\omega_0^2 - \alpha^2 + \omega_0^2 m \cos \omega_H t) y &= 0. \end{aligned}$$

Выражение $\omega_{cв} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ определяет частоту свободных колебаний параллельного колебательного контура при $m = 0$.

Тогда

$$\ddot{y} + (\omega_{cв}^2 + \omega_0^2 m \cos \omega_H t) y = 0. \quad (2.2)$$

Вспользуемся другой (безразмерной) переменной $\tau = \frac{\omega_H t}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{\omega_H}{2}; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{d\tau} \frac{\omega_H}{2} \right) = \frac{\omega_H}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{d\tau} \right) = \frac{\omega_H^2}{4} \frac{d^2 y}{d\tau^2}; \\ \frac{\omega_H^2}{4} \frac{d^2 y}{d\tau^2} + (\omega_{cв}^2 + \omega_0^2 m \cos 2\tau) y &= 0; \\ \ddot{y} + \left(\frac{4\omega_{cв}^2}{\omega_H^2} + \frac{4\omega_0^2 m}{\omega_H^2} \cos 2\tau \right) y &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\delta = \frac{4\omega_{cв}^2}{\omega_H^2} \quad \text{и} \quad \varepsilon = m \frac{4\omega_0^2}{\omega_H^2}.$$

Окончательно получаем другой вид уравнения Матъе:

$$\ddot{y} + (\delta + \varepsilon \cos 2\tau) y = 0.$$

Данное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами, причем параметры δ и ε – положительные величины.

2.4.2. Анализ полученных результатов

В математике теория уравнения Матъе хорошо изучена [1, 2]. Каждому значению параметра ε соответствует последовательность определенных значений δ , при которых решениями уравнения является периодическая функция Матъе с периодом 2π .

1. При больших значениях ε функция Матье имеет сложную форму. В случае же $\varepsilon \ll 1$ эти функции мало отличаются от гармонических. При $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. $4m\omega_0^2 \rightarrow 0$, уравнение Матье (2.2) принимает следующий вид:

$$\ddot{y}(t) + \omega_{св}^2 y(t) = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид гармонических колебаний с частотой $\omega_{св}$.

2. На рис. 2.3 представлены графики, характеризующие зависимость между параметрами ε и β , при которых существуют периодические решения уравнения Матье. Кривые на данном рисунке – это границы устойчивости. Заштрихованные области соответствуют значениям ε и δ , при которых параметрическая цепь неустойчива. Физический смысл неустойчивости цепи заключается в том, что при определенных соотношениях между глубиной модуляции емкости и относительной частотой этой модуляции (между ε и δ) при незначительных возмущениях в контуре возникают колебания с возрастающей амплитудой.

3. Дальнейший анализ уравнения Матье (достаточно громоздкий) позволяет более подробно определить условия возникновения свободных колебаний в контуре и все параметры этих колебаний.

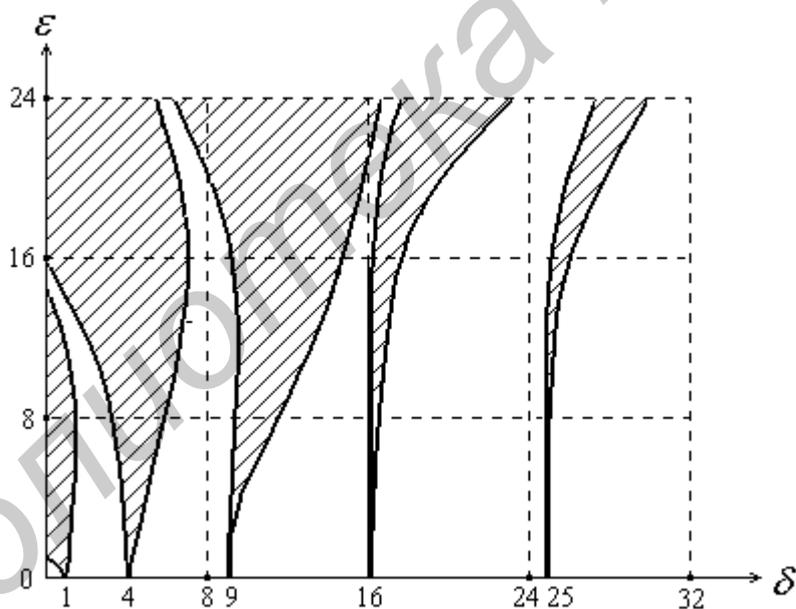


Рис. 2.3. Зависимость между ε и β , при которых существуют периодические решения уравнения Матье

В параметрических системах, используемых в высокочастотной технике, наиболее характерен режим, при котором глубина модуляции емкости $m \ll 1$. При этом параметр $\varepsilon = 4m\omega_0^2 / \omega_n^2 \ll 1$. В этом случае показано, что с учетом свойств функции Матье общее решение уравнения имеет вид

$$y \approx Ae^{\mu\tau} \cos(n\tau + \varphi) + Be^{-\mu\tau} \cos(n\tau - \varphi), \quad (2.3)$$

где φ – фазовый угол, который можно определить из выражений

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon/2 + (\mu^2 + \delta - 1)}{2\mu} \quad \text{или} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\mu}{\varepsilon/2 - (\mu^2 + \delta - 1)};$$

μ – показатель, вещественные или мнимые значения которого определяются из уравнения

$$\mu^4 + 2(\delta + 1)\mu^2 - [\varepsilon^2/4 - (\delta - 1)^2] = 0.$$

Как видно из выражения (2.3), если μ – вещественное число, то решение уравнения Матье неустойчиво, так как одно из слагаемых данного выражения с увеличением τ неограниченно возрастает. В случае неустойчивости параметры δ и ε имеют значения, при которых изображающая их точка на рис. 2.3 находится в одной из заштрихованных областей. Физический смысл неустойчивого решения заключается в том, что при определенных соотношениях между глубиной модуляции емкости и относительной частотой этой модуляции (δ и ε), при любых сколь угодно малых начальных возмущениях в контуре возникают колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Источником энергии для этих колебаний служит генератор накачки, воздействующий на емкость.

При мнимых значениях μ решение устойчиво.

На границах устойчивости (см. рис. 2.3) значения $\mu = 0$. При этом, как видно из выражения (2.3), решения уравнения Матье являются периодическими функциями.

Неустойчивые области достигают оси абсцисс в точках $\delta = n^2$, где $n = 2\omega_{св}/\omega_n = 1, 2, 3, \dots$. Это означает, что при $\delta = 1, 4, 9, \dots$, т. е. при $\omega_n = 2\omega_{св}$, $\omega_n = \omega_{св}$, $\omega_n = 2/3\omega_{св}$, $\omega_n = 1/2\omega_{св}$ и т. д., решения уравнения Матье неустойчивы при сколь угодно малой глубине модуляции, т. е. при сколь угодно малом значении параметра m . При промежуточных значениях ω_n , когда воздействие на параметр производится не в такт с собственными колебаниями контура, для неустойчивости требуется тем большее значение ε , чем ниже частота ω_n .

Помимо генерации в параметрическом контуре возможно и усиление колебаний. Условия усиления анализируются с помощью соотношения Мэнли – Роу.

2.5. Частотно-энергетические соотношения Мэнли – Роу

2.5.1. Общие сведения об эффекте усиления в параметрических цепях

При параметрическом усилении основное значение имеют свойства энергоемкости и инерционности нелинейных реактивностей:

- линейные реактивные элементы запасают энергию источника с последующим ее возвращением без изменения гармонического состава;
- нелинейные реактивные элементы (именно к ним относится параметрическая емкость) запасают энергию источника и возвращают энергию гармоник с новыми комбинационными частотами.

Этот факт широко используют при усилении слабых сигналов. При усилении на нелинейную реактивность воздействуют напряжениями накачки и сигнала. Вследствие этого формируется множество новых гармоник с комбинационными частотами, между которыми происходит непрерывное перераспределение энергий. Одни составляющие теряют мощность, другие – ее приобретают. Этот обмен энергией описывается соотношениями Мэнли – Роу.

Таким образом, основным свойством параметрических цепей является их способность преобразовывать (обогащать) спектр сигнала. В установившемся режиме в параметрической цепи происходит непрерывный обмен энергией между спектральными составляющими. При этом если в цепи имеется активное сопротивление, то обмен энергией сопровождается потерями электрической энергии. Если цепь содержит только переменную емкость и индуктивность, то обмен энергией происходит без потерь. Характерно, что энергетика таких цепей подчиняется определенным количественным соотношениям, которые называются частотно-энергетическими соотношениями Мэнли – Роу.

2.5.2. Получение соотношений Мэнли – Роу

Определим эти соотношения применительно к наиболее простой и наиболее распространенной параметрической цепи, рис. 2.4.

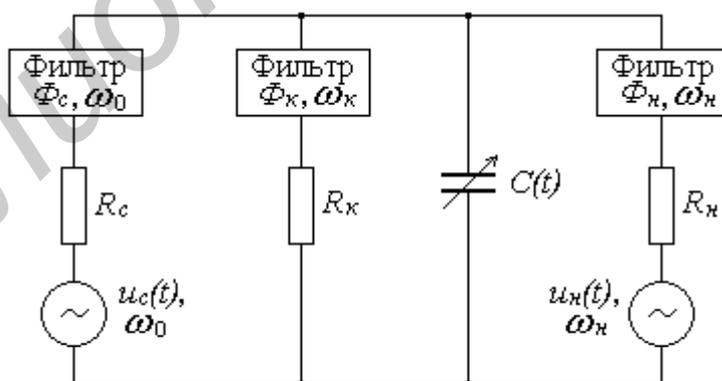


Рис. 2.4. Схема получения параметрического усиления (двухконтурная)

Цепь содержит:

1. Генератор сигнала $u_c(t)$, имеющий частоту ω_0 , и узкополосный фильтр Φ_c , настроенный на частоту сигнала.

2. Генератор напряжения накачки $u_n(t)$, имеющий частоту ω_n , и узкополосный фильтр Φ_n , настроенный на частоту этого напряжения.

3. Нелинейный конденсатор $C(t)$.

4. Нагрузочную цепь с узкополосным фильтром Φ_k , настроенным на частоту (в общем случае) $\omega_k = m\omega_0 + n\omega_n$, где m и n – целые числа.

Сигнал с частотой ω_0 и колебание с частотой ω_k существуют в различных ветвях цепи, содержащих соответствующие узкополосные фильтры (контуры) Φ_c и Φ_k . Поэтому параметрический усилитель, построенный по такой схеме, называют двухконтурным.

Под действием двух напряжений $u_c(t)$ и $u_n(t)$ на нелинейной емкости $C(t)$ возникает напряжение, спектр которого содержит бесконечное число гармонических составляющих с частотами $m\omega_0 + n\omega_n$. Появление бесконечного числа гармонических составляющих в спектре напряжения на емкости обусловлено в общем случае тем, что емкость при расчете описывается выражением, полученным из предположения, что вольт-фарадная характеристика аппроксимируется полиномом n -й степени.

Если фильтр Φ_k настроен на одну из этих составляющих, то через фильтр, нелинейную емкость и резистор R_k протекает ток именно этой частоты, выделяя на сопротивлении R_k некоторую мощность P_k . На создание этой мощности генераторы напряжений $u_c(t)$ и $u_n(t)$ в установившемся режиме расходуют мощности P_c и P_n .

Таким образом, можно записать баланс мощностей в виде равенства

$$P_c + P_n + P_k = 0.$$

Определим значения мощностей данного равенства за один период:

$$P_c = W_c/T_0 = W_c\omega_0/2\pi;$$

$$P_n = W_n/T_n = W_n\omega_n/2\pi;$$

$$P_k = W_k/T_k = W_k\omega_k/2\pi.$$

В данном выражении W_0 , W_n – энергии, расходуемые генератором сигнала и генератором напряжения накачки соответственно, W_k – энергия, выделяемая в нагрузочной цепи.

Тогда можно записать

$$W_c\omega_0 + W_n\omega_n + W_k(m\omega_0 + n\omega_n) = 0;$$

$$\omega_0(W_c + mW_k) + \omega_n(W_n + nW_k) = 0.$$

Последнее равенство должно быть справедливо при любых частотах ω_0 и ω_n , поэтому его можно записать в виде двух равенств

$$W_c + mW_k = 0; \quad W_n + nW_k = 0.$$

Переходя от энергий к мощности, получаем

$$\frac{P_c}{\omega_0} + \frac{mP_k}{m\omega_0 + n\omega_n} = 0; \quad \frac{P_n}{\omega_n} + \frac{nP_k}{m\omega_0 + n\omega_n} = 0.$$

Или

$$\frac{P_c}{f_0} + \frac{mP_k}{mf_0 + nf_n} = 0; \quad \frac{P_n}{f_n} + \frac{nP_k}{mf_0 + nf_n} = 0. \quad (2.4)$$

Это и есть частотно-энергетические соотношения Мэнли – Роу.

Иногда удобнее пользоваться объединенным равенством, полученным из (2.4):

$$\frac{P_c}{mf_0} = \frac{P_n}{nf_n} = \frac{-P_k}{mf_0 + nf_n}. \quad (2.5)$$

В процессе анализа полученных соотношений будем иметь в виду следующее. Если источник мощности P_c , P_n или P_k отдает энергию, то такая мощность считается положительной. В свою очередь, если источник мощности не отдает энергию, а потребляет эту энергию, то такая мощность считается отрицательной. Для мощности нагрузочной цепи справедливо $P_k < 0$, так как эта цепь – потребитель энергии. Следовательно, числитель третьего члена соотношения (2.5) всегда больше нуля.

Фильтр Φ_k нагрузочной цепи настроен на частоту $f_k = mf_0 + nf_n$. Причем если $n > 0$, то фильтр настроен на суммарную частоту $f_k = mf_0 + nf_n$, если $n < 0$, то фильтр настроен на разностную частоту $f_k = |mf_0 - nf_n|$.

2.5.3. Анализ соотношений Мэнли – Роу

Соотношения Мэнли – Роу позволяют определить условия, при которых возможно усиление сигнала. Эти условия зависят от распределения мощности колебаний в ветвях схемы (рис. 2.4), т. е. от распределения мощности по различным частотам. Знание этих условий позволит синтезировать структуру усилителя.

1. Рассмотрим случай, когда частота сигнала и частота комбинационного колебания практически не отличаются друг от друга, т. е. случай, когда $f_k = mf_0 + nf_n = f_0$. Это возможно, если $m = -1$, $n = 1$ и $f_n = 2f_0$ (синхронный режим). При этом $f_k = f_n - f_0 = 2f_0 - f_0 = f_0$, т. е. в контуре существует одно колебание, являющееся суммой сигнала и комбинационного колебания. В этом случае для выделения комбинационного колебания можно использовать сигнальный контур (контур в ветви сигнала). Тогда схема для получения параметрического усиления будет иметь вид, представленный на рис. 2.5. Параметрический усилитель, построенный по такой схеме, называют одноконтурным.

2. Рассмотрим случай, когда сигнал преобразуется в колебание более высокой частоты, чем частота сигнала, т. е. нагрузочный контур настроен на ча-

стоту $f_k = mf_0 + nf_n > f_0$. Обычно принимают $m=1$ и $n=1$. При этом $f_k = f_0 + f_n$.

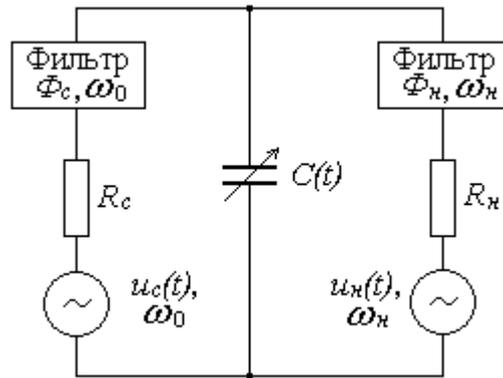


Рис. 2.5. Схема получения параметрического усиления (одноконтурная)

Тогда формулы (2.4) приобретают вид

$$\frac{P_c}{f_0} + \frac{P_k}{f_0 + f_n} = 0; \quad \frac{P_n}{f_n} + \frac{P_k}{f_0 + f_n} = 0. \quad (2.6)$$

Анализ данных формул позволяет сделать вывод, что генераторы сигнала и накачки отдают мощность контуру, т. е. $P_c > 0$, $P_n > 0$. Эта мощность потребляется нагрузкой, т. е. $P_k < 0$.

Из формул (2.4) следует $|P_k| = \frac{f_0 + f_n}{f_0} P_c > P_c$, так как $\frac{f_0 + f_n}{f_0} > 1$. Следова-

тельно, в этом случае преобразование сопровождается усилением. Источник сигнала затрачивает на создание колебания с частотой $f_0 + f_n$ меньшую мощность, чем выделяется в нагрузке. Дополнительная мощность, необходимая для образования этого колебания, потребляется от генератора накачки.

Очевидно, что для получения значительного усиления необходимо соблюдать соотношение $f_n > f_0$. Спектрограмма мощностей для данного случая приведена на рис. 2.6, а, что следует из соотношения (2.6).

Коэффициент усиления по мощности при этом равен

$$K_p = \frac{|P_k|}{P_c} = \frac{f_0 + f_n}{f_0}.$$

Достоинством такого способа параметрического усиления является устойчивость системы. При любом соотношении между мощностями и частотами сигнала и накачки коэффициент усиления $K_p < \infty$.

3. Рассмотрим случай, когда сигнал преобразуется в колебание более низкой частоты, чем частота сигнала, т. е. $f_k = mf_0 + nf_n < f_0$. Обычно принимают $m=1$ и $n=-1$, т. е. $f_k = f_0 - f_n < f_0$. Соотношение между частотами со-

блюдается, если $f_n > f_0$. При этом нагрузочный контур настроен на частоту $f_k = |f_0 - f_n|$.

Формулы (2.4) при этом приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{P_c}{f_0} + \frac{P_k}{f_0 - f_n} = 0; \quad \frac{P_n}{f_n} + \frac{P_k}{f_0 - f_n} = 0. \\ \frac{P_c}{f_0} = \frac{P_n}{-f_n} = \frac{-P_k}{f_0 - f_n}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Третий член соотношения (2.7) отрицателен, так как его знаменатель $f_0 - f_n < 0$, а числитель $(-P_k) > 0$. Тогда первый член будет отрицателен при положительном знаменателе, если $P_c < 0$ (генератор сигнала потребляет энергию). Второй член будет отрицателен при отрицательном знаменателе, если $P_n > 0$. При этом генератор напряжения накачки расходует свою мощность не только на создание комбинационного колебания, но и на создание мощности P_c , поглощаемой генератором сигнала. Другими словами, схема преобразует энергию генератора напряжения накачки в энергию комбинационного колебания и сигнала.

Таким образом, некоторая часть мощности, отбираемая от генератора накачки, поступает в сигнальный контур, т. е. в системе наблюдается регенерация на частоте сигнала. Выходную мощность можно извлечь как из сигнального контура, так и из нагрузочного. Источник сигнала не только не расходует своей мощности в процессе взаимодействия колебаний на нелинейной емкости, а наоборот, как бы увеличивает ее на величину $|P_c|$.

Спектрограмма мощностей для данного случая приведена на рис. 2.6, б.

Определить коэффициент усиления системы из приведенных соотношений не представляется возможным, так как мощность P_c содержит в себе часть мощности генератора сигнала и часть мощности, возникающей за счет эффекта регенерации.

Если выполнить соотношение $f_n = 2f_0$, то частота нагрузочного контура равна $f_k = f_n - f_0 = f_0$. При этом можно достичь значительного эффекта усиления. Усиленный сигнал можно снимать с нагрузочного контура, настроенного на частоту f_0 или с сигнального контура. Первый вариант реализуется в двухконтурном усилителе, второй вариант — в одноконтурном.

Как было показано ранее, введение энергии в цепи сигнала и нагрузки эквивалентно внесению в эти цепи отрицательных сопротивлений. При достаточно большой величине последних компенсируются потери в этих цепях, схема самовозбуждается и превращается в генератор колебаний двух частот f_0 и $f_k = |f_0 - f_n|$. Автоколебательный режим может существовать и без генератора

сигнала. В недовозбужденном режиме, когда потери компенсируются частично, схема работает как регенеративный усилитель.

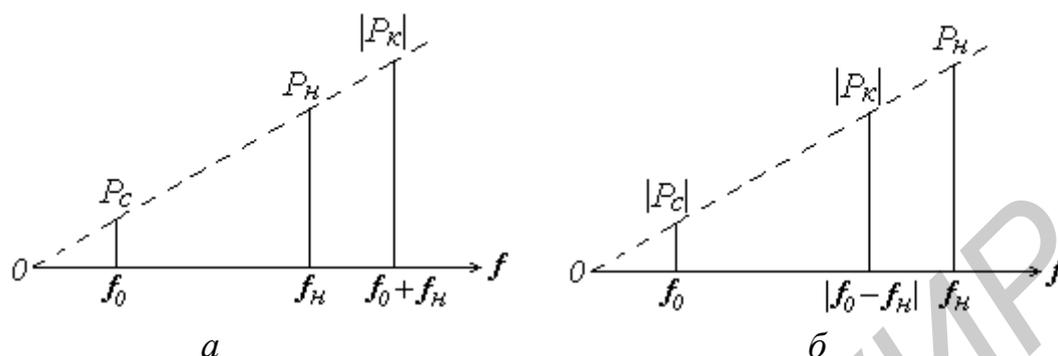


Рис. 2.6. Спектрограммы мощностей:
 а – при $m = n = 1$; б – при $m = 1$ и $n = -1$

Сравним рассмотренные способы параметрического усиления.

1. При первом способе – нерегенеративном (с увеличением частоты сигнала) – усиление обеспечивается за счет преобразования сигнала в колебания более высокой комбинационной частоты. Чем выше частота накачки, а значит, и комбинационная частота, тем больший коэффициент усиления можно получить в этом режиме. Схема является устойчивой, нет опасности самовозбуждения.

2. При втором способе – регенеративном (с уменьшением частоты сигнала) – коэффициент усиления не связан с отношением частот. В этом случае усиление тем больше, чем ближе к порогу самовозбуждения. Однако при этом одновременно возрастает опасность потери устойчивости. Схема из усилителя может превратиться в генератор.

2.6. Построение параметрических усилителей

2.6.1. Принцип параметрического усиления сигналов

Рассмотрим более подробно эффект усиления и условия, способствующие его возникновению. Для этого воспользуемся схемой одноконтурного усилителя (рис. 2.7, а), поясняющей способ получения периодически изменяющейся емкости, на которую поступает напряжение усиливаемого сигнала $u_c(t) = U_c \cos \omega_0 t$. Емкость меняется под воздействием напряжения накачки $u_n(t) = U_n \cos(\omega_n t + \varphi)$.

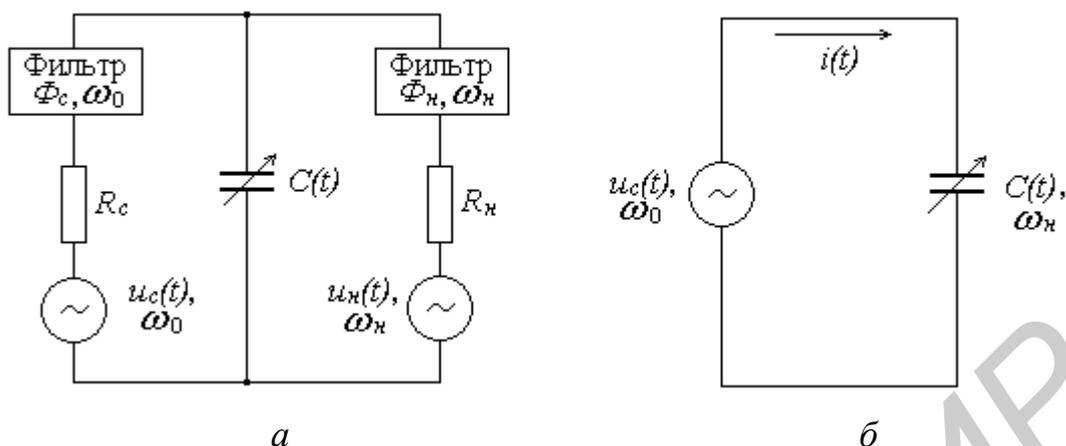


Рис. 2.7. Воздействие на нелинейную емкость напряжения накачки и сигнала:

a – схема параметрического усиления; *б* – эквивалентная схема

Полагаем $U_c < U_n$, что позволяет пренебречь изменением емкости под действием сигнала. Следовательно, рассматриваемую схему можно представить в виде эквивалентной параметрической схемы (рис. 2.7, б), линейной относительно усиливаемого сигнала.

Определим ток, проходящий через емкость, который определяется выражением

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt},$$

где $q(t) = C(t)u_c(t)$, $C(t) = C_0[1 - m\cos(\omega_n t + \varphi)] = C_0 - \Delta C \cos(\omega_n t + \varphi)$.

Следовательно,

$$i(t) = u_c(t) \frac{dC(t)}{dt} + C(t) \frac{du_c(t)}{dt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} i(t) &= (U_c \cos \omega_0 t) \cdot [\Delta C \omega_n \sin(\omega_n t + \varphi)] + [C_0 - \Delta C \cos(\omega_n t + \varphi)](-U_c \omega_0 \sin \omega_0 t) = \\ &= 0,5U_c \Delta C \omega_n \{ \sin[(\omega_n + \omega_0)t + \varphi] + \sin[(\omega_n - \omega_0)t + \varphi] \} - U_c C_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + \\ &+ 0,5U_c \Delta C \omega_0 \{ \sin[(\omega_n + \omega_0)t + \varphi] - \sin[(\omega_n - \omega_0)t + \varphi] \} = \\ &= 0,5U_c \Delta C \{ (\omega_n + \omega_0) \sin[(\omega_n + \omega_0)t + \varphi] + (\omega_n - \omega_0) \sin[(\omega_n - \omega_0)t + \varphi] \} - \\ &- U_c C_0 \omega_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Выполним анализ результатов, полученных из предположения, что $\omega_n = 2\omega_0$. При этом полученное выражение для тока будет иметь вид

$$i(t) = 0,5U_c \Delta C [3\omega_0 \cdot \sin(3\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)] - U_c C_0 \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

1. Первая составляющая спектра тока с частотой $3\omega_0$ в полосу пропускания фильтра Φ_c не попадает. Следовательно, в цепи источника сигнала этой составляющей не будет.

2. Третья составляющая спектра тока с частотой ω_0 сдвинута по фазе на угол $\pi/2$ относительно входного сигнала (в формуле сигнала – функция косинуса, а в составляющей спектра тока – функция синуса). Следовательно, данная составляющая полезную мощность (или активную проводимость) создать не может.

3. С точки зрения эффекта усиления интерес представляет вторая составляющая с частотой ω_0 и определенной фазой φ . Данную составляющую можно записать

$$i(t) = 0,5U_c \Delta C \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi - \pi/2) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi - \pi/2),$$

где $I_m = 0,5U_c \Delta C \omega_0$ – амплитуда тока.

Известно, что активная мощность в цепи с гармоническим током и напряжением равна произведению действующих значений напряжения, тока и косинуса угла ψ (угла сдвига фаз между напряжением и током), т. е.

$$P = UI \cos\psi = RI^2 \cos\psi = GU^2 \cos\psi,$$

где R , G – активное сопротивление и активная проводимость цепи.

Тогда в рассматриваемом случае отдаваемая источником накачки мощность определяется выражением

$$P = \frac{U_c I_m}{2} \cos(\varphi - \pi/2) = \frac{U_c^2}{4} \Delta C \omega_0 \sin\varphi.$$

Учитывая, что $P = RI^2 = GU^2$, можно записать

$$P = G_{\text{эк}} \frac{U_c^2}{2}.$$

Здесь $G_{\text{эк}} = 0,5\Delta C \omega_0 \sin\varphi$ – эквивалентная активная проводимость, вносимая в цепь сигнала за счет изменения емкости. Она учитывает расход (при $G_{\text{эк}} > 0$) мощности источника сигнала или приток (при $G_{\text{эк}} < 0$) мощности от источника напряжения накачки.

Случаи, когда $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = -\pi/2$, представлены на рис. 2.8.

При $\varphi = 0$ $C(t)$ изменяется таким образом, что изменение энергии в емкости за период равно 0.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $C(t)$ изменяется таким образом, что часть энергии емкости за период переходит в источник накачки. Физически это равносильно шунтированию емкости положительной проводимостью $G_{\text{эк}} = 0,5\Delta C \omega_0 = 0,5C_0 \omega_0$.

При $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $C(t)$ изменяется таким образом, что рассматриваемая цепь является генератором энергии. Часть энергии из источника накачки переходит

в емкость. Физически это равносильно шунтированию емкости отрицательной проводимостью $G_{\text{эк}} = -0,5\Delta C\omega_0 = -0,5C_0\omega_0$.

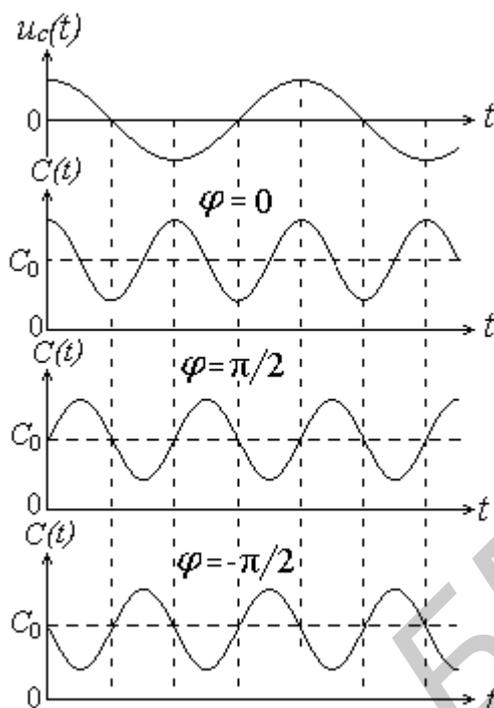


Рис. 2.8. Изменение емкости при различных начальных фазах напряжения накачки

2.6.2. Одноконтурный параметрический усилитель

На рис. 2.9 представлена простейшая схема одноконтурного параметрического усилителя и его эквивалентная схема.

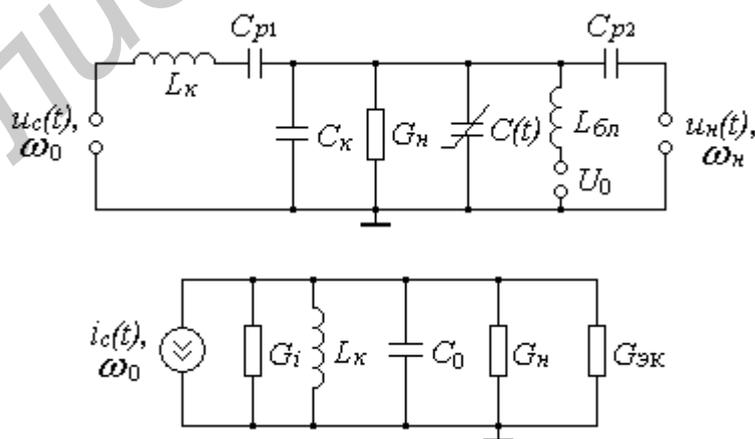


Рис. 2.9. Одноконтурный параметрический усилитель и его эквивалентная схема

Напряжение смещения U_0 обеспечивает выбор рабочей точки на вольт-фарадной характеристике варикапа, разделительные конденсаторы C_{p1} и C_{p2} защищают источник сигнала и генератор накачки от постоянного напряжения смещения, дроссель L_{dp} – преграждает путь поступления токов высокой частоты в цепь источника U_0 .

В синхронном режиме, когда $\omega_n = 2\omega_0$, а значит, комбинационная частота $\omega_k = \omega_n - \omega_0 = \omega_0$, в контуре существуют колебания только с частотой ω_0 . Для этого случая на рис. 2.9 представлена эквивалентная схема, в которой источник напряжения сигнала, включенный в контур последовательно, заменен генератором тока, подключенным параллельно контуру, с внутренней проводимостью G_i . Проводимость G_n включает проводимость нагрузки и контура. Существенным параметром рассматриваемой эквивалентной схемы является эквивалентная проводимость $G_{эк}$, обеспечиваемая переменной емкостью. Как было показано ранее, она равна $G_{эк} = \frac{1}{2} \omega_0 \Delta C \sin \varphi$. При $\varphi = -\pi/2$ получаем

$$G_{эк} = -\frac{1}{2} \omega_0 \Delta C \quad \text{или} \quad G_{эк} = -\frac{1}{2} m \omega_0 C_0.$$

Отрицательная проводимость уменьшает общую проводимость нагрузки, что обуславливает эффект усиления.

Определим коэффициент усиления такого усилителя.

При этом считаем, что коэффициент усиления определяется отношением мощности сигнала на выходе усилителя с переменной емкостью к максимальной мощности сигнала на выходе усилителя при отсутствии напряжения накачки.

1. Активная мощность в цепи с гармоническим током и напряжением равна

$$P_c = UI = U^2 G = \frac{I^2}{G},$$

где I и U – действующие значения тока и напряжения в цепи;

G – активная проводимость цепи.

Для рассматриваемой схемы максимальная мощность (при отсутствии модуляции емкости) будет выделяться в нагрузке при $G_n = G_i$. Следовательно,

$$P_c = UI_1 = U^2 G_n.$$

Здесь U – действующее значение напряжения на зажимах источника сигнала;

I_1 – действующее значение тока в цепи нагрузки.

Учитывая, что напряжение равно $U = \frac{I}{G_n + G_i} = \frac{I}{2G_n}$, где I – ток источ-

ника сигнала, получаем

$$P_c = \frac{I^2 G_H}{4G_H^2} = \frac{I^2}{4G_H}.$$

2. При наличии дополнительной проводимости, обусловленной переменной емкостью, мощность выходного сигнала будет выделяться на проводимости $G = 2G_H + G_{ЭК}$. Следовательно, мощность, выделяемая в нагрузке параметрического усилителя, будет равна

$$P_{yc} = U^2 G_H = \frac{I^2 G_H}{(2G_H + G_{ЭК})^2} = \frac{I^2}{4G_H (1 + G_{ЭК}/2G_H)^2}.$$

Таким образом,

$$K_p = \frac{P_{yc}}{P_c} = \frac{1}{(1 + G_{ЭК}/2G_H)^2}.$$

Анализ полученного выражения:

1. Эффект усиления определяется соотношением между $G_{ЭК}$ и G_H . Так, например, при $|G_{ЭК}| = G_H$, т. е. при изменении емкости, обеспечивающей компенсацию потерь только в нагрузке, усиление по мощности равно только 4.

2. Если эквивалентная проводимость полностью компенсирует сумму проводимостей источника сигнала и нагрузки, т. е. $|G_c| = 2G_H$, то параметрический усилитель становится неустойчивым и самовозбуждается (заметим, что $G_{ЭК} < 0$).

3. Условие устойчивости усилителя $|G_{ЭК}| < 2G_H$. Это значит, что

$$\frac{1}{2} m \omega_0 C_0 < 2G_H.$$

Тогда

$$m_{кр} = \frac{4G_H}{\omega_0 C_0} = 2 \frac{2G_H}{\omega_0 C_0} = 2d.$$

Данное условие можно получить следующим образом:

$$K_p = \frac{1}{(1 + G_c/2G_H)^2} = \frac{1}{(1 + \omega_0 C_0 G_c / 2\omega_0 C_0 G_H)^2} = \frac{1}{[1 + (G_c / \omega_0 C_0)(\omega_0 C_0 / 2G_H)]^2}.$$

Учитывая, что $Q = \frac{R}{\rho} = \frac{\omega_0 C_0}{2G_H}$, получаем

$$K_p = \frac{1}{(1 + QG_c / \omega_0 C_0)^2} = \frac{1}{(1 - Q\omega_0 \Delta C / 2\omega_0 C_0)^2} = \frac{1}{(1 - mQ/2)^2}.$$

Таким образом, эффект усиления определяется значением величины $1 - mQ/2$. Очевидно, что для получения усиления необходимо, чтобы выполнялось условие $mQ/2 < 1$. Отсюда получаем

$$m_{кр} = 2/Q = 2d.$$

Это значение было получено ранее (см. п. 2.3.3).

Практическая реализация одноконтурного усилителя затруднена в силу того, что реальный сигнал имеет фазу, изменяющуюся по случайному закону, и частоту, изменяющуюся в некоторой полосе. Это затрудняет соблюдение условий синхронного режима между сигналом и напряжением накачки.

Одним из способов, позволяющим избежать этих трудностей, является использование такой схемы параметрического усилителя, в которой вносимая проводимость при изменении емкости не зависит от соотношения фаз сигнала и напряжения накачки. Данному условию удовлетворяет двухконтурный параметрический усилитель.

2.6.3. Двухконтурный (двухчастотный) параметрический усилитель

Схема двухконтурного усилителя изображена на рис. 2.10.

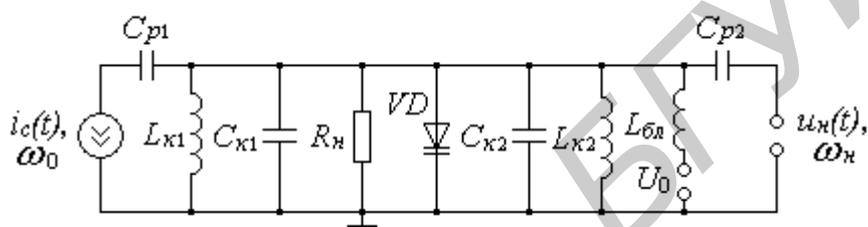


Рис. 2.10. Схема двухконтурного параметрического усилителя

Первый контур, называемый сигнальным, настроен на частоту сигнала, т. е. $\omega_{p1} = \omega_0$. Второй контур, называемый холостым, — на частоту ω_{p2} , которая отличается от частоты настройки первого контура и находится вне его полосы пропускания. Частота ω_{p1} также должна быть вне полосы пропускания второго контура.

Частота напряжения накачки выбирается из соотношения $\omega_n = \omega_{p1} + \omega_{p2}$.

Расчеты по методике, рассмотренной для одноконтурного усилителя [2], позволяют определить выражение для проводимости, шунтирующей сигнальный контур:

$$G_{\text{эк}} = -\frac{m^2 C_0^2}{4} \omega_{p1} \omega_{p2} R_{n2}.$$

Данное выражение позволяет сделать следующие выводы, касающиеся особенностей двухконтурного параметрического усилителя:

1. Эквивалентная отрицательная проводимость, а значит, и эффект усиления не зависит от фазы напряжения накачки.

2. Для реализации усиления не требуется соблюдения определенного соотношения между частотой усиливаемого сигнала и частотой напряжения накачки. Однако при отклонении частоты сигнала от резонансной частоты первого контура коэффициент усиления уменьшается.

2.7. Преобразование частоты в параметрических цепях

Параметрические цепи обогащают спектр сигнала, что было подробно рассмотрено при выводе и анализе соотношений Мэнли – Роу (см. п. 2.5.3). Данное свойство, которое характерно также для нелинейных цепей, позволяет использовать схемы с параметрическими реактивными элементами для реализации основных процессов преобразования сигналов в радиотехническом канале связи: преобразования частоты, модуляции, детектирования и др.

В схеме преобразователя частоты на варикап подается напряжение гетеродина с частотой ω_2 , которое обеспечивает изменение емкости варикапа по закону $C(t) = C_0[1 - m \cos(\omega_2 t + \varphi)]$, и напряжение сигнала. В этом случае спектр тока, протекающего через варикап, будет содержать составляющие с комбинационными частотами, каждую из которых можно выделить с помощью высокочастотного колебательного контура.

Аналогично реализуются процессы фазовой и частотной модуляции, если изменение емкости варикапа осуществлять по закону модулирующего сигнала. Более подробный анализ процессов преобразования сигналов в параметрических цепях можно найти в [11, 12, 13].

3. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

3.1. Случайные сигналы в системах связи и управления

В основу функциональной и структурной организации информационных систем, обеспечивающих пользователям широкий спектр связных, вычислительных и управляющих услуг, положены достижения радиотехники в области анализа и синтеза сигналов, а также различных устройств их обработки. Материальным носителем информации в этих системах является физический процесс, являющийся функцией времени и называемый сигналом, или радиосигналом. Именно сигналы являются объектами формирования, обработки и транспортировки с помощью технических средств информационных систем.

Высокой достоверности результатов функционирования сложных информационных систем препятствуют случайные искажения радиосигналов при передаче с помощью средств связи, неизбежное наличие разнообразных внутренних и внешних помех, а также несовершенство радиоустройств. Ухудшение качества обработки радиосигналов из-за технического несовершенства аппаратуры в принципе может быть снижено путем ее улучшения. Что касается помех и искажений сигналов при распространении, то эти процессы неизбежны.

Основной задачей работы с сигналами в этих условиях является использование специфических приемов их обработки с целью наилучшего восстановления информации по искаженному радиосигналу. Для этого применяется вероятностное описание сигналов и процессов их обработки с помощью случайных функций времени, что определило возможность применения понятия «случайный сигнал». Можно выделить два основных класса сигналов, нуждающихся в вероятностном описании. Во-первых, это шумы – хаотически изменяющиеся во времени электромагнитные колебания, возникающие в разнообразных физических системах из-за беспорядочного движения носителей заряда. Во-вторых, случайными до передачи, а порой и после приема являются все сигналы, несущие информацию.

Анализ свойств случайных сигналов осуществляется методами статистической радиотехники, которые базируются на теории случайных процессов. Фундаментальными понятиями в теории случайных процессов являются понятия случайная величина и случайный процесс.

Случайная величина – это величина, которая в результате опыта принимает значение, заранее неизвестно какое. Случайные величины могут быть дискретными, непрерывными и дискретно-непрерывными.

Дискретная случайная величина – это случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное счетное множество различных значений. Например, количество неисправностей изделия за определенный промежуток времени, количество попаданий в цель при ограниченном числе выстрелов и др.

Непрерывная случайная величина – это случайная величина, которая принимает значения, заполняющие некоторый интервал (конечный или беско-

нечный). Например, время безотказной работы прибора, ошибка измерения параметра соответствующим прибором, температура воздуха в определенное время дня и др.

Дискретно-непрерывная, или смешанная случайная величина – это случайная величина, которая может принимать в некоторых интервалах дискретные значения, а в некоторых других интервалах – непрерывное множество значений.

Случайный процесс – это процесс, описываемый случайной функцией времени, которая при всех или некоторых значениях аргумента является случайной величиной. В соответствии с этим определением случайный процесс можно рассматривать как бесконечную совокупность случайных величин, соответствующую бесконечному числу значений аргумента t . В статистической радиотехнике такой случайный процесс является моделью случайного сигнала. Поэтому в технической литературе термины «случайный сигнал» и «случайный процесс», а в теории вероятности «случайный процесс» и «случайная функция» используются как синонимы.

Конкретный вид случайной функции, который принимается в результате опыта и называемый реализацией случайного процесса или случайной функции, заранее предсказать нельзя. Следовательно, случайный процесс можно представить как бесконечную совокупность (ансамбль) реализаций, называемую статистической совокупностью (рис. 3.1). Реализация, ставшая полностью известной после приема сообщения, является уже не случайной, а детерминированной функцией времени.

Случайные величины и случайные процессы принято обозначать с использованием больших букв, а значения случайных величин и реализаций случайных процессов – с использованием маленьких букв. Например, можно сказать: «в результате опыта получено значение x_k случайной величины X или получена реализация $x_k(t)$ случайного процесса $X(t)$ ». На рис. 3.1 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ – реализации случайного процесса $X(t)$; $x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)$ – значения случайной величины X_1 ; $x_1(t_2), x_2(t_2), x_3(t_2)$ – значения случайной величины X_2 .

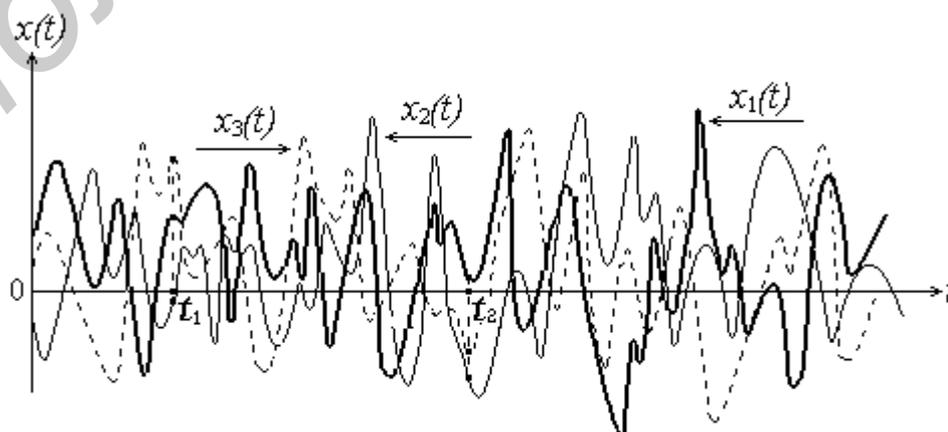


Рис. 3.1. Реализации случайного процесса $X(t)$

Таким образом, случайный процесс совмещает в себе черты случайной величины и функции. Если зафиксировать произвольное число n значений аргумента t , т. е. t_1, t_2, \dots, t_n , то случайный процесс превращается в систему случайных величин $X_i = X(t_i) = \{x(t_i)\}$, $i = \overline{1, n}$. С другой стороны, в результате опыта он превращается в детерминированную функцию, имеющую вполне определенный вид.

Случайные процессы различают по характеру реализаций, учитывающему особенности области значений и области определения функций $x(t)$. При этом различают:

1. Непрерывный случайный процесс – область значений и область определения непрерывны.

2. Непрерывный процесс с дискретным временем (случайная последовательность) – область значений непрерывна, а область определения есть дискретное множество.

3. Дискретный процесс с непрерывным временем (дискретный случайный процесс) – область значений есть дискретное множество, а область определения непрерывна.

4. Дискретный процесс с дискретным временем (дискретная случайная последовательность) – область значений и область определения есть дискретные множества.

Возможны и другие виды случайных процессов, являющиеся комбинациями процессов, приведенных выше.

Так как случайный процесс при фиксированных значениях аргумента представляет собой случайные величины, то для описания случайного процесса применяются те же вероятностные характеристики, что и для случайных величин. Кратко рассмотрим основные из них.

3.2. Законы распределения случайных величин

Случайная величина с вероятностной точки зрения полностью описывается вероятностной характеристикой, называемой законом распределения вероятностей. Закон распределения вероятностей – это закон, устанавливающий связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Очевидно, что подобный закон распределения существует только для дискретной случайной величины. Для непрерывной случайной величины закон в такой формулировке использовать нельзя, так как она имеет бесчисленное множество возможных значений, каждое из которых не обладает никакой отличной от нуля вероятностью. Для данного случая в вероятностном смысле можно оценить только различные области возможных значений непрерывной случайной величины. Поэтому на практике используются наиболее общие формы закона распределения, получившие названия *интегральный* и *дифференци-*

альный законы распределения вероятностей. Они могут быть одномерными, двумерными, ..., n -мерными.

3.2.1. Одномерные законы распределения

Функция распределения

Пусть X – непрерывная случайная величина, x – некоторое текущее ее значение. Для количественной характеристики распределения случайной величины X принимается функция

$$F(x) = P(X < x), \quad (3.1)$$

где $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее чем произвольное число x .

Функция $F(x)$ является по существу законом распределения случайной величины X , который называется интегральным законом распределения или функцией распределения. Она обладает следующими свойствами, вытекающими из равенства (3.1):

1. $F(-\infty) = 0$ – вероятность невозможного события.

2. $F(\infty) = 1$ – вероятность достоверного события.

3. $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

4. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$, так как в этом случае

$$F(x_2) = P(X < x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2) \geq F(x_1).$$

Необходимо отметить, что в качестве интегрального закона распределения иногда применяют функцию $F(x) = P(X \leq x)$, что в сущности не изменяет основные свойства и область применения этого закона.

В общем случае функция распределения $F(x)$ является безразмерной неубывающей функцией, значения которой находятся в пределах от 0 до 1 (рис. 3.2).

Для дискретной случайной величины X , имеющей n возможных значений x_1, x_2, \dots, x_n , которые принимаются с вероятностями P_1, P_2, \dots, P_n соответственно, функция распределения записывается следующим образом:

$$F(x) = \sum_{k=1}^n P_k \sigma(x - x_k),$$

где P_k – вероятность того, что случайная величина X принимает значение, равное x_k , т. е. $P_k = P(X = x_k)$;

$\sigma(x - x_k)$ – единичная функция (функция Хевисайда), равная

$$\sigma(x - x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq x_k, \\ 0 & \text{при } x < x_k. \end{cases}$$

Графически (см. рис. 3.2) функция распределения дискретной случайной величины представляется ступенчатой кривой со скачками, равными P_k в точках x_k , и постоянными значениями на интервале (x_{k-1}, x_k) .

Основное достоинство задания случайной величины с помощью функции распределения заключается в универсальности математического описания для всех видов случайных величин – непрерывных, дискретных, смешанных. В то же время функция распределения дает описание случайных величин в мало наглядной, интегральной форме. Кроме того, данный закон распределения неоднозначно определяет случайную величину, т. е. может существовать несколько случайных величин, имеющих одну и ту же функцию распределения. Более широкое применение имеет несколько иной по содержанию и форме закон распределения, который однозначно связан определенной зависимостью с функцией распределения.

Плотность вероятности

Если функция распределения $F(x)$ непрерывна и дифференцируема, то можно определить

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x). \quad (3.2)$$

В числителе данного выражения разность $F(x + \Delta x) - F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина X принимает значения в интервале от x до $x + \Delta x$, т. е.

$$F(x + \Delta x) - F(x) = P(x \leq X < x + \Delta x).$$

Предельное отношение вероятности $P(x \leq X < x + \Delta x)$ к длине интервала Δx является по существу плотностью вероятности случайной величины X и характеризует плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Поэтому функция $p(x) = F'(x)$, которая является дифференциальным законом распределения, называется плотностью распределения вероятностей, или плотностью вероятности.

Плотность вероятности обладает следующими свойствами:

1. $p(x) > 0$, что следует из того, что функция распределения $F(x)$ является возрастающей функцией.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ – вероятность достоверного события (условие нормировки).

Следовательно, площадь под кривой функции $p(x)$ равна 1, что следует из предыдущего свойства.

3. $p(x)dx = P(x \leq X < x + dx)$ – элемент вероятности, равный вероятности попадания значения случайной величины X в бесконечно малый интервал шириной dx , примыкающий к точке x .

$$4. P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1).$$

$$5. \int_{-\infty}^x p(x)dx = F(x) - \text{связь между } p(x) \text{ и } F(x).$$

Размерность плотности вероятности обратна размерности случайной величины X .

Для дискретной случайной величины плотность вероятности равна

$$p(x) = F'(x) = \sum_{k=1}^n P_k \frac{d\sigma(x - x_k)}{dx} = \sum_{k=1}^n P_k \delta(x - x_k),$$

где $\delta(x - x_k)$ – дельта-функция (функция Дирака), равная

$$\delta(x - x_k) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = x_k, \\ 0 & \text{при } x \neq x_k. \end{cases}$$

Таким образом, для дискретной случайной величины плотность $p(x)$ равна нулю для всех x , кроме $x = x_k$ (рис. 3.2).

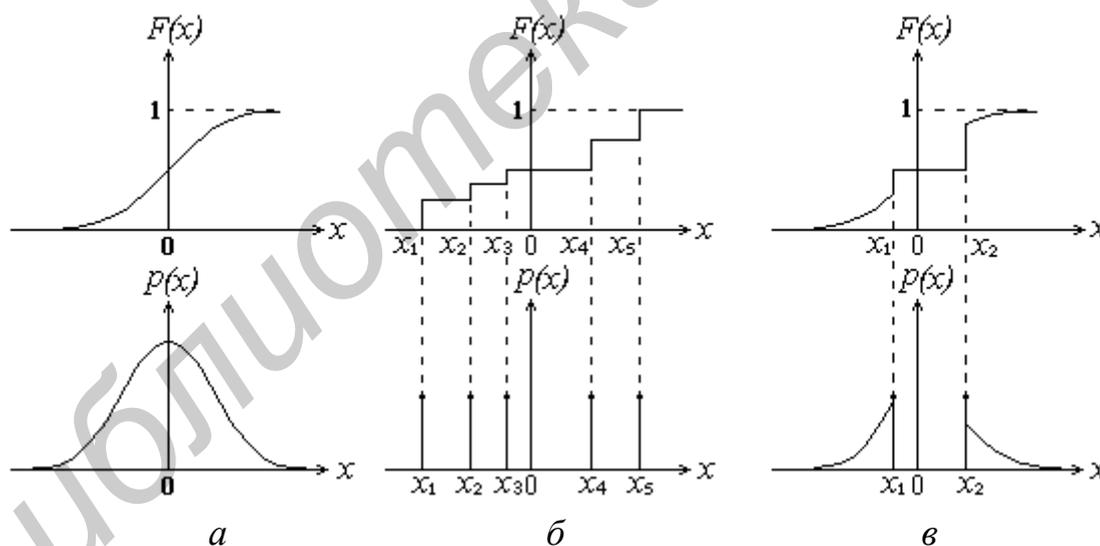


Рис. 3.2. Графики функций распределения и плотности вероятности: для непрерывной (а), дискретной (б) и смешанной (в) случайных величин

Дифференциальный закон распределения как наиболее часто используемый при статистическом анализе сигналов и цепей будем иногда называть просто «Закон распределения», или «Плотность вероятности».

3.2.2. Двумерные законы распределения

Многие проблемы в рамках корреляционной теории случайных сигналов удается решить на основе двумерных законов распределения.

Функция распределения системы двух случайных величин

Для количественной характеристики распределения двух непрерывных случайных величин X , Y используют функцию распределения

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (3.3)$$

Как видно из данного выражения, двумерная функция распределения равна вероятности того, что случайная величина X принимает значение, меньшее чем произвольное число x , а случайная величина Y принимает значение, меньшее чем произвольное число y . Она обладает следующими свойствами, вытекающими из равенства (3.3):

1. $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$ при $x_2 > x_1$; $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$ при $y_2 > y_1$, т. е. $F(x, y)$ неубывающая функция по каждому из аргументов.
2. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$ – вероятность невозможного события.
3. $F(+\infty, +\infty) = 1$ – вероятность достоверного события.
4. $F(x, +\infty) = F_1(x)$; $F(+\infty, y) = F_2(y)$ – переход от двумерной функции распределения к одномерной.
5. $P[(x_1 \leq X < x_2)(y_1 \leq Y < y_2)] = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$.

Плотность вероятности системы двух случайных величин

Если функция распределения $F(x, y)$ непрерывна и дифференцируема, можно определить

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Двумерная плотность распределения вероятности обладает следующими свойствами:

1. $p(x, y) \geq 0$, так как $F(x, y)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов.
2. $p(x, y) dx dy = P(x \leq X < x + dx, y \leq Y < y + dy)$ – элемент вероятности, равный вероятности попадания значений случайных величин X и Y в бесконечно малую плоскость площадью $dx dy$, примыкающую к точкам x и y .

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1 - \text{вероятность достоверного события (условие нормировки). Следовательно, объем фигуры, ограниченной поверхностью } p(x, y) \text{ и плоскостью } xOy, \text{ равен единице.}$$

$$4. P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p(x, y) dx dy .$$

$$5. \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(x, y) dx dy = F(x, y) - \text{связь между } p(x, y) \text{ и } F(x, y) .$$

От двумерной плотности вероятности можно перейти к одномерной, проинтегрировав по исчезающей переменной:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \quad \text{или} \quad p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx .$$

3.3. Законы распределения случайных процессов

Как уже было сказано, случайный процесс можно рассматривать как бесконечную совокупность случайных величин. Следовательно, для его описания применяются такие же характеристики, как и для случайных величин.

В общем случае наиболее полной характеристикой случайного процесса является n -мерный закон распределения вероятностей, который характеризует совместное вероятностное распределение случайных величин, соответствующих сечениям случайного процесса в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n . Оперировать таким законом распределения практически невозможно. Поэтому на практике при исследовании случайных процессов наиболее часто используют одномерную функцию распределения $F(x, t) = P(X(t) < x)$ или одномерную плотность вероятности $p(x, t) = \frac{dF(x, t)}{dx}$ и двумерную функцию распределения $F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2)$ или двумерную плотность вероятности $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Одномерный закон распределения определяет характер распределения значений случайной функции, описывающей случайный процесс в произвольно заданный момент времени t . Давая вероятностное представление о случайном процессе, такой закон распределения не позволяет выявить взаимосвязь значений, принимаемых случайной функцией в различные моменты времени. Двумерный закон распределения определяет характер распределения случайной функции в произвольно выбранные моменты времени t_1 и t_2 с учетом взаимосвязи значений, принимаемых случайной функцией в эти моменты времени.

3.4. Числовые характеристики случайных величин

Законы распределения полностью характеризуют случайную величину с вероятностной точки зрения. Зная закон распределения, можно указать возможные значения случайной величины и вероятность появления ее в том или ином интервале. Однако при решении многих практических задач нет необходимости, а иногда и нет возможности полностью характеризовать случайные величины и процессы.

1. При решении некоторых задач линейного и нелинейного преобразований случайных сигналов вычисление законов распределения не представляется возможным.

2. В радиотехнике возможны ситуации, когда механизм образования случайных сигналов неизвестен. Это ограничивает возможности определения закона распределения.

3. Существуют законы распределения, которые характеризуются несколькими параметрами. Знания этих параметров достаточно, чтобы определить закон распределения.

4. Иногда достаточно иметь общее представление о случайной величине, для чего необходимо знать только несколько ее параметров.

Для общей характеристики случайной величины используют величины, которые носят название *числовые характеристики*. Основное их назначение – выразить наиболее существенные особенности самой величины и того или иного распределения. Кроме того, с помощью числовых характеристик и операций с ними удастся в ряде случаев решать широкий круг задач статистической радиотехники до конца без использования законов распределения.

Наибольшее применение нашли такие числовые характеристики, как *математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция*.

Ранее было показано, что случайный процесс можно рассматривать как бесконечную совокупность случайных величин X_i , соответствующую бесконечному числу значений аргумента. Каждая из случайных величин образует сечение случайного процесса. Поэтому рассмотрим вначале числовые характеристики случайных величин, соответствующих одному сечению случайного процесса.

3.4.1. Математическое ожидание

Математическое ожидание является важнейшей характеристикой случайной величины. Ее еще называют средним значением случайной величины, что в сущности отражает физический смысл данной характеристики. Возможные значения случайной величины всегда колеблются около среднего значения. Данное явление называют рассеянием случайной величины около среднего значения.

Математическое ожидание m_x дискретной случайной величины X равно

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i P_i,$$

где x_i – i -е значение случайной величины X ;

P_i – вероятность того, что случайная величина X принимает значение x_i ;
 n – количество i -х значений случайной величины.

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений возможных значений случайной величины на вероятности этих значений.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, равно

$$m_x = \int_a^b xp(x)dx,$$

где $p(x)$ – плотность вероятности случайной величины X .

По своему содержанию данное выражение аналогично предыдущему. Математическое ожидание непрерывной случайной величины равно сумме произведений возможных значений x случайной величины в интервале $[a, b]$ на вероятность $p(x)dx$ попадания случайной величины в бесконечно маленький интервал dx , содержащий точку x .

Обычно пользуются формулой для непрерывной случайной величины, значения которой находятся в интервале $(-\infty, \infty)$, т. е. формулой

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

Часто решается задача определения числовых характеристик случайных величин на основании известных параметров других случайных величин. При этом интересующая нас случайная величина представляется как функция другой случайной величины. Возникает проблема определения числовых характеристик функций случайной величины.

Если случайная величина Y является функцией случайной величины X , т. е. $Y = f(X)$, то математическое ожидание m_y равно

$$m_y = M[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \quad (3.4)$$

Как видно из данного выражения, для определения математического ожидания случайной величины Y , которая является функцией случайной величины X , нет необходимости знать закон распределения $p(y)$, достаточно знать закон распределения аргумента данной функции, т. е. закон распределения $p(x)$.

Рассмотрим некоторые свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание случайной величины есть число постоянное, размерность которого совпадает с размерностью самой случайной величины.

2. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий каждой случайной величины. Аналогично можно сказать, что математическое ожидание суммы функций одной случайной величины равно сумме математических ожиданий этих функций.

В дальнейшем будем использовать два обозначения математического ожидания случайной величины X : m_x и $M[X]$.

3.4.2. Дисперсия и среднеквадратичное отклонение

Для оценки степени рассеяния случайной величины около ее среднего значения используется числовая характеристика, называемая дисперсией.

Дисперсия D_x дискретной случайной величины X равна

$$D_x = M[(X - m_x)]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 P_i .$$

Таким образом, дисперсия – это по существу математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсия непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, равна

$$D_x = \int_a^b (x - m_x)^2 p(x) dx ,$$

где $p(x)$ – плотность вероятности случайной величины X .

Обычно пользуются формулой для непрерывной случайной величины, значения которой находятся в интервале $(-\infty, \infty)$, т. е. формулой

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx . \quad (3.5)$$

Если случайная величина Y является функцией случайной величины X , т. е. $Y = f(X)$, то дисперсия D_y равна

$$D_y = M[f(X) - m_y]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - m_y]^2 p(x) dx .$$

Рассмотрим некоторые свойства дисперсии.

1. Дисперсия случайной величины есть число постоянное, размерность которого совпадает с размерностью квадрата случайной величины.

2. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

3. Дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата ее математического ожидания, т. е.

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2m_x \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx + m_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx.$$

$$D_x = M[X^2] - 2m_x^2 + m_x^2 = M[X^2] - m_x^2.$$

Данное свойство называется правилом вычисления дисперсии.

Дисперсия является весьма удобной характеристикой для оценки степени рассеяния случайной величины. Однако она лишена наглядности, так как имеет размерность квадрата случайной величины. Более удобной числовой характеристикой, используемой для оценки рассеяния, является среднеквадратичное отклонение. Размерность этой характеристики совпадает с размерностью самой случайной величины, так как она равна $\sigma_x = \sqrt{D_x}$. Данная характеристика дает представление о размахе отклонений возможных значений случайной величины от математического ожидания.

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия характеризуют пределы, в которых наиболее плотно группируются возможные значения случайной величины.

В дальнейшем будем рассматривать непрерывные случайные величины.

3.4.3. Моменты случайной величины

Обобщением числовых характеристик случайной величины является понятие моментов случайной величины. Название «момент» взято из механики: статические моменты, моменты инерции и др. На практике чаще всего применяют моменты двух видов: начальные моменты и центральные моменты.

Начальным моментом k -го порядка непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины Y , значения которой равны $y_k = x^k$, т. е.

$$\alpha_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx.$$

Очевидно, что начальный момент первого порядка есть не что иное, как математическое ожидание, так как

$$\alpha_1 = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx.$$

Начальные моменты высших порядков используются главным образом для вычисления центральных моментов.

При определении центрального момента используется разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием, т. е.

$$\dot{X} = X - m_x.$$

Эта разность называется центрированной случайной величиной.

Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание центрированной случайной величины, возведенной в k -ю степень, т. е.

$$\mu_k = M[X - m_x]^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k p(x) dx.$$

Центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx - m_x \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = m_x - m_x = 0.$$

В свою очередь, центральный момент второго порядка есть не что иное, как дисперсия, т. е.

$$\mu_2 = D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx.$$

Центральные моменты высших порядков используются главным образом для оценки некоторых параметров законов распределения случайной величины.

Так, центральный момент третьего порядка является характеристикой асимметрии (скошенности) графика закона распределения. Для оценки асимметрии используется безразмерный коэффициент асимметрии, равный

$$K_3 = \mu_3 / \sigma^3.$$

При $K_3 > 0$ кривая распределения имеет положительную асимметрию. Это означает, что справа от математического ожидания рассеяние случайной величины больше, чем слева. При $K_3 < 0$ кривая распределения имеет отрицательную асимметрию.

Центральный момент четвертого порядка является характеристикой верхней части графика закона распределения, т. е. характеризует «островершинность» или «плосковершинность» графика. Для такой оценки распределения используется безразмерный коэффициент, называемый эксцессом и равный

$$K_4 = \mu_4 / \sigma^4 - 3.$$

В качестве эталона используется нормальный закон распределения (более подробно этот закон распределения будет рассмотрен ниже), для которого величина $\mu_4 / \sigma^4 = 3$, т. е. эксцесс нормального закона распределения равен $K_4 = \mu_4 / \sigma^4 - 3 = 0$. Следовательно, законы распределения, графики которых более островершинные по сравнению с графиком нормального закона, имеют положительный эксцесс $K_4 > 0$, а более плосковершинные – отрицательный эксцесс $K_4 < 0$. Графики законов распределения при различных значениях коэффициента эксцесса представлены на рис. 3.3.

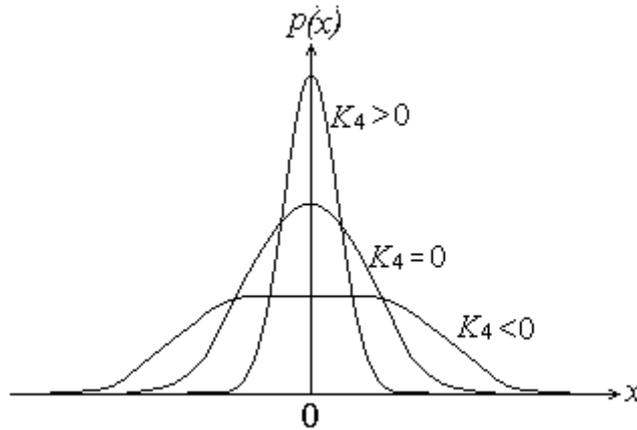


Рис. 3.3. Графики законов распределения при различных значениях коэффициента эксцесса

3.4.4. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Рассмотренные выше числовые характеристики одной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты) используются также и для анализа системы случайных величин.

Для системы двух непрерывных случайных величин X и Y эти характеристики определяются следующими выражениями.

Математическое ожидание:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y) dx dy \quad \text{и} \quad m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yp(x, y) dx dy,$$

где $p(x, y)$ – двумерная плотность вероятности непрерывных случайных величин X и Y .

Для независимых случайных величин $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$.

Дисперсия:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x, y) dx dy \quad \text{и} \quad D_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 p(x, y) dx dy.$$

Начальный и центральный моменты $(k + l)$ -го порядка:

$$\alpha_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^l p(x, y) dx dy, \quad \alpha_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^l p(x, y) dx dy.$$

Рассмотренные характеристики двух случайных величин не отражают степень зависимости (степень статистических связей) между этими величинами.

Количественной мерой степени статистических связей двух случайных величин являются смешанные начальные и центральные моменты случайных величин k -го порядка ($k = r + s$):

$$\alpha_{r,s} = M[X^r Y^s] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s p(x, y) dx dy ;$$

$$\mu_{r,s} = M[(X - m_x)^r (Y - m_y)^s] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^r (y - m_y)^s p(x, y) dx dy .$$

Особую роль для характеристики двух случайных величин играют ковариационный и корреляционный моменты.

Смешанный начальный момент случайных величин 2-го порядка называется ковариационным моментом:

$$\alpha_{1,1} = B_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y) dx dy . \quad (3.6)$$

Смешанный центральный момент случайных величин 2-го порядка называется корреляционным моментом:

$$\mu_{1,1} = R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) p(x, y) dx dy . \quad (3.7)$$

Простейшие преобразования позволяют установить следующую связь между B_{xy} и R_{xy} :

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y) dx dy - m_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yp(x, y) dx dy - m_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y) dx dy + m_x m_y .$$

$$R_{xy} = B_{xy} - m_x m_y .$$

Свойства корреляционного момента.

1. Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.

Доказательство производится с учетом того, что для независимых случайных величин справедливо $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$:

$$B_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yp(y) dy = m_x m_y .$$

Следовательно, $R_{xy} = B_{xy} - m_x m_y = 0$.

2. При $R_{xy} < 0$ между величинами X и Y существует отрицательная корреляционная зависимость, т. е. чем больше значение одной величины, тем более вероятны меньшие значения у другой (пропуск занятий – оценка на экзамене).

3. При $R_{xy} > 0$ между величинами X и Y существует положительная корреляционная зависимость, т. е. чем больше значение одной величины, тем более вероятны большие значения у другой (вес боксера – сила его удара).

4. При $R_{xy} = 0$ величины X и Y являются статистически независимыми или некоррелированными.

5. Из коррелированности двух случайных величин следует их зависимость, а из некоррелированности двух случайных величин независимость не

следует. Другими словами, условие $R_{xy} = 0$ является необходимым, но недостаточным условием для независимости случайных величин. Может существовать система зависимых случайных величин, корреляционный момент которых равен нулю. С другой стороны, из зависимости двух случайных величин не следует их коррелированность, а из независимости двух случайных величин следует их некоррелированность.

Часто используется числовая характеристика, называемая коэффициентом корреляции,

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ и $\sigma_y = \sqrt{D_y}$ – среднеквадратичные значения случайных величин X и Y .

Значение r_{xy} исключает зависимость корреляции от дисперсии.

3.5. Числовые характеристики случайных процессов

Прежде чем рассматривать числовые характеристики случайных сигналов, необходимо определить разновидности случайных процессов, которые используются для математического описания сигналов.

3.5.1. Стационарные случайные процессы

Стационарные случайные процессы – это важнейший класс случайных процессов, которые являются математической моделью широко встречающихся в радиотехнике сигналов и помех. Особенности этих процессов, облегчающие применение математического аппарата для их анализа, позволяют решать многие задачи статистической радиотехники.

Стационарный случайный процесс ведет себя однородно во времени и получается в установившемся режиме работы радиотехнических систем при неизменных внешних условиях.

Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле (строго стационарным)*, если его n -мерные плотности вероятности $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ при любом n не меняются при сдвиге точек t_1, t_2, \dots, t_n вдоль оси времени, т. е.

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Другими словами, у стационарного в узком смысле случайного процесса n -мерные плотности вероятности при всех n инвариантны относительно начала отсчета времени. Это означает, что два случайных процесса $X(t)$ и $X(t + \tau)$ имеют одинаковые вероятностные характеристики.

Очевидно, что условие стационарности в узком смысле можно записать также в терминах n -мерных функций распределения:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Из приведенного выше определения следует, что для стационарного случайного процесса:

1. Одномерная плотность вероятности не зависит от времени, т. е. $p(x, t) = p(x)$. Следовательно, закон распределения случайных величин, соответствующих различным сечениям этого случайного процесса, имеет один и тот же вид.

2. Двумерная плотность вероятности также не зависит от времени, а зависит от разности $\tau = t_2 - t_1$, т. е. $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; \tau)$. Это значит, что моментные функции второго порядка также не зависят от времени, а корреляционные функции зависят только от $\tau = t_2 - t_1$.

3. Трехмерная плотность вероятности зависит от разностей $\tau_1 = t_2 - t_1$ и $\tau_2 = t_3 - t_2$, т. е. $p_3(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3) = p_3(x_1, x_2, x_3; \tau_1, \tau_2)$ и т. д.

Заметим, что понятие «в узком смысле» означает, что достаточно узкий класс сигналов может быть описан моделью такого случайного процесса.

При решении многих практических задач нет необходимости рассматривать случайные сигналы с законами распределения выше второго порядка. При этом случайные процессы могут полностью характеризоваться моментами первого и второго порядков, а также корреляционной функцией. Раздел теории случайных процессов, основанный на использовании только указанных характеристик, называется *корреляционной теорией*. В рамках этой теории стационарными считаются случайные процессы, для которых приведенное выше определение справедливо только для одномерных и двумерных законов распределения. Такие процессы называются *стационарными в широком смысле* (более широкий класс сигналов может быть описан этой моделью).

Иногда говорят, что случайный процесс является стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$. Таким образом, условия $m_x = \text{const}$, $D_x = \text{const}$ и $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$ являются необходимыми и достаточными условиями стационарности случайного процесса в широком смысле.

Очевидно, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение в общем случае неверно. В дальнейшем, называя процесс стационарным, будем иметь в виду процесс, стационарный в широком смысле.

Понятие стационарности распространяется на совокупность случайных процессов. Два случайных процесса называются стационарно связанными, если их совместные законы распределения любого порядка инвариантны относительно начала отсчета времени.

Случайный процесс, не удовлетворяющий условиям стационарности, является *нестационарным*.

Приведем формулы для числовых характеристик нестационарных и стационарных случайных процессов.

Нестационарный случайный процесс

Математическое ожидание
$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dx .$$

Дисперсия
$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 p(x,t)dx .$$

Для случайных процессов особое внимание заслуживают числовые характеристики, которые определяют статистическую зависимость двух сечений этих процессов. Эти характеристики называются ковариационной и корреляционной функциями. Формулы для этих характеристик получены из выражений (3.6) и (3.7) для ковариационного и корреляционного момента случайной величины, учитывая, что $X_1 = X(t_1)$ и $X_2 = X(t_2)$.

Ковариационная функция
$$B_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 .$$

Корреляционная функция

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)][x_2 - m_x(t_2)] p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 .$$

На рис. 3.4 представлены реализации случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, у которых одинаковые математические ожидания и дисперсии, причем $m_x = m_y = 0$. Корреляционные функции этих процессов различны, так как различны их внутренние структуры. Как видно из графиков (рис. 3.4), случайный процесс $X(t)$ более медленно изменяется во времени, чем процесс $Y(t)$, что зависит от степени статистической связи мгновенных значений, взятых в различные моменты времени. Такая связь количественно определяется корреляционной функцией.

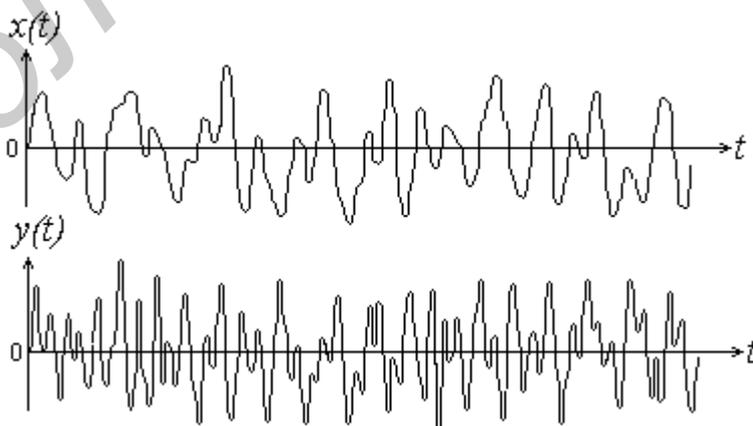


Рис. 3.4. Реализации случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ с различными корреляционными функциями

Значения случайного процесса $X(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 являются некоррелированными, если $R_x(t_1, t_2) = 0$ или $B_x(t_1, t_2) = m_x(t_1) \cdot m_x(t_2)$.

На практике часто используют нормированную корреляционную функцию, которая называется коэффициентом корреляции и определяется выражением

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}.$$

Значение $r_x(t_1, t_2)$ исключает зависимость корреляционной функции случайного процесса от значений его дисперсий при t_1 и t_2 . Очевидно, что при $t_1 = t_2$ справедливы равенства $R_x(t_1, t_2) = D_x(t_1)$, $\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2) = D_x(t_1)$, т. е. коэффициент корреляции имеет максимальное значение, равное единице.

Стационарный случайный процесс

Математическое ожидание $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$

Дисперсия $D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x)dx.$

Ковариационная функция $B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2.$

Корреляционная функция $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2.$

Из определения стационарности и приведенных формул для числовых характеристик можно сделать следующие выводы:

1. Математическое ожидание и дисперсия нестационарного случайного процесса являются функциями времени, а стационарного случайного процесса не являются функциями времени, т. е. не зависят от времени. Учитывая физический смысл этих числовых характеристик, можно сказать, что постоянная составляющая и средняя мощность стационарного случайного процесса являются постоянными числами.

На рис. 3.5 представлены реализации стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ с различными математическими ожиданиями и дисперсиями.

На рис. 3.6 представлена реализация нестационарного по математическому ожиданию случайного процесса.

2. Ковариационная и корреляционная функции нестационарного случайного процесса являются функциями двух переменных t_1 и t_2 , а стационарного случайного процесса – функциями одной переменной $\tau = t_2 - t_1$.

3. Корреляционная функция стационарного процесса четная, т. е. $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

4. Для многих практических случаев справедливо равенство $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$.

Последнее свойство наблюдается в стационарных и устойчиво работающих системах. Такие системы имеют конечное время затухания, в силу чего последующее значение процесса оказывается практически независимым и некоррелированным с предыдущим значением, если они разделены достаточно большим интервалом времени.

5. Дисперсия стационарного процесса равна значению корреляционной функции при $\tau = 0$, т. е. $D_x = R_x(0)$.

6. Абсолютное значение корреляционной функции не превышает ее значения при $\tau = 0$, т. е. $|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = D_x$.

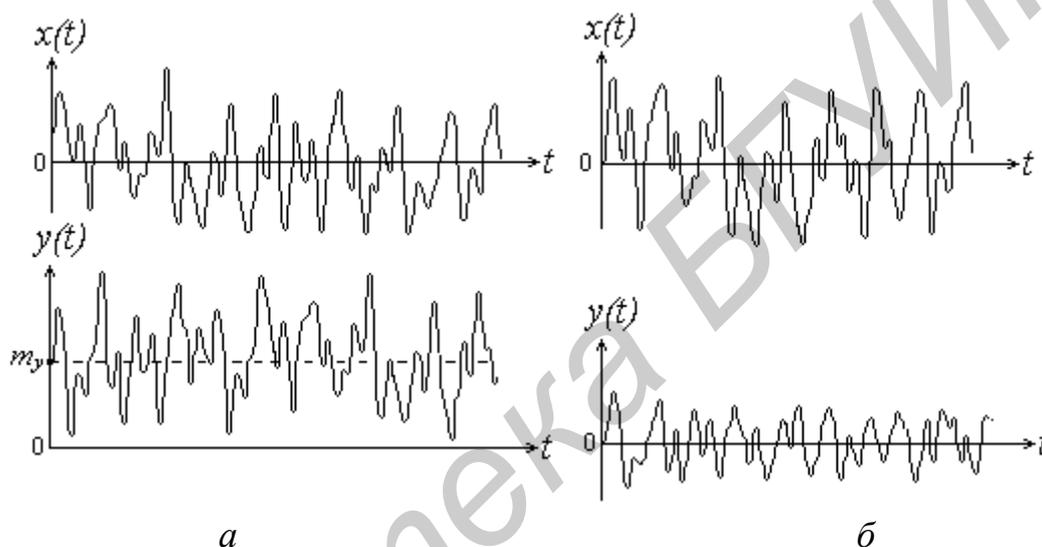


Рис. 3.5. Реализации стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$:
 а – при $m_x = 0$ и $m_y > 0$; б – при $m_x = m_y = 0$ и $D_x > D_y$

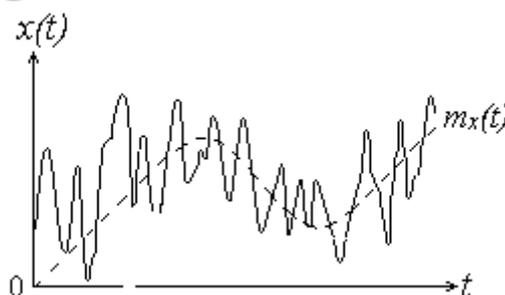


Рис. 3.6. Реализация нестационарного по m_x случайного процесса

Докажем это.

Определим математическое ожидание $M(X_1 - X_2)^2 \geq 0$ для случайного процесса $X(t)$ с $m_x = 0$:

$$M(X_1 - X_2)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - x_2)^2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = 2D_x - 2R_x(\tau) \geq 0.$$

Таким образом, $R_x(\tau) \leq D_x$.

Коэффициент корреляции стационарного случайного процесса равен

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x}.$$

При $\tau = 0$ коэффициент корреляции $r(\tau)$ имеет максимальное значение, равное единице.

3.5.2. Эргодические случайные процессы

Большинство стационарных случайных процессов обладают очень важным для практики свойством *эргодичности*. Суть этого свойства заключается в том, что все или некоторые вероятностные характеристики процесса можно определить не только путем усреднения по множеству реализаций, но и путем усреднения по времени одной достаточно длинной реализации. Усреднение по времени физически можно объяснить тем, что стационарный случайный процесс протекает однородно во времени, вследствие чего одна продолжительная реализация содержит все сведения о свойствах процесса.

Таким образом, можно следовать такому определению эргодического случайного процесса. Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если при определении его статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной сколь угодно длинной реализации. Если речь идет о всех статистических характеристиках, то такой процесс называется эргодическим в строгом смысле. В то же время возможна эргодичность относительно отдельных характеристик.

Эргодичность случайных процессов позволяет изучать их статистические свойства по одной реализации, наблюдаемой в течение длительного промежутка времени. При этом нет необходимости иметь для исследования большую совокупность реализаций. Так, статистические свойства стационарных шумов, моделью которых являются эргодические случайные процессы, могут быть изучены на одной конкретной радиотехнической системе. Результаты этого исследования могут быть распространены на все идентичные системы.

Приведем формулы для числовых характеристик эргодического случайного процесса.

Математическое ожидание $m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$

Дисперсия $D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt.$

Ковариационная функция

$$B_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt .$$

Корреляционная функция

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt .$$

3.5.3. Взаимная корреляционная функция

Практический интерес представляют количественные характеристики, определяющие степень статистической связи мгновенных значений двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$. Такими характеристиками являются взаимная ковариационная и корреляционная функции. Они определяются следующими соотношениями:

– для нестационарных процессов

$$B_{xy}(t_1, t_2) = B_{yx}(t_2, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y; t_1, t_2) dx dy ,$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t_1)][y - m_y(t_2)] p(x, y; t_1, t_2) dx dy ;$$

– для стационарных процессов

$$B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y; \tau) dx dy ,$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \cdot (y - m_y) p(x, y; \tau) dx dy ;$$

– для эргодических процессов

$$B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt , \quad (3.8)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][y(t + \tau) - m_y] dt . \quad (3.9)$$

Взаимная корреляционная функция может быть нечетной.

Если случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ независимы, то для них

$$p(x, y; t_1, t_2) = p(x; t_1) \cdot p(y, t_2) .$$

Тогда

$$B_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t_1) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yp(y, t_2) dx = m_x(t_1) \cdot m_y(t_2) .$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t_1)] p(x, t_1) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [y - m_y(t_2)] p(y, t_2) dx = 0 .$$

Процессы, для которых взаимные ковариационные функции равны постоянной величине, иногда называют некогерентными. Из некогерентности двух случайных процессов не следует их независимость.

В общем случае корреляционные свойства двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ в два различных момента времени можно задать ковариационной и корреляционной матрицами:

$$B(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} B_x(t_1, t_2) & B_{xy}(t_1, t_2) \\ B_{yx}(t_1, t_2) & B_y(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad R(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} R_x(t_1, t_2) & R_{xy}(t_1, t_2) \\ R_{yx}(t_1, t_2) & R_y(t_1, t_2) \end{bmatrix}.$$

Для стационарных случайных процессов ковариационная и корреляционная матрицы имеют вид

$$B(\tau) = \begin{bmatrix} B_x(\tau) & B_{xy}(\tau) \\ B_{yx}(\tau) & B_y(\tau) \end{bmatrix}, \quad R(\tau) = \begin{bmatrix} R_x(\tau) & R_{xy}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) & R_y(\tau) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим два эргодических случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ с математическими ожиданиями, равными нулю. Корреляционная функция случайного процесса $Z(t) = X(t) + Y(t)$, учитывая (3.9), равна

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) + y(t)][x(t + \tau) + y(t + \tau)] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)y(t + \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t + \tau) dt = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau). \end{aligned} \quad (3.10)$$

При $\tau = 0$ данное равенство можно записать так:

$$D_z = D_x + D_y + R_{xy}(0) + R_{yx}(0) = D_x + D_y + 2R_{xy}(0).$$

Если процессы $X(t)$ и $Y(t)$ статистически независимы, то дисперсия (средняя мощность) суммы процессов будет равна $D_z = D_x + D_y$. В противном случае мощность случайного процесса $Z(t)$ будет больше или меньше мощности суммы процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Очевидно, что корреляционная функция случайного процесса $Z_1(t) = X(t) - Y(t)$ равна

$$R_{z_1}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - y(t)][x(t + \tau) - y(t + \tau)] dt = R_x(\tau) + R_y(\tau) - R_{xy}(\tau) - R_{yx}(\tau).$$

Для эргодических случайных процессов с $m_x = m_y = 0$ очевидно равенство

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt = M[x(t) \cdot y(t+\tau)] = M[x(t-\tau) \cdot y(t)];$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t+\tau)dt = M[y(t) \cdot x(t+\tau)] = M[y(t-\tau) \cdot x(t)].$$

Следовательно, $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$; $R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$.

3.6. Примеры некоторых законов распределения

3.6.1. Нормальный (гауссовский) закон распределения

В статистической радиотехнике широкое распространение имеют сигналы, моделью которых являются стационарные случайные процессы с нормальным (гауссовским) законом распределения.

Одномерная плотность вероятности $p(x)$ и функция распределения $F(x)$ таких процессов определяются выражениями

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right) \right],$$

где m_x – математическое ожидание;

σ_x – среднеквадратичное значение;

$\Phi(x)$ – функция Лапласа, равная

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Графики нормального закона распределения и функции распределения представлены на рис. 3.7.

Свойства случайных процессов с нормальным законом распределения более подробно рассмотрены в п. 3.9.1 в связи с широким применением на практике этой модели для описания реальных случайных сигналов.

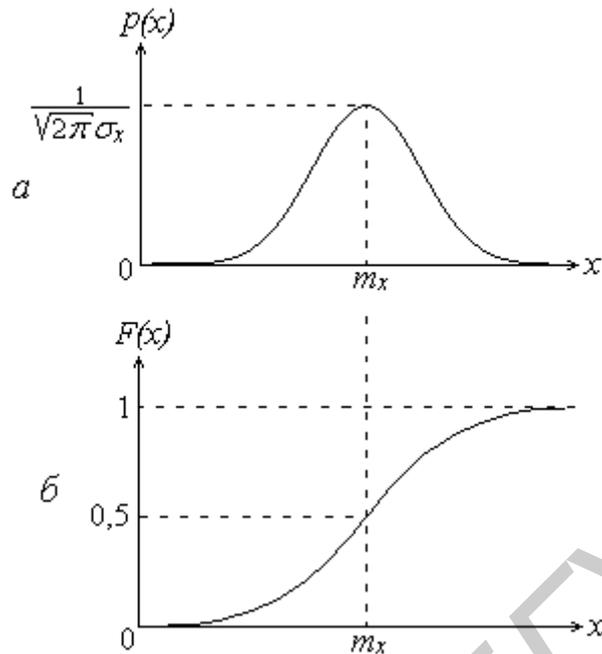


Рис. 3.7. Нормальный закон распределения:
a – плотность вероятности; *б* – функция распределения

3.6.2. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина подчиняется закону равномерной плотности (имеет равномерное распределение), если ее возможные значения лежат в пределах некоторого определенного интервала и в пределах этого интервала все значения случайной величины одинаково вероятны.

Со случайной величиной, имеющей равномерное распределение, часто встречаются в измерительной технике при округлении отсчетов измерительного прибора до целых делений шкал. Ошибка при округлении отсчетов до ближайшего целого деления является случайной величиной, которая может принимать с равной вероятностью любое значение между соседними целыми значениями.

Плотность вероятности $p(\varphi)$ и функция распределения $F(\varphi)$ процессов с равномерным законом распределения фазы определяются выражениями

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{при } -\pi \leq \varphi \leq \pi;$$

$$F(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\varphi} d\varphi = \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2}.$$

На рис. 3.8, *a* представлен график равномерного закона распределения (плотности вероятности) случайной фазы в пределах от $-\pi$ до π , а на рис. 3.8, *б* – график функции распределения.

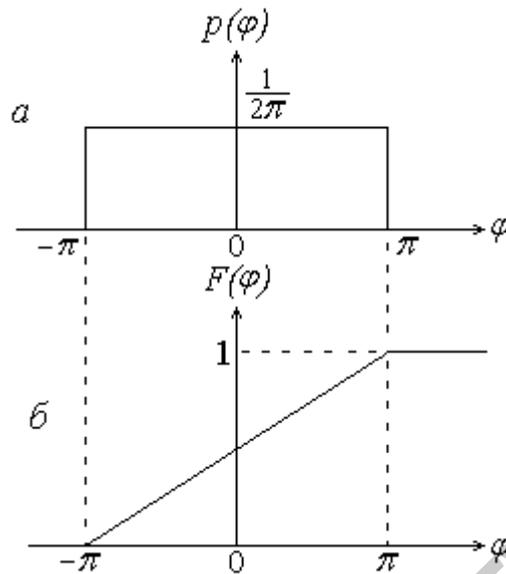


Рис. 3.8. Равномерный закон распределения:
 a – плотность вероятности; b – функция распределения

3.6.3. Закон распределения синусоидального сигнала со случайной фазой

Синусоидальный сигнал (гармоническое колебание) со случайной фазой – это колебание $x(t) = U \cos[\omega t + \varphi(t)]$, у которого амплитуда U и частота постоянны, а начальная фаза – случайная величина, которая с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в интервале от $-\pi$ до π (равномерный закон распределения, см. рис. 3.8, a).

Плотность вероятности и функция распределения этого сигнала равны

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{U^2 - x^2}} & \text{при } |x| \leq U, \\ 0 & \text{при } |x| > U; \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-U}^x \frac{1}{\sqrt{U^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{U} + \frac{1}{2}.$$

На рис. 3.9 представлены графики плотности вероятности и функция распределения синусоидального сигнала со случайной фазой.

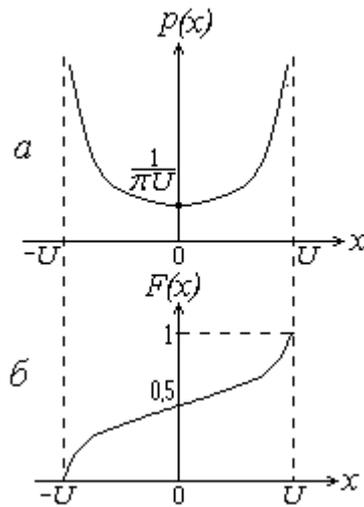


Рис. 3.9. График закона распределения синусоидального сигнала со случайной фазой:

a – плотность вероятности; b – функция распределения

3.6.4. Экспоненциальный закон распределения

Экспоненциальное распределение (называемое иногда показательным распределением) играет большую роль в практических приложениях: в теории массового обслуживания, исследовании операций, теории надежности и др.

Графики плотности вероятности $p(x)$ и функции распределения $F(x)$ приведены на рис. 3.10.

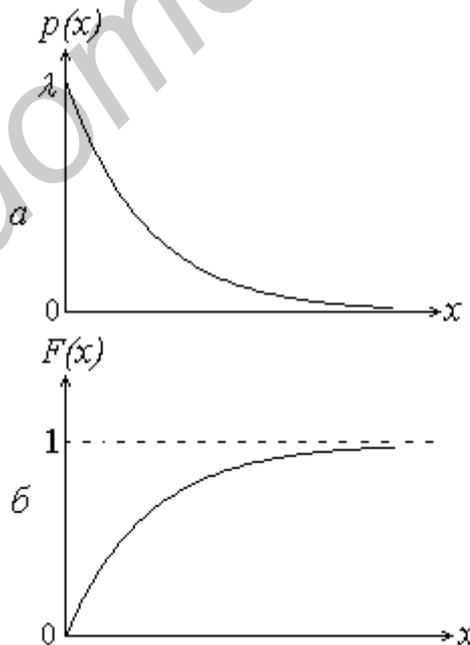


Рис. 3.10. Экспоненциальный закон распределения:
 a – плотность вероятности; b – функция распределения

Плотность вероятности случайной величины с экспоненциальным законом распределения определяется следующей формулой:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где λ – параметр экспоненциального закона распределения.

Функция распределения $F(x)$ случайной величины с экспоненциальным законом распределения равна

$$F(x) = \int_0^x p(x) dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

3.7. Спектральный анализ случайных сигналов

3.7.1. Общие сведения

Особый интерес представляют частотные свойства случайных сигналов. Эти свойства позволяют эффективно использовать спектральный метод анализа цепей при воздействии на них шумов и помех, успешно решать задачи синтеза систем, обладающих высокой степенью помехозащищенности.

При изучении частотных свойств детерминированных сигналов весьма плодотворно (при определенных условиях) применялся спектральный анализ, основанный на рядах Фурье для периодических сигналов и преобразованиях Фурье для непериодических сигналов. Подобный математический аппарат необходим и для изучения частотных свойств случайных сигналов.

Непосредственное применение классического метода спектрального анализа для множества реализаций случайного сигнала (они как известно являются неслучайными функциями времени) не представляется возможным. Объясняется это тем, что реализация случайного процесса не удовлетворяет условию аб-

солютной интегрируемости, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty$. При этом невозможно применение преобразования Фурье для определения ее спектральной плотности $S_x(j\omega)$. Применение свойств дельта-функции, как это было сделано для детерминированных сигналов, не помогает.

Если же взять ансамбль реализаций, ограниченных по времени и удовлетворяющих условию $0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$, то в принципе можно определить для каждой из них спектральную плотность. Для различных реализаций случайного сигнала она будет иметь случайный вид, что позволяет назвать ее реализацией случайного спектра, т. е. реализацией случайного процесса в частотной области. Она содержит всю информацию о конкретной реализации случайного сигнала. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, можно

восстановить реализацию. Следовательно, для таких процессов (конечной мощности) некоторые задачи статистического анализа можно иногда решать в частотной области с использованием метода быстрого преобразования Фурье и возможности вычислительной техники.

В то же время усреднение по ансамблю комплексных спектральных функций $S_x(j\omega)$, соответствующих реализациям случайного процесса с $m_x = 0$, приводит к неопределенности и получению нулевого результата:

$$\overline{S_k(j\omega)} = \overline{\int_0^T x_k(t) e^{-j\omega t} dt} = \int_0^T \overline{x_k(t)} e^{-j\omega t} dt = \int_0^T m_x e^{-j\omega t} dt = 0.$$

Заметим, что горизонтальной чертой обозначается операция статистического усреднения по ансамблю реализаций.

Получение нулевого результата обусловлено случайностью и независимостью амплитуд и фаз отдельных спектральных компонент $S_x(j\omega)$ на конкретных частотах ω_k . Таким образом, усредненное значение спектральной плотности не несет никакой информации о флуктуационной, т. е. собственно случайной составляющей случайного процесса. Это говорит о том, что фазы спектральных составляющих в различных реализациях процесса случайны и независимы.

Для того чтобы исключить влияния фазовых компонент спектральных составляющих, общую идею гармонического анализа применяют для энергетических параметров случайного сигнала. Другими словами, обобщают классический гармонический анализ, усредняя спектральное разложение отдельных реализаций.

3.7.2. Спектральная плотность мощности

Пусть $x_k(t)$ – реализация случайного процесса $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x = 0$. Полагаем, что реализация ограничена временным интервалом $[0..T]$. Тогда спектральная плотность реализации равна

$$S_k(j\omega) = \int_0^T x_k(t) e^{-j\omega t} dt.$$

В соответствии с равенством Парсевала можно определить энергию и среднюю мощность рассматриваемой реализации в интервале $[0..T]$:

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_k(j\omega)|^2 d\omega; \quad P_k = \frac{\mathcal{E}_k}{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_k(j\omega)|^2}{T} d\omega.$$

С возрастанием времени T растет энергия \mathcal{E}_k . При этом мощность, равная отношению $\frac{\mathcal{E}_k}{T}$, стремится к некоторому пределу, т. е.

$$P_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_k(j\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_k(j\omega)|^2}{T} d\omega.$$

Из полученного выражения видно, что величина $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_k(j\omega)|^2}{T} d\omega$ есть бесконечно малая мощность, приходящаяся на интервал частот $d\omega$. Следовательно, функцию

$$W_{xk}(\omega) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_k(j\omega)|^2}{T} d\omega}{d\omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_k(j\omega)|^2}{T} \quad (3.11)$$

можно назвать спектральной плотностью мощности k -й реализации случайного процесса $X(t)$.

Усредняя функции $W_{xk}(\omega)$ по множеству реализаций, получим *спектральную плотность мощности* $W_x(\omega)$ случайного процесса $X(t)$. Заметим, что для эргодического случайного процесса $W_x(\omega)$ можно получить, усредняя спектральную плотность мощности k -й реализации по времени.

Функция $W_x(\omega)$ – это одна из основных характеристик случайного процесса, являясь по существу его энергетическим спектром. Она показывает усредненное распределение мощности процесса по частотам без учета фазовой структуры спектра. Поэтому восстановить реализации случайного процесса по его спектральной характеристике не представляется возможным.

Непосредственно из формулы (3.11) следует, что функция $W_x(\omega)$ является неотрицательной, действительной (некомплексной) и четной функцией частоты. Она не содержит информации о фазах спектральных составляющих. Размерность функции $W_x(\omega)$ – В²с/рад.

При физическом рассмотрении и проведении экспериментов целесообразно пользоваться односторонним спектром $W_x^+(\omega)$, отличным от нуля, только при положительных частотах. Такой спектр равен

$$W_x^+(\omega) = \begin{cases} 2W_x(\omega) & \text{при } \omega \geq 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Иногда удобно пользоваться нормированной спектральной плотностью мощности случайного процесса, определяемой по формуле

$$w_x(\omega) = \frac{W_x(\omega)}{D_x}.$$

Рассматривая реализации $x(t)$ и $y(t)$ стационарных и стационарно связанных случайных сигналов, имеющих спектральные плотности $S_x(j\omega)$ и $S_y(j\omega)$, можно определить взаимные спектральные плотности мощности случайных процессов:

$$W_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_x(j\omega)S_y^*(j\omega)}{T}.$$

В отличие от спектральной плотности мощности одного случайного процесса, которая является действительной и четной функцией частоты, взаимная спектральная плотность мощности двух стационарно связанных процессов является комплексной функцией.

3.7.3. Формулы Винера – Хинчина

Формулы Винера – Хинчина (получены русским ученым А. Я. Хинчиным и американским ученым Н. Винером) определяют связь между частотной и временной характеристиками случайного сигнала. В качестве частотной характеристики рассматривается спектральная плотность мощности, а в качестве временной – корреляционная (при $m_x = 0$) или ковариационная (при $m_x \neq 0$) функция.

Пусть $x(t)$ – реализация эргодического случайного процесса $X(t)$, длительность которой ограничена конечным интервалом $[0..T]$. Такую реализацию можно рассматривать как детерминированный сигнал. Известно, что корреляционная функция детерминированного сигнала связана преобразованием Фурье с его энергетическим спектром, т. е.

$$R(\tau) = \int_0^T x(t)x(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.12)$$

Усредним данное выражение по времени и учтем, что применительно к эргодическим случайным процессам рассматривается длинная реализация и приведенное выражение при $m_x \neq 0$ соответствует ковариационной функции. Тогда

$$B_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_x(j\omega)|^2}{T} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Учитывая, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_x(j\omega)|^2}{T} = W_x(\omega),$$

окончательно получаем

$$B_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.13)$$

Это обратное преобразование Фурье. Следовательно, справедливо и прямое преобразование Фурье:

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.14)$$

Если рассматривать $x(t)$ как реализацию неэргодического случайного процесса, то выражения (3.13) и (3.14) могут быть получены процедурой усреднения по ансамблю реализаций, примененной к обеим частям равенства (3.12).

Итак, получен следующий результат (который иногда называют теоремой Винера – Хинчина): спектральная плотность мощности и ковариационная функция случайного процесса связаны между собой парой преобразований Фурье.

Учитывая, что ковариационная и корреляционная функции связаны соотношением

$$B_x(\tau) = R_x(\tau) + m_x^2,$$

можно записать

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [R_x(\tau) + m_x^2] e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + m_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau;$$

$$W_x(\omega) = \tilde{W}_x(\omega) + 2\pi m_x^2 \delta(\omega).$$

В этом выражении $\tilde{W}_x(\omega)$ – спектральная плотность флуктуационной составляющей случайного процесса с $m_x \neq 0$. Очевидно, что при $m_x = 0$ $W_x(\omega) = \tilde{W}_x(\omega)$.

Из полученного выражения видно, что спектральная плотность мощности случайного процесса с $m_x \neq 0$ отличается от спектральной плотности соответствующего центрированного процесса наличием дискретной составляющей на частоте $\omega = 0$.

Для случайного процесса с $m_x = 0$ формулы Винера – Хинчина связывают между собой спектральную плотность мощности и корреляционную функцию случайного процесса, т. е. имеют следующий вид:

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Учитывая свойство четности функций $W_x(\omega)$ и $R_x(\tau)$, можно записать

$$W_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \quad R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

При $\tau = 0$ находим, что дисперсия (средняя мощность) случайного процесса с $m_x = 0$ равна

$$D_x = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) d\omega.$$

Спектральная плотность мощности при $\omega = 0$ равна

$$W_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) d\tau.$$

Учитывая полученные соотношения, можно записать следующее свойство нормированной спектральной плотности мощности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_x(f)df = \frac{1}{D_x} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f)df = 1.$$

Теорема Винера – Хинчина позволяет вычислять спектральные характеристики случайных процессов на основании информации, полученной с помощью коррелометров.

Анализируя формулы (3.13) и (3.14), можно сказать, что функция $W_x(\omega)$ является по существу спектральной плотностью корреляционной функции, которая рассматривается при этом как обыкновенная детерминированная функция времени. Кроме того, в данном случае хорошо интерпретируются с физической точки зрения рассмотренные в [1] свойства преобразования Фурье. В частности, легко определяется соотношение между интервалом корреляции и эффективной шириной спектра случайного сигнала.

Соотношение Винера – Хинчина можно применить для определения спектральной плотности мощности суммы двух случайных процессов, т. е. случайного процесса $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

$$\begin{aligned} W_z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= W_x(\omega) + W_y(\omega) + W_{xy}(\omega) + W_{yx}(\omega). \end{aligned}$$

Здесь $W_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ и $W_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ являются

взаимными спектральными плотностями случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$.

Взаимные спектральные плотности могут быть комплексными функциями. Это объясняется тем, что функции $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$ – необязательно четные функции.

Учитывая, что $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ и $R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$, можно записать

$$W_{xy}(\omega) = W_{yx}^*(\omega).$$

Тогда $W_{xy}(\omega) + W_{yx}(\omega) = 2\text{Re}W_{xy}(\omega) = 2\text{Re}W_{yx}(\omega)$.

Окончательно

$$W_z(\omega) = W_x(\omega) + W_y(\omega) + 2\text{Re}W_{xy}(\omega).$$

Выводы:

1. Спектр суммы двух статистически независимых эргодических случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ с $m_x = m_y = 0$ равен сумме спектров $W_x(\omega)$ и $W_y(\omega)$. Следовательно, мощность суммарного процесса равна сумме мощностей процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

2. Спектр суммы двух статистически зависимых эргодических случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ с $m_x = m_y = 0$ больше суммы спектров $W_x(\omega)$ и $W_y(\omega)$,

если действительная часть взаимной спектральной мощности положительна. Другими словами, корреляция между случайными процессами приводит к возрастанию средней мощности суммарного процесса.

3.7.4. Соотношение между эффективной шириной спектра и интервалом корреляции случайного сигнала

Вначале покажем следующее свойство спектра случайного процесса и его корреляционной функции: изменение масштаба корреляционной функции по оси τ приводит к изменению величины спектральной плотности мощности и ее масштаба по оси ω .

Пусть масштаб корреляционной функции случайного процесса со спектральной плотностью мощности $W_x(\omega)$ изменился по оси τ в α раз, т. е. обозначение корреляционной функции имеет вид $R_x(\alpha\tau)$. Очевидно, что при $\alpha > 1$ происходит сжатие, а при $0 < \alpha < 1$ – расширение графика корреляционной функции. Тогда

$$W_{xm}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\alpha\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Замена переменных: $\alpha\tau = x; \quad \tau = \frac{x}{\alpha}; \quad d\tau = \frac{1}{\alpha} dx.$

$$W_{xm}(\omega) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{-j\frac{\omega}{\alpha}x} dx = \frac{1}{\alpha} W_x\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Вывод. При сжатии (расширении) графика корреляционной функции случайного процесса по оси τ в определенное число раз во столько же раз расширяется (сжимается) график его спектра по оси частот при пропорциональном уменьшении (увеличении) амплитуд его составляющих.

Рассмотрим данное свойство применительно к понятиям эффективная ширина спектра и интервал корреляции случайного сигнала.

Эффективной шириной спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ случайного сигнала называется отношение площади под графиком спектральной плотности мощности $W_x(\omega)$ к значению $W_x(0)$ для широкополосного сигнала или к значению $W_x(\omega_0)$ для узкополосного сигнала (рис. 3.11), т. е.

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{W_x(0)}; \quad \Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{\int_0^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{W_x(\omega_0)}. \quad (3.15)$$

Интервал корреляции случайного сигнала – это числовая характеристика, служащая для оценки скорости изменения реализации случайного сигнала. Эта характеристика определяется выражением

$$\tau_k = \frac{\int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{R(0)} = \frac{\int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{D_x} = \int_0^{\infty} |r_x(\tau)| d\tau.$$

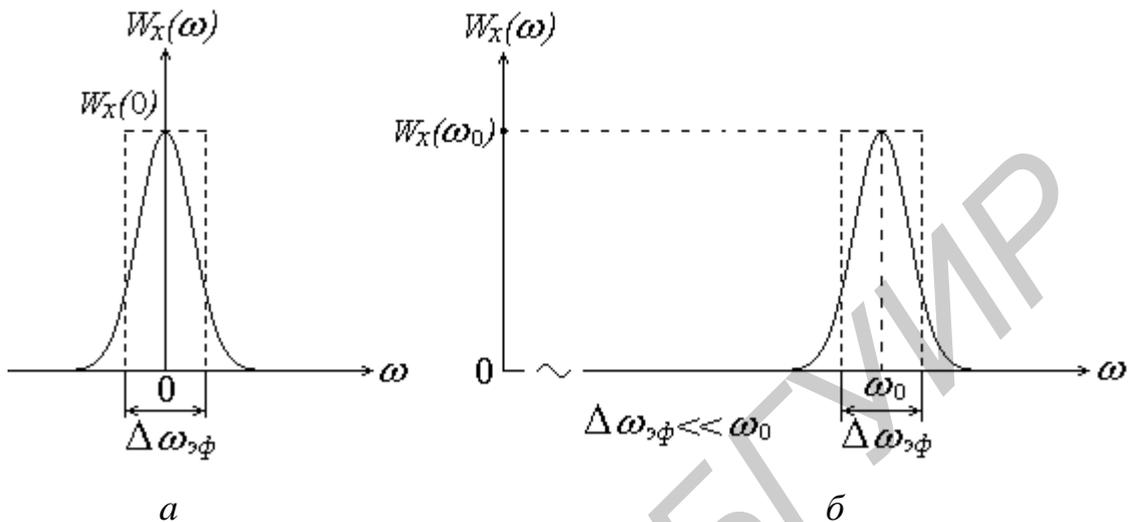


Рис. 3.11. Эффективная ширина спектра:
a – широкополосного сигнала; *б* – узкополосного сигнала

Так как спектральная плотность мощности и корреляционная функция связаны преобразованием Фурье, то следует ожидать, что существует жесткая связь между эффективной шириной спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ и интервалом корреляции τ_k случайного сигнала. Определим произведение $\Delta\omega_{\text{эф}} \cdot \tau_k$ для широкополосного случайного сигнала:

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \cdot \tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{W_x(0)} \cdot \frac{\int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{R(0)}.$$

Учитывая, что $W_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau$ и $R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega$, получаем

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \cdot \tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau} \cdot \frac{\int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{2 \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau} \cdot \frac{\int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega} = \pi.$$

Следовательно, $\Delta\omega_{\text{эф}} \cdot \tau_k = \pi$, или $\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{\pi}{\tau_k}$, $\tau_k = \frac{\pi}{\Delta\omega_{\text{эф}}}$.

В свою очередь, $\Delta f_{\text{эф}} \cdot \tau_k = 0,5$, или $\Delta f_{\text{эф}} = \frac{1}{2\tau_k}$, $\tau_k = \frac{1}{2\Delta f_{\text{эф}}}$.

Таким образом, эффективная ширина спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ и интервал корреляции τ_k случайного сигнала находятся в обратно пропорциональной зависимости: чем шире (уже) полоса частот, занимаемая спектром случайного сигнала, тем меньше (больше) интервал корреляции.

3.8. Основные типы случайных сигналов

3.8.1. Сигналы с нормальным законом распределения

Одномерный нормальный закон распределения

В статистической радиотехнике определенный интерес представляют случайные процессы, являющиеся результатом совместного действия большого числа случайных факторов. В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей такие процессы имеют нормальный закон распределения (закон Гаусса). Случайные процессы с нормальным законом распределения иногда называют нормальными случайными процессами.

Формула одномерного нормального закона распределения имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Рассмотрим некоторые особенности этого закона распределения.

1. Определим функцию распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Замена переменных: $t = \frac{x-m_x}{\sigma_x}$, $x = \sigma_x t + m_x$, $dx = \sigma_x dt$.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для вычисления полученного интеграла можно воспользоваться таблицами специальной функции, называемой функцией Лапласа и равной

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Некоторые свойства функции Лапласа: $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$, $\Phi(-\infty) = -1$.

Тогда
$$F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right) \right]. \quad (3.16)$$

Графики нормального закона распределения и функции распределения представлены на рис. 3.7.

2. Математическое ожидание случайного процесса $x(t)$ с нормальным законом распределения

$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Замена переменных: $z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$; $x = z\sigma_x + m_x$; $dx = \sigma_x dz$.

$$M[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (z\sigma_x + m_x) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{m_x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Первый интеграл в полученном выражении равен нулю как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. Для вычисления второго интеграла воспользуемся справочником по математике [9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Окончательно получаем
$$M[x] = \frac{m_x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = m_x.$$

Вывод. Параметр m_x в формуле нормального закона распределения является математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$, имеющего этот закон распределения.

3. Дисперсия случайного процесса $X(t)$ с нормальным законом распределения

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Замена переменных: $z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$; $x = z\sigma_x + m_x$; $dx = \sigma_x dz$.

$$D_x = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Из справочника по математике [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Окончательно получаем
$$D_x = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma_x^2.$$

Вывод. Параметр σ_x в формуле нормального закона распределения является среднеквадратичным отклонением случайного процесса $X(t)$, имеющего этот закон распределения.

4. Кривая графика нормального закона симметрична относительно оси, проходящей через точку m_x .

Об этом свидетельствует равенство нулю безразмерного коэффициента асимметрии $K_3 = \mu_3 / \sigma^3$, который характеризует асимметрию кривой графика закона распределения:

$$K_3 = \mu_3 / \sigma_x^3 = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^3 e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Замена переменных: $z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}; x = z\sigma_x + m_x; dx = \sigma_x dz.$

Следовательно, $K_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^3 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$ (интеграл в симметричных пределах от нечетной функции равен нулю).

5. Ветви кривой $p(x)$ асимптотически приближаются к оси Ox при $|x| \rightarrow \infty$.

6. При изменении m_x и $\sigma_x = \text{const}$ кривая закона распределения смещается вдоль оси Ox : вправо при увеличении m_x и влево при уменьшении m_x .

7. При изменении σ_x и $m_x = \text{const}$ кривая закона распределения изменяет свой вид: становится более широкой и низкой при увеличении σ_x , более узкой и высокой при уменьшении σ_x .

Последние два свойства очевидны из формулы нормального закона распределения.

Пользуясь выражением (3.16) для $F(x)$, можно определить вероятность того, что значения случайной величины, имеющей нормальное распределение, находятся в определенных пределах, т. е. $P(a \leq X < b)$. Исходя из смысла функции распределения, можно записать

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Воспользуемся полученной формулой и определим вероятность попадания случайной величины с нормальным законом распределения в интервал $[m_x - 3\sigma_x; m_x + 3\sigma_x]$:

$$P[(m_x - 3\sigma_x) \leq X < (m_x + 3\sigma_x)] = F(m_x + 3\sigma_x) - F(m_x - 3\sigma_x) = \\ = 0,5 \cdot \Phi(3) - 0,5 \cdot \Phi(-3) = \Phi(3) = 0,9973.$$

Таким образом, для случайной величины с нормальным законом распределения выполнение неравенства $|x - m_x| \leq 3\sigma_x$ является практически достоверным. В этом заключается смысл так называемого правила «трех сигм».

Нормальный закон распределения распространен достаточно широко. Например, таким законом распределения обладают ошибки измерения, некоторые параметры радиоэлектронных элементов (резисторов, конденсаторов, индуктивностей и др.), мгновенные значения шумов в приемных трактах до детектора и т. д.

Основная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов распределения, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения.

Один из общих методов определения закона распределения случайного сигнала на выходе радиотехнического устройства базируется на использовании характеристических функций. Рассмотрим свойства и определим вид характеристической функции случайного сигнала с нормальным законом распределения.

Характеристическая функция сигнала с нормальным законом распределения

Характеристической функцией случайной величины X называется функция

$$\Theta_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p(x) dx, \quad (3.17)$$

где e^{jvx} – специальный вид функционального преобразования случайной величины;

v – произвольный вещественный параметр.

Как видно из приведенного выражения, характеристическая функция является:

- математическим ожиданием случайной величины e^{jvx} ;
- преобразованием Фурье от закона распределения случайной величины X (комплексно-сопряженным преобразованием).

Следовательно, если каким-то образом удалось определить характеристическую функцию случайной величины, то ее закон распределения может быть найден обратным преобразованием Фурье, т. е.

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x(v) e^{-jvx} dv. \quad (3.18)$$

В свою очередь, характеристическую функцию можно определить по моментным функциям, пользуясь некоторыми ее свойствами.

Свойства характеристической функции:

$$1. \Theta_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j0x} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

2. Пусть $y = ax + b$. Тогда

$$\Theta_y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jv(ax+b)} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{javx} p(x) dx \cdot e^{jbv} = \Theta_x(av) e^{jbv}.$$

3. Пусть $y = \sum_{k=1}^n x_k$ – сумма независимых случайных величин, для которых

справедливо $p(y) = \prod_{k=1}^n p(x_k)$. Тогда

$$\Theta_y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvy} p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jv \sum_{k=1}^n x_k} \prod_{k=1}^n p(x_k) dx = \prod_{k=1}^n \Theta_k(v).$$

4. Производные от характеристической функции равны

$$\frac{d^k \Theta_x(v)}{dv^k} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{jvx} p(x) dx;$$

$$\left(\frac{d^k \Theta_x(v)}{dv^k} \right)_{v=0} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx = j^k \cdot \alpha_k, \quad (3.19)$$

где α_k – начальный момент k -го порядка.

5. Характеристическая функция случайной величины, имеющей нормальный закон распределения вероятностей.

$$\Theta_x(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx - \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Замена переменных:

$$1. \frac{x - m_x}{\sigma_x} - j\sigma_x v = t.$$

$$2. x = m_x + j\sigma_x^2 v + \sigma_x t.$$

$$3. dx = \sigma_x dt.$$

$$4. \frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2j\sigma_x v \frac{x - m_x}{\sigma_x} - \sigma_x^2 v^2 = t^2.$$

$$5. \frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} - 2j\sigma_x v \frac{x - m_x}{2\sigma_x} - \frac{\sigma_x^2 v^2}{2} = \frac{t^2}{2}.$$

$$6. \frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{2jvx}{2} + jvm_x - \frac{\sigma_x^2 v^2}{2} = \frac{t^2}{2}.$$

Тогда

$$\Theta_x(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{jvm_x - \frac{\sigma_x^2 v^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - jvm_x + \frac{\sigma_x^2 v^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jvm_x - \frac{\sigma_x^2 v^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$\text{Так как } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}, \text{ то } \Theta_x(v) = e^{jvm_x - \frac{\sigma_x^2 v^2}{2}}.$$

Для нормального случайного сигнала с $m_x = 0$ и $\sigma_x = 1$ получаем

$$\Theta_x(v) = e^{-\frac{v^2}{2}}. \quad (3.20)$$

Центральная предельная теорема

Эффект нормализации случайных сигналов, который проявляется в процессе их преобразования линейными устройствами, обусловлен справедливостью центральной предельной теоремы теории вероятностей.

Формулировка теоремы

Закон распределения суммы независимых случайных величин с одинаковыми законами распределения неограниченно приближается к нормальному закону при увеличении числа слагаемых в сумме.

Доказательство

Пусть $y = \sum_{k=1}^n x_k$ – сумма независимых случайных величин с одинаковыми законами распределения, равными математическими ожиданиями и дисперсиями. Тогда $m_y = nm_x$, $D_y = nD_x$ и $\sigma_y = \sqrt{n}\sigma_x$.

Рассмотрим нормированную случайную величину

$$z = \frac{y - m_y}{\sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - nm_x}{\sqrt{n}\sigma_x}.$$

Случайная величина z имеет следующие особенности:

– математическое ожидание равно нулю:

$$m_z = \int_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - m_y}{\sigma_y} p(y)dy = \frac{1}{\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy - \frac{1}{\sigma_y} m_y \int_{-\infty}^{\infty} p(y)dy = 0;$$

– дисперсия не зависит от n и равна 1 при любом n :

$$D_z = \int_{-\infty}^{\infty} (z - m_z)^2 p(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y - m_y}{\sigma_y} \right)^2 p(y)dy;$$

$$D_z = \frac{1}{\sigma_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 p(y) dy = 1.$$

Найдем характеристическую функцию каждого слагаемого для z (она будет одинакова для всех слагаемых, так как одинаковы законы распределения и числовые характеристики).

$$\Theta(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{jv(x-m_x)}{\sqrt{n}\sigma_x}} p(x) dx.$$

Разложим функцию $e^{\frac{jv(x-m_x)}{\sqrt{n}\sigma_x}}$ в ряд:

$$e^{\frac{jv(x-m_x)}{\sqrt{n}\sigma_x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[jv(x-m_x)]^k}{k!(\sqrt{n}\sigma_x)^k}.$$

Тогда

$$\Theta(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k v^k}{k! \sqrt{n}^k \sigma_x^k} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^k p(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k v^k}{k! \sqrt{n}^k \sigma_x^k} \mu_k,$$

где μ_k – центральный момент k -го порядка.

Таким образом,

$$\Theta(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k \mu_k}{k! \sqrt{n}^k \sigma_x^k} v^k.$$

Тогда искомая характеристическая функция случайной величины z будет равна

$$\Theta_z(v) = \Theta^n(v).$$

Или

$$\Theta_z(v) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k \mu^k}{k! \sqrt{n}^k \sigma_x^k} v^k \right]^n = \left(1 - \frac{v^2}{2n} - \frac{j\mu_3 v^3}{6n^{3/2} \sigma_x^3} + \dots \right)^n.$$

Здесь учтено, что $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = \sigma_x^2$. Прологарифмируем полученное выражение, ограничиваясь двумя членами полученного выражения, так как остальные члены пренебрежимо малы. Получаем

$$\ln \Theta_z(v) = n \ln \left(1 - \frac{v^2}{2n} \right).$$

С ростом n величина $\frac{v^2}{n}$ будет стремиться к нулю. Поэтому можно считать

$$\ln\left(1 - \frac{v^2}{2n}\right) \approx -\frac{v^2}{2n}.$$

Таким образом, $\ln \Theta_z(v) \approx -\frac{v^2}{2}$. Отсюда $\Theta_{yn}(v) = e^{-\frac{v^2}{2}}$.

Сравнивая полученное выражение с выражением (3.20), можно сделать вывод, что случайная величина z имеет нормальный закон распределения, т. е.

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Следовательно,

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Доказано, что сумма n независимых случайных величин с одинаковыми законами распределения, равными математическими ожиданиями и дисперсиями при $n \rightarrow \infty$ имеет нормальный закон распределения.

При соблюдении некоторых условий (условий Ляпунова, Ландеберга [8]) к нормальному закону сходится сумма зависимых случайных величин или сумма зависимых случайных величин с различными законами распределения (более сложная форма центральной предельной теоремы).

Двумерный нормальный закон распределения

Формула нормального закона распределения двух зависимых случайных величин X и Y имеет вид

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Если определить одномерные плотности вероятности этих случайных величин по формулам

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \quad \text{и} \quad p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx,$$

то можно убедиться, что каждая из случайных величин X и Y характеризуется в свою очередь также нормальным законом распределения (одномерным).

Графически двумерный закон распределения представляет собой поверхность распределения в координатах $[x, y, p(x, y)]$, т. е. поверхность в трехмерном пространстве, имеющую вид холма (рис. 3.12). Запишем уравнение проек-

ции сечения поверхности распределения плоскостью, параллельной координатной плоскости xOy , на эту же плоскость:

$$\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} = k^2,$$

где k – константа, значение которой зависит от места горизонтального сечения.

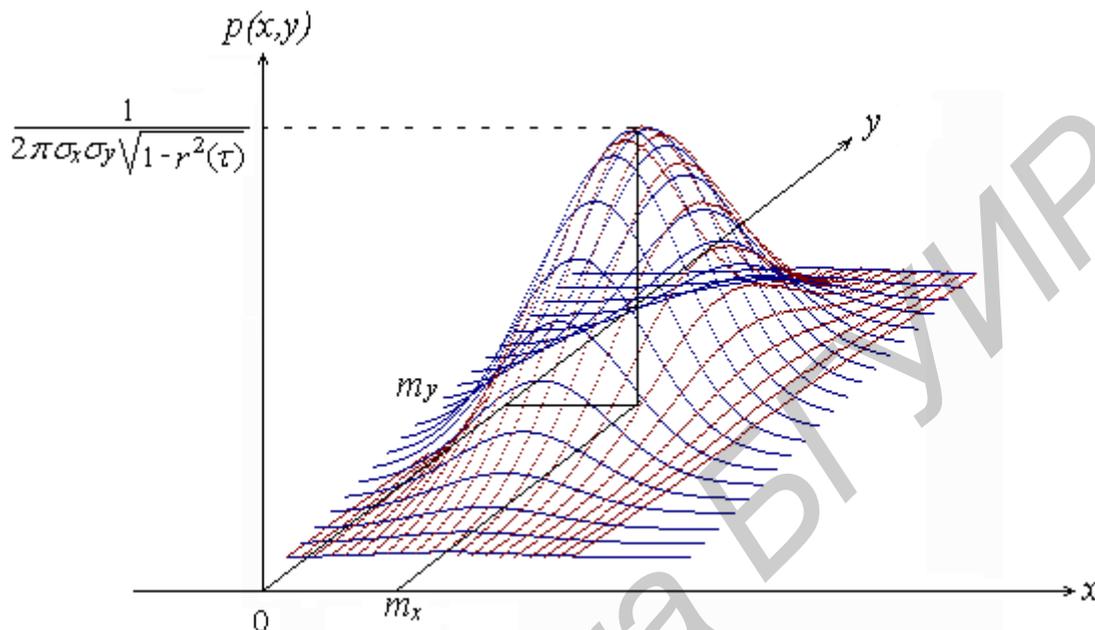


Рис. 3.12. Двумерный нормальный закон распределения вероятностей

Это уравнение представляет собой уравнение эллипса, центр которого находится в точке с координатами (m_x, m_y) . Оси симметрии эллипса составля-

ют с осью Ox углы $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$. Как видно из формулы, ориентация эллип-

сов рассеяния относительно координатных осей зависит от коэффициента корреляции r_{xy} .

Если случайные величины X и Y некоррелированы ($r_{xy} = 0$), то $\operatorname{tg}2\alpha = 0$ и оси симметрии параллельны координатным осям. При этом

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} \right)},$$

или

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}} = p(x) \cdot p(y).$$

Из теории вероятности известно, что двумерный закон распределения равен произведению законов распределения независимых случайных величин.

Применительно к стационарному случайному процессу формулу двумерного нормального закона распределения можно записать так:

$$p(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-r_x^2(\tau)}} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2[1-r_x^2(\tau)]} [(x_1-m_x)^2 - 2r_x(\tau)(x_1-m_x)(x_2-m_x) + (x_2-m_x)^2]}$$

3.8.2. Узкополосный случайный сигнал

Общие сведения об узкополосном случайном сигнале

Частотная избирательность радиотехнических систем обеспечивается узкополосными устройствами, которые осуществляют обработку принятого колебания до детектора на высоких и промежуточных радиочастотах. Для таких устройств справедливо неравенство

$$\Delta\omega_{\text{эф}} \ll \omega_0,$$

где $\Delta\omega_{\text{эф}}$ – эффективная полоса пропускания устройства;

ω_0 – центральная частота полосы пропускания.

При воздействии на такие устройства широкополосного случайного сигнала на их выходе в стационарном режиме будет сформирован узкополосный случайный сигнал со спектральной плотностью мощности, представленной на рис. 3.13. Спектр узкополосного сигнала сосредоточен в узкой полосе частот, удовлетворяющей условию $\Delta\omega_{\text{эф}} \ll \omega_0$. Величину эффективной ширины спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$ можно определить по формуле (3.15).

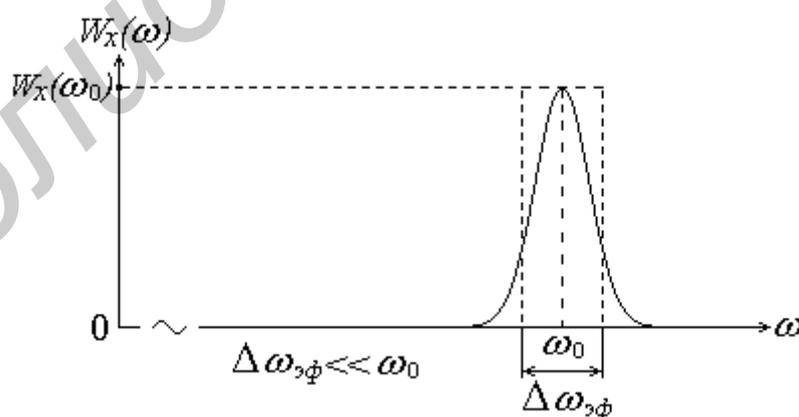


Рис. 3.13. Спектральная плотность мощности узкополосного случайного сигнала

Рассмотрим основные статистические характеристики узкополосного случайного сигнала с $m_x = 0$.

Статистические характеристики узкополосного случайного сигнала

Корреляционная функция

В соответствии с теоремой Винера – Хинчина для случайного сигнала с односторонней спектральной плотностью мощности, график которой представлен на рис. 3.13, можно записать

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cos\omega\tau d\omega.$$

Сместим спектр анализируемого сигнала в область низких частот (в окрестность частоты $\omega=0$). С этой целью воспользуемся новой переменной $\Omega = \omega - \omega_0$. Тогда

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} W_x(\omega_0 + \Omega) \cos(\omega_0 + \Omega)\tau d\Omega.$$

Нижний предел интегрирования $-\omega_0$ можно заменить на $-\infty$, так как у исходного спектра на частотах, близких к нулю, $W_x(\omega) \approx 0$. Тогда

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega_0 + \Omega) \cos(\omega_0 + \Omega)\tau d\Omega.$$

Преобразуем данное выражение:

$$R_x(\tau) = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega_0 + \Omega) \cos\Omega\tau d\Omega \right] \cos\omega_0\tau - \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega_0 + \Omega) \sin\Omega\tau d\Omega \right] \sin\omega_0\tau.$$

Если график $W_x(\omega)$ симметричен относительно центральной частоты ω_0 , то второй член данного выражения равен нулю (интеграл в симметричных пределах от нечетной функции). Поэтому

$$R_x(\tau) = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega_0 + \Omega) \cos\Omega\tau d\Omega \right] \cos\omega_0\tau = a(\tau) \cos\omega_0\tau. \quad (3.21)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой корреляционную функцию случайного сигнала, имеющего спектр, подобный исходному спектру, но смещенный по оси частот влево на величину ω_0 , т. е. в область низких частот.

По существу $a(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega_0 + \Omega) \cos\Omega\tau d\Omega$ – корреляционная функция

случайного сигнала со спектром $W_x(\omega_0 + \Omega)$, т. е. сигнала являющегося низко-частотным аналогом исходного сигнала. Как видно из полученного выражения, $a(\tau)$ играет роль медленно меняющейся (по сравнению с $\cos\omega_0\tau$) огибающей корреляционной функции.

Вспользуемся формулой (3.21) для расчета корреляционной функции случайного процесса, спектр которого представлен на рис. 3.14, приняв для простоты обозначение $\Delta\omega_{\phi} = \Delta\omega$.

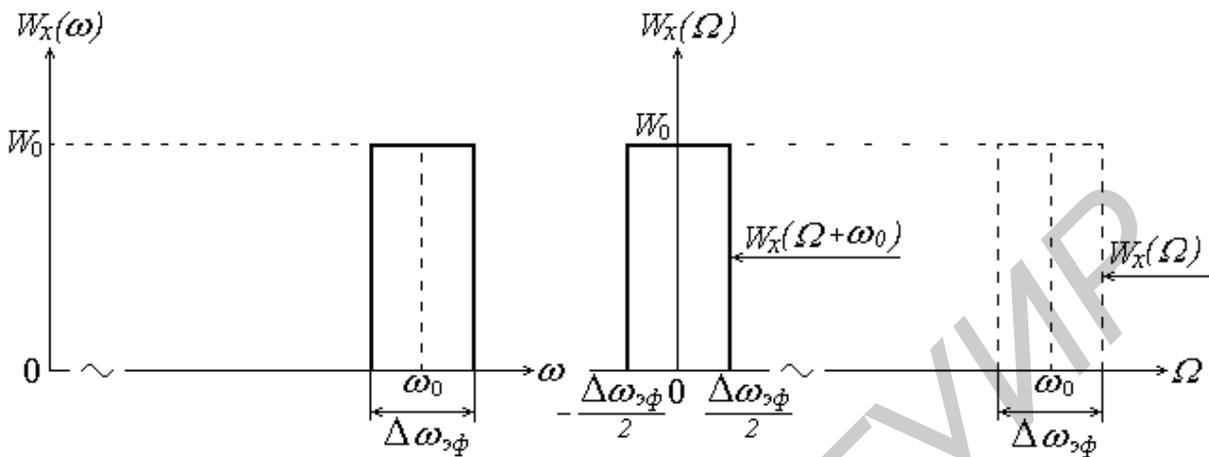


Рис. 3.14. Спектры $W_x(\omega)$ и $W_x(\Omega + \omega_0)$ узкополосного случайного сигнала

$$a(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega \tau d\Omega = \frac{W_0}{\pi} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \cos \Omega \tau d\Omega = \frac{2W_0}{\pi} \sin \Delta\omega\tau/2;$$

$$R_x(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0\tau = \frac{2W_0}{\pi} \sin \Delta\omega\tau/2 \cos \omega_0\tau.$$

Окончательно получаем

$$R_x(\tau) = \frac{W_0\Delta\omega}{\pi} \frac{\sin \Delta\omega\tau/2}{\Delta\omega\tau/2} \cos \omega_0\tau.$$

Формула и график корреляционной функции (рис. 3.15) позволяют представить характер шумового колебания с узкополосным спектром.

Известно, что корреляционная функция гармонического колебания с частотой ω_0 представляет собой также гармоническое колебание с такой же частотой. Так как корреляционная функция осциллирует с частотой ω_0 , то можно с уверенностью предположить, что мгновенное значение шумового колебания также изменяется в среднем с частотой ω_0 . Огибающая шумового колебания изменяется относительно медленно, как функция времени, спектр которой ограничен частотой $\Delta\omega$.

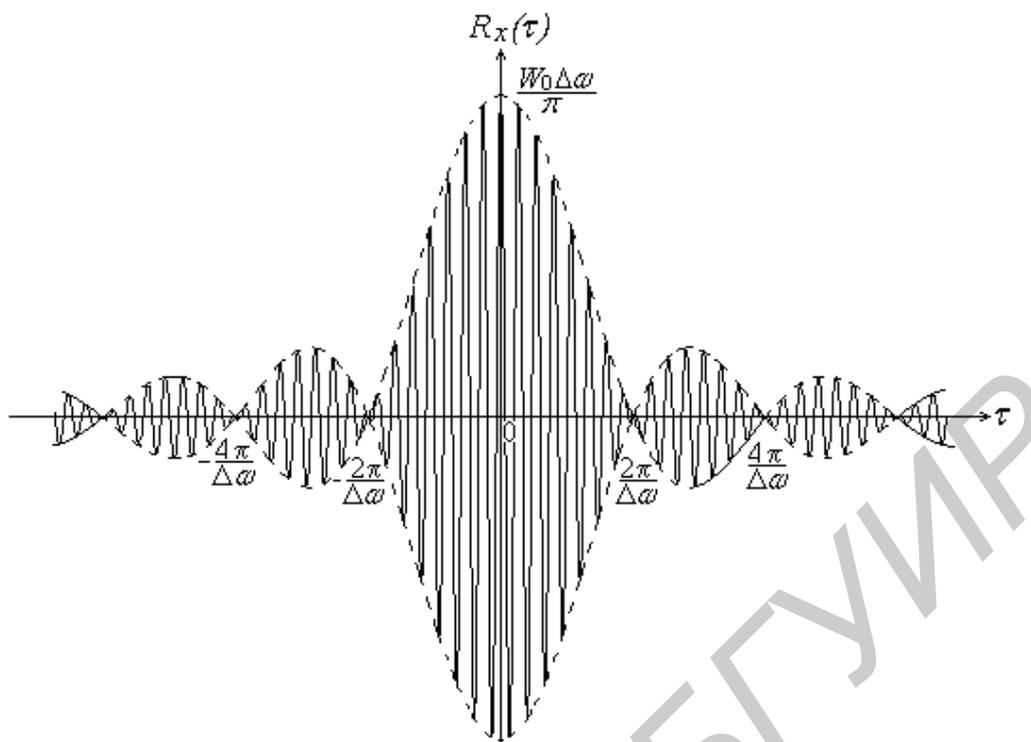


Рис. 3.15. График корреляционной функции узкополосного случайного сигнала

Следовательно, узкополосный случайный сигнал носит характер высокочастотного колебания с несущей частотой ω_0 и медленно меняющимися огибающей и фазой (рис. 3.16).

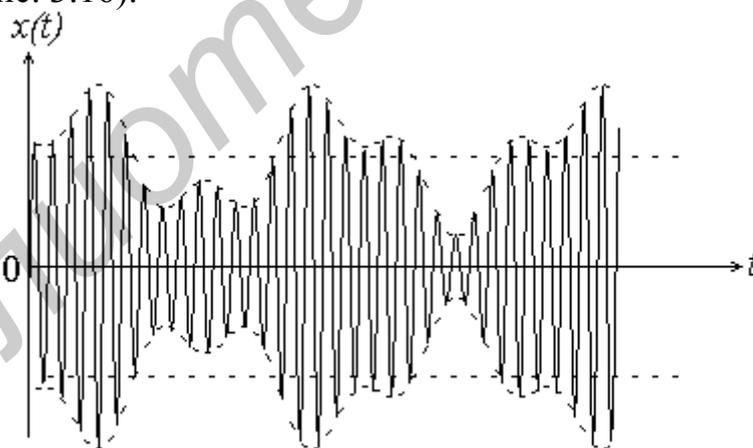


Рис. 3.16. Реализация узкополосного случайного сигнала

Реализацию такого сигнала можно записать в виде следующего выражения:

$$x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (3.22)$$

где $U(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с $\cos \omega_0 t$ случайные функции времени.

Закон распределения узкополосного случайного сигнала

Узкополосный случайный сигнал наблюдается на выходах узкополосных высокочастотных устройств (например, усилителей высокой и промежуточной частоты). При обработке этими устройствами широкополосных сигналов проявляется эффект нормализации. Этот эффект заключается в том, что при условии $\Delta\omega_{\phi} \gg \Delta\omega_{np}$, где $\Delta\omega_{\phi}$ – эффективная полоса частот спектра сигнала, $\Delta\omega_{np}$ – полоса пропускания устройства; выходной случайный сигнал имеет нормальный закон распределения, независимо от того, какой закон распределения имел входной сигнал. Поэтому на практике наиболее часто встречается гауссовский узкополосный сигнал, для которого получены важные результаты в рамках корреляционной теории. Закон распределения такого сигнала описывается выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Огибающая $U(t)$ и фаза $\varphi(t)$ узкополосного случайного сигнала характеризуются своими законами распределения.

Для определения закона распределения $p(U)$ огибающей и закона распределения $p(\varphi)$ фазы узкополосного случайного процесса можно воспользоваться результатами, полученными при изучении аналитического детерминированного сигнала. При этом рассматривают комплексный случайный процесс $Z(t)$, который иногда называют аналитическим процессом. Реализации этого процесса описываются выражением

$$z(t) = x(t) + jy(t),$$

где $y(t)$ – реализация стационарного случайного процесса $Y(t)$, которая получена с помощью прямого преобразования Гильберта реализации процесса $X(t)$.

Прямое и обратное преобразования Гильберта имеют вид

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau; \quad x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Учитывая свойства комплексных функций, $z(t)$ можно представить следующим образом:

$$z(t) = x(t) + jy(t) = U(t)e^{j\psi(t)},$$

где $U(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ – огибающая случайного процесса $Z(t)$;

$\psi(t) = \arctg \frac{y(t)}{x(t)}$ – полная фаза случайного процесса $Z(t)$.

В [2] доказано, что огибающая комплексного случайного процесса $Z(t)$ является огибающей исходного случайного процесса $X(t)$.

Учитывая, что $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$, можно записать

$$z(t) = U(t)e^{j\psi(t)} = U(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega_0 t} = \dot{U}(t)e^{j\omega_0 t}.$$

Выражение $\dot{U}(t) = U(t)e^{j\varphi(t)}$ – комплексная амплитуда случайного процесса $Z(t)$, которая содержит информацию об амплитуде и фазе случайного процесса $X(t)$. Следовательно, для определения законов распределения $p(U)$ и $p(\varphi)$ необходимо определить двумерный закон распределения $p(U, \varphi)$.

Преобразуем выражение (3.22) следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t) &= U(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U(t)\cos\omega_0 t \cos\varphi(t) + U(t)\sin\omega_0 t \sin\varphi(t) = \\ &= U_c(t)\cos\omega_0 t + U_s(t)\sin\omega_0 t, \end{aligned}$$

где $U_c(t) = U(t)\cos\varphi(t)$ – амплитуда косинусной составляющей колебания $x(t)$;

$U_s(t) = U(t)\sin\varphi(t)$ – амплитуда синусной составляющей колебания $x(t)$.

Причем

$$U(t) = \sqrt{U_c^2(t) + U_s^2(t)}, \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{U_s(t)}{U_c(t)}.$$

Определим законы распределения $p(U_c)$, $p(U_s)$ и двумерный закон распределения $p(U_c, U_s)$. С этой целью выполним анализ статистических характеристик случайных процессов $x(t)$, $U_c(t)$ и $U_s(t)$.

1. Сравнение формул $x(t) = U(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$, $U_c(t) = U(t)\cos\varphi(t)$ и $U_s(t) = U(t)\sin\varphi(t)$ позволяет сделать вывод, что спектры реализаций процессов $U_c(t)$ и $U_s(t)$ сдвинуты относительно спектра реализации процесса $x(t)$ на величину ω_0 в сторону частоты $\omega = 0$ (рис. 3.17).

Форма и структура спектров сохраняется. Причем $W_c(\omega) = 2W_x(\omega + \omega_0)$. Сохраняется также и закон распределения. Таким образом, законы распределения $p(U_c)$ и $p(U_s)$ остаются нормальными.

2. Дисперсии случайного процесса определяется площадью под кривой спектральной плотности мощности. Следовательно, (см. рис. 3.17):

$$D_c = D_s = D_x.$$

Таким образом, законы распределения случайных процессов $U_c(t)$ и $U_s(t)$ имеют вид

$$p(U_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{U_c^2}{2\sigma_x^2}} \quad \text{и} \quad p(U_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{U_s^2}{2\sigma_x^2}}.$$

3. Так как $U(t) = \sqrt{U_c^2(t) + U_s^2(t)}$, то справедливо следующее равенство:

$$U^2(t) = U_c^2(t) + U_s^2(t).$$

Следовательно, $M[U^2(t)] = M[U_c^2(t)] + M[U_s^2(t)]$, т. е.

$$D_u = D_c + D_s. \quad (3.23)$$

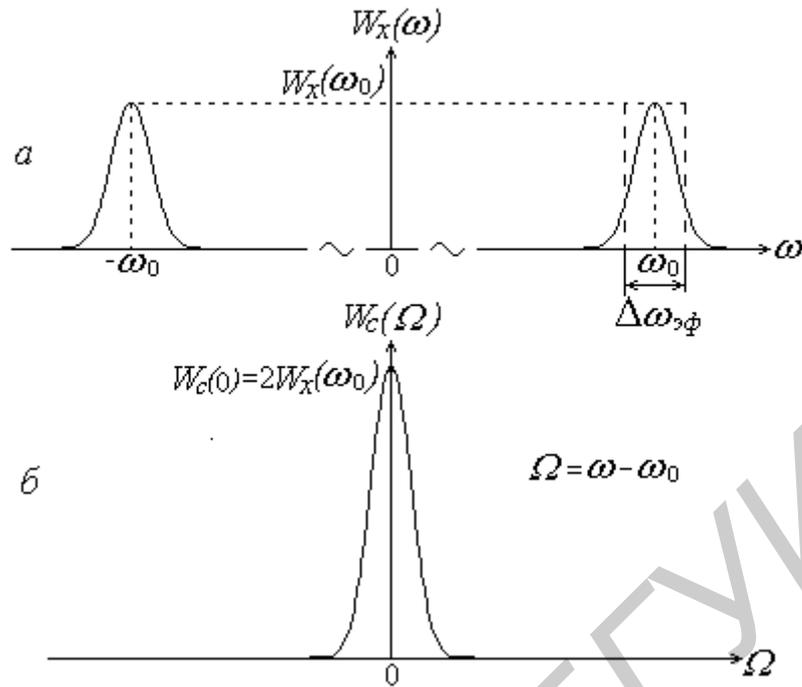


Рис. 3.17. Спектральные плотности мощности:
a – узкополосного сигнала $x(t)$; *б* – косинусной составляющей $U_c(t)$

Из теории вероятности известно, что дисперсия суммы двух случайных величин равна

$$D_{x+y} = D_x + D_y + 2R_{xy}, \quad (3.24)$$

где R_{xy} – корреляционный момент второго порядка, определяющий статистическую связь между случайными величинами X и Y .

Сравнивая выражения (3.23) и (3.24), можно сделать вывод, что случайные процессы $U_c(t)$ и $U_s(t)$ являются статистически независимы. Для таких процессов справедливо следующее:

$$p(U_c, U_s) = p(U_c) \cdot p(U_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U_c^2 + U_s^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.25)$$

Для получения законов распределения огибающей $p(U)$ и фазы $p(\varphi)$ определим вначале двумерный закон распределения $p(U, \varphi)$. Для этого воспользуемся графиками рис. 3.18.

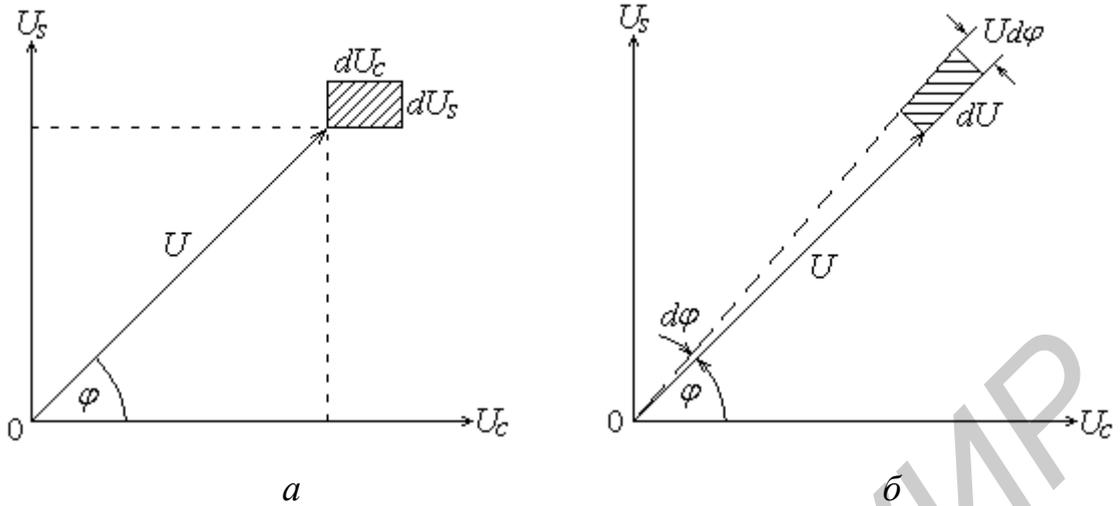


Рис. 3.18. Представление процессов $U(t)$, $U_s(t)$ и $U_c(t)$ в различных системах координат:

a – декартова система координат; b – полярная система координат

Вероятность того, что конец вектора \bar{U} находится в пределах элементарной площади $S_1 = dU_c \cdot dU_s$ (элементарного участка в декартовой системе координат), равна произведению вероятностей попадания конца вектора \bar{U} в интервалы dU_c и dU_s . Таким образом,

$$P_1 = p(U_c, U_s) dU_c dU_s = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \cdot dU_c dU_s.$$

В свою очередь вероятность того, что конец вектора \bar{U} находится в пределах элементарной площади $S_2 = dU \cdot U d\varphi$ (элементарного участка в полярной системе координат), равна произведению вероятностей попадания конца вектора \bar{U} в интервалы dU и $d\varphi$. Таким образом,

$$P_2 = p(U, \varphi) \cdot dU d\varphi.$$

Полагая, что $S_1 = S_2$, получаем $P_1 = P_2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \cdot dU_c dU_s = p(U, \varphi) \cdot dU d\varphi.$$

Тогда

$$p(U, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{dU_c dU_s}{dU d\varphi} = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{dU \cdot U d\varphi}{dU d\varphi};$$

$$p(U, \varphi) = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.26)$$

Получена формула, определяющая двумерный закон распределении огибающей и фазы узкополосного случайного процесса. Пользуясь этой формулой, можно определить закон распределения огибающей и закон распределения фазы.

Закон распределения огибающей $p(U)$

Проинтегрируем $p(U, \varphi)$ по переменной φ :

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} d\varphi = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.27)$$

Получена формула закона распределения, который называется распределением Рэлея. График данного закона представлен на рис. 3.19, а.

Максимальное значение функции $p(U)$, т. е. наиболее вероятное значение огибающей, получается при $U = \sigma_x$. Для доказательства этого берем производную от $p(U)$, приравниваем ее к нулю и решаем полученное уравнение:

$$\frac{dp(U)}{dU} = \frac{1}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} - \frac{U}{\sigma_x^2} \frac{2U}{2\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} = 0; \quad \frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{U^2}{\sigma_x^4} = 0; \quad U = \sigma_x.$$

Определим функцию распределения огибающей

$$F(U) = \int_0^U \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = \int_0^U d\left(e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}\right) dU = -e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \Big|_0^U = 1 - e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}.$$

График функции распределения представлен на рис. 3.19, б.

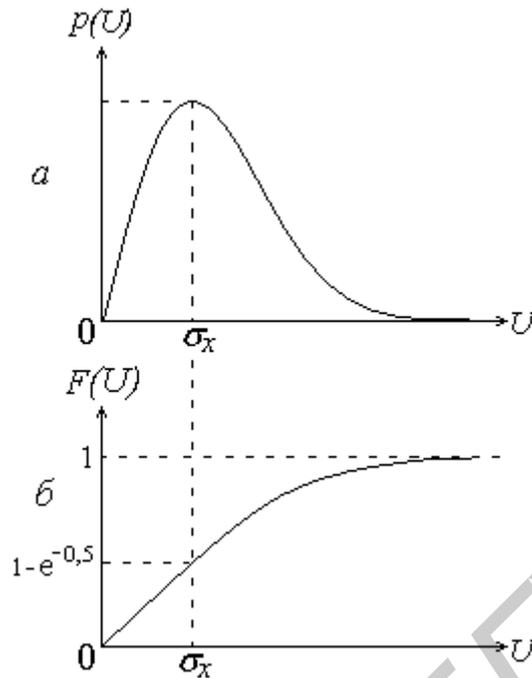


Рис. 3.19. Графики законов распределения огибающей:
a – плотность вероятности; *b* – функция распределения

Рассмотрим основные свойства случайной огибающей узкополосного сигнала.

Математическое ожидание огибающей

$$m_U = \int_0^{\infty} U p(U) dU = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} U^2 e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU.$$

Замена переменных: $U/\sigma_x = z$; $U = \sigma_x z$; $dU = \sigma_x dz$.

$$m_U = \sigma_x \int_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma_x \sqrt{2\pi} = 1,253\sigma_x.$$

Дисперсия огибающей равна

$$D_U = m[U^2] - m_x^2 = \int_0^{\infty} U^2 p(U) dU - (1,253\sigma_x)^2 = 0,429\sigma_x^2.$$

Закон распределения фазы $p(\varphi)$

Проинтегрируем $p(U, \varphi)$ по переменной U .

$$p(\varphi) = \int_0^{\infty} \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_0^{\infty} U e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU.$$

Замена переменных: $U^2 = z$; $2UdU = dz$; $dU = dz/2U$.

$$p(\varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma_x^2} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2\sigma_x^2}} dz = \frac{-2\sigma_x^2}{4\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{z}{2\sigma_x^2}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.28)$$

Определим функцию распределения фазы

$$F(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \varphi \Big|_{-\pi}^{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \varphi + \frac{1}{2}.$$

Графики законов распределения $p(\varphi)$ и $F(\varphi)$ представлены на рис. 3.20.

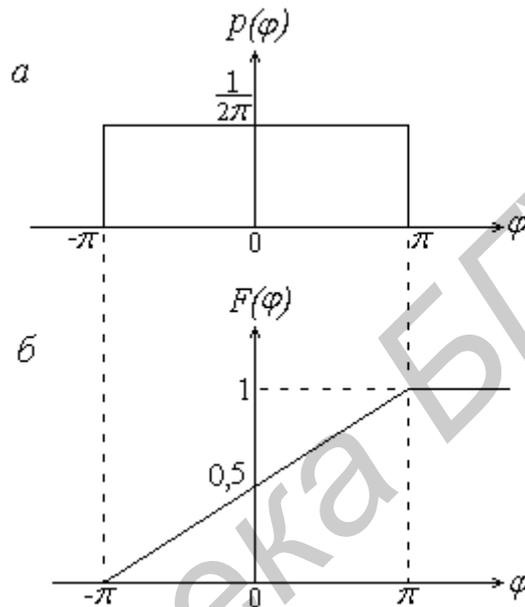


Рис. 3.20. Графики законов распределения фазы:
а – плотность вероятности; б – функция распределения

Рассмотрим основные свойства случайной фазы узкополосного сигнала.

Математическое ожидание m_φ равно

$$m_\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Дисперсия D_φ равна

$$D_\varphi = m[\varphi^2] - m_\varphi^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3} \pi^2.$$

Сравнивая формулы (3.26), (3.27) и (3.28), можно записать

$$p(U, \varphi) = p(U) \cdot p(\varphi).$$

Это значит, что случайные процессы $U(t)$ и $\varphi(t)$ статистически независимы.

4. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Радиотехнический канал связи представляет собой совокупность технических средств, обеспечивающих передачу информации от источника и прием информации потребителем. Функционирование такого канала основано на свободном распространении электромагнитных колебаний, которые излучаются в пространство передающей антенной. Для этого передающее устройство формирует высокочастотное (несущее) колебание, один или несколько параметров которого изменяются по закону передаваемого сообщения. Распространяясь в определенном направлении, радиоволны достигают антенны приемного устройства, в котором из принятого высокочастотного колебания выделяется передаваемое сообщение.

Передача сообщений по радиоканалу сопровождается разнообразными преобразованиями сигналов. Эти преобразования реализуются с помощью радиотехнических устройств (цепей), каждое из которых в зависимости от его структурной организации выполняет определенную операцию над сигналами (фильтрацию, усиление, генерирование, модуляцию, детектирование и др.). Изучение закономерностей таких преобразований сводится в конечном итоге к анализу прохождения детерминированных и случайных сигналов через линейные и нелинейные устройства. Результаты такого анализа используются для синтеза методов обработки сигналов с целью решения проблем оптимизации и адаптации, достижения требуемого уровня помехозащищенности и скрытности связи, более высоких характеристик надежности и качества передачи информации.

4.1. Преобразования случайных сигналов линейными стационарными цепями

4.1.1. Постановка задачи

Линейная стационарная цепь – это цепь с постоянными во времени параметрами. Выходной сигнал такой цепи не зависит от времени поступления входного сигнала, т. е. свойства стационарной цепи инвариантны относительно начала отсчета времени.

Задачу преобразования случайных сигналов линейными стационарными цепями будем решать в следующей постановке.

На вход линейного устройства (рис. 4.1) с частотным коэффициентом передачи $K(j\omega)$ (импульсной $h(t)$ или переходной $g(t)$ характеристикой) поступает случайный сигнал, моделью которого может служить стационарный случайный процесс $X(t)$. Известны статистические характеристики этого случайного процесса: закон распределения $p(x)$, спектральная плотность мощности $W_x(\omega)$, корреляционная функция $R_x(\tau)$, дисперсия D_x и математическое ожи-

дание m_x . Необходимо определить аналогичные статистические характеристики $p(y)$, $W_y(\omega)$, $R_y(\tau)$, D_y , m_y выходного случайного процесса $Y(t)$.

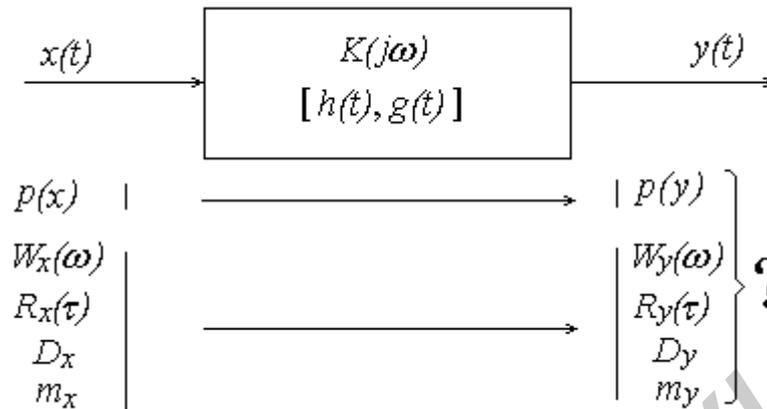


Рис. 4.1. Постановка задачи анализа прохождения случайного сигнала через линейные цепи

В зависимости от анализируемых характеристик общая задача линейного преобразования случайных сигналов может быть представлена в виде двух задач.

1. Определение спектральной плотности мощности, корреляционной функции и числовых характеристик выходного сигнала.
2. Определение закона распределения выходного сигнала.

Первая задача для установившегося режима работы линейной цепи решается спектральным или временным методом.

Если воспользоваться характеристиками входного случайного процесса и цепи в частотной области, т. е. спектральной плотностью мощности $W_x(\omega)$ случайного процесса и частотным коэффициентом передачи цепи $K(j\omega)$, то спектральную плотность мощности, корреляционную функцию и числовые характеристики случайного процесса на выходе цепи можно определить спектральным методом.

Если воспользоваться характеристиками входного случайного процесса и цепи во временной области, т. е. корреляционной функцией $R_x(\tau)$ случайного процесса и импульсной характеристикой цепи $h(t)$, то решение данной задачи осуществляется временным методом.

Что касается второй задачи, то точных методов ее решения в общем случае не существует. При решении данной задачи рассматривают некоторые частные случаи, содержание которых учитывает особенности статистических характеристик входного сигнала и характеристик цепи, или пользуются приближенными методами.

4.1.2. Определение характеристик выходного случайного сигнала спектральным методом

Определение спектральной плотности мощности $W_y(\omega)$

Ранее было показано, что спектральная плотность мощности случайного процесса $X(t)$ определяется выражением

$$W_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_x(j\omega)|^2}{T}, \quad (4.1)$$

где T – интервал времени, на котором рассматривается реализация $x(t)$;

$S_x(j\omega)$ – спектральная плотность реализации $x(t)$.

Если подать реализацию $x(t)$ на линейное устройство с частотной характеристикой $K(j\omega)$, то на выходе получится реализация $y(t)$ выходного случайного процесса $Y(t)$. Спектральная плотность реализации $y(t)$ (это не случайная функция времени) равна

$$S_y(j\omega) = S_x(j\omega) \cdot K(j\omega).$$

Тогда

$$W_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_y(j\omega)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_x(j\omega) \cdot K(j\omega)|^2}{T}.$$

Передаточная функция $K(j\omega)$ не зависит от T , поэтому множитель $|K(j\omega)|^2$ можно вынести за знак предела, т. е.

$$W_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_x(j\omega)|^2}{T} \cdot |K(j\omega)|^2.$$

Учитывая формулу (4.1), получаем

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2. \quad (4.2)$$

Таким образом, спектральная плотность мощности выходного сигнала равна произведению спектральной плотности мощности входного сигнала на квадрат амплитудно-частотной характеристики линейной цепи. Данное выражение лежит в основе спектрального метода анализа линейных цепей с известной амплитудно-частотной характеристикой при воздействии на них случайных сигналов. Оно позволяет непосредственно определять спектральную плотность мощности выходного случайного сигнала по заданному спектру входного сигнала. Фазовая характеристика линейной цепи не оказывает влияния на спектральную плотность мощности выходного сигнала.

Определение корреляционной функции $R_y(\tau)$

Известно, что в соответствии с теоремой Винера – Хинчина энергетический спектр случайного сигнала связан с его ковариационной функцией преобразованиями Фурье.

Следовательно, ковариационную $B_y(\tau)$ и корреляционную $R_y(\tau)$ функции случайного сигнала на выходе линейной цепи можно определить следующим образом:

$$B_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega;$$
$$R_y(\tau) = B_y(\tau) - m_y^2. \quad (4.3)$$

Дисперсия D_y и математическое ожидание m_y выходного случайного сигнала равны

$$D_y = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega - m_y^2;$$
$$m_y = m_x \cdot K(0), \quad (4.4)$$

где $K(0)$ – коэффициент передачи линейной цепи по постоянному току.

Формулы (4.2)–(4.4) представляют собой по сути полное решение поставленной задачи спектральным методом (в частотной области).

4.1.3. Определение характеристик выходного случайного сигнала временным методом

Определение корреляционной функции $R_y(\tau)$

Известна корреляционная функция $R_x(\tau)$ входного случайного процесса с $m_x = 0$ и импульсная характеристика $h(t)$ линейной цепи. Необходимо определить $R_y(\tau)$.

Частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика цепи связаны между собой преобразованиями Фурье, т. е.

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{и} \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Как видно из приведенных выражений, частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ цепи является по существу спектральной плотностью ее импульсной характеристики $h(t)$. Тогда, учитывая связь между спектром и корреляционной функцией детерминированного сигнала, можно записать

$$R_h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad \text{и} \quad |K(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.5)$$

где $R_h(\tau)$ – корреляционная функция импульсной характеристики цепи.

Воспользуемся следующим свойством преобразования Фурье:

$$s_1(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)$$

$$s_2(t) \leftrightarrow S_2(j\omega)$$

$$s_1(t) \otimes s_2(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)S_2(j\omega).$$

Это свойство определяет, что произведению двух спектров $S_1(j\omega)$ и $S_2(j\omega)$ соответствует сигнал, образованный сверткой сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Применительно к формуле (4.2), данное свойство можно представить следующим образом:

$$R_x(\tau) \leftrightarrow W_x(\omega)$$

$$R_h(\tau) \leftrightarrow |K(j\omega)|^2$$

$$R_x(\tau) \otimes R_h(\tau) \leftrightarrow W_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2.$$

Таким образом, произведению спектральной плотности мощности входного сигнала на квадрат амплитудно-частотной характеристики линейной цепи соответствует свертка корреляционных функций входного сигнала и импульсной характеристики цепи.

В результате получаем следующее выражение:

$$R_x(\tau) \otimes R_h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Сравнивая данное выражение с (4.3), можно записать

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) R_h(\tau - t) dt. \quad (4.6)$$

Определение спектральной плотности мощности $W_y(\omega)$

В соответствии с теоремой Винера – Хинчина

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau.$$

4.1.4. Определение закона распределения выходного случайного сигнала

Задача определения закона распределения случайного сигнала на выходе линейной инерционной системы при воздействии на ее вход негауссовского сигнала является чрезвычайно трудной. В то же время можно сформулировать некоторые частные случаи решения данной задачи.

1. Если линейное устройство относится к классу безынерционных, то выходной сигнал такого устройства характеризуется законом распределения, свойственным входному сигналу. При этом могут быть изменены некоторые числовые характеристики.

2. Если случайный сигнал на входе линейного инерционного устройства имеет нормальный закон распределения, то случайный сигнал на выходе устройства также имеет нормальный закон распределения (с измененными математическим ожиданием и дисперсией).

3. В линейных инерционных устройствах при соблюдении некоторых условий проявляет себя эффект нормализации.

Суть эффекта нормализации: закон распределения выходного случайного сигнала является нормальным при любом законе распределения входного сигнала.

Условия проявления эффекта нормализации:

а) в частотной области – эффективная ширина энергетического спектра входного сигнала $\Delta\omega_{\text{эф}}$ значительно больше полосы пропускания устройства $\Delta\omega_{\text{пр}}$, т. е. $\Delta\omega_{\text{эф}} \gg \Delta\omega_{\text{пр}}$;

б) во временной области – интервал корреляции входного сигнала τ_k значительно меньше постоянной времени устройства τ_u , т. е. $\tau_k \ll \tau_u$.

Приближенные методы определения закона распределения выходного случайного сигнала приведены в [8].

Один из таких методов базируется на использовании характеристической функции

$$\Theta_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p(x) dx,$$

где e^{jvx} – специальный вид функционального преобразования случайной величины;

v – произвольный вещественный параметр.

Если функция $\Theta_x(v)$ имеет в точке $v=0$ производные до порядка k включительно, то функцию можно представить в виде ряда Маклорена:

$$\Theta_y(x) = \Theta_y(0) + \Theta'_y(0) \cdot v + \frac{\Theta''_y(0)}{2!} \cdot v^2 + \dots + \frac{\Theta^k_y(0)}{k!} \cdot v^k.$$

Учитывая, что

$$\Theta^k_y(0) = \left(\frac{d^k \Theta_x(v)}{dv^k} \right)_{v=0} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx = j^k \cdot \alpha_k,$$

можно записать

$$\Theta_y(v) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} (jv)^k.$$

Здесь α_k – начальные моменты k -го порядка.

Таким образом, при наличии достаточного числа начальных моментов выходного процесса можно с некоторым приближением определить характеристическую функцию, а затем по формуле (3.18) определить закон распределения. Начальные моменты выходного процесса связаны с начальными моментами входного процесса и импульсной характеристикой цепи.

4.2. Воздействие белого шума на линейные цепи

4.2.1. Белый шум

Во многих практических случаях спектральная плотность мощности случайного сигнала (шума) постоянна в пределах полосы пропускания линейного устройства. Очевидно, что для анализа такой ситуации в качестве модели сигнала можно использовать стационарный случайный процесс, обладающий равномерной спектральной плотностью мощности на всех частотах, т. е. $W_x(\omega) = W_0$ при $-\infty < \omega < \infty$. По аналогии с белым светом, который характеризуется одинаковой спектральной интенсивностью во всем диапазоне частот, соответствующем видимой части спектра, эту модель сигнала принято называть белым шумом.

По теореме Винера – Хинчина определим корреляционную функцию белого шума:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0 e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau).$$

Корреляционная функция представляет собой взвешенную дельта-функцию (рис. 4.2). Это значит, что любые два значения белого шума, соответствующие сколь угодно малому интервалу τ между моментами наблюдения, некоррелированы между собой. Дисперсия шума $D_x = R_x(0) = \infty$, т. е. белый шум имеет бесконечную мощность. Следовательно, белый шум – модель реально не существующего шума. Использование такой модели правомерно в случае $\Delta\omega_{эф} \gg \Delta\omega_{пр}$, где $\Delta\omega_{эф}$ – эффективная ширина спектра шума, $\Delta\omega_{пр}$ – полоса пропускания линейной цепи.

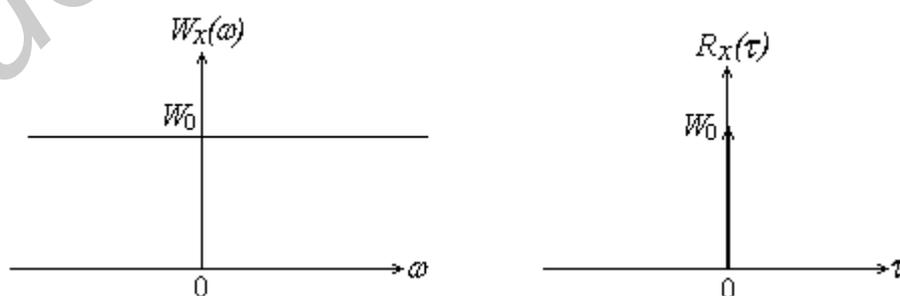


Рис. 4.2. Спектральная плотность и корреляционная функция белого шума

4.2.2. Спектральная плотность и корреляционная функция шума на выходе линейной цепи

Спектральная плотность шума на выходе устройства равна

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 = W_0 |K(j\omega)|^2,$$

где W_0 – спектральная плотность мощности белого шума.

Спектральная плотность мощности сигнала на выходе устройства совпадает по форме с квадратом АЧХ устройства. Следовательно, если линейное устройство является узкополосным, то при воздействии на него белого шума выходной процесс также будет узкополосным.

Корреляционную функцию выходного сигнала, полагая $m_y = 0$, определяем по формуле (4.6).

Учитывая, что корреляционная функция белого шума равна $R_x(\tau) = W_0 \delta(\tau)$, можно записать

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) R_h(\tau - t) dt = W_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) R_h(\tau - t) dt = W_0 R_h(\tau).$$

Как видно из данного выражения, корреляционная функция случайного сигнала на выходе устройства совпадает по форме с корреляционной функцией импульсной характеристики устройства.

Таким образом, спектральная плотность мощности и корреляционная функция сигнала на выходе устройства при белом шуме на входе полностью определяется параметрами фильтра.

4.2.3. Шумовая полоса фильтра

Линейный фильтр (линейная частотно-избирательная цепь), находящийся под воздействием широкополосного случайного сигнала, характеризуют эквивалентной шумовой полосой (шумовой полосой). Она определяется как полоса пропускания идеального полосового фильтра с коэффициентом передачи $|K(j\omega_0)|^2$, равным максимуму квадрата модуля коэффициента передачи реального фильтра, т. е.

$$\Delta\omega_{ш} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}{|K(j\omega_0)|^2}.$$

При этом полагается, что если на идеальный и реальный фильтры подать белый шум с $W_x(\omega) = W_0$, то дисперсии шумовых сигналов на выходах этих фильтров должны быть равны.

Определим выражение для шумовой полосы фильтра.

Дисперсия шума на выходе реального фильтра равна

$$D_{yp} = R_{yp}(0) = W_0 R_h(0).$$

Дисперсия шума на выходе идеального фильтра равна

$$D_{yu} = R_{yu}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega_u/2}^{\omega_0 + \Delta\omega_u/2} W_x(\omega) \cdot |K(j\omega_0)|^2 d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega_u/2}^{\omega_0 + \Delta\omega_u/2} |K(j\omega_0)|^2 d\omega.$$

$$D_{yu} = \frac{W_0}{\pi} \cdot |K(j\omega_0)|^2 \cdot \Delta\omega_u.$$

Приравнявая D_{yp} и D_{yu} , получаем

$$W_0 R_h(0) = \frac{W_0}{\pi} \cdot |K(j\omega_0)|^2 \cdot \Delta\omega_u.$$

Окончательно

$$\Delta\omega_u = \pi \frac{R_h(0)}{|K(j\omega_0)|^2}. \quad (4.7)$$

4.2.4. Воздействие белого шума на RC-фильтры

RC-фильтр низких частот (интегрирующая цепь)

На вход низкочастотного RC-фильтра, схема которого представлена на рис. 4.3, поступает белый шум с характеристиками $W_x(\omega) = W_0$, $R_x(\tau) = W_0\delta(\tau)$ и $m_x = 0$. Определим спектральную плотность мощности, корреляционную функцию случайного сигнала на выходе фильтра и его шумовую полосу.

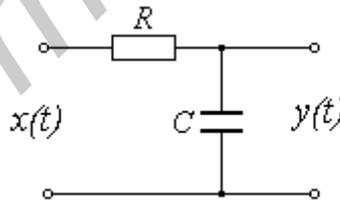


Рис. 4.3. Схема интегрирующей цепи

1. Частотные характеристики RC-фильтра:

– частотный коэффициент передачи

$$K_n(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_y},$$

где $\tau_y = RC$ – постоянная времени фильтра;

– амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$|K_n(j\omega)| = K_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_y^2}};$$

– фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi_n(\omega) = -\arctg \omega \tau_u.$$

2. Спектральная плотность мощности выходного случайного сигнала

$$W_{yn}(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K_n(j\omega)|^2 = W_0 \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_u^2}.$$

Форма графика спектра выходного случайного сигнала совпадает с формой графика АЧХ фильтра, возведенной в квадрат (рис. 4.4).

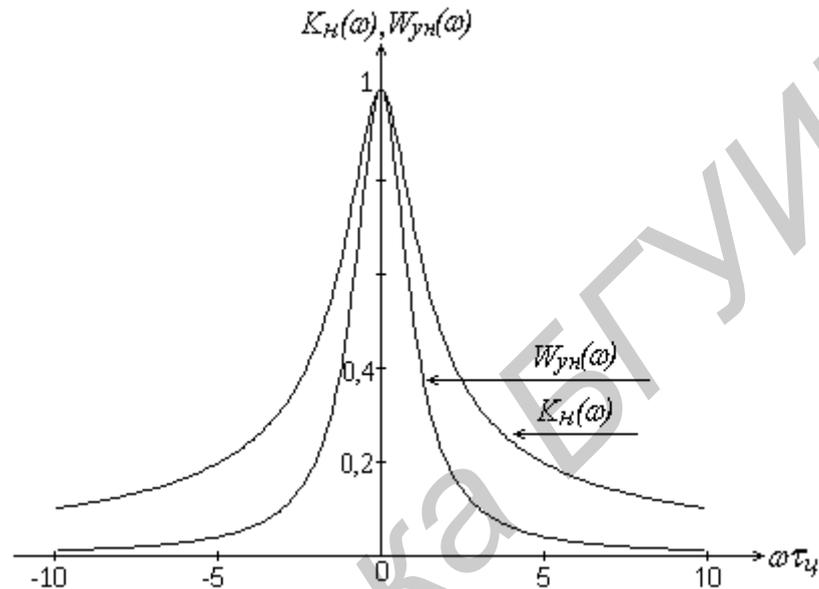


Рис. 4.4. АЧХ RC-фильтра и спектральная плотность мощности выходного сигнала при $W_0 = 1\text{В}^2/\text{Гц}$

3. Корреляционная функция выходного случайного сигнала

$$R_{yn}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{yn}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_u^2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_u^2} \cos \omega\tau d\omega.$$

Из справочника по математике [9]

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + x^2} \cos(bx) dx = \frac{\pi}{2a} e^{-|b|/a} \quad \text{при } a > 0.$$

Тогда

$$R_{yn}(\tau) = \frac{W_0}{\pi \tau_u^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1/\tau_u^2 + \omega^2} \cos \omega\tau d\omega = \frac{W_0}{2\tau_u} e^{-|\tau|/\tau_u}.$$

Дисперсия и нормированная корреляционная функция выходного сигнала равны

$$D_{yn} = R_{yn}(0) = \frac{W_0}{2\tau_u}; \quad r_{yn}(\tau) = \frac{R_{yn}(\tau)}{D_{yn}} = e^{-|\tau|/\tau_u}.$$

График нормированной корреляционной функции выходного сигнала представлен на рис. 4.5.

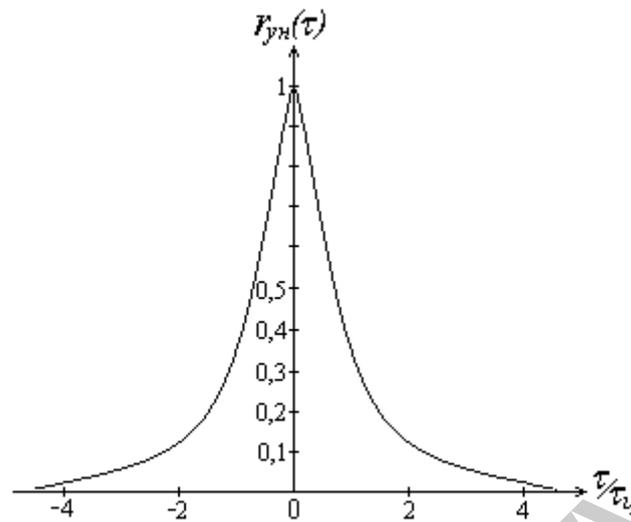


Рис. 4.5. Нормированная корреляционная функция выходного сигнала

Определим шумовую полосу RC -фильтра по формуле (4.7). Для этого необходимо определить корреляционную функцию импульсной характеристики $R_h(\tau)$ фильтра. Известно $R_{yn}(\tau) = W_0 R_h(\tau)$. Следовательно,

$$R_h(\tau) = \frac{R_{yn}(\tau)}{W_0}; \quad R_h(\tau) = \frac{1}{2\tau_u} e^{-|\tau|/\tau_u}.$$

Тогда

$$\Delta\omega_{ш} = \pi \frac{R_h(0)}{|K_n(j\omega_0)|^2} = \pi R_h(0) = \frac{\pi}{2\tau_u}, \quad \text{или} \quad \Delta f_{ш} = \frac{1}{4\tau_u}.$$

Известно, что полоса пропускания рассматриваемого фильтра на уровне частоты среза равна $\Delta\omega_{пр} = 1/\tau_u$. Следовательно, $\Delta\omega_{ш} = \frac{\pi}{2} \cdot \Delta\omega_{пр}$.

Определим связь шумовой полосы с интервалом корреляции:

$$\tau_k = \frac{\int_0^{\infty} R_{yn}(\tau) d\tau}{R_{yn}(0)} = \frac{W_0/2\tau_u \int_0^{\infty} e^{-|\tau|/\tau_u} d\tau}{W_0/2\tau_u} = \int_0^{\infty} e^{-|\tau|/\tau_u} d\tau = \tau_u.$$

$$\Delta\omega_{ш} \cdot \tau_k = \frac{\pi \cdot \tau_u}{2\tau_u} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \quad \Delta f_{ш} \cdot \tau_k = \frac{1}{4}.$$

Полученный результат позволяет сделать следующий вывод: интервал корреляции шума на выходе RC -фильтра и эффективная шумовая полоса частот фильтра находятся в обратно пропорциональной зависимости.

Интегрирующее устройство относится к классу узкополосных инерционных устройств. Поэтому закон распределения сигнала на выходе интегрирующего

щего устройства стремится к нормальному, независимо от вида закона распределения сигнала на входе.

Особого внимания заслуживает случай, когда параметры фильтра обеспечивают соблюдение условия $\omega\tau_u \gg 1$ для всех частот спектра входного сигнала. При этом рассматриваемый фильтр реализует процесс, близкий к идеальному интегрированию, так как его частотный коэффициент передачи $K_H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_u}$. Идеальное интегрирование будем рассматривать для входного случайного процесса, который удовлетворяет условию интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) \cdot \frac{1}{\omega^2 \tau_u^2} d\omega < \infty. \quad (4.8)$$

Это условие соблюдается, если при $\omega \rightarrow 0$ спектральная плотность $W_x(\omega)$ убывает быстрее, чем $\omega^2 \tau_u^2$. Спектр белого шума не обеспечивает соблюдение данного условия.

Итак, в случае идеального интегрирования случайного сигнала с $W_x(\omega)$:

– выходной случайный сигнал равен $y(t) = \int_0^t x(t) dt$;

– спектральная плотность мощности выходного случайного сигнала равна

$$W_y(\omega) = \frac{W_x(\omega)}{\omega^2 \tau_u^2};$$

– корреляционная функция выходного случайного сигнала равна

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_x(\omega)}{\omega^2 \tau_u^2} e^{j\omega\tau} d\omega;$$

– дисперсия равна $D_y = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_x(\omega)}{\omega^2 \tau_u^2} d\omega$.

Дисперсия выходного сигнала будет конечна, если соблюдается условие интегрируемости (4.8).

Определим математическое ожидание выходного случайного сигнала, если на вход поступает стационарный случайный сигнал.

$$M[y(t)] = M \left[\int_0^t x(t) dt \right] = \int_0^t M[x(t)] dt = m_x t.$$

Стационарный случайный сигнал после интегрирования становится нестационарным по математическому ожиданию. Можно показать, что выходной сигнал будет нестационарным по дисперсии и по корреляционной функции.

RC-фильтр высоких частот (дифференцирующая цепь)

На вход высокочастотного RC-фильтра, схема которого представлена на рис. 4.6, поступает белый шум с характеристиками $W_x(\omega) = W_0$, $R_x(\tau) = W_0\delta(\tau)$ и $m_x = 0$. Определим спектральную плотность мощности и корреляционную функцию случайного сигнала на выходе фильтра.

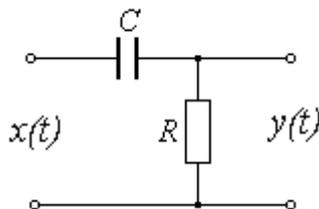


Рис. 4.6. Схема дифференцирующей цепи

1. Частотные характеристики RC-фильтра:

– частотный коэффициент передачи

$$K_g(j\omega) = \frac{j\omega\tau_y}{1 + j\omega\tau_y},$$

где $\tau_y = RC$ – постоянная времени фильтра;

– амплитудно-частотная характеристика

$$|K_g(j\omega)| = K_g(\omega) = \frac{\omega\tau_y}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_y^2}};$$

– фазочастотная характеристика

$$\varphi_g(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg\omega\tau_y.$$

2. Спектральная плотность мощности выходного случайного сигнала

$$W_{y_g}(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K_g(j\omega)|^2 = W_0 \cdot \frac{\omega^2\tau_y^2}{1 + \omega^2\tau_y^2}.$$

Форма графика $W_{y_g}(\omega)$ совпадает с формой квадрата АЧХ фильтра (рис. 4.7).

3. Корреляционная функция выходного случайного сигнала

$$R_{y_g}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{y_g}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2\tau_y^2}{1 + \omega^2\tau_y^2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2\tau_y^2}{1 + \omega^2\tau_y^2} \cos\omega\tau d\omega.$$

Для получения окончательного выражения воспользуемся информацией, полученной при рассмотрении фильтра низких частот.

Частотный коэффициент передачи низкочастотного и высокочастотного фильтров связаны между собой следующим образом:

$$K_{\epsilon}(j\omega) = 1 - K_{\eta}(j\omega) = 1 - \frac{1}{1 + j\omega\tau_u} = \frac{j\omega\tau_u}{1 + j\omega\tau_u}.$$

В свою очередь,

$$|K_{\epsilon}(j\omega)|^2 = 1 - |K_{\eta}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \omega^2\tau_u^2} = \frac{\omega^2\tau_u^2}{1 + \omega^2\tau_u^2}.$$

$$W_{y\epsilon}(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K_{\epsilon}(j\omega)|^2 = W_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \omega^2\tau_u^2} \right).$$

$$R_{y\epsilon}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{y\epsilon}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + \omega^2\tau_u^2} \right) e^{j\omega\tau} d\omega = W_0\delta(\tau) - R_{y\eta}(\tau).$$

Графики АЧХ RC-фильтра, спектральной плотности мощности и корреляционной функции выходного случайного сигнала представлены на рис. 4.7 и рис. 4.8.

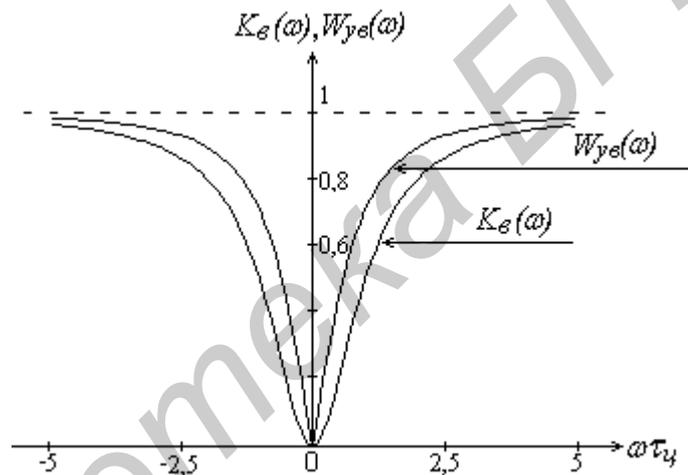


Рис. 4.7. АЧХ RC-фильтра и спектральная плотность мощности выходного сигнала при $W_0 = 1 \text{ В}^2/\text{Гц}$

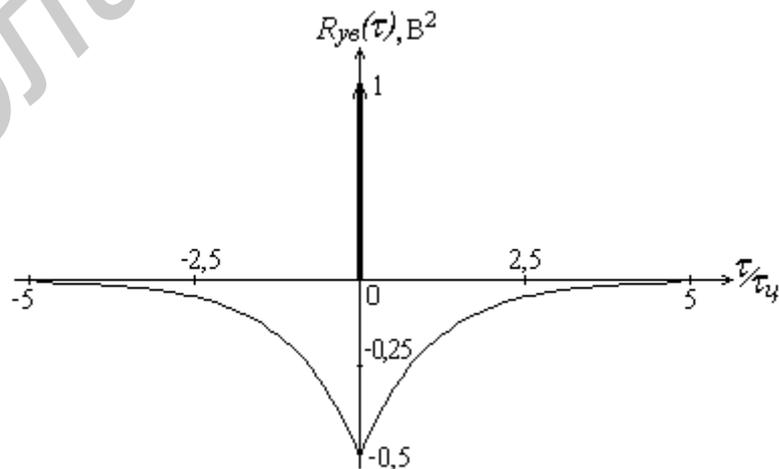


Рис. 4.8. Корреляционная функция выходного сигнала при $W_0 = 1 \text{ В}^2/\text{Гц}$ и $\tau_u = 1 \text{ мкс}$

Рассмотрим случай, когда параметры фильтра обеспечивают соблюдение условия $\omega\tau_u \ll 1$ для всех частот спектра входного сигнала. При этом рассматриваемый фильтр реализует процесс, близкий к идеальному дифференцированию, так как его частотный коэффициент передачи $K_\epsilon(j\omega) = j\omega\tau_u$. Идеальное дифференцирование будем рассматривать для входного случайного процесса, который удовлетворяет условию дифференцируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) \cdot \omega^2 \tau_u^2 d\omega < \infty. \quad (4.9)$$

Это условие соблюдается, если при $\omega \rightarrow \infty$ спектральная плотность $W_x(\omega)$ убывает быстрее, чем $1/\omega^2 \tau_u^2$. Спектр белого шума не обеспечивает соблюдение данного условия.

Итак, в случае идеального дифференцирования случайного сигнала с $W_x(\omega)$:

- выходной случайный сигнал равен $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$;
- спектральная плотность мощности выходного случайного сигнала равна

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) \cdot \omega^2 \tau_u^2;$$

- корреляционная функция выходного случайного сигнала равна

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) \cdot \omega^2 \tau_u^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= -\frac{\tau_u^2}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cdot \frac{d^2 \cos\omega\tau}{d\tau^2} d\omega = -\frac{d^2}{d\tau^2} \frac{\tau_u^2}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cdot \cos\omega\tau d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_y(\tau) = -\tau_u^2 \cdot \frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2}.$$

При дифференцировании случайного сигнала выходной сигнал имеет корреляционную функцию, которая пропорциональна второй производной от корреляционной функции входного сигнала, взятой с обратным знаком.

Дисперсия равна

$$D_y = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \tau_u^2 W_x(\omega) d\omega = \frac{\tau_u^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_x(\omega) d\omega.$$

Дисперсия выходного сигнала будет конечна, если соблюдается условие дифференцируемости (4.9).

Определим математическое ожидание выходного случайного сигнала, если на вход поступает стационарный случайный сигнал:

$$M[y(t)] = M\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \frac{d}{dt}M[x(t)] = 0.$$

Стационарный случайный сигнал после дифференцирования имеет математическое ожидание, равное нулю. Физически это объясняется наличием конденсатора в схеме фильтра, который блокирует постоянную составляющую (среднее значение) реализации входного сигнала.

Определим степень зависимости входного и выходного сигналов. Она определяется, как известно, взаимокорреляционной функцией.

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{dx(t-\tau)}{d\tau}dt = \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt.$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{d}{d\tau}R_x(\tau).$$

Взаимокорреляционная функция случайного сигнала и его производной равна производной от корреляционной функции входного случайного сигнала.

4.2.5. Воздействие белого шума на резонансный усилитель

На вход резонансного усилителя поступает белый шум с характеристиками $W_x(\omega) = W_0$, $R_x(\tau) = W_0\delta(\tau)$ и $m_x = 0$. Определим спектр и корреляционную функцию случайного сигнала на выходе усилителя.

1. Частотные характеристики резонансного усилителя:
 - частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{K_0}{1 + j2Q_{экв} \frac{(\omega - \omega_p)}{\omega_p}} = \frac{K_0}{1 + j(\omega - \omega_p)\tau_k},$$

где $K_0 = SR_0$ – коэффициент усиления на резонансной частоте контура;

$R_0 = L/RC$ – сопротивление контура на резонансной частоте;

$\tau_k = \frac{2Q_{экв}}{\omega_p}$ – постоянная времени контура;

- амплитудно-частотная характеристика

$$K(\omega) = \frac{K_0}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_p)^2 \tau_k^2}};$$

- фазочастотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\pi - \arctg(\omega - \omega_p)\tau_k.$$

2. Спектральная плотность мощности выходного случайного сигнала

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 = W_0 \cdot \frac{K_0^2}{1 + (\omega - \omega_p)^2 \tau_k^2}.$$

Форма графика $W_{yh}(\omega)$ совпадает с формой квадрата АЧХ фильтра (рис. 4.9). Следовательно, при поступлении белого шума на вход резонансного усилителя на выходе формируется узкополосный случайный сигнал.

3. Корреляционная функция выходного случайного сигнала

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{yh}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0^2}{1 + (\omega - \omega_p)^2 \tau_k^2} e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos\omega\tau}{1 + (\omega - \omega_p)^2 \tau_k^2} d\omega = \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\Omega\tau}{1 + \Omega^2 \tau_k^2} d\Omega \right) \cdot \cos\omega_p \tau. \end{aligned}$$

Из справочника по математике [9]

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + x^2} \cos(bx) dx = \frac{\pi}{2a} e^{-|b|/a} \quad \text{при } a > 0.$$

Получаем

$$R_y(\tau) = \frac{W_0 K_0^2}{2\tau_k} e^{-|\tau|/\tau_k} \cos\omega_p \tau.$$

Дисперсия

$$D_y = \frac{W_0 K_0^2}{2\tau_k}.$$

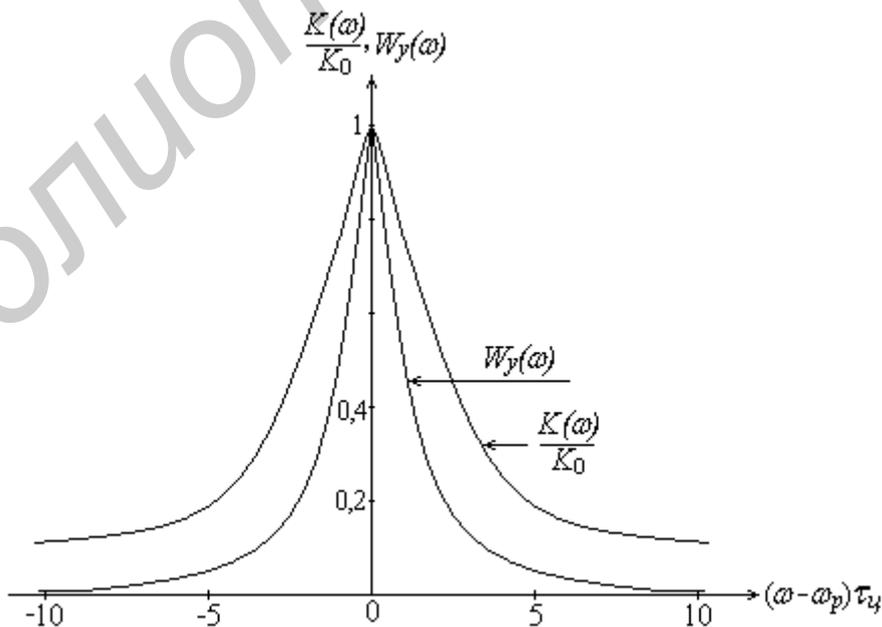


Рис. 4.9. АЧХ резонансного усилителя и спектральная плотность мощности выходного сигнала при $W_0 = 1 \text{ В}^2/\text{Гц}$ и $\tau_k = 1 \text{ мкс}$

График корреляционной функции $R_y(\tau)$ выходного случайного сигнала представлен на рис. 4.10.

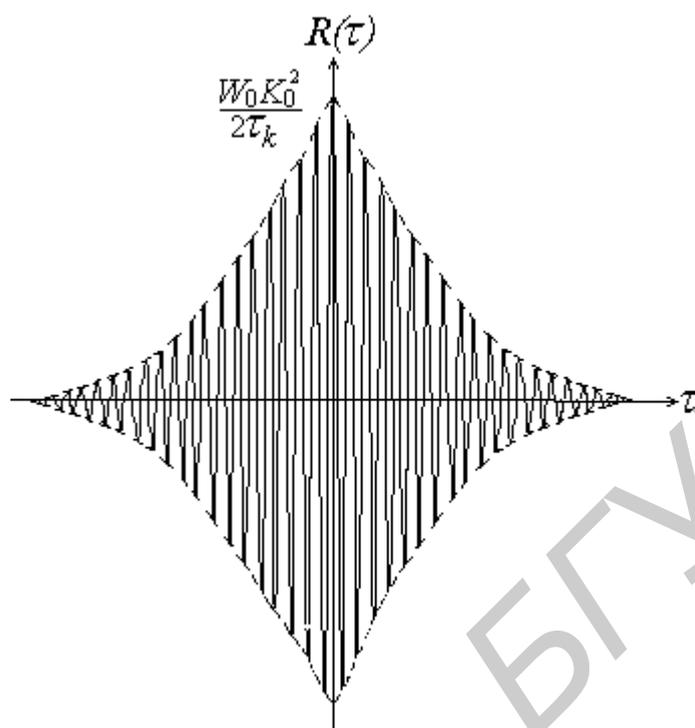


Рис. 4.10. Корреляционная функция случайного сигнала на выходе резонансного усилителя

Таким образом, применительно к узкополосным устройствам показано, что спектральная плотность мощности случайного сигнала на выходе линейного устройства совпадает по форме с квадратом АЧХ устройства. ФЧХ не оказывает влияния на спектр выходного случайного сигнала. Корреляционная функция случайного сигнала на выходе устройства совпадает по форме с корреляционной функцией импульсной характеристики устройства

4.3. Преобразования случайных сигналов нелинейными цепями

4.3.1. Постановка задачи

По характеру временной зависимости выходного сигнала от входного различают два класса нелинейных функциональных преобразований – инерционное и безынерционное. Инерционное функциональное преобразование осуществляет инерционная радиотехническая цепь, у которой значение выходного сигнала $y(t)$ в момент $t = t_0$ зависит не только от значения входного сигнала $x(t)$ в этот момент времени, но и от значений $x(t)$ в моменты времени, предшествовавшие моменту t_0 . Безынерционное функциональное преобразование осуществляет безынерционная радиотехническая цепь, у которой значение вы-

ходного сигнала $y(t)$ в момент $t = t_0$ полностью определяется значением $x(t)$ в тот же момент времени t_0 .

Имеется математический аппарат для анализа нелинейных безынерционных цепей при воздействии на них случайных сигналов. В то же время общих методов решения задачи анализа нелинейных инерционных цепей при воздействии на них случайных сигналов нет. Для решения такой задачи прибегают к различным искусственным приемам, позволяющим получить приближенные решения [7, 8].

Один из приближенных методов основан на условном представлении нелинейной инерционной цепи комбинацией линейной инерционной цепи и нелинейной безынерционной цепи. Анализ воздействия случайных процессов на линейную цепь рассмотрен ранее. Было показано, что в этом случае достаточно просто определить спектральную плотность (или корреляционную функцию) выходного сигнала и более сложно – закон распределения. В нелинейных безынерционных цепях основная трудность состоит в нахождении спектра и корреляционной функции выходного сигнала. При этом ограничиваются решением некоторых частных задач, представляющих практический интерес.

Далее будут рассмотрены некоторые методы анализа прохождения случайного сигнала через нелинейные безынерционные цепи. Данная задача будет решаться в следующей постановке.

На вход нелинейного устройства (рис. 4.11) с нелинейной функцией преобразования $y = f(x)$ поступает случайный сигнал, моделью которого может служить стационарный случайный процесс $X(t)$. Известны статистические характеристики этого случайного процесса: закон распределения $p(x)$, спектральная плотность мощности $W_x(\omega)$, корреляционная функция $R_x(\tau)$, дисперсия D_x и математическое ожидание m_x . Необходимо определить аналогичные статистические характеристики $p(y)$, $W_y(\omega)$, $R_y(\tau)$, D_y , m_y выходного случайного процесса.

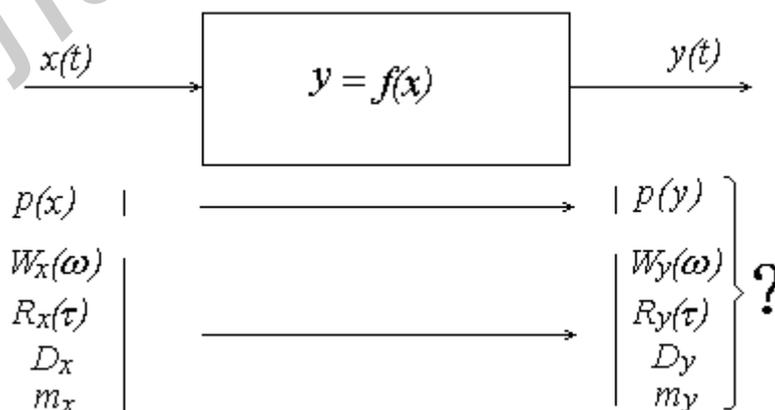


Рис. 4.11. Постановка задачи анализа прохождения случайного сигнала через нелинейные устройства

В зависимости от анализируемых характеристик случайных сигналов рассматривают два варианта общей задачи.

1. Определение закона распределения выходного случайного сигнала.
2. Определение спектральной плотности мощности, корреляционной функции, дисперсии и математического ожидания выходного случайного сигнала.

4.3.2. Определение закона распределения выходного случайного сигнала

Способы определения закона распределения

Пусть известна плотность вероятности $p(x)$ случайного сигнала $X(t)$ на входе нелинейного устройства. Требуется определить плотность вероятности $p(y)$ выходного сигнала $Y(t)$

Очевидно, что любая реализация $x(t)$ преобразуется в реализацию $y(t)$ выходного случайного сигнала. С другой стороны, случайная величина $x(t_i)$, соответствующая i -му сечению входного случайного сигнала, преобразуется в случайную величину $y(t_i)$, соответствующую i -му сечению выходного случайного сигнала. Поэтому можно продолжать дальнейшие рассуждения применительно к случайным величинам X и Y , т. е. анализировать преобразование $y = f(x)$.

Рассматривают три характерных случая, отличающихся видом функции $y = f(x)$.

1. Функция $y = f(x)$ нелинейной цепи определяет однозначное монотонное соответствие между $x(t)$ и $y(t)$. Полагаем, что существует обратная функция $y = \psi(x)$, которая также определяет однозначное монотонное соответствие между $y(t)$ и $x(t)$. В этом случае вероятность нахождения реализации $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ в интервале $(x_0, x_0 + dx)$ равна вероятности нахождения реализации $y(t)$ случайного процесса $Y(t) = f[X(t)]$ в интервале $(y_0, y_0 + dy)$ при $y_0 = f(x_0)$ и $y_0 + dy = f(x_0 + dx)$, т. е.

$$p(x)dx = p(y)dy.$$

Следовательно,

$$p(y) = \frac{p(x)}{|dy/dx|}.$$

Производная взята по абсолютной величине, потому что в соответствии со свойствами плотности вероятности $p(y) > 0$, в то время как производная dy/dx может быть и отрицательной (если функция $y = f(x)$ убывающая).

2. Обратная функция $x = \psi(y)$ неоднозначна, т. е. одному значению y соответствует несколько значений x . Пусть, например, значению $y = y_0$ соот-

ветствуют значения $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, а значению $y_0 + dy$ соответствуют значения $x = x_1 + dx, x_2 + dx, \dots, x_n + dx$.

Тогда из того факта, что $y_0 \leq y(t) \leq y_0 + dy$ следует одно из n взаимно несовместимых событий:

$$x_1 \leq x(t) \leq x_1 + dx, \quad x_2 \leq x(t) \leq x_2 + dx, \quad \dots, \quad x_n \leq x(t) \leq x_n + dx.$$

Применяя правило сложения вероятностей, получаем

$$p(y) = \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}} + \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_2}} + \dots + \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_n}}. \quad (4.10)$$

3. Характеристика нелинейного элемента $y = f(x)$ имеет один или более горизонтальных участков (участки, где $y = \text{const}$).

Тогда выражение

$$p(y) = \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}$$

следует дополнить слагаемыми, учитывающими вероятность пребывания $y(t)$ на интервале, где $y = \text{const}$. Так как при $y = \text{const}$ производная $dy/dx = 0$, то в этом случае плотность вероятности $p(y) = \infty$. Возникает необходимость использования аппарата δ -функций.

Рассмотрим методику определения закона распределения $p(y)$ для случаев 2 и 3 на примерах.

Нелинейное преобразование, реализуемое элементом с квадратичной характеристикой

Характеристика нелинейного элемента, которая описывается формулой $y = f(x) = ax^2$, представлена на рис. 4.12. Такую характеристику можно реализовать с помощью двухтактного включения двух диодов с квадратичными ВАХ.

Полагаем, что на вход нелинейного элемента поступает гауссовский случайный сигнал, закон распределения которого

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Для определения закона распределения $p(y)$ случайного сигнала на выходе нелинейного элемента воспользуемся формулой (4.10), связывающей законы распределения входного и выходного сигналов нелинейного элемента с характеристикой $y = f(x)$.

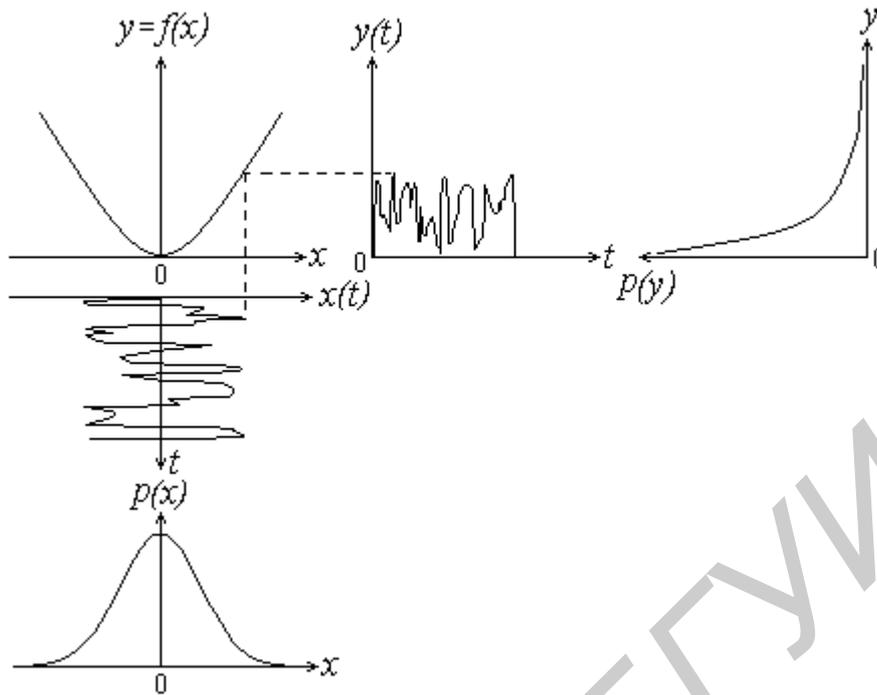


Рис. 4.12. Нелинейное преобразование, реализуемое элементом с квадратичной характеристикой

Так как обратная функция $x = \psi(y) = \pm\sqrt{y/a}$ неоднозначная, то общее выражение для закона распределения $p(y)$ имеет вид

$$p(y) = \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}} + \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_2}} \quad \text{при } y \geq 0,$$

где $x_1 = +\sqrt{y/a}$ и $x_2 = -\sqrt{y/a}$.

Подставим в данное выражение формулу закона распределения $p(x)$ входного сигнала:

$$\begin{aligned}
 p(y) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}}{|2ax|} \Big|_{x=\sqrt{y/a}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}}{|2ax|} \Big|_{x=-\sqrt{y/a}} \cdot \\
 p(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x 2a\sqrt{y/a}} e^{-\frac{(\sqrt{y/a}-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x 2a\sqrt{y/a}} e^{-\frac{(-\sqrt{y/a}-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} = \\
 &= \frac{e^{-\frac{y/a+m_x^2}{2\sigma_x^2}}}{2\sqrt{2\pi}\sigma_x \sqrt{ay}} \left(e^{\frac{m_x \sqrt{y/a}}{\sigma_x^2}} + e^{-\frac{m_x \sqrt{y/a}}{\sigma_x^2}} \right) = \frac{e^{-\frac{y+am_x^2}{2a\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x \sqrt{ay}} \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{m_x \sqrt{y}}{\sqrt{a}\sigma_x} \right).
 \end{aligned}$$

Здесь $ch\left(\frac{m_x\sqrt{y}}{\sqrt{a}\sigma_x^2}\right)$ – гиперболический косинус от значения выражения в скобках.

Таким образом, закон распределения случайного сигнала на выходе элемента с квадратичной характеристикой имеет вид

$$p(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{y+am_x^2}{2a\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{ay}} \cdot ch\left(\frac{m_x\sqrt{y}}{\sqrt{a}\sigma_x^2}\right) & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Графики закона распределения при различных значениях отношения m_x/σ_x представлены на рис. 4.13.

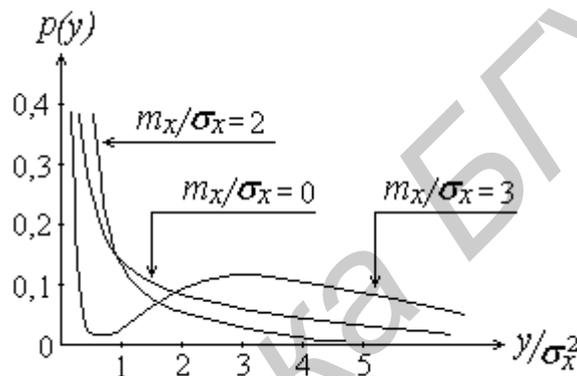


Рис. 4.13. График закона распределения сигнала, преобразованного нелинейным элементом с квадратичной характеристикой

При $m_x \neq 0$ на форму кривой влияет гиперболический косинус. При $m_x = 0$ закон распределения $p(y)$ имеет вид

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{ay}} e^{-\frac{y}{2a\sigma_x^2}} \text{ при } y > 0.$$

Нелинейное преобразование, реализуемое усилителем-ограничителем

Нелинейное преобразование $y = f(x)$, реализуемое усилителем-ограничителем, описывается формулой

$$y = \begin{cases} -A & \text{при } x \leq -x_1, \\ kx & \text{при } -x_1 < x < x_1, \\ A & \text{при } x \geq x_1. \end{cases}$$

и представлено на рис. 4.14.

При $x(t) \leq -x_1$ выходной сигнал $y(t) = -A$. Это значит, что вероятность принятия случайным процессом $y(t)$ этого значения равна

$$P_1 = P[y(t) = -A] = P[x(t) \leq -x_1] = \int_{-\infty}^{-x_1} p(x) dx,$$

а плотность вероятности

$$p_1(y) = P_1 \delta(y + A).$$

Аналогично рассуждая для случая $x(t) \geq x_1$, получаем

$$P_2 = P[y(t) = A] = P[x(t) \geq x_1] = \int_{x_1}^{\infty} p(x) dx.$$

$$p_2(y) = P_2 \delta(y - A).$$

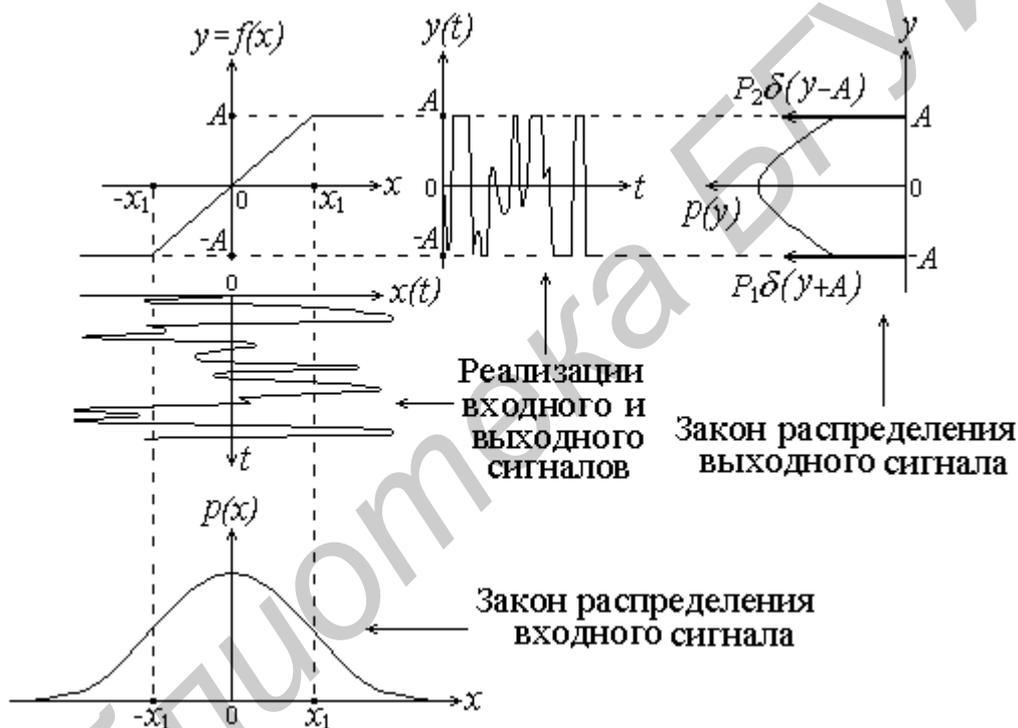


Рис. 4.14. Преобразование случайного сигнала усилителем-ограничителем

Значения вероятностей P_1 и P_2 зависят от выбора рабочей точки на характеристике нелинейного элемента. Для случая, изображенного на рис. 4.14, соблюдается равенство $P_1 = P_2$.

При $-x_1 < x(t) < x_1$ справедлива формула

$$p_3(y) = \frac{p(x)}{|dy/dx|} = \frac{p(x)}{|k|}.$$

В целом плотность вероятности выходного процесса определяется выражением

$$p(y) = p_1(y) + p_2(y) + p_3(y) = P_1 \delta(y + A) + P_2 \delta(y - A) + \frac{p(x)}{|k|}.$$

Заметим, что для получения окончательного выражения необходимо преобразовать функциональные зависимости $p(x)$ и dy/dx , являющиеся функциями от x , в функции от y , используя обратную функцию $x = \psi(y)$.

Нелинейное преобразование, реализуемое идеальным ограничителем

Нелинейное преобразование $y = f(x)$, реализуемое идеальным ограничителем (квантователем), описывается формулой

$$y = \begin{cases} A & \text{при } x \geq 0, \\ -A & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Если на вход такого ограничителя подать случайный сигнал с нормальным законом распределения, то на выходе будет сформирован клипированный (телеграфный) сигнал (рис. 4.15).

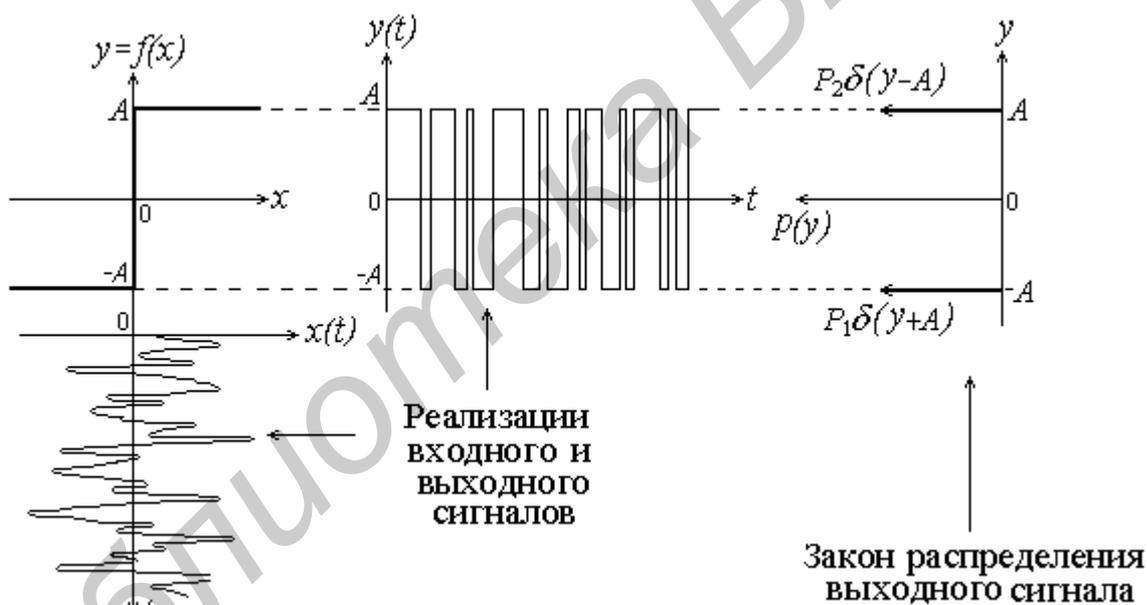


Рис. 4.15. Преобразование случайного сигнала идеальным ограничителем при выборе рабочей точки $x = 0$

Приведем рассуждения, положенные в основу определения закона распределения выходного сигнала.

При $x(t) < 0$ выходной сигнал $y(t) = -A$. Это значит, что вероятность принятия случайным процессом $y(t)$ значения $(-A)$ равна

$$P_1 = P[y(t) = -A] = P[x(t) < 0] = \int_{-\infty}^0 p(x) dx = 0,5,$$

а плотность вероятности

$$p_1(y) = P_1 \delta(y + A) = 0,5\delta(y + A).$$

Аналогично рассуждая для случая $x(t) \geq 0$, получаем

$$P_2 = P[y(t) = A] = P[x(t) \geq 0] = \int_0^{\infty} p(x) dx = 0,5,$$

$$p_2(y) = P_2 \delta(y - A) = 0,5\delta(y - A).$$

Значения вероятностей P_1 и P_2 зависят от выбора рабочей точки на характеристике нелинейного элемента. Для случая $x=0$ (см. рис. 4.15) соблюдается равенство $P_1 = P_2$, а для случая $x = x_0$ (рис. 4.16) – соотношение $P_2 > P_1$.

$$P_1 = P[y(t) = -A] = P[x(t) < -x_1] = \int_{-\infty}^{-x_1} p(x) dx;$$

$$P_2 = P[y(t) = A] = P[x(t) \geq -x_1] = \int_{-x_1}^{\infty} p(x) dx.$$

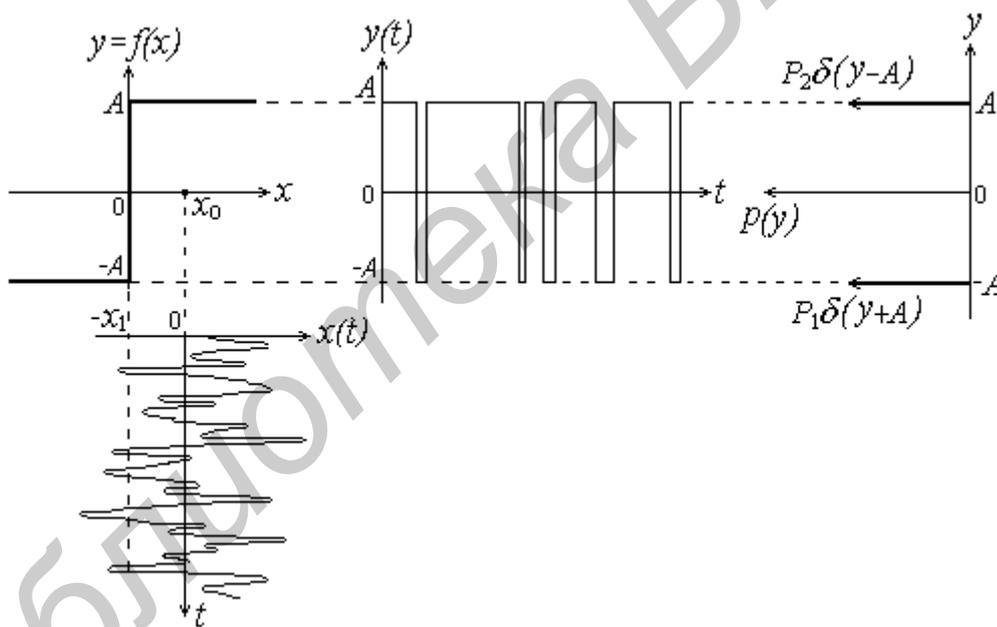


Рис. 4.16. Преобразование случайного сигнала идеальным ограничителем при выборе рабочей точки $x = x_0$

4.3.3. Определение корреляционной функции и энергетического спектра выходного случайного сигнала

Непосредственно определить энергетический спектр случайного процесса на выходе нелинейной цепи не представляется возможным. Существует единственный метод – определение корреляционной функции сигнала на выходе

цепи с последующим применением прямого преобразования Фурье для определения спектра.

Если на вход нелинейной безынерционной цепи поступает стационарный случайный процесс $X(t)$, то корреляционная функция случайного процесса $Y(t)$ на выходе может быть представлена в виде

$$R_y(\tau) = B_y(\tau) - m_y^2,$$

где $B_y(\tau)$ – ковариационная функция;

m_y – математическое ожидание случайного процесса $y(t)$.

Ковариационная функция случайного процесса представляет собой статистически усредненное произведение значений случайного процесса $y(t)$ в моменты t и $t - \tau$, т. е.

$$B_y(\tau) = M[y(t)y(t - \tau)].$$

При заданной двумерной плотности вероятности $p_2(y_1, y_2; \tau)$, где $y_1 = y(t)$, $y_2 = y(t - \tau)$, операция усреднения по множеству осуществляется по формуле

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 p_2(y_1, y_2; \tau) dy_1 dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2.$$

Математическое ожидание m_y определяется следующим выражением

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y p(y) dy.$$

Учитывая, что $p(y) dy = p(x) dx$, получаем

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx.$$

Энергетический спектр выходного сигнала в соответствии с теоремой Винера – Хинчина находится как прямое преобразование Фурье от ковариационной функции, т. е.

$$W_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Практическое применение данного метода затруднено, так как двойной интеграл для $B_y(\tau)$ удается вычислить не всегда. Приходится использовать различные упрощающие методы, связанные со спецификой решаемой задачи [8, 9].

Таким образом, сформулирована и обоснована постановка задачи нелинейного преобразования случайных сигналов и рассмотрены возможные методы определения законов распределения вероятностей случайного сигнала на выходе нелинейного устройства. Определение спектральной плотности мощности и корреляционной функции случайного сигнала на выходе нелинейного инерционного устройства представляет собой достаточно сложную задачу.

5. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОСИГНАЛОВ

5.1. Основные задачи, решаемые при приеме сигналов

5.1.1. Оптимальный приемник

По информационному назначению радиотехнические системы (РТС) делятся на следующие классы [6]: системы передачи информации (системы радиосвязи, радиовещания, телевидения), системы обнаружения и измерения (системы радиолокации, радионавигации, радиоразведки), системы радиотелеуправления и системы разрушения информации. В настоящее время широкое применение находят радиотехнические комплексы, состоящие из нескольких различных систем, в состав которых входят цифровые средства приема и обработки информации.

Эффективность большинства РТС зависит от их способности противостоять воздействию помех. Результат действия помех – частичная или полная потеря полезной информации. Необходимо так спроектировать радиотехническую систему, чтобы она обладала способностью извлекать из принятого сигнала полезную информацию. Для этого по известным характеристикам помех и передаваемого сигнала с учетом особенностей их функционального взаимодействия и свойств канала передачи информации проектируют оптимальное приемное устройство, которое предназначено для использования в структуре какой-либо РТС. Оптимальное в том смысле, что оно наилучшим образом воспроизводит переданное сообщение. Точность и алгоритм решения задачи оптимизации зависят от объема априорных сведений.

Исходными данными при статистическом синтезе оптимального приемника являются критерий оптимальности, выбираемый в соответствии с функциональным назначением радиотехнической системы, и математическая формулировка задачи оптимизации, учитывающая все априорные сведения и позволяющая решить ее в соответствии с принятым критерием.

Синтез оптимального приемника достигается:

- развитием и широким использованием математических принципов и качественных показателей оптимальной обработки сигналов;
- сравнительным статистическим анализом структурной и функциональной организации отдельных вариантов реальных и оптимальных приемников, что позволяет определить степень технического совершенства и резервы улучшения реальных РТС;
- сравнительным анализом качественных показателей оптимальной обработки различных сигналов с целью выбора таких сигналов, которые обеспечивают необходимый уровень помехоустойчивости данной РТС.

Конечная цель решения задачи синтеза:

1. Структура оптимального приемника, реализующего выбранный алгоритм обработки принятого сигнала.

2. Количественные оценки параметров и качества работы приемника, получаемые в соответствии с принятым критерием. При этом оценивается чувствительность алгоритмов, параметров и качества работы оптимального приемника к отклонениям от априорных данных.

3. Оценка возможности практической реализации оптимального приемника на современной элементной базе.

Приемник будет оптимальным, если он обеспечивает минимальные искажения, вызванные помехами, при заданных условиях приема и выбранном критерии оптимальности. Наилучшие качественные показатели радиоприема, которые обеспечивают минимальный уровень искажений при определенных характеристиках сигнала и помехи, характеризуют потенциальную помехоустойчивость.

5.1.2. Задачи, решаемые при приеме сигналов

Радиотехнические системы предназначены для решения свойственных им функциональных задач в различных условиях. Поэтому требования, предъявляемые к ним, различны. В зависимости от этих требований в теории оптимального радиоприема сформулированы следующие задачи, обеспечивающие соответствующий уровень оптимальности:

- оптимальное обнаружение сигнала на фоне помех;
- оптимальное различение сигналов на фоне помех;
- оценка с максимальной точностью неизвестных параметров сигнала, действующего в смеси с помехой;
- оптимальная фильтрация сообщений, содержащихся в принимаемых сигналах;
- разрешение нескольких сигналов.

Обнаружение сигнала

Задача *обнаружения сигнала* состоит в принятии решения о наличии или отсутствии сигнала $s(t, \lambda)$ в результате соответствующей обработки принятого колебания $y(t)$, которое представляет собой аддитивную смесь сигнала и помехи $x(t)$, т. е.

$$y(t) = \theta s(t, \lambda) + x(t). \quad (5.1)$$

Сигнал представляет известную функцию времени и некоторого множества параметров λ . Длительность сигнала равна интервалу наблюдения $[0, T]$. Факт наличия или отсутствия сигнала в принятом колебании фиксируется параметром обнаружения θ . Этот параметр представляет собой случайную величину, принимающую одно из двух значений: $\theta = 0$ (сигнал отсутствует) или $\theta = 1$ (сигнал присутствует).

По принятой реализации $y(t)$ на интервале $[0, T]$ требуется наилучшим образом выработать решение о наличии или отсутствии сигнала в смеси $y(t)$, т. е. определить значение параметра θ . Для этого синтезируется структурная схема приемного устройства, реализующего оптимальный алгоритм обнаружения, и оцениваются качественные показатели обнаружения. Алгоритм обнаружения должен соответствовать выбранному критерию оптимальности.

Различение сигналов

Задача *различения сигналов* состоит в принятии решения о наличии в смеси $y(t)$ одного из двух сигналов: $s_1(t, \lambda_1)$ или $s_2(t, \lambda_2)$ в результате соответствующей обработки принятого колебания $y(t)$, которое представляет собой аддитивную смесь двух сигналов и помехи $x(t)$, т. е.

$$y(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_2(t, \lambda_2) + x(t). \quad (5.2)$$

где θ – случайный параметр, который принимает значения 0 или 1.

Параметр $\theta = 1$, если в смеси $y(t)$ с вероятностью P_1 присутствует сигнал $s_1(t, \lambda_1)$. Параметр $\theta = 0$, если в смеси $y(t)$ с вероятностью $P_2 = 1 - P_1$ присутствует сигнал $s_2(t, \lambda_2)$. По принятой на интервале $[0, T]$ реализации $y(t)$ необходимо выработать решение о присутствии сигнала $s_1(t, \lambda_1)$ или сигнала $s_2(t, \lambda_2)$. Содержание решающего правила определяется критерием оптимальности. Заметим, что при отсутствии сигнала $s_2(t, \lambda_2)$ задача сводится к обнаружению сигнала $s_1(t, \lambda_1)$.

Различение двух сигналов – типичная задача для РТС передачи информации. В общем случае задача различения сигналов состоит в принятии решения о наличии или отсутствии одного из m сигналов $s_1(t, \lambda_1), s_2(t, \lambda_2), \dots, s_m(t, \lambda_m)$ в результате соответствующей обработки принятого колебания $y(t)$, которое представляет собой аддитивную смесь m сигналов и помехи $x(t)$.

Оценка параметров сигнала

Задача *оценки параметров* заключается в определении с минимальной погрешностью по принятой на интервале $[0, T]$ реализации смеси $y(t)$ значения одного или нескольких случайных информационных параметров β_i сигнала $s(t, \lambda)$, у которого λ – это множество параметров, равное $\lambda = \{\beta_i\}$. При этом считается, что параметры β_i сигнала $s(t, \lambda)$ являются случайными величинами, априорные плотности вероятностей которых известны.

На основе выработанных алгоритмов необходимо построить структурную схему оптимального измерителя параметров сигнала, определить точность оценивания. Эта задача типична для систем радиолокации и радионавигации.

Фильтрация сообщений

Задача *фильтрации сообщений* возникает в случае, если сигнал $s(t, \lambda)$ зависит от некоторого информационного параметра β_i , представляющего случайную функцию времени $\beta_i(t)$ с известными статистическими характеристиками. На основании статистических характеристик помехи $x(t)$ необходимо из принятой смеси $y(t)$ выделить наилучшим образом реализацию случайной функции $\beta_i(t)$. При малом изменении процесса $\beta_i(t)$ за время анализа задача фильтрации может быть сведена к задаче оценки параметра. Задачи фильтрации типичны для большинства РТС, где необходимо выделение непрерывных сообщений или измерение меняющихся во времени параметров сигнала.

Разрешение сигналов

Решение задачи *разрешения сигналов* предполагает отдельное извлечение информации из однотипных, налагающихся друг на друга сигналов, которые имеют часто неизвестные мешающие параметры и наблюдаются на фоне помех. Принятое колебание представляет собой смесь информационного сигнала $s(t, \lambda_0)$ со случайным множеством параметров λ_0 , мешающих сигналов $s_k(t, \lambda_k)$ со случайными множествами параметров λ_k и помехи $x(t)$, т. е.

$$y(t) = \theta_0 s(t, \lambda_0) + \sum_k \theta_k s_k(t, \lambda_k) + x(t), \quad (5.3)$$

где θ_0 и θ_k – независимые случайные параметры, которые могут принимать значения 0 или 1.

Возможны различные особенности постановки задач разрешения сигналов. Так при решении в рамках данной задачи проблемы обнаружения необходимо на основе анализа принятого колебания $y(t)$ принять решение о наличии или отсутствии сигнала $s(t, \lambda_0)$. При решении в рамках данной задачи проблемы различения необходимо определить, какое из возможных сочетаний параметров $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots\}$ имеется в принятом сигнале. Задача оценивания-разрешения может предполагать также совместную оценку параметров $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots\}$ и $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots\}$.

Нетрудно понять, что качество решения перечисленных проблем будет зависеть не только от помехоустойчивости системы, но и от способности алгоритма обработки отличать друг от друга наблюдаемые однотипные сигналы,

отличающиеся в данном случае только значением параметра λ_i . Эта способность называется разрешающей способностью системы по параметру λ_i .

В простейших задачах разрешения сигналов предполагается, что смесь $y(t)$ представляет сумму помехи $x(t)$ и двух налагающихся, возможно, сигналов $s(t, \lambda_0)$ и $s_1(t, \lambda_1)$.

В зависимости от содержания перечисленных задач и функционального назначения радиотехнической системы устанавливается соответствующий критерий оптимальности. Математическая формулировка критерия основана на используемой модели радиосигнала, который принимается и обрабатывается радиотехнической системой.

5.1.3. Модели радиосигналов

Решение основных задач оптимального приема осуществляется для РТС, функционирование которых обеспечивает передачу и соответствующую обработку полезной информации с использованием радиотехнических сигналов. Сигналы могут быть непрерывные, импульсные и цифровые. Непрерывные сигналы содержат информацию непосредственно в мгновенных значениях или в параметрах (амплитуда, частота, фаза), которые могут иметь характер случайной величины или случайной функции. Импульсные сигналы содержат информацию во временном положении радиоимпульсов, цифровые сигналы – в факте наличия или отсутствия одного из дискретных различимых сигналов.

Передаваемый сигнал обычно имеет вид модулированного гармонического колебания

$$s_n(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0],$$

где $U(t)$ и $\psi(t)$ – функции, которые описывают законы амплитудной и фазовой модуляции.

При такой форме передаваемого сигнала вид сигнала в месте приема существенно зависит от свойств и параметров канала передачи информации. Например, при одном и том же передаваемом сигнале $s_n(t)$ принимаемый сигнал в различных системах радиосвязи и радиолокации будет разным. Кроме того, принимаемый сигнал будет иметь временную задержку на определенную величину τ относительно переданного сигнала. В связи с этим на практике применяют следующие модели радиосигналов.

1. Сигнал с полностью известными параметрами:

$$s(t) = U_0(t - \tau) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau) + \varphi_0], \quad (5.4)$$

где $U_0(t)$, $\psi(t)$ – известные функции, которые описывают форму сигнала (законы модуляции амплитуды и фазы).

2. Сигнал со случайной начальной фазой:

$$s(t, \varphi) = U(t - \tau) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau) + \varphi]. \quad (5.5)$$

Здесь считается неизвестной начальная фаза φ , которая представляет случайную величину, равномерно распределенную на интервале $[-\pi, \pi]$.

3. Сигнал со случайными амплитудой и начальной фазой:

$$s(t, \varphi, B) = BU(t - \tau) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau) + \varphi]. \quad (5.6)$$

Случайные величины B и φ статистически не зависимы. Считается, что законом распределения вероятностей случайной величины B является закон Рэлея, а начальной фазы φ – равномерный закон распределения на интервале $[-\pi, \pi]$.

4. Сигнал, представляющий собой нефлуктуирующую по амплитуде пачку радиоимпульсов со случайными начальными фазами:

$$s(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_{k=1}^n U_k(t - \tau) \cos[\omega_0 t + \psi_k(t - \tau) + \varphi_k]. \quad (5.7)$$

Обычно φ_k – независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[-\pi, \pi]$.

Такой сигнал является некогерентной пачкой радиоимпульсов.

Если соблюдается равенство $\varphi_k = \varphi$, т. е. все φ_k равны одной и той же случайной величине φ , или соблюдается детерминированная закономерность фазы от импульса к импульсу при случайности фазы первого импульса пачки, то такой сигнал является когерентной пачкой радиоимпульсов.

5. Сигнал, представляющий собой флуктуирующую по амплитуде пачку радиоимпульсов со случайными начальными фазами:

$$s(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n; B_1, \dots, B_n) = \sum_{k=1}^n B_k U_k(t - \tau) \cos[\omega_0 t + \psi_k(t - \tau) + \varphi_k]. \quad (5.8)$$

Коэффициенты B_k – случайные величины, которые характеризуют флуктуацию огибающей пачки. При независимой флуктуации импульсов пачки случайные величины B_k независимы. Если $B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$, то имеем случай «дружно» флуктуирующей пачки.

При синтезе непрерывных РТС передачи информации и измерения параметров движения целей иногда применяют марковские модели сигналов $s(t, \lambda)$, у которых параметры $\beta_i \in \lambda$ являются функциями времени, т. е. $\beta_i = \beta_i(t)$ и представляют многокомпонентный марковский процесс [5, 10].

Среди помех, ограничивающих возможности приема слабых радиосигналов, особое место занимают флуктуационные помехи. Эти помехи относят к

числу стационарных случайных процессов, т. е. таких процессов, для которых их средние статистические характеристики, например математическое ожидание и дисперсия, не меняются во времени. Для упрощения решения задач оптимального радиоприема в качестве модели флуктуационной помехи обычно используют белый шум.

В дальнейшем будем считать, что полезный сигнал $s(t, \lambda)$ принимается в пределах конечного интервала наблюдения $[0, T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $X(t)$ с $m_x = 0$ и односторонней спектральной плотностью мощности в полосе частот от 0 до ∞ , равной W_0 . Тогда спектральная плотность мощности белого шума в неограниченной полосе частот равна $W_0/2$, а автокорреляционная функция

$$R_n(\tau) = \frac{W_0}{2} \delta(\tau). \quad (5.9)$$

5.2. Основные понятия теории обнаружения сигналов

5.2.1. Качественные показатели теории обнаружения сигналов

В силу случайного характера сигналов и помех анализ работы радиотехнических систем проводят методами статистики, а его качественные показатели характеризуют статистическими параметрами. Задача обнаружения сигналов – это принятие решения о наличии или отсутствии сигнала в зоне действия РТС. Это решение может быть принято при двух взаимно исключающих условиях:

- условие A_1 – сигнал есть;
- условие A_0 – сигнала нет.

При выработке решения эти условия неизвестны. Из-за действия помех каждому из условий может соответствовать одно из двух решений:

- решение A_1^* – сигнал есть;
- решение A_0^* – сигнала нет.

Решения «не знаю» после завершения процесса обнаружения быть не должно.

Рассмотрим возможные варианты принятия решения для априорных случаев наличия или отсутствия сигнала в зоне действия РТС.

Случай A_1 – наличие сигнала

Правильное обнаружение, если при условии A_1 выдается решение A_1^* , и *пропуск сигнала*, если при условии A_1 за счет действия помех выдается решение A_0^* .

Указанные решения можно характеризовать условными вероятностями:

$D = P(A_1^* / A_1)$ – вероятность правильного обнаружения;

$\hat{D} = P(A_0^*/A_1)$ – вероятность пропуска сигнала.

Решения A_1^* и A_0^* являются взаимоисключающими, так как соответствуют одному и тому же условию A_1 наличия сигнала. Поэтому $D + \hat{D} = 1$.

Случай A_0 – отсутствие сигнала

Правильное необнаружение, если при условии A_0 выдается решение A_0^* , и *ложная тревога*, если при условии A_0 за счет действия помех выдается решение A_1^* .

Указанные условные решения можно характеризовать условными вероятностями:

$\hat{F} = P(A_0^*/A_0)$ – вероятность правильного необнаружения;

$F = P(A_1^*/A_0)$ – вероятность ложной тревоги.

Решения A_1^* и A_0^* являются взаимоисключающими, так как соответствуют одному и тому же условию отсутствия сигнала. Поэтому $F + \hat{F} = 1$.

При построении обнаружителей стремятся обеспечить достаточно высокую вероятность правильного обнаружения в пределах $D = 0,9 \dots 0,999$, а вероятность ложной тревоги свести к величине $F \leq 10^{-3}$. Ложная информация может привести к нежелательным последствиям в силу занятости системы обработкой этой информации.

Заметим, что рассмотренную задачу обнаружения можно свести к задаче различения сигналов, возникающей в процессе приема и обработки дискретных сигналов. Как известно, в результате процесса различения сигналов должно быть принято решение о наличии в зоне действия радиотехнической системы сигнала $s_1(t)$ или сигнала $s_2(t)$. Поэтому в приведенных выше рассуждениях необходимо изменить смысл исходных условий и содержание принимаемых решений: условие A_1 – наличие сигнала $s_1(t)$, а решение A_1^* – принят сигнал $s_1(t)$; условие $A_0 = A_2$ – наличие сигнала $s_2(t)$, а решение $A_0^* = A_2^*$ – принят сигнал $s_2(t)$.

Тогда возможны следующие варианты принятия решения и соответствующие им условные вероятности:

– правильное решение о приеме сигнала $s_1(t)$ или $s_2(t)$ с соответствующими вероятностями $P_{11} = P(A_1^*/A_1) = P(s_1/s_1)$ и $P_{22} = P(A_2^*/A_2) = P(s_2/s_2)$;

– ошибочное решение о приеме сигнала $s_1(t)$ или $s_2(t)$ с соответствующими вероятностями $P_{12} = P(A_1^*/A_2) = P(s_1/s_2)$ и $P_{21} = P(A_2^*/A_1) = P(s_2/s_1)$.

Для данных условных вероятностей справедливы соотношения:

$$P_{11} + P_{21} = 1 \text{ и } P_{22} + P_{12} = 1.$$

В системах приема дискретных сообщений требования к качеству приема сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ одинаковы и стремятся снизить вероятности ошибочного приема сигналов. В системах передачи информации стараются обеспечить $P_{12} = P_{21} = 10^{-3}$ и меньше.

Таким образом, система передачи информации должна удовлетворять противоречивым требованиям. С одной стороны, при обнаружении в условиях действия помех необходимо обеспечить минимальную вероятность пропуска сигнала. С другой стороны, уменьшение вероятности пропуска сигнала вызывает возрастание вероятности ложной тревоги. В такой ситуации приходится идти на разумный компромисс. Выбирают такое правило решения, при котором для совокупности всех возможных ситуаций приема обеспечивались бы наилучшие результаты. Правило решения должно быть оптимальным в среднем, т. е. статистически оптимальным с учетом вероятностей распределения всех возможных условий обнаружения. Для характеристики подобных противоречивых ситуаций вводят понятие **среднего риска**.

Средний риск и критерий минимума среднего риска

Всю совокупность условий радиоприема и принимаемых при этом решений называют совокупностью возможных ситуаций. При обнаружении сигнала, как было рассмотрено выше, возможны следующие ситуации:

- 1) (A_1^*, A_1) – правильное обнаружение;
- 2) (A_0^*, A_1) – пропуск сигнала;
- 3) (A_1^*, A_0) – ложная тревога;
- 4) (A_0^*, A_0) – правильное необнаружение.

Каждая из этих ситуаций характеризуется своей вероятностью P_i , т. е. $P_1 = P(A_1^*, A_1)$, $P_2 = P(A_0^*, A_1)$, $P_3 = P(A_1^*, A_0)$ и $P_4 = P(A_0^*, A_0)$, причем

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1.$$

Ситуации (A_1^*, A_1) – правильное обнаружение и (A_0^*, A_0) – правильное необнаружение являются безошибочными, ситуации (A_0^*, A_1) – пропуск сигнала и (A_1^*, A_0) – ложная тревога являются ошибочными ситуациями.

Каждой из этих ситуаций можно поставить в соответствие некоторую плату за ошибку, или риск R_i , в зависимости от важности или стоимости ошибки. При этом необходимо иметь в виду, что процедура назначения стоимостей ошибок является достаточно ответственным этапом анализа, при котором должна максимально учитываться степень последствий той или иной ошибки. Очевидно, что для ошибочных ситуаций значение риска должно быть больше,

для безошибочных – меньше или равно нулю. В силу случайного характера ситуаций риск R является случайной величиной, что обуславливает необходимость ввести понятие среднего риска.

Средний риск (средняя плата) \bar{R} вычисляется по правилу определения математического ожидания случайной величины R , т. е.

$$\bar{R} = \sum_i R_i P_i, \quad (5.10)$$

где R_i – риск i -й ситуации;

P_i – вероятность возникновения i -й ситуации.

Для анализа процесса обнаружения сигнала достаточно учесть риски только ошибочных ситуаций, полагая нулевыми риски безошибочных ситуаций. Обозначим значения риска за ошибочные ситуации:

$R_{\hat{D}} = R(A_0^*/A_1)$ – значение риска ситуации (A_0^*, A_1) – пропуск сигнала;

$R_F = R(A_1^*/A_0)$ – значение риска ситуации (A_1^*, A_0) – ложная тревога.

Тогда средний риск можно записать в виде

$$\bar{R} = R_{\hat{D}} P(A_0^*, A_1) + R_F P(A_1^*, A_0). \quad (5.11)$$

Вероятности, входящие в данное выражение, согласно теореме умножения вероятностей, можно выразить следующим образом:

$$P(A_0^*, A_1) = P(A_1) \cdot P(A_0^*/A_1) = P(A_1) \cdot \hat{D};$$

$$P(A_1^*, A_0) = P(A_0) \cdot P(A_1^*/A_0) = P(A_0) \cdot F. \quad (5.12)$$

С учетом соотношений (5.11) и (5.12) запишем выражение для среднего риска:

$$\bar{R} = R_{\hat{D}} \cdot P(A_1) \cdot \hat{D} + R_F \cdot P(A_0) \cdot F. \quad (5.13)$$

В результате сравнения различных систем обнаружения отдается предпочтение системе, которая обеспечивает наименьший риск. Таким образом, оптимальные условия работы такой системы можно определить по **критерию минимума среднего риска**, т. е. по существу синтезировать оптимальный обнаружитель по данному критерию. Критерий минимума среднего риска учитывает неодинаковую значимость ошибок ложной тревоги и пропуска сигнала.

Рассмотрим более частные критерии, которые можно получить из критерия минимума среднего риска в результате преобразования выражения (5.13) и при некоторых ограничениях, накладываемых на риски ошибочных ситуаций.

Критерий идеального наблюдателя

Для систем передачи информации риски ошибочных ситуаций $R_{\hat{D}}$ и R_F обычно одинаковы. Если положить $R_{\hat{D}} = R_F = 1$, то из выражения (5.13) следует, что средний риск равен суммарной вероятности ошибок обнаружения (полной ошибки):

$$\bar{R} = P(A_1) \cdot \hat{D} + P(A_0) \cdot F. \quad (5.14)$$

Критерий минимума среднего риска сводится к критерию минимума вероятности полной ошибки. Этот критерий носит название **критерия идеального наблюдателя**.

Критерий минимума среднего риска является более общим, чем критерий идеального наблюдателя, так как позволяет учесть неодинаковую значимость ошибок ложной тревоги и пропуска сигнала.

Весовой критерий

В результате преобразований выражения (5.13) для среднего риска можно получить некоторые другие частные критерии. Подставим в это соотношение очевидное выражение $\hat{D} = 1 - D$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{R} &= R_{\hat{D}} \cdot P(A_1) \cdot \hat{D} + R_F \cdot P(A_0) \cdot F = R_{\hat{D}} \cdot P(A_1) \left[1 - D + \frac{R_F \cdot P(A_0) \cdot F}{R_{\hat{D}} \cdot P(A_1)} \right]; \\ \bar{R} &= R_{\hat{D}} \cdot P(A_1) [1 - (D - l_0 F)].\end{aligned}\quad (5.15)$$

Множитель l_0 определяется выражением

$$l_0 = \frac{R_F \cdot P(A_0)}{R_{\hat{D}} \cdot P(A_1)}.$$

Как видно из данного выражения, множитель l_0 зависит от соотношения плат за ошибки и от априорных вероятностей отсутствия или наличия цели (сигнала).

Поскольку $R_{\hat{D}} \cdot P(A_1) > 0$, критерий минимума среднего риска (5.15) сводится к максимуму разности $D - l_0 F$, т. е. к критерию

$$D - l_0 F = \max. \quad (5.16)$$

Критерий (5.16) называется **весовым критерием**, так как множитель l_0 называют весовым. Согласно этому критерию, необходимо обеспечить максимум взвешенной разности за счет повышения условной вероятности правильного обнаружения D и снижения условной вероятности ложной тревоги

Одним из существенных недостатков рассмотренных ранее критериев оптимального обнаружения сигналов является то, что их использование предполагает наличие значительного количества априорной информации о вероятностях возможных состояний и рисках ошибочных ситуаций. Этот недостаток наиболее отчетливо проявляется при решении задач обнаружения цели в радиолокации. Указать априорные вероятности наличия цели в заданной области пространства и риски за счет ложной тревоги или пропуска цели оказывается весьма затруднительным. Поэтому в подобных задачах вместо критерия среднего риска используется критерий Неймана – Пирсона.

Критерий Неймана – Пирсона

Выбирается такое правило обнаружения, которое обеспечивает минимальную величину вероятности пропуска сигнала (максимальную вероятность правильного обнаружения) при условии, что вероятность ложной тревоги не превышает заданной величины F_{opt} , которая соответствует вероятности ложной тревоги оптимальной системы. Справедливость этого критерия следует из сравнения с использованием весового критерия двух систем обработки информации, одна из которых является оптимальной.

Очевидно,

$$D_{opt} - l_0 F_{opt} \geq D - l_0 F; \quad D_{opt} \geq D + l_0 (F_{opt} - F). \quad (5.17)$$

Отсюда при $F_{opt} \geq F$ получаем

$$D_{opt} \geq D. \quad (5.18)$$

Полученное соотношение означает, что оптимальная система обеспечивает наибольшую вероятность правильного обнаружения (дает наименьшую вероятность пропуска) из всех систем, у которых вероятность ложной тревоги не больше, чем у оптимальной системы.

Указанные условия и составляют основное содержание **критерия Неймана – Пирсона**. Как и критерий идеального наблюдателя, он является следствием критерия минимума среднего риска.

5.2.2. Оптимальное обнаружение сигналов

Формулировка задачи оптимального обнаружения

На интервале $[0, T]$ наблюдается аддитивная смесь $y(t)$ сигнала с полностью известными параметрами и шума, т. е.

$$y(t) = \theta \cdot U(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0] + x(t), \quad (5.19)$$

где $U(t)$ и $\psi(t)$ – известные функции, соответствующие огибающей и фазе сигнала.

Статистические свойства помехи $x(t)$, представляющей собой гауссовский шум, считаются известными:

– спектральная плотность мощности в полосе частот $[0, f_m]$ постоянна и равна W_0 ;

– математическое ожидание $m_x = 0$;

– корреляционная функция равна $R_x(\tau) = W_0 f_m \frac{\sin(2\pi f_m \tau)}{2\pi f_m \tau}$;

– дисперсия $D_x = \sigma_x^2 = R(0) = W_0 f_m$.

Задача оптимального обнаружения сводится к определению правила оценивания параметра обнаружения θ , т. е. к нахождению оценки θ^* данного параметра, которая оптимальна с точки зрения критерия минимума среднего риска или эквивалентного ему максимума весового критерия. Алгоритм оптимального обнаружения должен определить математические операции, по которым для каждой принятой реализации $y(t)$ можно найти наиболее рациональный ответ о наличии или отсутствии сигнала. Затем необходимо определить качественные показатели обнаружителя, т. е. условные вероятности D и F , и выяснить возможность технической реализации оптимального обнаружителя.

Методика решения задачи обнаружения

Общую методологию решения задачи обнаружения рассмотрим на примере одномерного оптимального обнаружения. При этом полагаем, что анализу подвергается мгновенное значение колебания (5.19) в момент времени t_k , т. е.

$$y(t_k) = \theta \cdot s(t_k) + x(t_k) = \theta \cdot U(t_k) \cos[\omega_0 t_k + \psi(t_k) + \varphi_0] + x(t_k).$$

Поскольку все значения функций $y(t_k)$, $s(t_k)$ и $x(t_k)$ за время наблюдения не меняются, то можно записать

$$y = \theta \cdot s + x.$$

На рис. 5.1. приведены графики законов распределения (плотности вероятности) случайной величины y при отсутствии ($\theta = 0$) и наличии ($\theta = 1$) полезного сигнала, формулы для которых имеют вид:

– при отсутствии сигнала:
$$p_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}};$$

– при наличии сигнала:
$$p_{cn}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-s)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Как видно из данных формул, график $p_{cn}(y)$ сдвинут по отношению к графику $p_n(y)$ на постоянную величину s , т. е. $p_{cn}(y) = p_n(y - s)$.

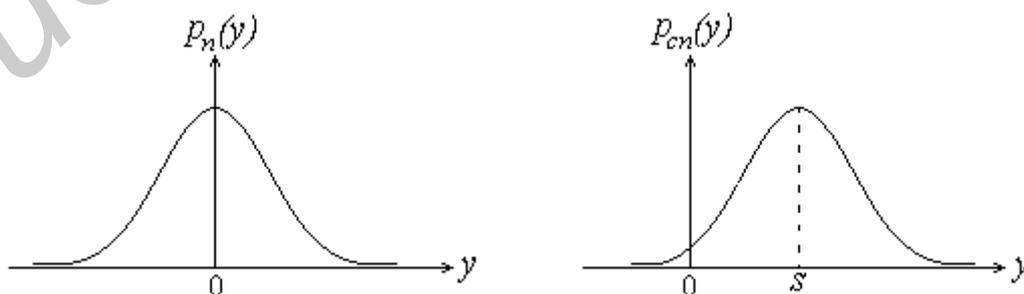


Рис. 5.1. Условные плотности вероятности $p_n(y)$ и $p_{cn}(y)$

Решение задачи оптимального обнаружения может быть описано функцией решения $\theta^*(y)$, которая в зависимости от величины y принимает одно из двух значений: 0 или 1. Если $\theta^* = 0$, то в составе y сигнала нет, т. е. $y = x$, если $\theta^* = 1$, то сигнал в составе y присутствует, т. е. $y = s + x$.

Для решения задачи оптимального обнаружения воспользуемся весовым критерием (5.16).

Условные вероятности правильного обнаружения D и ложной тревоги F зависят от интервала возможных значений y , которые анализируются в процессе принятия решения о наличии сигнала. Значения вероятностей D и F определяются как вероятности попадания случайной величины y в данный интервал при условии $y = s + x$ или $y = x$.

В общем случае для произвольной функции решения $\theta^*(y)$ выражения для D и F можно записать в следующем виде:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^*(y) p_{cn}(y) dy; \quad F = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^*(y) p_n(y) dy. \quad (5.20)$$

При вычислении этих интегралов пределы интегрирования будут определяться интервалом возможных значений y , которые анализируются в процессе принятия решения.

Выражение $D - l_0 F$, соответствующее весовому критерию, может быть представлено в виде

$$D - l_0 F = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^*(y) p_{cn}(y) dy - l_0 \int_{-\infty}^{\infty} \theta^*(y) p_n(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^*(y) p_n(y) [l(y) - l_0] dy, \quad (5.21)$$

$$l(y) = \frac{p_{cn}(y)}{p_n(y)}.$$

Величина $l(y)$ называется *отношением правдоподобия*. Отношение правдоподобия представляет собой отношение плотностей вероятности одной и той же реализации y при двух условиях: когда действует сигнал и помеха и когда действует только помеха. Так как $p_{cn}(y) > 0$ и $p_n(y) > 0$, то отношение правдоподобия всегда положительно.

Учитывая, что $p_{cn}(y) = p_n(y - s)$, это отношение можно записать в следующем виде:

$$l(y) = \frac{p_{cn}(y)}{p_n(y)} = \frac{p_n(y - s)}{p_n(y)}. \quad (5.22)$$

В соответствии с весовым критерием (5.16) оптимальной является система обнаружения, которая обеспечивает максимум полученного выражения. С этой целью для каждого y необходимо добиться наибольшего значения подынтегрального выражения путем выбора соответствующей функции решения $\theta^*(y)$. В результате выбора функции решения подынтегральное выражение ли-

бо обращается в нуль, если $\theta^*(y) = 0$, либо умножается на единицу, если $\theta^*(y) = 1$. Поэтому наибольшего значения подынтегрального выражения для каждого y , а значит, и всего интеграла в целом, можно достичь так:

- 1) выбираем $\theta^*(y) = 1$, если выражение $p_n(y)[l(y) - l_0]$ – положительно;
- 2) выбираем $\theta^*(y) = 0$, если выражение $p_n(y)[l(y) - l_0]$ – отрицательно.

Поскольку плотность вероятности $p_n(y)$ положительна при всех значениях y , то оптимальное правило решения задачи обнаружения может быть записано в виде

$$\theta_{opt}^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } l(y) > l_0, \\ 0, & \text{если } l(y) < l_0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Таким образом, критерием оптимального обнаружения может служить *критерий отношения правдоподобия*, являющийся следствием критерия минимума среднего риска. Согласно критерию отношения правдоподобия (5.23) решение о наличии сигнала принимается, если отношение правдоподобия превышает некоторую пороговую величину l_0 . Этот критерий наиболее часто используется на практике.

Таким образом, для решения задачи оптимального обнаружения необходимо вычислить отношение правдоподобия для принимаемого колебания. Полученное отношение правдоподобия сравнить с некоторым порогом, величина которого устанавливается так, чтобы вероятность ложной тревоги не превышала допустимой величины. Сравнить с порогом можно не только отношение правдоподобия, но и любую монотонно связанную с ним величину. В современных радиотехнических системах, например системах радиолокации, вычисление этой величины осуществляется автоматизировано с помощью оптимальных приемных устройств.

Воспользуемся исходным предположением о том, что помеха $x(t)$ представляет собой гауссовский шум. Тогда

$$l(y) = \frac{p_n(y-s)}{p_n(y)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(y-s)^2}{2\sigma_x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}} = e^{-\frac{(y-s)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_x^2}} = e^{-\frac{s^2}{2\sigma_x^2} + \frac{sy}{\sigma_x^2}}.$$

Полученное выражение свидетельствует о том, что функция $l(y)$ представляет собой монотонную возрастающую экспоненту при $s > 0$. Пороговому значению l_0 соответствует значение y_0 , т. е.

$$l_0 = l(y_0) = e^{-\frac{s^2}{2\sigma_x^2} + \frac{sy_0}{\sigma_x^2}}.$$

Следовательно, оптимальное правило решения задачи обнаружения может быть записано следующим образом:

$$\theta_{opt}^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y > y_0, \\ 0, & \text{если } y < y_0. \end{cases}$$

Графики законов распределения случайной величины y при отсутствии и наличии полезного сигнала и график оптимальной функции решения приведен на рис. 5.2.

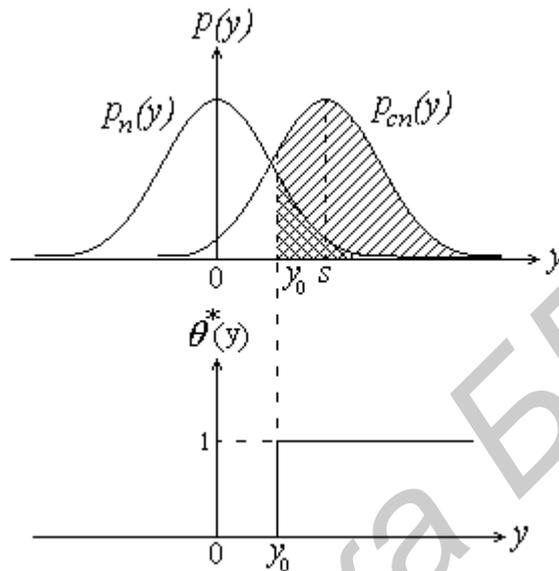


Рис. 5.2. Условные плотности вероятности $p_n(y)$, $p_{cn}(y)$ и оптимальной функции решения $\theta^*(y)$

Определим условные вероятности правильного обнаружения D и ложной тревоги F .

Условная вероятность правильного обнаружения

Вероятность правильного обнаружения D соответствует площади под кривой $p_{cn}(y)$ при $y \geq y_0$.

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^*(y) p_{cn}(y) dy = \int_{y_0}^{\infty} p_{cn}(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{y_0}^{\infty} e^{-\frac{(y-s)^2}{2\sigma_y^2}} dy. \quad (5.24)$$

Замена переменных: $t = \frac{y-s}{\sqrt{2}\sigma_y}$, $y = \sqrt{2}\sigma_y t + s$, $dy = \sqrt{2}\sigma_y dt$.

$$D = \frac{\sqrt{2}\sigma_y}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{\frac{y_0-s}{\sqrt{2}\sigma_y}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^{\frac{y_0-s}{\sqrt{2}\sigma_y}} e^{-t^2} dt \right].$$

Для вычисления полученного интеграла воспользуемся таблицами специальной функции, называемой функцией Лапласа (см. п. 3.9.1), равной

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Учитывая, что $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, получаем

$$D = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{y_0 - s}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{s - y_0}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right].$$

Таким образом, вероятность правильного обнаружения зависит от величины порога обнаружения и от величины полезного сигнала.

Условная вероятность ложной тревоги

Вероятность ложной тревоги F соответствует площади под кривой $p_n(y)$ при $y \geq y_0$.

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^*(y) p_n(y) dy = \int_{y_0}^{\infty} p_n(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{y_0}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} dy. \quad (5.25)$$

Данное выражение преобразуется аналогично предыдущему. В результате получается

$$F = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{y_0}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right].$$

Вероятность ложной тревоги зависит только от величины порога обнаружения. Следовательно, по заданному значению вероятности ложной тревоги можно выбрать порог обнаружения. При этом отсутствует необходимость учитывать априорные данные о наличии или отсутствии сигнала в смеси $y(t)$. В принципе это соответствует критерию Неймана – Пирсона.

Рассмотренный алгоритм анализа одномерного оптимального обнаружения можно применить для решения задачи обнаружения различных детерминированных сигналов на фоне флуктуационных помех. Для этого применяется режим дискретного наблюдения, при котором берутся отсчеты функции $y(t)$ через равные отрезки времени Δt . Величина этих отрезков определяется в соответствии с теоремой Котельникова в предположении, что спектральная плотность мощности помехи постоянна и равна W_0 в полосе частот $[0, f_m]$. При этом интервал наблюдения T разбивается на m равных элементарных интервалов, где $m = T/\Delta t$. В результате появляется возможность анализировать системы случайных величин $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, которые полностью характеризуются многомерными (m -мерными) плотностями вероятности. В дальнейшем рассматривается предельный случай, когда $\Delta t \rightarrow 0$.

Отношение правдоподобия в этом случае будет иметь вид

$$l(y_1, y_2, \dots, y_m) = \frac{P_{\Pi}(y_1 - s_1, y_2 - s_2, \dots, y_m - s_m)}{P_{\Pi}(y_1, y_2, \dots, y_m)}. \quad (5.26)$$

В соответствии с данной методикой в [6, 7] решены задачи обнаружения различных детерминированных сигналов на фоне флуктуационных помех. При этом получены отношения правдоподобия для различных сигналов, модели которых приведены в п. 5.1.3.

1. Для сигнала с полностью известными параметрами (5.4) отношение правдоподобия имеет вид

$$l[y(t)] = e^{-\frac{\mathcal{E}}{W_0} + \frac{2r}{W_0}}, \quad (5.27)$$

где \mathcal{E} – энергия сигнала, определяемая выражением $\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$;

r – корреляционный интеграл, равный

$$r = r[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)s(t) dt. \quad (5.28)$$

2. Для сигнала со случайной начальной фазой (5.5) отношение правдоподобия имеет вид

$$l[y(t)] = e^{-\frac{\mathcal{E}}{W_0}} \cdot I_0\left(\frac{2R}{W_0}\right), \quad (5.29)$$

где $I_0\left(\frac{2r}{W_0}\right)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;

$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ – частное значение параметра корреляционного интеграла при фиксированном значении фазы, т. е. интеграла

$$r[y(t)|\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)s(t, \varphi) dt = r_1 \cos \varphi + r_2 \sin \varphi;$$

$$r_1 = r_1[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot U(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)] dt;$$

$$r_2 = r_2[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot U(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t)] dt.$$

3. Для сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой (5.6) отношение правдоподобия имеет вид

$$l[y(t)] = \frac{W_0}{\mathcal{E} + W_0} e^{\frac{R^2}{W_0(\mathcal{E} + W_0)}}. \quad (5.30)$$

4. Для сигнала в виде пачки радиоимпульсов со случайными начальными фазами (5.7) отношение правдоподобия имеет вид

$$l[y(t)] = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{\mathcal{E}_k}{W_0}} \cdot I_0\left(\frac{2R_k}{W_0}\right), \quad (5.31)$$

где \mathcal{E}_k и R_k – энергия и параметр корреляционного интеграла k -го радиоимпульса пачки.

5. Для сигнала в виде пачки радиоимпульсов со случайными амплитудами и начальными фазами отношение правдоподобия имеет вид

$$l[y(t)] = \prod_{k=1}^n \frac{W_0}{\mathcal{E}_k + W_0} e^{\frac{R_k^2}{W_0(\mathcal{E}_k + W_0)}}. \quad (5.32)$$

Полученные отношения правдоподобия для основных моделей сигнала при наличии помехи в виде белого нормального шума лежат в основе процедуры синтеза устройств обнаружения.

Обнаружения сигнала с полностью известными параметрами на фоне флуктуационных помех

Рассмотрим процедуру решения задачи обнаружения сигнала с полностью известными параметрами на фоне флуктуационных помех с использованием рассмотренной выше методики..

Как видно из формулы (5.27), отношение правдоподобия является монотонной функцией корреляционного интеграла $r[y(t)]$. Другими словами, оптимальное решающее правило сохраняется для монотонной функции от корреляционного интеграла.

Из формулы (5.27) получим выражение для корреляционного интеграла.

$$\ln[l(y(t))] = -\frac{\mathcal{E}}{W_0} + \frac{2r}{W_0}; \quad r = r[y(t)] = \frac{W_0}{2} \left[\ln[l(y)] + \frac{\mathcal{E}}{W_0} \right].$$

Критерий отношения правдоподобия (5.23) при этом принимает следующий вид:

$$\theta_{opt}^*(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } r > r_n, \\ 0, & \text{если } r < r_n. \end{cases}$$

Здесь $r_n = \frac{W_0}{2} \left[\ln(l_0) + \frac{\mathcal{E}}{W_0} \right]$ – порог сравнения.

Таким образом, оптимальный обнаружитель сигнала с полностью известными параметрами должен вычислять корреляционный интеграл (5.28) и сравнивать его с порогом r_n .

Структурная схема оптимального обнаружителя может быть представлена в виде корреляционного приемника с пороговым устройством (рис. 5.3).

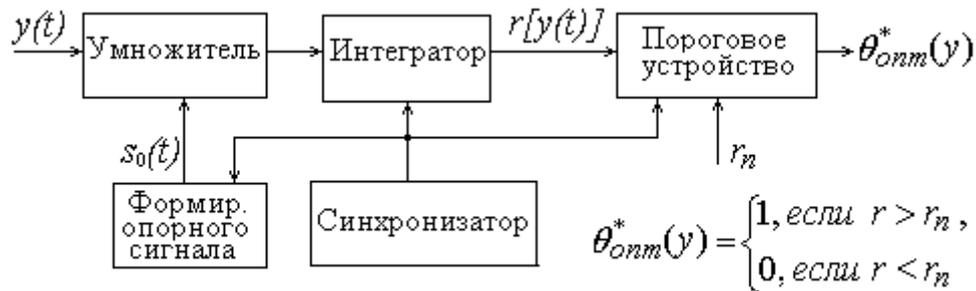


Рис. 5.3. Структурная схема корреляционного приемника

На умножитель подается опорное колебание $s_0(t)$, соответствующее ожидаемому сигналу, и принятое колебание $y(t)$. Интегратор вычисляет корреляционный интеграл, значение которого сравнивается с порогом r_n . Начало интегрирования и его окончание совпадают по времени с началом и окончанием ожидаемого сигнала $s_0(t)$, что обеспечивается устройством синхронизации. Уровень порога подбирается так, чтобы при отсутствии полезного сигнала вероятность превышения порога (вероятность ложной тревоги F) была не больше допустимой. Такой приемник называется корреляционным.

5.3. Оптимальные линейные фильтры

Процедуру вычисления корреляционного интеграла можно реализовать с помощью линейного фильтра, который называют оптимальным или согласованным фильтром. Для этого необходимо, чтобы фильтр формировал выходной сигнал, пропорциональный значению корреляционного интеграла для произвольного времени запаздывания t_3 полезного сигнала в составе принятого колебания. В этом случае корреляционный интеграл будет зависеть от времени запаздывания, т. е.

$$r = r(t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)s(t - t_3)dt. \quad (5.33)$$

Сравним данное выражение с известным интегралом Дюамеля, с помощью которого определяется детерминированный сигнал на выходе линейного фильтра временным методом [1], т. е.

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (5.34)$$

где $s_{\text{вх}}(t)$, $s_{\text{вых}}(t)$ – входной и выходной сигналы фильтра;

$h(t)$ – импульсная характеристика фильтра (реакция фильтра на входной сигнал в виде δ -функции).

В результате сравнения можно сделать вывод, что процессу получения на выходе фильтра значений корреляционного интеграла $r(t_3)$ с точностью до по-

стоянного множителя A и с некоторой задержкой t_0 должно соответствовать равенство

$$s_{\text{вых}}(t_3 + t_0) = Ar(t_3). \quad (5.35)$$

Величина произвольной константы A определяет уровень сигнала на выходе фильтра, который зависит от величины порога обнаружения, обеспечивающего необходимую вероятность ложной тревоги.

Учитывая (5.33) и (5.34), равенство (5.35) можно записать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)h(t_3 + t_0 - \tau)d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)s(\tau - t_3)d\tau.$$

Замена переменных: $t_3 + t_0 - \tau = t$; $\tau = t_3 + t_0 - t$; $d\tau = -dt$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t_3 + t_0 - t)h(t)dt = A \int_{-\infty}^{\infty} y(t_3 + t_0 - t)s(t_0 - t)dt.$$

Данное равенство выполняется, если

$$h(t) = h_{\text{opt}}(t) = As(t_0 - t). \quad (5.36)$$

Таким образом, импульсная характеристика оптимального линейного фильтра с точностью до постоянного множителя равна зеркальному отображению полезного сигнала, сдвинутому вправо на величину t_0 . Величина t_0 должна выбираться так, чтобы соблюдалось условие физической реализуемости фильтра, которое устанавливает, что $h(t) = 0$ при $t < 0$. Отсюда следует, что длительность задержки в оптимальном фильтре не может быть меньше длительности сигнала, т. е. $t_0 \geq T$.

В дальнейшем более детально рассмотрим основные проблемы оптимальной линейной фильтрации. Для этого вначале определим частотный коэффициент передачи фильтра, обеспечивающего максимум отношения сигнала к шуму в определенный момент времени t_0 . Сформулируем данную задачу таким образом, чтобы можно было использовать спектральный метод анализа линейных цепей (рис. 5.4).

На вход линейного фильтра подается аддитивная смесь полезного сигнала $s_{\text{сх}}(t)$ и шума $x(t)$, т. е. смесь $y(t) = s_{\text{сх}}(t) + x(t)$. Полезный сигнал полностью известен – форма, параметры, положение на оси времени. Шум – это стационарный случайный процесс с известными статистическими характеристиками. Требуется синтезировать фильтр, обеспечивающий на выходе наибольшее отношение пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению шума (см. рис. 5.4). Поставленную задачу вначале решим при условии, что $x(t)$ – это реализация белого шума, т. е. $W_x(\omega) = W_0$.

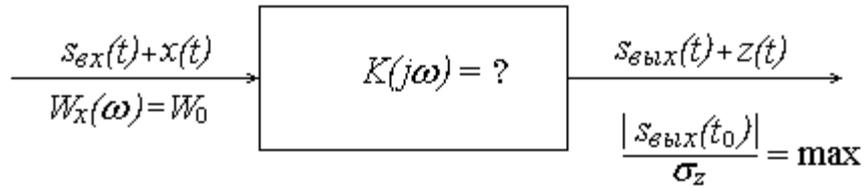


Рис. 5.4. Постановка задачи оптимальной фильтрации

5.4. Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра

5.4.1. Определение частотного коэффициента передачи согласованного фильтра

Определим отношение $|s_{вых}(t_0)|/\sigma_z$ и оценим его значение. Для этого необходимо определить $s_{вых}(t_0)$ и σ_z . Согласованный фильтр синтезируется в рамках линейных устройств. Принцип суперпозиции – свойство линейных устройств. Реакцию линейного устройства на сумму воздействий можно определить как сумму реакций на каждое воздействие в отдельности. Воспользуемся спектральным методом.

Определение $s_{вых}(t_0)$

1. Спектр входного сигнала $S_{ex}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{ex}(t)e^{-j\omega t} dt$.
2. Спектр выходного сигнала $S_{вых}(j\omega) = S_{ex}(j\omega) \cdot K(j\omega)$.
3. Выходной сигнал

$$s_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{вых}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ex}(j\omega) \cdot K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Определение σ_z

1. Спектр шума на входе $W_x(\omega) = W_0$.
2. Спектр шума на выходе $W_z(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 = W_0 \cdot |K(j\omega)|^2$.
3. Корреляционная функция шума на выходе (полагаем, что $m_y = 0$)

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_z(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

4. Среднеквадратичное значение шума

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} = \sqrt{R_z(0)} = \sqrt{\frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}.$$

Таким образом, можно записать

$$\frac{|s_{\text{блх}}(t_0)|}{\sigma_z} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) \cdot K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|}{\left(\frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}}. \quad (5.37)$$

Для определения максимального значения отношения $\frac{|s_{\text{блх}}(t_0)|}{\sigma_z}$ и условия, при которых это значение устанавливается, воспользуемся известным неравенством Коши – Буняковского для комплексных функций:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (5.38)$$

Неравенство превращается в равенство при условии

$$f_2(x) = A f_1^*(x). \quad (5.39)$$

Докажем это:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(x) dx \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot A \cdot f_1^*(x) dx \right| = \left| A \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \right| \\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx \right]^{1/2} &= \left[A \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_1^*(x)|^2 dx \right]^{1/2} = \left| A \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \right|. \end{aligned}$$

Поставим в соответствие обозначения числителя (5.37) и выражения (5.38).

$$f_1(x) \rightarrow S_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega t_0}; \quad f_2(x) \rightarrow K(j\omega). \quad (5.40)$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \frac{|s_{\text{блх}}(t_0)|}{\sigma_z} &\leq \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right| \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^{1/2}}{\left(\frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}} \\ \frac{|s_{\text{блх}}(t_0)|}{\sigma_z} &\leq \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) d\omega \right|^{1/2}}{\sqrt{W_0}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\text{вх}}}{W_0}}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{E}_{\text{вх}}$ – полная энергия входного сигнала.

Таким образом, максимальное отношение сигнала к шуму при заданных

условиях равно

$$\left(\frac{|s_{\text{блх}}(t_0)|}{\sigma_z} \right)_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\text{вх}}}{W_0}}.$$

Воспользуемся условием (5.39) и с учетом обозначений (5.40) запишем соотношение между $K(j\omega)$ и $S_{\text{ex}}(j\omega)e^{j\omega t_0}$, обеспечивающее максимум отношения $\frac{|s_{\text{вых}}(t_0)|}{\sigma_z}$:

$$K(j\omega) = AS_{\text{ex}}^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}. \quad (5.41)$$

Таким образом, получен частотный коэффициент передачи фильтра, максимизирующего отношение сигнала к шуму. Фильтр называется согласованным, так как его частотная характеристика согласована со спектральной плотностью мощности входного сигнала.

5.4.2. Анализ полученных результатов

Полученное выражение (5.41) можно записать

$$K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = AS_{\text{ex}}(\omega)e^{-j\varphi_s(\omega)} \cdot e^{-j\omega t_0}.$$

Отсюда можно получить два условия, которым должны удовлетворять амплитудно-частотная $K(\omega)$ и фазочастотная $\varphi(\omega)$ характеристики согласованного фильтра:

1. $K(\omega) = AS_{\text{ex}}(\omega)$.
2. $\varphi(\omega) = -(\varphi_s(\omega) + \omega t_0)$.

Физический смысл полученных результатов.

1. Амплитудно-частотная характеристика фильтра с точностью до постоянного множителя совпадает с амплитудным спектром входного сигнала. Фильтр пропускает спектральные составляющие шума неравномерно: больше ослабляет там, где меньше сигнальные спектральные составляющие. Это уменьшает шум на выходе. Ослабление сигнала выражено меньше, так как ослабляются незначительные по модулю сигнальные составляющие. В результате получаем значительное ослабление шума относительно сигнала.

2. Фазочастотная характеристика фильтра свидетельствует, что фазовый сдвиг фильтра на частоте определенной спектральной составляющей равен по величине и обратный по знаку начальной фазе этой спектральной составляющей. В результате прохождения сигнала через фильтр с такой ФЧХ все составляющие имеют одинаковую фазу. При их суммировании будет получен максимальный по величине сигнал. Пик сигнала будет задержан относительно входного сигнала на величину t_0 .

При $t = t_0$ выходной сигнал пропорционален энергии входного сигнала, т. е. $s_{\text{вых}}(t) = A \mathcal{E}_{\text{ex}}$. Покажем это:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ex}}(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\text{ex}}(j\omega)|^2 \cdot e^{j\omega(t-t_0)} d\omega.$$

Известно равенство Парсеваля

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega.$$

Тогда при $t = t_0$ сигнал равен

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\text{вх}}(j\omega)|^2 d\omega = A\mathcal{E}_{\text{вх}}.$$

Очевидно, что для образования максимума выходного сигнала требуется использовать всю энергию поступающего на вход сигнала. Это возможно не раньше окончания его действия. Другими словами, величина t_0 должна удовлетворять условию $t_0 \geq \tau_u$.

5.5. Характеристики согласованного фильтра

5.5.1. Импульсная характеристика согласованного фильтра

Спектр входного сигнала и частотный коэффициент передачи согласованного фильтра связаны между собой соотношением (5.41). Очевидно, что должна также существовать тесная связь между временными характеристиками сигнала и фильтра.

Известно, что импульсная характеристика фильтра $h(t)$ связана с частотным коэффициентом передачи $K(j\omega)$ соотношением

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Подставим в эту формулу выражение (5.41):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} CS_{\text{вх}}^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}^*(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega.$$

Учитывая, что $S_{\text{вх}}^*(j\omega) = S_{\text{вх}}(-j\omega)$, можно записать

$$h(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(-j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) e^{j\omega(t_0-t)} d\omega = As_{\text{вх}}(t_0 - t).$$

Таким образом,

$$h(t) = As_{\text{вх}}(t_0 - t). \quad (5.42)$$

Вывод. Импульсная характеристика согласованного фильтра с точностью до постоянного множителя совпадает с зеркальным отображением входного сигнала, сдвинутым на t_0 вправо. Аналогичный результат был получен в подразд. 5.3 [формула (5.36)].

Полученные результаты позволяют сформулировать необходимое условие физической реализуемости фильтра: время t_0 должно быть больше τ_u . В противном случае до момента поступления импульсная характеристика согласованного фильтра была бы не равна нулю при $t < 0$, т. е. до момента поступления входного сигнала. Это условие требует, чтобы длительность сигнала была конечной, т. е. применение согласованного фильтра возможно при импульсном сигнале (или при ограниченной по длительности пачки импульсов).

Замечательная особенность согласованного фильтра в том, что возможность обнаружения сигнала зависит от его энергии, а не от формы. Можно добиться надежного обнаружения сигнала малой амплитуды, если соответствующим образом увеличить его длительность. При этом уменьшается полоса частот, занимаемая сигналом, и уменьшается скорость передачи информации по каналу связи.

5.5.2. Сигнал на выходе согласованного фильтра

Согласованный фильтр обеспечивает максимум отношения сигнала к шуму. При этом форма выходного сигнала может отличаться от формы входного сигнала, так как задача согласованного фильтра ограничивается обнаружением сигнала без необходимости измерения каких-либо его параметров.

Для определения формы сигнала на выходе согласованного фильтра воспользуемся выражением

$$\begin{aligned} s_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вых}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(j\omega) S_{\text{вх}}^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\text{вх}}(j\omega)|^2 e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$s_{\text{вых}}(t) = AR_{\text{вх}}(t - t_0) \quad (5.43)$$

Вывод. Сигнал на выходе согласованного фильтра с точностью до постоянного множителя совпадает с корреляционной функцией входного сигнала, сдвинутой вправо на величину t_0 . Другими словами, согласованный фильтр изменяет форму сигнала (кроме сигнала вида $\sin x/x$, у которого форма корреляционной функции совпадает с формой сигнала).

Заметим, что

$$s_{\text{вых}}(t_0) = AR_{\text{вх}}(0) = A\mathcal{E}_{\text{вх}}.$$

Это значит, что в момент t_0 значение выходного сигнала пропорционально его энергии (см. п. 5.4.2).

5.5.3. Характеристики шума на выходе согласованного фильтра

Необходимо отметить нормализацию шума на выходе, так как фильтр имеет ограниченную полосу пропускания, равную эффективной полосе частот спектра входного полезного сигнала. В то же время, входной шум имеет полосу $\Delta\omega_{\phi} = \infty$ (белый шум).

Спектральная плотность шума на выходе согласованного фильтра равна

$$W_z(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 = W_0 \cdot A |S_{ex}(j\omega)|^2.$$

$$\text{Тогда } R_z(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{AW_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{ex}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

$$\text{Окончательно } R_z(\tau) = AW_0 R_{ex}(\tau). \quad (5.44)$$

Вывод. Корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с корреляционной функцией входного сигнала, а следовательно, с самим выходным сигналом.

Энергия шума

$$\sigma_z^2 = R_z(0) = AW_0 R_{ex}(0) = AW_0 \mathcal{E}_{ex}.$$

Тогда

$$\left(\frac{P_c}{P_i} \right)_{\text{вых}} = \frac{s_{\text{вых}}^2(t)}{D_z} = \frac{A \mathcal{E}_{ex}^2}{AW_0 \mathcal{E}_{ex}} = \frac{\mathcal{E}_{ex}}{W_0}.$$

Этот результат был получен в п. 5.4.1.

5.5.4. Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра при небелом шуме на входе

Рассмотренный ранее согласованный фильтр обеспечивает максимум отношения сигнала к шуму при условии, что на входе кроме полезного сигнала имеется белый шум. Определенный интерес представляет случай синтеза согласованного фильтра при наличии на его входе небелого шума. Для этого необходимо определить частотную характеристику фильтра.

Пусть на вход фильтра поступает аддитивная смесь полезного сигнала и шума со спектральной плотностью мощности $W_x(\omega)$ (рис. 5.5). Очевидно, что искомая частотная характеристика фильтра должна быть согласована не только со спектром входного сигнала, но и спектром шума. Данную задачу можно решить рассмотренным ранее методом максимизации отношения сигнала к шуму. Однако наиболее целесообразно воспользоваться методом, предусматривающим использование полученных результатов. Для этого приведем ситуацию с небелым шумом к рассмотренному ранее случаю белого шума (см. рис. 5.5).

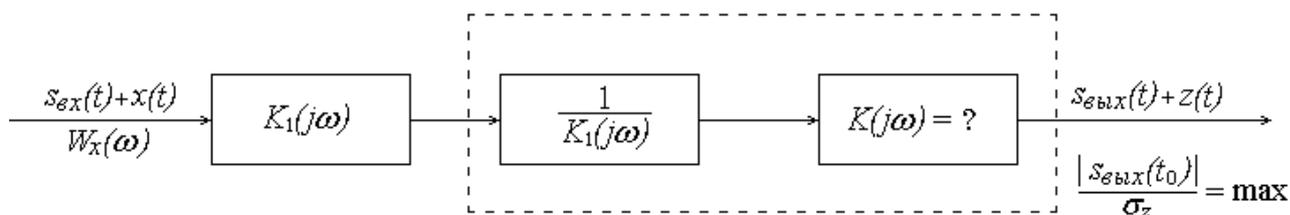


Рис. 5.5. Постановка задачи оптимальной фильтрации при небелом шуме

Обозначения на рис. 5.5:

1. $K(j\omega)$ – искомая частотная характеристика.
2. $K_1(j\omega)$ и $1/K_1(j\omega)$ – частотные характеристики вспомогательных фильтров (четырёхполюсников).

Введение вспомогательных фильтров не влияет на работу устройства, так как

$$K_1(j\omega) \cdot 1/K_1(j\omega) = 1.$$

Вид частотной характеристики $K_1(j\omega)$ не имеет значения.

Пусть

$$K_1(j\omega) = \sqrt{\frac{W_0}{W_x(\omega)}}.$$

Тогда спектр шума на выходе первого четырёхполюсника

$$W_1(\omega) = W_x(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 = W_x(\omega) \cdot \frac{W_0}{W_x(\omega)} = W_0.$$

В свою очередь спектр сигнала на выходе первого четырёхполюсника

$$S_1(j\omega) = S_{ex}(j\omega) K_1(j\omega).$$

Таким образом, на входе устройства, ограниченного на рис. 5.5 пунктирной линией, имеется смесь полезного сигнала со спектром $S_1(j\omega)$ и белого шума. Получена модель, рассмотренная ранее. Пользуясь полученными результатами и рис. 5.5, можно записать

$$\frac{1}{K_1(j\omega)} \cdot K(j\omega) = AS_1^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} = AS_{ex}^*(j\omega) K_1^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}.$$

Отсюда

$$K(j\omega) = AS_{ex}^*(j\omega) |K_1(j\omega)|^2 e^{-j\omega t_0}.$$

$$K(j\omega) = AW_0 \frac{S_{ex}^*(j\omega)}{W_x(\omega)} e^{-j\omega t_0}. \quad (5.45)$$

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики фильтра имеют вид

$$K(\omega) = AW_0 \frac{S_{ex}(\omega)}{W_x(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = -(\varphi_s(\omega) + \omega t_0).$$

Физический смысл полученных результатов.

1. Амплитудно-частотная характеристика фильтра пропорциональна амплитудному спектру входного сигнала. Фильтр пропускает с большим усилением составляющие на тех частотах, где сосредоточена основная доля мощности полезного сигнала.

2. Амплитудно-частотная характеристика фильтра обратно пропорциональна спектру шума. Фильтр имеет меньшее усиление на тех частотах, где сосредоточена основная мощность шума. По существу подчеркиваются те компоненты полезного сигнала, при которых интенсивность шума меньше, т. е. те частотные составляющие спектра сигнала, которые имеют превышение над шумом на данной частоте.

3. Фазочастотная характеристика фильтра свидетельствует, что фазовый сдвиг равен по величине и обратный по знаку начальной фазе соответствующей спектральной составляющей. В результате прохождения сигнала через фильтр с такой ФЧХ все составляющие имеют одинаковую фазу. При их суммировании будет получен максимальный по величине сигнал. Пик сигнала будет задержан относительно входного сигнала на величину t_0 .

5.5.5. Синтез сигнала, согласованного с фильтром

До сих пор решался вопрос синтеза схемы согласованного фильтра для заданного сигнала. Заслуживает внимания проблема синтеза сигнала для заданного фильтра, чтобы он стал согласованным для этого сигнала.

Пусть имеется фильтр с частотной характеристикой $K(j\omega)$. Требуется определить такой входной сигнал, чтобы фильтр с данной частотной характеристикой стал для сигнала согласованным.

Известно, что $K(j\omega) = AS_{\text{ex}}^*(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$, тогда $K^*(j\omega) = AS_{\text{ex}}(j\omega) \cdot e^{j\omega t_0}$.

Отсюда можно определить спектральную плотность $S_{\text{ex}}(j\omega)$, которую должен иметь входной сигнал, чтобы фильтр был согласованным для сигнала.

$$S_{\text{ex}}(j\omega) = \frac{K^*(j\omega)}{Ae^{j\omega t_0}} = AK^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Таким образом,
$$s_{\text{ex}}(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^*(j\omega)e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.46)$$

Известно, что импульсная характеристика определяется обратным преобразованием Фурье от частотной характеристики:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Тогда полученную формулу (5.46) для $s_{\text{ex}}(t)$ можно рассматривать как импульсную характеристику $h_1(t)$ фильтра с частотной характеристикой

$$K_1(j\omega) = AK^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (5.47)$$

Характеристика $K_1(j\omega)$ является частотной характеристикой фильтра, «обратного» фильтру с частотной характеристикой $K(j\omega)$. Под «обратным» понимается фильтр, частотная характеристика которого комплексно сопряжена с частотной характеристикой исследуемого фильтра. При анализе выражения (5.47) можно не учитывать постоянную задержку на t_0 .

Таким образом, можно сказать, что $s_{\text{ex}}(t) = h_1(t)$, где $h_1(t)$ – импульсная характеристика «обратного» фильтра с частотной характеристикой $K_1(j\omega)$.

В результате, поставив перед исследуемым фильтром фильтр с частотной характеристикой, которая определяется формулой (5.47), и подав на его вход δ -функцию, получим искомый сигнал. Объясняется это тем, что реакция устройства на δ -функцию есть импульсная характеристика.

5.6. Синтез согласованных фильтров

Полученные результаты дают возможность найти структуру устройств для оптимальной фильтрации сигналов известной формы.

5.6.1. Синтез фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом

Пусть входной сигнал представляет собой видеоимпульс прямоугольной формы (рис. 5.6). Процедура синтеза предполагает определение частотного коэффициента передачи по формуле (5.41). Для этого необходимо определить спектральную плотность входного сигнала.

$$S_{\text{ex}}(j\omega) = \int_0^{\tau_u} E e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\tau_u} = \frac{E}{-j\omega} (e^{-j\omega\tau_u} - 1) = \frac{E}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_u}). \quad (5.48)$$

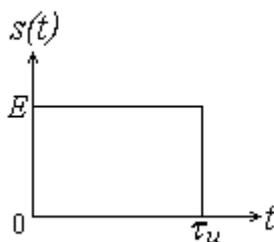


Рис. 5.6. Прямоугольный видеоимпульс

Полагаем, что $t_0 = \tau_u$. Тогда частотный коэффициент передачи согласованного фильтра имеет вид

$$K(j\omega) = AS_{\text{ex}}^*(j\omega) e^{-j\omega\tau_u} = \frac{AE}{-j\omega} (1 - e^{j\omega\tau_u}) e^{-j\omega\tau_u} = \frac{K_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_u}). \quad (5.49)$$

Анализ полученного выражения позволяет сделать вывод, что в состав согласованного фильтра должны входить:

1. Усилитель с коэффициентом усиления $K_0 = AE$.
2. Интегрирующее звено с частотной характеристикой $K(j\omega) = 1/j\omega$.
3. Линия задержки с частотной характеристикой $K(j\omega) = e^{-j\omega\tau_u}$.
4. Вычитатель или сумматор с инвертором.

Схема фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом, представлена на рис. 5.7.

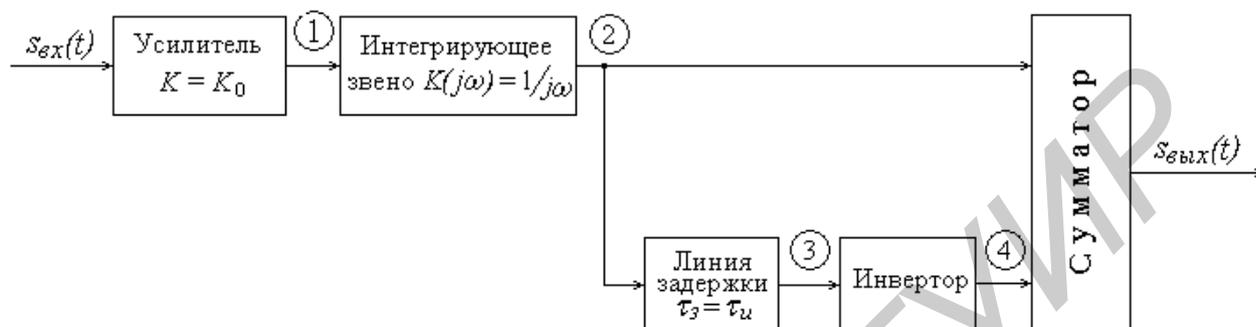


Рис. 5.7. Согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса

На выходах устройств согласованного фильтра (выходы обозначены цифрами 1, 2, 3 и 4) формируются сигналы, представленные на рис. 5.8.

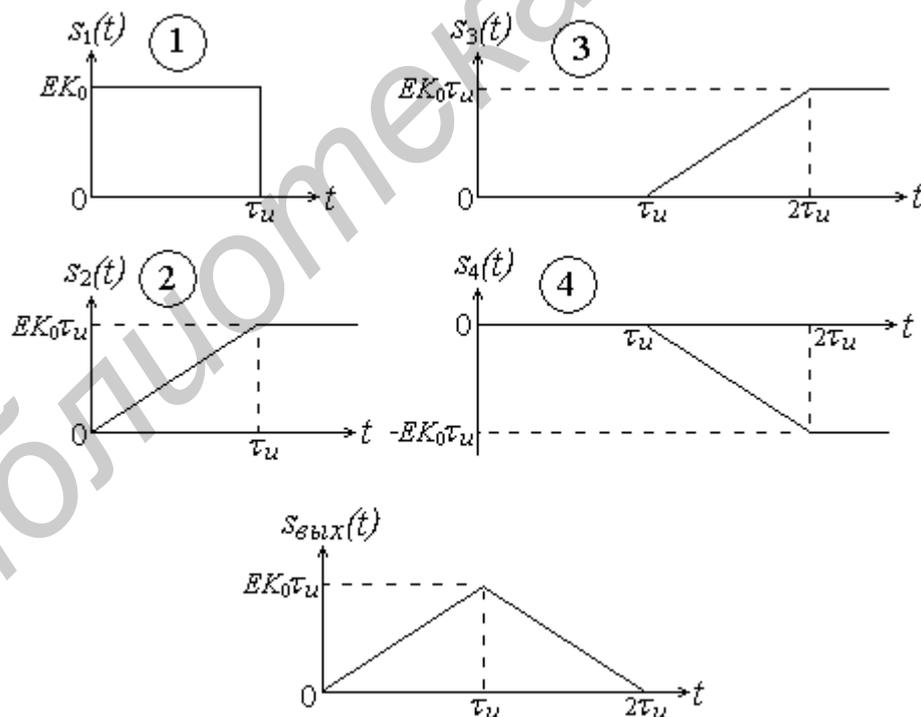


Рис. 5.8. Графики сигналов на выходах соответствующих устройств фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом

Как видно из рис. 5.8, при сложении сигналов $s_2(t)$ и $s_4(t)$ на выходе фильтра будет сформирован сигнал $s_{вых}(t)$, соответствующий корреляционной

функции входного сигнала, сдвинутой вправо на τ_u , т. е. $s_{\text{вх}}(t) = R_{\text{вх}}(t - \tau_u)$ [см. п. 5.5.2, формула (5.43)]. Принимая значение коэффициента усиления $K_0 = AE$ (5.49), получаем

$$s_{\text{вх}}(\tau) = \begin{cases} AE^2\tau & \text{при } 0 \leq \tau < \tau_u, \\ AE^2(2\tau_u - \tau) & \text{при } \tau_u \leq \tau \leq 2\tau_u, \\ 0 & \text{при } \tau < 0, \tau > 2\tau_u. \end{cases}$$

Аналогично можно пояснить форму импульсной характеристики согласованного фильтра (5.42). При этом необходимо учесть, что импульсная характеристика – это реакция фильтра на δ -функцию, а интеграл от δ -функции – это единичный скачек (функция Хевисайда).

5.6.2. Синтез фильтра, согласованного с прямоугольным радиоимпульсом

Пусть входной сигнал представляет собой радиоимпульс прямоугольной формы (рис. 5.9). Полагаем, что длительность импульса равна целому числу периодов несущего колебания.

Известно, что спектральную плотность радиоимпульса можно определить по формуле

$$S(j\omega) = \frac{1}{2} S_{\text{ос}}[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S_{\text{ос}}[j(\omega + \omega_0)], \quad (5.50)$$

где $S_{\text{ос}}(j\omega)$ – спектральная плотность огибающей радиоимпульса.

В рассматриваемом случае

$$S_{\text{ос}}(j\omega) = \frac{E}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_u}).$$

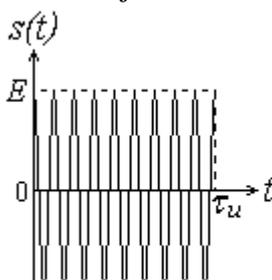


Рис. 5.9. Прямоугольный радиоимпульс

Тогда в области положительных частот

$$S(j\omega) = \frac{1}{2} S_{\text{ос}}[j(\omega - \omega_0)] = \frac{E}{2j(\omega - \omega_0)} (1 - e^{-j(\omega - \omega_0)\tau_u}).$$

Полагая $t_0 = \tau_u$, получаем выражение для частотного коэффициента передачи фильтра, согласованного с прямоугольным радиоимпульсом:

$$K(j\omega) = \frac{AE}{-2j(\omega - \omega_0)} (1 - e^{j(\omega - \omega_0)\tau_u}) e^{-j\omega\tau_u} = \frac{AE}{2j(\omega - \omega_0)} (e^{-j\omega_0\tau_u} - e^{-j\omega\tau_u}).$$

$$K(j\omega) = \frac{AE e^{-j\omega_0\tau_u}}{2j(\omega - \omega_0)} (1 - e^{-j(\omega - \omega_0)\tau_u}).$$

Рассмотрим, каким устройством можно реализовать частотную характеристику $K(j\omega) = \frac{1}{2j(\omega - \omega_0)}$. Для этого выполним анализ частотной характеристики параллельного колебательного контура с большой добротностью, резонансная частота которого равна ω_0 .

Комплексное входное сопротивление контура, являющееся его частотной характеристикой, равно

$$Z(j\omega) = \frac{R_0}{1 + j2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}} = \frac{R_0}{1 + j2 \frac{R_0}{\rho} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + j2C(\omega - \omega_0)},$$

где $R_0 = Z(j\omega_0) = L/RC$ – сопротивление контура на резонансной частоте.

При большой добротности контура $\frac{1}{R_0} \approx 0$. Следовательно,

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j2C(\omega - \omega_0)}.$$

В свою очередь, при целом отношении τ_u/T (длительности сигнала и периода несущей частоты) можно записать:

$$e^{-j\omega_0\tau_u} = e^{-j \frac{2\pi}{T} \tau_u} = 1; \quad e^{-j(\omega - \omega_0)\tau_u} = e^{-j\omega\tau_u} e^{j \frac{2\pi}{T} \tau_u} = e^{-j\omega\tau_u}.$$

Тогда

$$K(j\omega) = \frac{AE}{j2C(\omega - \omega_0)} (1 - e^{-j\omega\tau_u}).$$

Структура согласованного фильтра представлена на рис. 5.10.

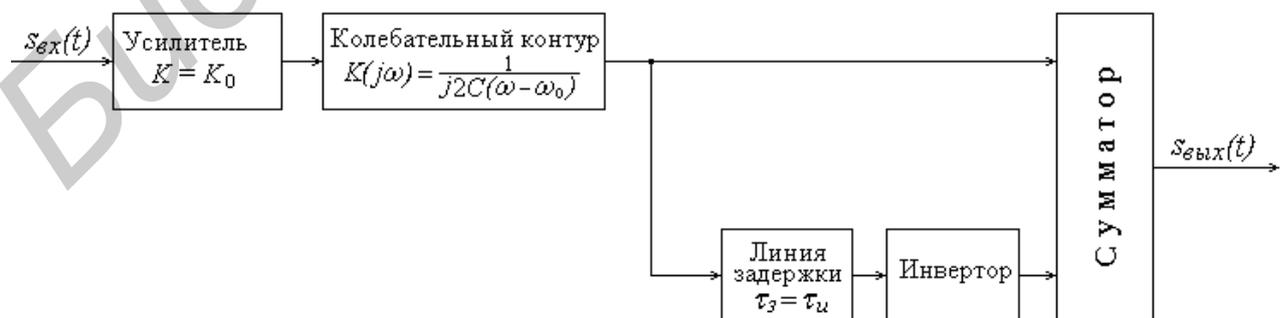


Рис. 5.10. Согласованный фильтр для прямоугольного радиоимпульса

5.6.3. Синтез фильтра, согласованного с пачкой прямоугольных видеоимпульсов

Пусть входной сигнал представляет собой пачку из n видеоимпульсов прямоугольной формы, длительность импульсов в пачке – τ_u (рис. 5.11).

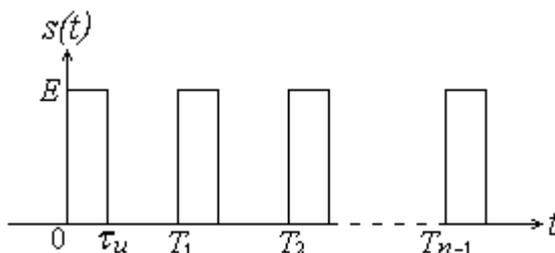


Рис. 5.11. Пачка прямоугольных видеоимпульсов

Учитывая свойства преобразования Фурье и формулу для спектра одиночного видеоимпульса, можно записать выражение для спектра пачки видеоимпульсов:

$$S(j\omega) = S_1(j\omega) \left(1 + e^{-j\omega T_1} + e^{-j\omega T_2} + \dots + e^{-j\omega T_{n-1}} \right),$$

где $S_1(j\omega)$ – спектральная плотность одиночного видеоимпульса.

Полагаем, что $t_0 = T_{n-1} + \tau_u$. Тогда частотная характеристика согласованного фильтра имеет вид

$$K(j\omega) = AS^*(j\omega)e^{-j\omega(T_{n-1}+\tau_u)} = AS_1^*(j\omega)e^{-j\omega(T_{n-1}+\tau_u)} \left(1 + e^{j\omega T_1} + e^{j\omega T_2} + \dots + e^{j\omega T_{n-1}} \right).$$

$$K(j\omega) = AS_1^*(j\omega)e^{-j\omega\tau_u} \left(e^{-j\omega T_{n-1}} + e^{-j\omega(T_{n-1}-T_1)} + e^{-j\omega(T_{n-1}-T_2)} + \dots + 1 \right).$$

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) \cdot \left(e^{-j\omega T_{n-1}} + e^{-j\omega(T_{n-1}-T_1)} + e^{-j\omega(T_{n-1}-T_2)} + \dots + 1 \right), \quad (5.51)$$

где $K_1(j\omega)$ – частотная характеристика фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом.

Схема искомого согласованного фильтра представлена на рис. 5.12. Очевидно, что максимальный отклик на выходе сумматора будет наблюдаться тогда, когда сигналы от всех импульсов пачки одновременно окажутся на всех его входах. Эффективность работы устройства тем выше, чем длиннее пачка

Построение согласованного фильтра значительно упрощается, когда входной сигнала представляет собой последовательность равноотстоящих одинаковых импульсов, т. е. когда $T_1 = T$, $T_2 = 2T$, ..., $T_{n-1} = (n-1)T$. Для этого случая выражение (5.51) приобретает вид

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) \cdot \left(1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + \dots + e^{-j(n-1)\omega T} \right) = K_1(j\omega) \cdot K_2(j\omega).$$

При большом числе n выражение в скобках можно свернуть по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$K_2(j\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}}$$

Таким образом, согласованный фильтр можно построить в виде каскадного соединения двух четырехполюсников (рис. 5.13).

Передаточная частотная характеристика цепи, обведенная штриховой линией, равна

$$K_2(j\omega) = \frac{1}{1 - k_3 e^{-j\omega T}}$$

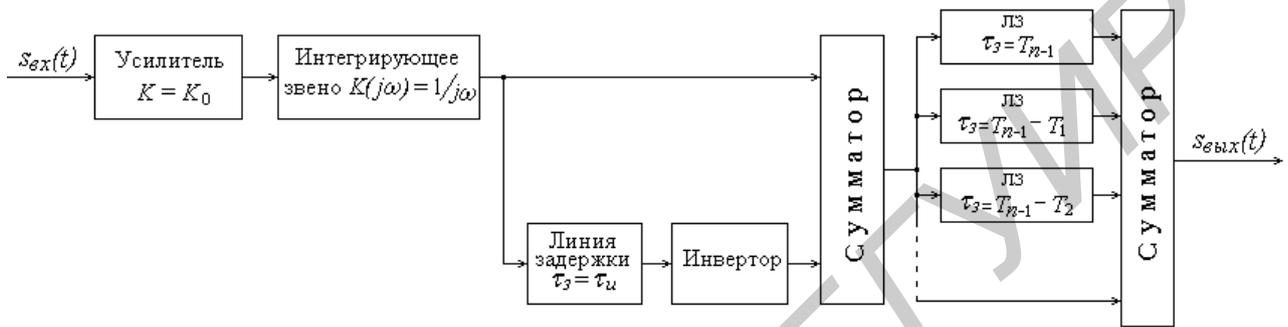


Рис. 5.12. Фильтр, согласованный с пачкой прямоугольных видеоимпульсов

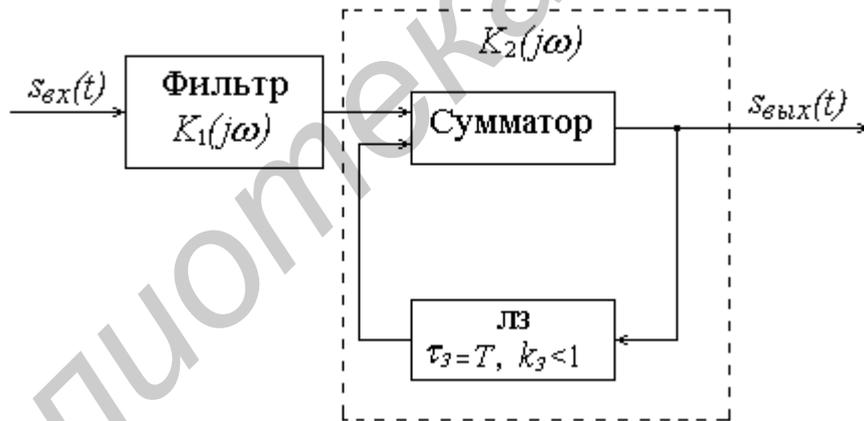


Рис. 5.13. Гребенчатый фильтр в составе фильтра, согласованного с пачкой прямоугольных видеоимпульсов

На рис. 5.14 представлена амплитудно-частотная характеристика гребенчатого фильтра.

5.7. Корреляционный прием

Рассмотрим ситуацию, при которой на вход фильтра, согласованного с сигналом $s_1(t)$, поступает сигнал $s_2(t)$, который отличается от сигнала $s_1(t)$. Выражение для выходного сигнала получим спектральным методом.

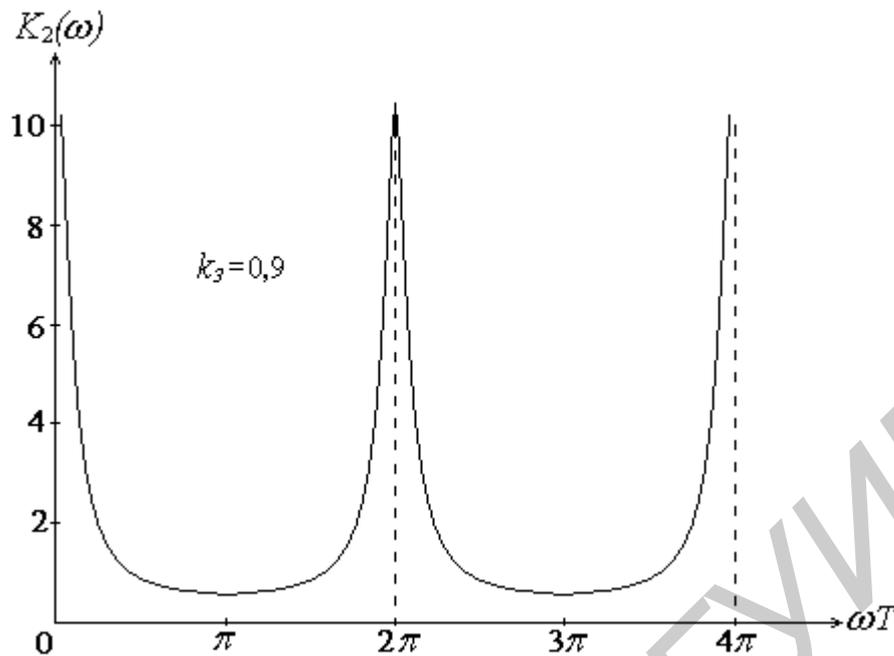


Рис. 5.14. АЧХ гребенчатого фильтра

1. Определяем спектр выходного сигнала

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = S_2(j\omega) \cdot K(j\omega) = AS_2(j\omega) \cdot S_1^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

2. Определяем выходной сигнал

$$\begin{aligned} s_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вых}}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega)S_1^*(j\omega)e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega)S_1^*(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = CR_{21}(t-t_0). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Таким образом, выходной сигнал согласованного фильтра представляет собой (с точностью до постоянного множителя) взаимокорреляционную функцию сигналов $s_2(t)$ и $s_1(t)$. Другими словами, согласованный фильтр обладает свойством:

- вычислять автокорреляционную функцию сигнала, для которого фильтр является согласованным;
- взаимокорреляционную функцию сигнала, который отличается от сигнала, для которого фильтр является согласованным.

Свойство согласованных фильтров вычислять взаимокорреляционную функцию входного сигнала и сигнала, для которого фильтр является согласованным, лежит в основе ряда методов приема, объединенных под общим названием корреляционного приема.

Пример. Рассмотрим случай (типичный для радиолокации), когда на вход фильтра, согласованного с сигналом $s(t)$, поступает сигнал $s(t-\tau_0)$ той же

формы, но с неизвестным временем запаздывания τ_0 . Тогда в соответствии с формулой (5.52) выходной сигнал будет иметь вид

$$s_{\text{вых}}(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - \tau_0) s(t_0 - t + \tau) d\tau = \left. \begin{array}{l} \tau - \tau_0 = x \\ \tau = x + \tau_0 \\ d\tau = dx \end{array} \right| = A \int_{-\infty}^{\infty} s(x) s(t_0 - t + x + \tau_0) dx.$$

Тогда

$$s_{\text{вых}}(t) = A \int_{-\infty}^{\infty} s(x) s[x - (t - t_0 - \tau_0)] dx = AR(t - t_0 - \tau_0).$$

В данном выражении величина τ_0 неизвестна. Чтобы ее определить, надо найти максимум выходного сигнала, после чего этот максимум следует сравнить с порогом и вынести решение о наличии или отсутствии сигнала.

Структурная схема приемника для случая, когда ставится задача обнаружения сигнала, форма которого известна с точностью до фазы радиочастотного заполнения (т. е. фаза неизвестна), представлена на рис. 5.15 и 5.16.



Рис. 5.15. Структурная схема приемника с согласованным фильтром

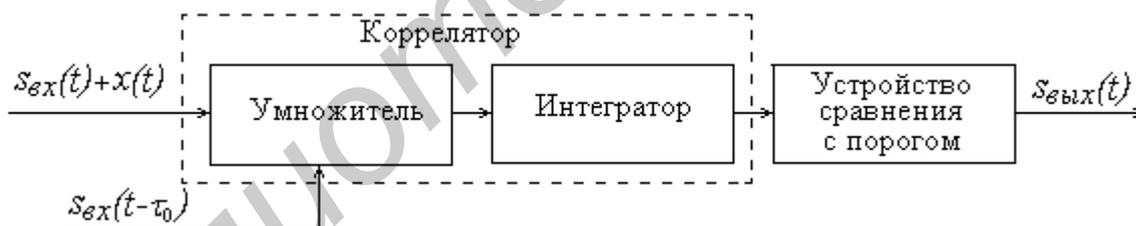


Рис. 5.16. Структурная схема корреляционного приемника

Приемник состоит из согласованного фильтра, детектора огибающей и устройства сравнения с порогом, которое в момент времени t_0 сравнивает сигнал на выходе детектора с пороговым значением. Между детектором и сравнивающим устройством необходимо устройство поиска максимума, которое определяет факт наличия сигнала и время его прихода.

Следует иметь в виду, что при обработке радиоимпульса выходной сигнал согласованного фильтра носит колебательный характер, тогда как коррелятор формирует видеоимпульсы, работая как синхронный детектор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Надольский, А. Н. Теоретические основы радиотехники : учеб. пособие / А. Н. Надольский. – Минск : БГУИР, 2005 г. – 231 с.
2. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 2000 г. – 512 с.
3. Нефедов, В. И. Основы радиоэлектроники и связи : учебник для вузов / В. И. Нефедов. – М. : Высш. шк., 2002. – 310 с.
4. Чердынцев, В. А. Оптимизация информационных систем : учеб. пособие / В. А. Чердынцев, В. В. Дубровский. – Минск : БГУИР, 2005. – 180 с.
5. Ширман, Я. Д. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров / Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков. – М. : Сов. радио, 1963. – 277 с.
6. Пестряков, В. Б. Радиотехнические системы / В. Б. Пестряков, В. Д. Кузнецов. – М. : Радио и связь, 1985. – 375 с.
7. Тихонов, В. Н. Статистическая радиотехника / В. Н. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982. – 624 с.
8. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1989. – 654 с.
9. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Гл. редакция физ.-мат. литературы, 1986. – 514 с.
10. Тихонов, В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В. Н. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1991. – 608 с.
11. Стеценко, О. А. Радиотехнические цепи и сигналы / О. А. Стеценко. – М. : Высш. шк., 2007. – 432 с.
12. Клюев, Л. Л. Теория электрической связи / Л. Л. Клюев. – Минск : Техноперспектива, 2008. – 422 с.
13. Каганов, В. И. Радиотехнические цепи и сигналы / В. И. Каганов. – М. : Форум – ИНФРА-М, 2010. – 432 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. АВТОГЕНЕРАТОРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ	5
1.1. Общие сведения.....	5
1.2. Схема и принцип работы автогенератора.....	5
1.3. Способы создания обратной связи в автогенераторах	8
1.4. Анализ процессов в колебательной системе	9
1.5. LC-генератор гармонических колебаний.....	13
1.6. Анализ стационарного режима работы автогенератора.....	16
1.7. Нелинейное уравнение автогенератора	25
1.8. RC-генераторы	28
1.9. Трехточечные автогенераторы.....	37
1.10. Генераторы гармонических колебаний с внутренней обратной связью (с отрицательным сопротивлением).....	40
1.11. Стабилизация частоты в автогенераторах	44
1.12. Использование метода фазовой плоскости для анализа работы автогенераторов	47
2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.....	56
2.1. Параметрические элементы	56
2.2. Физическое явление в контуре с переменной емкостью	58
2.3. Энергетические соотношения в контуре с переменной емкостью	60
2.4. Уравнение Матве	63
2.5. Частотно-энергетические соотношения Мэнли – Роу.....	66
2.6. Построение параметрических усилителей	72
2.7. Преобразование частоты в параметрических цепях.....	79
3. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ	80
3.1. Случайные сигналы в системах связи и управления.....	80
3.2. Законы распределения случайных величин	82
3.3. Законы распределения случайных процессов	87
3.4. Числовые характеристики случайных величин	88
3.5. Числовые характеристики случайных процессов.....	95
3.6. Примеры некоторых законов распределения	103
3.7. Спектральный анализ случайных сигналов.....	107
3.8. Основные типы случайных сигналов.....	115
4. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ	135
4.1. Преобразования случайных сигналов линейными стационарными цепями	135
4.2. Воздействие белого шума на линейные цепи	141
4.3. Преобразования случайных сигналов нелинейными цепями.....	152

5. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОСИГНАЛОВ	162
5.1. Основные задачи, решаемые при приеме сигналов.....	162
5.2. Основные понятия теории обнаружения сигналов.....	168
5.3. Оптимальные линейные фильтры	181
5.4. Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра.....	183
5.5. Характеристики согласованного фильтра	186
5.6. Синтез согласованных фильтров	191
5.7. Корреляционный прием.....	196
ЛИТЕРАТУРА	199

Библиотека БГУИР

Учебное издание

Надольский Анатолий Николаевич

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*

Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная правка, оригинал-макет *А. А. Лущикова*

Подписано в печать 09.10.2014. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 11,97. Уч.-изд. л. 12,3. Тираж 300 экз. Заказ 11.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,

№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.

ЛП №02330/264 от 14.04.2014.

220013, Минск, П. Бровки, 6