

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра радиотехнических систем

С.Б. Саломатин, А.И. Бурак

**Методическое пособие
к лабораторной работе
ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ВЕЙВЛЕТ-ТИПА
по дисциплине “Цифровая обработка сигналов”
для студентов специальностей 39 09 01 и 39 09 02**

Минск 2002

УДК 621.391.24(075)
ББК 32.88-01я7

Саломатин С.Б.

М 54 **Методическое пособие к лабораторной работе «Исследование свойств преобразований вейвлет-типа»** по дисциплине Цифровая обработка сигналов для студентов специальностей 39 09 01 и 39 09 02/ С.Б. Саломатин, А.И. Бурак -Мн.: БГУИР, 2002.- 20с.:ил.

ISBN 985-444-398-1

В методическом пособии приводятся теоретические сведения, алгоритмы, порядок выполнения лабораторной работы, посвященной исследованию свойств непрерывного и дискретного вейвлет-преобразования. Лабораторная работа выполняется на ЭВМ с использованием программного пакета MathCAD.

УДК 621.391.24(075)
ББК 32.88-01я7

ISBN 985-444-398-1

© С.Б.Саломатин, А.И.Бурак, 2002
© БГУИР,

2002

Содержание

Частотно-временные свойства базисных функций.

1. Базисные функции частотно-временного анализа
 2. Непрерывное вейвлет-преобразование
 3. Свойства непрерывного вейвлет-преобразования
 4. Дискретизация масштаба и сдвига
 5. Пирамидальный алгоритм
 6. Равномерно дискретизированное вейвлет-преобразование
 - 6.1 Программирование равномерно дискретизированного вейвлет-преобразования
 - 6.2. Исследование свойств равномерно дискретизированного вейвлет-преобразования
 7. Вейвлет-преобразование, дискретизированное на логарифмической сетке
 - 7.1. Программирование вейвлет-преобразования, дискретизированного на логарифмической сетке
 - 7.2. Исследование свойств вейвлет-преобразования, дискретизированного на логарифмической сетке
 8. Алгоритм Маллата
 - 8.1. Программирование алгоритма Маллата
 - 8.2 Области применения алгоритма Маллата
 9. Содержание и порядок выполнения работы
- Литература

Частотно-временные свойства базисных функций.

Классическое преобразование Фурье (непрерывное и дискретное) является весьма полезным математическим аппаратом для анализа и синтеза сигналов, однако иногда оказывается недостаточно эффективным при обработке сложных сигналов. Преобразование Фурье, например, не отличает сигналы из двух синусоид с разными частотами, один из которых представляет собой сумму синусоид, второй – последовательно следующие друг за другом синусоиды. В обоих случаях их спектр будет выглядеть как два пика на двух фиксированных частотах. Следовательно, преобразование Фурье в своем традиционном виде не приспособлено для анализа нестационарных сигналов, в том числе локализованных на некотором временном интервале, так как теряется информация о временных характеристиках сигнала.

Таким образом, спектральный анализ реальных сигналов необходимо осуществлять как по частоте, так и во времени. Преимущества такого анализа очевидны. На практике чаще всего приходится иметь дело с нестационарными процессами, в которых информативным является сам факт изменения частотно-временных характеристик сигнала. Примерами таких сигналов являются спутниковые изображения Земли, рентгенограммы внутренних органов, речь и музыка, т.е. фактически весь объем информации, с которым приходится иметь дело в повседневной жизни. Для выполнения такого анализа требуются базисные функции, обладающие определенными свойствами, названными *частотно-временной локализацией*.

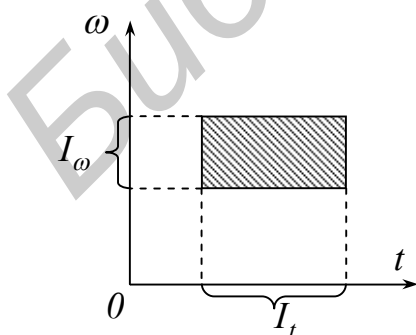


Рис.1. Характеристика частотно-временной локализации функции $\varphi(t)$

локализацией.

Для анализа и сравнения частотно-временных локализационных свойств различных базисов используется плоскость частота-время. Любая функция $f(t)$ может характеризоваться интервалом на временной оси и интервалом в частотной области, в которых содержится 90% ее энергии. Тогда в этой плоскости функцию можно

изобразить в виде прямоугольника, как показано на рис. 1.

В качестве примеров функций, иллюстрирующих эффективность их представления в плоскости время-частота, рассмотрим δ -функцию Дирака и Фурье-базис. Известно, что δ -функция является идеальным временным базисом для временного анализа сигналов. Результатом такого анализа являются отсчеты, которые можно рассматривать как временной спектр сигнала. На плоскости время-частота δ -функция $\delta(t-k\tau_0)$ показана на рис. 2,а, т.е. эта функция обладает свойством хорошей временной локализации, но плохой локализацией в спектральной области (она имеет равномерный спектр на всех частотах). Базисные функции Фурье-анализа, наоборот, обладают хорошей частотной локализацией в то время, как во временной области они имеют бесконечную протяженность (рис. 2,б).

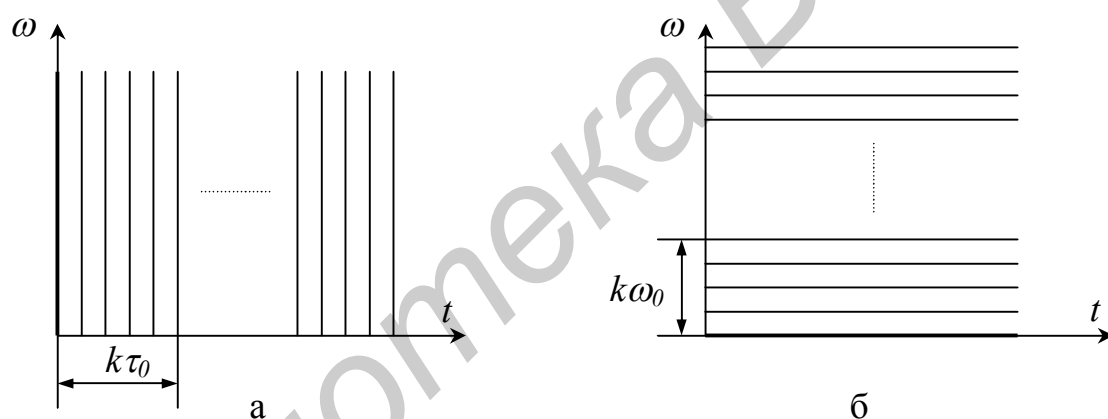


Рис. 2. Базисные функции на плоскости время-частота: а- δ -функция Дирака; б- базисные функции $e^{jk\omega_0 t}$ Фурье-анализа.

Локальность преобразования Фурье достигается путем ограничения анализируемого сигнала с помощью движущегося окна. Результатом такого анализа будет функция двух переменных— положения окна τ и частоты ω :

$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

Не останавливаясь на выборе окон $w(t)$ для проведения эффективного оконного Фурье-анализа, отметим, что таким образом в спектральный анализ, кроме частоты, вводится еще один параметр— время.

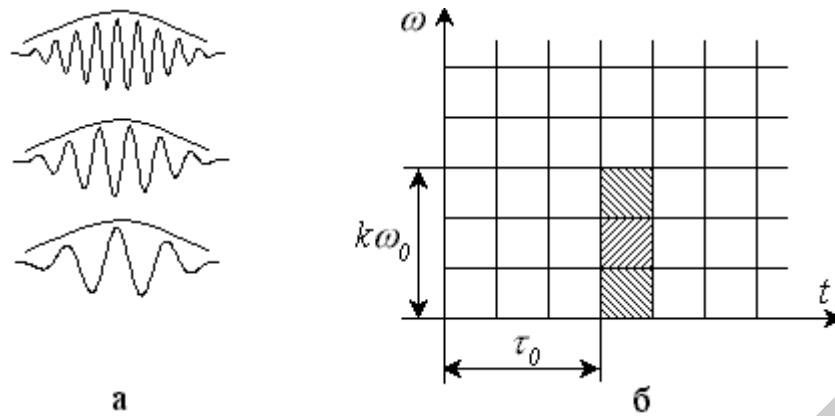


Рис. 3. Ограниченное во времени преобразование Фурье:

а- пример базисных функций $e^{jk\omega_0 t} w(t - \tau_0)$ при различных значениях k ,
 б- изображение функций в плоскости время-частота.

Ограниченное во времени преобразование Фурье показано на рис. 3. Как видно из этого рисунка, при сдвиге окна или изменении частоты ширина прямоугольника сохраняется неизменной. Это вызвано тем обстоятельством, что при всех этих операциях ширина самого окна не изменяется.

1. Базисные функции частотно-временного анализа

Сигнал $f(t)$ интерпретируется как функция из $L_2(\mathcal{R})$, а вместо гармоник $\{e^{j\omega t}\}$ используется система функций $\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{b-t}{a}\right)$, зависящих от двух непрерывных параметров. Эта система получается из фиксированной функции $\psi(t)$, называемой материнским вейвлетом, всевозможными сдвигами и растяжениями. Параметр b обеспечивает сдвиг функции $\psi(t)$ на оси t , параметр a – масштабный коэффициент – является аналогом частоты в Фурье-анализе. Масштабирование сдвига b позволяет сохранить относительную «плотность» расположения базисных функций по оси t при растяжении или сжатии материнской функции.

Базисные функции для частотно-временного анализа обладают следующими свойствами:

Непрерывность. Функция $\psi(t)$ непрерывна.

Интегрируемость. Функция $\psi(t)$ интегрируема на всей прямой.

Локализация. Базисные функции вейвлет-анализа должны быть локализо-

ваны как во временной, так и в частотной областях, т.е. должны выполняться условия:

$$|\psi(t)| \leq C \cdot (1+|t|)^{-1-\varepsilon} \quad \text{и} \quad |\Psi(\omega)| \leq C \cdot (1+|\omega|)^{-1-\varepsilon} \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0.$$

Нулевое среднее. Равенство нулю нулевого момента:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

2. Непрерывное вейвлет-преобразование

Введем базис, отвечающий перечисленным выше условиям:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2)$$

где множитель $1/\sqrt{|a|}$ необходим для сохранения нормы

$$\|\Psi_{a,b}(t)\| = \|\Psi(t)\|.$$

Пусть $a, b \in R$, тогда пара преобразований, которое носит название непрерывного вейвлет-преобразования, обозначаемое как CWT- continuous wavelet transform, будет иметь вид:

$$CWT_f(a,b) = \langle f(t), \Psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (3)$$

$$f(t) = C_{\Psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_f(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db, \quad (4)$$

где нормализующий коэффициент

$$C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (5)$$

Сравнивая формулы (2,3) с соответствующими выражениями для непрерывного преобразования Фурье (1), видим, что роль функции $e^{j\omega t}$ здесь играет функция $\Psi_{a,b}(t)$, а C_{Ψ} аналогичен коэффициенту 2π , причем роль частоты играет масштабный множитель $1/a$. Однако, так же как в ограниченном во времени пре-

образовании Фурье, базисная функция зависит еще от параметра сдвига b .

Приведем примеры материнских вейвлетов, формирующих базис (2). Наибольшей популярностью пользуются функции на основе производных функции Гаусса:

$$\Psi_m(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Это вызвано тем обстоятельством, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях.

При $m=1$ получаем WAVE-вейвлет с равным нулю нулевым моментом. При $m=2$ получаем вейвлет, называемый «мексиканская шляпа»- МНАТ-вейвлет:

$$\Psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{1/4} (1-t^2) e^{-t^2/2},$$

нулевой и первый моменты его равны нулю. Спектр Фурье этого вейвлета уже, поэтому он имеет лучшее разрешение.

Функция Гаусса образует также DOG-вейвлет– разность двух гауссиан:

$$\Psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) - 0.5 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right).$$

3. Свойства непрерывного вейвлет-преобразования

Линейность. Линейность непрерывного вейвлет-преобразования следует из линейности скалярного произведения (3).

Пусть функции $f(t)$ и $g(t) \in L_2$. Тогда,

$$CWT_{f,g}(a,b) = CWT_f(a,b) + CWT_g(a,b).$$

Сдвиг. Рассмотрим непрерывное вейвлет-преобразование функции $f_1(t) = f(t-b')$:

$$\begin{aligned} CWT_{f_1}(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-b') \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \Psi\left(\frac{t_1+b'-b}{a}\right) dt' = CWT_f(a,b-b'), \end{aligned}$$

т.е. вейвлет-образ функции также сдвигается на b' .

Масштабирование. Рассмотрим непрерывное вейвлет-преобразование функции $f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} f(t/c)$, где множитель $\frac{1}{\sqrt{c}}$ введен для сохранения нормы.

Имеем

$$\begin{aligned} CWT_{f_1}(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a| \cdot c}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f\left(\frac{t}{c}\right) dt = \\ &= \sqrt{\frac{c}{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(\frac{ct_1 - b}{a}\right) f(t_1) dt_1 = CWT_f\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right), \end{aligned}$$

т.е. вейвлет-образ функции также подвергается масштабированию. Это означает, что если функция расширяется во временной области, то в масштабно-временной (частотно-временной) она также расширяется.

Аналог теоремы Парсеваля. Для каждой функции $f(t) \in L_2$ и ее непрерывного вейвлет-преобразования справедливо следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2}.$$

4. Дискретизация масштаба и сдвига

В настоящее время большинство вычислений выполняют компьютеры. Это означает, что НВП не может быть вычислено практически путем взятия интегралов. На практике преобразования дискретизируются, и интегралы заменяются суммами. Наиболее простым и естественным, но и самым неэффективным способом является равномерная дискретизация частотно-временной плоскости.

На высоких масштабах (нижних частотах) частота дискретизации может быть понижена в соответствии с теоремой Котельникова. Другими словами, если требуется дискретизация масштабно-временной плоскости с частотой b_1 при масштабе a_1 , то при масштабе a_2 эта частота может быть понижена до b_2 , где $a_1 < a_2$ и $b_2 > b_1$. Взаимосвязь между b_1 и b_2 следующая:

$$b_2 = \frac{a_1}{a_2} b_1.$$

Таким образом, при снижении частоты дискретизации уменьшается количество вычислений. При проведении только анализа сигнала без последующего синтеза по вейвлет-коэффициентам дискретизация может выполняться произвольно. Если же требуется восстановление сигнала, то дискретизация выполняется следующим образом:

$$a_m = a_0^m, b_m = kb_0 a_0^m.$$

Базисными функциями для дискретного вейвлет-преобразования будут функции, получаемые из (2) при $a = a_0^j, b = kb_0 a_0^j$:

$$\psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \psi\left(\frac{t - a_0^j kb_0}{a_0^j}\right) = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \psi(a_0^{-j} t - kb_0). \quad (5)$$

Коэффициенты разложения любой функции из L^2 могут быть получены как

$$DWT_f(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(a_0^{-j} t - b_0 k) dt. \quad (6)$$

В случае дискретного сигнала на отрезке $[0, N-1]$ выражение (6) примет вид

$$DWT_f(j, k) = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) \psi(a_0^{-j} t - b_0 k). \quad (7)$$

В данном контексте масштабно-временную плоскость корректней было бы назвать масштабно-сдвиговой плоскостью, так как «время» в области преобразования в действительности соответствует сдвигам вейвлета во времени.

Как видно из (5), дискретизация выполняется в соответствии с логарифмическим масштабом, причем основание логарифма может быть произвольным. Обычно в качестве основания выбирается 2, т. е. дискретизация выполняется на диадной сетке, показанной на рис. 4

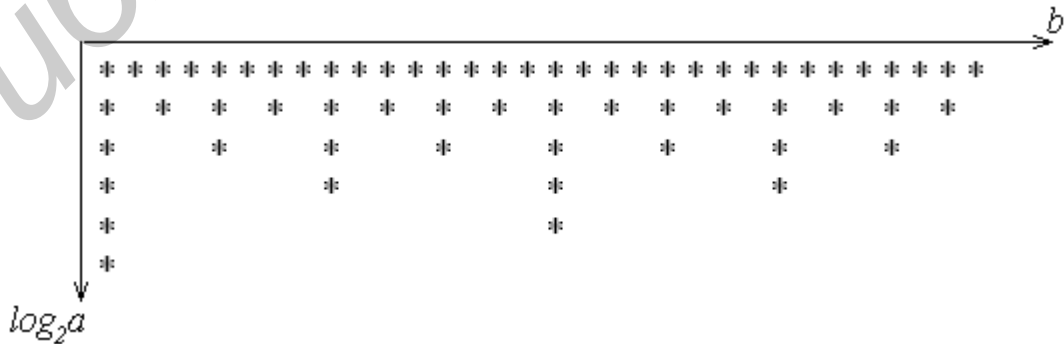


Рис. 4. Дискретизированное вейвлет-преобразование.

В настоящее время синтезировано большое количество вейвлетов, адаптированных к задачам цифровой обработки сигнала. Наилучшим образом решению за-

дача анализа и синтеза сигнала удовлетворяют вейвлеты, получаемые путем решения уравнения масштабирования:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{M-1} c_k f(2t - k), \quad (8)$$

где M - количество ненулевых коэффициентов c_k , $f(t)$ – масштабирующая функция. M иначе называется порядком вейвлета. Пусть $\varphi(t)$ – решение этого функционального уравнения. Интегрируя (7) при условии нормировки $\int \varphi(x) dx = 1$ находим, что

$$\sum_{k=0}^{M-1} c_k = 2 \quad (9)$$

Коэффициенты c_k выбираются определенным образом в зависимости от свойств вейвлета. Так, масштабирующая функция и вейвлет Добечи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0(n) &= \{c_0, c_1, c_2, \dots, c_{M-1}\}, \\ \psi_0(n) &= \{c_{M-1}, -c_{M-2}, c_{M-3}, \dots, c_1, -c_0\}. \end{aligned}$$

Вейвлет Добечи ортогонален ко всем своим сжатиям и сдвигам на четное число отсчетов и обеспечивает точное приближение полиномов степени не более p . Число p называется числом нулевых моментов, причем $p = M/2$, где M – четное.

При $M=4$ система уравнений для нахождения коэффициентов c_0, c_1, c_2, c_3 имеет вид

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 2, \\ c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 0, \\ c_0 - 2c_1 + 3c_2 - 4c_3 = 0, \\ c_0c_2 + c_1c_3 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решая систему (10), получаем

$$c_0 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}), c_1 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{3}), c_2 = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3}), c_3 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}).$$

Масштабирующая функция и вейвлет доопределяются в произвольной точке

г следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_j(r) &= \sum_{n=0}^{M-1} \varphi_0(n) \varphi_{j-1}\left(\frac{r-n}{2}\right), \\ \psi_j(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{M-1} \psi_0(n) \psi_{j-1}\left(\frac{r-n}{2}\right).\end{aligned}\tag{11}$$

На рис. 5 приведены функции φ_j и ψ_j для $j=1,2,3,4$.



Рис. 5. Масштабирующая функция (а) и вейвлет (б) Добеши 4-го порядка.

Базисные функции прямого вейвлет-преобразования размерностью N состоят из семейства модифицированных масштабирующих и вейвлет-функций, определенных на отрезке $[0, N-1]$. Они строятся из исходных функций по следующему правилу:

$$\begin{aligned}\varphi_j^*(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(x + kN), \\ \psi_j^*(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j(x + kN)\end{aligned}\tag{11}$$

Матрица W прямого преобразования состоит из строк, полученных следующим образом:

$$\begin{aligned}W_0 &= \varphi_{\log_2 N-2}^*\left(x - \frac{N}{2}\right), \\ W_1 &= \varphi_{\log_2 N-2}^*(x),\end{aligned}$$

$$W_j = \psi_{\log_2 N - [\log_2 j] - 1}^* \left(x - 2^{\log_2 N - [\log_2 j]} (j - 1) \right),$$

где W_j – j -я строка матрицы, $j = 2, 3, 4, \dots, N - 1$;

Так, для $N = 8$ и $M = 4$ матрица W имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} 0.204 & 0.421 & 0.512 & 0.637 & 0.296 & 0.079 & -0.012 & -0.137 \\ 0.296 & 0.079 & -0.012 & -0.137 & 0.204 & 0.421 & 0.512 & 0.637 \\ 0.354 & 0.729 & -0.046 & -0.512 & -0.171 & -0.046 & -0.137 & -0.171 \\ -0.171 & -0.046 & -0.137 & -0.171 & 0.354 & 0.729 & -0.046 & -0.512 \\ 0.837 & -0.483 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.129 & -0.224 \\ -0.129 & -0.224 & 0.837 & -0.483 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.129 & -0.224 & 0.837 & -0.483 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.129 & -0.224 & 0.837 & -0.483 \end{pmatrix}.$$

Матрица обратного преобразования W' определяется как транспонированная матрица W :

$$W' = W^T.$$

5. Пирамидальный алгоритм

Масштабно-временное представление сигнала получается с использованием методов цифровой фильтрации. НВП измеряло корреляцию между вейвлетом на разных масштабах и сигналом, в пирамидальном алгоритме (ПА) для анализа сигнала на разных масштабах используются фильтры с различными частотами среза. Сигнал пропускается через древовидно соединенные ВЧ и НЧ фильтры.

Разрешение сигнала, являющееся мерой количества детальной информации в сигнале, изменяется за счет децимации и интерполяции. Децимация соответствует снижению частоты дискретизации или удалению некоторых отсчетов из сигнала. Интерполяция соответствует увеличению частоты дискретизации сигнала путем добавления новых отсчетов между существующими. Обычно в качестве новых отсчетов используется нуль.

Процедура начинается с пропуска сигнала (последовательности) через полуполосный фильтр с импульсной характеристикой $h(n)$, обрезающий все частоты, которые больше половины верхней частоты сигнала. Полученная последо-

вательность будет избыточна, т.к. сигнал теперь имеет наивысшую частоту в два раза меньшую, чем исходный. Удалим каждый второй отсчет, т.е. выполним децимацию в два раза. Масштаб сигнала получился удвоенным. НЧ-фильтрация удаляет ВЧ-компоненты, но оставляет масштаб неизменным. Масштаб изменяет операция децимации. С другой стороны, разрешение связано с количеством информации, содержащейся в сигнале, поэтому оно меняется при фильтрации (после полуполосной– уменьшается в два раза). Таким образом вычисление ДВП сводится к анализу сигнала в различных частотных полосах с различным разрешением путем декомпозиции его на грубую аппроксимацию и детали. В ПА работают два множества функций– масштабирующие функции и вейвлеты, соответствующие НЧ и ВЧ фильтрам. Один уровень ПА можно записать следующим образом :

$$Ca_{j+1}[k] = \frac{1}{2} \sum_n h_L(n-2k) Ca_j(n),$$

$$Cd_{j+1}[k] = \frac{1}{2} \sum_n h_H(n-2k) Ca_j(n),$$

где $Ca[k]$ и $Cd[k]$ есть прореженные в два раза выходы ВЧ и НЧ фильтров соответственно. В качестве коэффициентов $Ca_0[k]$ принимаются временные отсчеты сигнала, т.е. $Ca_0[k] = f[k]$.

Вышеприведенная процедура, известная как субполосное кодирование, повторяется далее до тех пор, пока $Ca_j[k]$ и $Cd_j[k]$ не будут представлены одним отсчетом. Выход НЧ фильтра подается на такую же схему обработки, а выход ВЧ-фильтра считается вейвлет-коэффициентами (рис. 6).

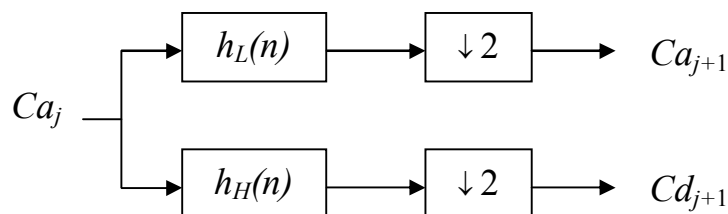


Рис. 6. Один шаг процедуры анализа сигнала

Наиболее значимые частоты исходного сигнала будут отображаться как большие амплитуды вейвлет-коэффициентов, «отвечающих» за соответствующий

частотный диапазон. Отличие ДВП от ДПФ заключается в том, что время появления частот в данном случае не утеряно. Однако временная локализация будет иметь разрешение, зависящее от уровня преобразования, на котором появляется частота.

Формула восстановления отсчетов сигнала для каждого масштаба имеет вид

$$Ca_j[k] = \sum_n h_L(k - 2n)Ca_{j+1}[n] + \sum_n h_H(k - 2n)Cd_{j+1}[n].$$

Схема блока фильтров, осуществляющих эту процедуру на одной итерации, показана на рис.8.

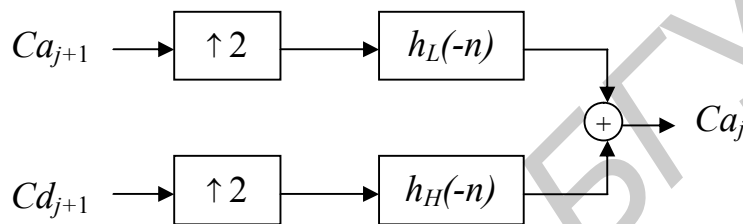


Рис.8. Один шаг процедуры синтеза сигнала

Важным свойством ПА является взаимосвязь между импульсными характеристиками ВЧ и НЧ фильтров. Эта связь выражается следующим соотношением:

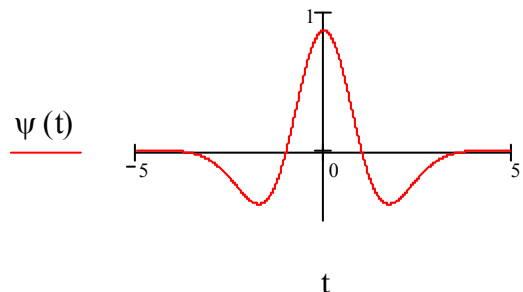
$$g[M - 1 - n] = (-1)^n h[n].$$

6. Равномерно дискретизированное вейвлет-преобразование

6.1. Программирование равномерно дискретизированного вейвлет-преобразования

Рассмотрим действительный вейвлет, называемый «мексиканской шляпой»:

$$\psi(t) := \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot (1 - t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$



В соответствии с (5) определяем нормализующий коэффициент

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt \text{ simplify} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \omega^2\right) \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^{\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot \sqrt{2} \cdot \omega^2$$

$$\psi_s(\omega) := \frac{2}{3} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \omega^2\right) \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^{\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot \sqrt{2} \cdot \omega^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(|\psi_s(\omega)|)^2}{|\omega|} d\omega \rightarrow \frac{8}{3} \cdot \pi^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad C := \frac{8}{3} \cdot \pi^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

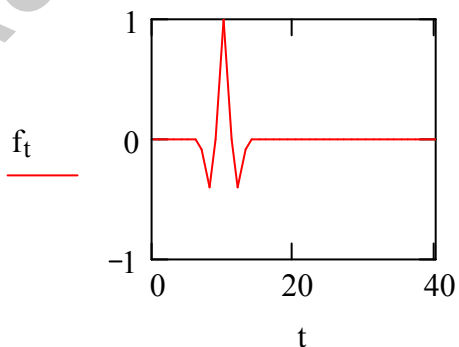
Формула для вычисления равномерно дискретизированного непрерывного вейвлет-преобразования на отрезке $[0; N]$ имеет вид

$$w(a, b, f) := \frac{C}{\sqrt{a}} \cdot \sum_{t=0}^N \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot f_t$$

Зададим сигнал на отрезке $[0; N]$:

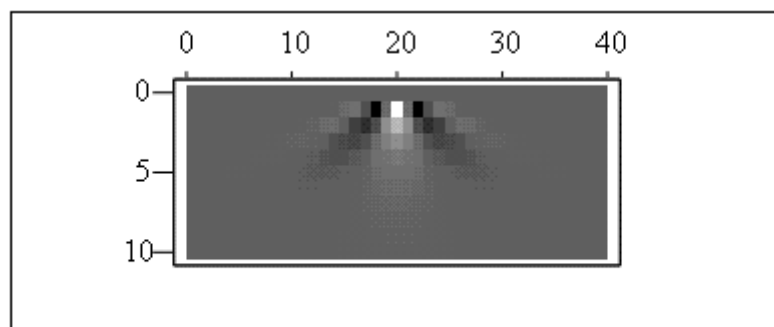
$$N := 100 \quad t := 0..N$$

$$f_t := \left[1 - (t-20)^2 \right] \cdot e^{\frac{-(t-20)^2}{2}}$$



Рассчитаем коэффициенты вейвлет-преобразования при $a \in [1, 10]$ и $b \in [0, 100]$

$$a := 1..10 \quad b := 0..100 \quad wk_{a,b} := w(a, b, f)$$

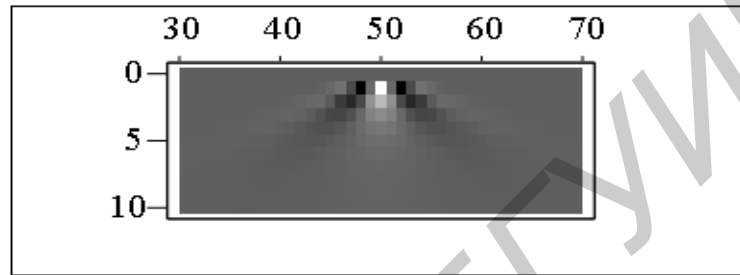


wk

6.2. Исследование свойств равномерно дискретизированного вейвлет-преобразования

Свойство сдвига. Определим вейвлет-коэффициенты сигнала $s[t]$, получаемого сдвигом сигнала $f[t]$ на 30 отсчетов:

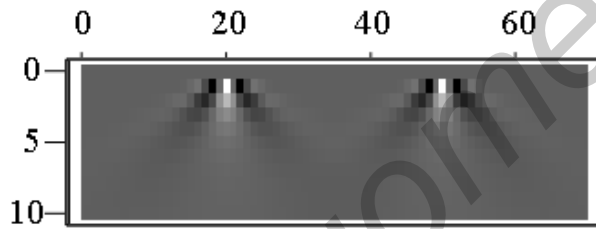
$$s_t := \left[1 - (t - 50)^2 \right] \cdot e^{-\frac{(t-50)^2}{2}} \quad \text{wk}_{s,a,b} := w(a,b,s)$$



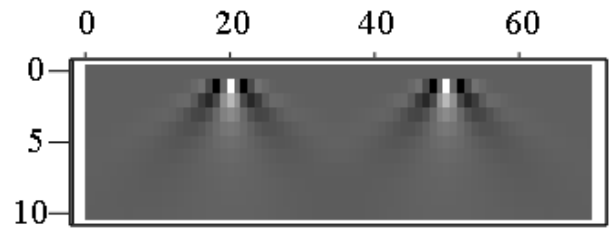
wk_s

Свойство линейности.

$$\text{wk}_{sf,a,b} := w(a,b,s+f)$$



wk_sf



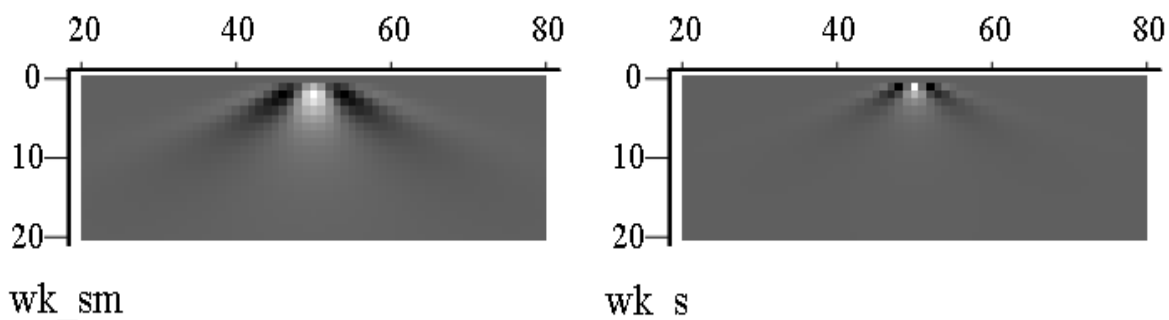
wk_s + wk_f

Свойство масштабирования.

Определим вейвлет-коэффициенты сигнала $sm[t]$, получаемого растяжением сигнала $s[t]$ в два раза:

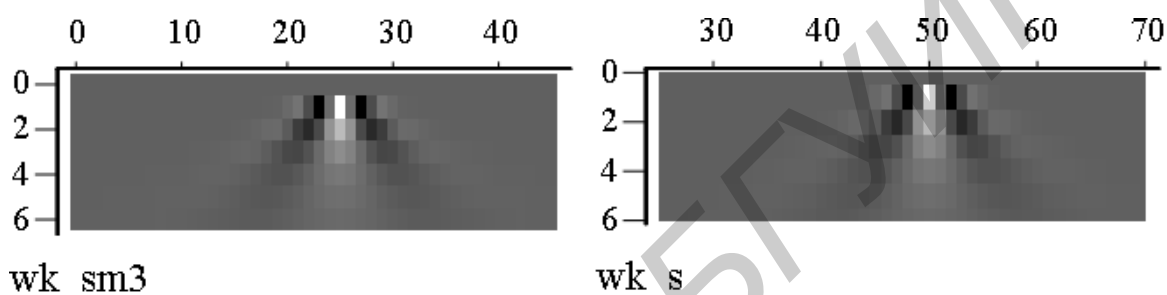
$$sm_t := \left[1 - \left(\frac{t-50}{2} \right)^2 \right] \cdot e^{-\frac{\left(\frac{t-50}{2} \right)^2}{2}} \quad \text{wk}_{sm,a,b} := w(a,b,sm)$$

Для сравнения приведен график вейвлет-коэффициентов сигнала $s[t]$:



Осуществим прореживание коэффициентов wk_sm в два раза:

$$a2 := 0..6 \quad b2 := 0..45 \quad wk_sm3_{a2,b2} := wk_sm_{a2 \cdot 2, b2 \cdot 2}$$



Из приведенного рядом графика вейвлет-коэффициентов исходного сигнала $s[t]$ видно, что выборка из вейвлет-коэффициентов «растянутого» сигнала является вейвлет-коэффициентами сигнала $s[t]$.

7. Вейвлет-преобразование, дискретизированное на логарифмической сетке

7.1. Программирование вейвлет-преобразования, дискретизированного на логарифмической сетке

Решение системы уравнений (9) в среде MathCAD имеет вид:

$$c0 := 0 \quad c1 := 0 \quad c2 := 0 \quad c3 := 0$$

Given

$$c3 - c2 + c1 - c0 = 0$$

$$c3 - 2 \cdot c2 + 3 \cdot c1 - 4 \cdot c0 = 0$$

$$c3 + c2 + c1 + c0 = 2$$

$$c1 \cdot c3 + c2 \cdot c0 = 0$$

$$\text{Find}(c0, c1, c2, c3) = \begin{pmatrix} 0.683 \\ 1.183 \\ 0.317 \\ -0.183 \end{pmatrix}$$

Реализация рекуррентных формул (10) представлена следующими программами:

$\text{conv}(v1, v2) :=$	$r1 \leftarrow \text{rows}(v1)$ $r2 \leftarrow \text{rows}(v2)$ for $i \in r1.. r2 + r1 - 2$ $v1_i \leftarrow 0$ for $i \in r2.. r2 + r1 - 2$ $v2_i \leftarrow 0$ $r \leftarrow \text{rows}(v1)$ $\text{spv1} \leftarrow \text{cfft}(v1)$ $\text{spv2} \leftarrow \text{cfft}(v2)$ $\text{spsv} \leftarrow (\text{spv1} \cdot \text{spv2})$ $\text{sv} \leftarrow \sqrt{r} \cdot \text{icfft}(\text{spsv})$	$\text{it}(v) :=$	$\text{vn} \leftarrow v_0$ for $i \in 1.. \text{rows}(v) - 1$ $\text{vn} \leftarrow \text{stack}(\text{vn}, 0, v_i)$ $\text{conv}(c, \text{vn})$
--------------------------	---	-------------------	---

где функция $\text{conv}(v1, v2)$ возвращает значение линейной свертки векторов $v1$ и $v2$, а функция $\text{it}(v)$ – непосредственно позволяет построить рекуррентный ряд.

Для $M=4$ имеем:

$$c := (0.683 \quad 1.183 \quad 0.317 \quad -0.183)^T$$

$$\phi_0 := c \quad \phi_1 := \text{it}(\phi_0) \quad \phi_2 := \text{it}(\phi_1) \quad \phi_3 := \text{it}(\phi_2) \quad \phi_4 := \text{it}(\phi_3)$$

$$\psi_0 := \begin{cases} rc \leftarrow \text{rows}(c) - 1 \\ \text{for } i \in 0..rc \\ \quad v_i \leftarrow c_{rc-i} \cdot (-1)^i \\ v \div \sqrt{2} \end{cases} \quad \psi_1 := \frac{\text{it}(\psi_0)}{\sqrt{2}} \quad \psi_2 := \frac{\text{it}(\psi_1)}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_3 := \frac{\text{it}(\psi_2)}{\sqrt{2}} \quad \psi_4 := \frac{\text{it}(\psi_3)}{\sqrt{2}}$$

Результаты вычислений показаны на рис. 5.

Построение матрицы прямого вейвлет-преобразования.

$$N := 8 \quad f(m, n) := 0$$

$$n := \log(N, 2) \quad j := 0..n - 2$$

Дополнение функций ψ_j до длины, кратной N :

$$\text{dop}(v) := \begin{cases} d \leftarrow \text{mod}(\text{rows}(v), N) \\ s \leftarrow \text{matrix}(N - d, 1, f) \\ \text{if}(d, \text{stack}(s, v), v) \end{cases}$$

$$\psi_j := \text{dop}(\psi_j)$$

Построение модифицированных масштабирующих и вейвлет-функций в соответствии с формулами (11):

$$\text{bf}_j := \text{matrix}(N, 1, f)$$

$$\text{bf}_j := \begin{cases} A_j \leftarrow \text{bf}_j \\ \text{for } u \in 0.. \text{floor}[(\text{rows}(\psi_j) - 1) \div N] \\ \quad A_j \leftarrow A_j + \text{submatrix}[\psi_j, u \cdot N, (u + 1) \cdot N - 1, 0, 0] \\ A_j \end{cases}$$

Формирование матрицы преобразования:

```

W := | w ← matrix(1, N, f)
      | for j ∈ 0.. n - 2
      |   for k ∈ 0.. N ÷ 2j+1 - 1
      |     | sdv ← 2j+1
      |     | for i ∈ 0.. N - 1
      |     |   vi ← (bfj)mod(i+sdv*k+N·10-2·j, N)
      |     | w ← stack(vT, w)
      | submatrix(w, 0, rows(w) - 2, 0, N - 1)

```

7.2. Исследование свойств вейвлет-преобразования, дискретизированного на логарифмической сетке

Свойство ортогональности базисных функций.

Скалярное произведение двух любых строк матрицы W будет равно нулю, если их номера не совпадают, и равно единице при их совпадении:

$$\sum_{i=0}^{N-1} W_{3,i} \cdot W_{0,i} = 0 \quad \sum_{i=0}^{N-1} W_{0,i} \cdot W_{0,i} = 1$$

Это свойство можно проиллюстрировать и в матричном виде:

$$W \cdot W^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

Свойство линейности дискретного вейвлет-преобразования.

$$s1 := (1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 8 \ 5 \ 3 \ 2)^T \quad s2 := (1 \ 4 \ 1 \ 6 \ 3 \ 2 \ 4 \ 3)^T$$

$$(W \cdot s1 + W \cdot s2)^T = (15.961 \ 11.539 \ -4.068 \ 2.885 \ -3.734 \ -2.958 \ 2.708 \ 0.448)$$

$$[W \cdot (s1 + s2)]^T = (15.961 \ 11.539 \ -4.068 \ 2.885 \ -3.734 \ -2.958 \ 2.708 \ 0.448)$$

8. Алгоритм Маллата

8.1. Программирование алгоритма Маллата

Определим НЧ и ВЧ фильтры анализа:

$$\text{LPF}(v) := v \div \sqrt{2} \qquad \text{HPF}(v) := \begin{array}{l} rv \leftarrow \text{rows}(v) - 1 \\ \text{for } i \in 0..rv \\ \quad y_i \leftarrow v_{rv-i} \cdot (-1)^i \\ y \div \sqrt{2} \end{array}$$

Определим НЧ и ВЧ фильтры реконструкции:

$$\text{iLPF}(v) := \begin{array}{l} r \leftarrow \text{rows}(\text{LPF}(v)) - 1 \\ \text{for } i \in 0..r \\ \quad y_i \leftarrow \text{LPF}(v)_{r-i} \\ y \end{array} \qquad \text{iHPF}(v) := \begin{array}{l} r \leftarrow \text{rows}(\text{HPF}(v)) - 1 \\ \text{for } i \in 0..r \\ \quad y_i \leftarrow \text{HPF}(v)_{r-i} \\ y \end{array}$$

Тогда один шаг процедуры анализа и синтеза сигнала можно задать следующим образом соответственно:

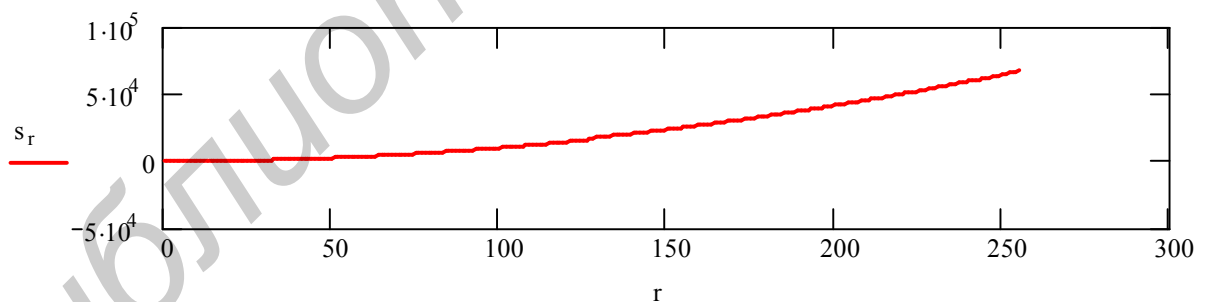
$$\text{Ca}(v, v1) := \begin{array}{l} \text{LP} \leftarrow \text{LPF}(v1) \\ \text{rf} \leftarrow \text{rows}(\text{LP}) \\ \text{rv} \leftarrow \text{rows}(v) \\ \text{for } i \in 0.. \text{rf} - 2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{vl}_i \leftarrow v_{\text{rf}-2-i} \\ \text{vh}_i \leftarrow v_{\text{rv}-1-i} \end{array} \right. \\ \text{vext} \leftarrow \text{stack}(\text{vl}, v, \text{vh}) \\ y \leftarrow \text{conv}(\text{vext}, \text{LP}) \\ l \leftarrow \text{rf} - 1 \\ h \leftarrow \text{rows}(y) - \text{rf} \\ y \leftarrow \text{submatrix}(y, l, h, 0, 0) \\ \text{ry} \leftarrow \text{trunc}(\text{rows}(y) \div 2) \\ \text{for } i \in 0.. \text{ry} - 1 \\ \quad \text{ydn}_i \leftarrow y_{2:i} \\ \text{ydn} \end{array} \qquad \text{Cd}(v, v1) := \begin{array}{l} \text{HP} \leftarrow \text{HPF}(v1) \\ \text{rf} \leftarrow \text{rows}(\text{HP}) \\ \text{rv} \leftarrow \text{rows}(v) \\ \text{for } i \in 0.. \text{rf} - 2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{vl}_i \leftarrow v_{\text{rf}-2-i} \\ \text{vh}_i \leftarrow v_{\text{rv}-1-i} \end{array} \right. \\ \text{vext} \leftarrow \text{stack}(\text{vl}, v, \text{vh}) \\ y \leftarrow \text{conv}(\text{vext}, \text{HP}) \\ l \leftarrow \text{rf} - 1 \\ h \leftarrow \text{rows}(y) - \text{rf} \\ y \leftarrow \text{submatrix}(y, l, h, 0, 0) \\ \text{ry} \leftarrow \text{trunc}(\text{rows}(y) \div 2) \\ \text{for } i \in 0.. \text{ry} - 1 \\ \quad \text{ydn}_i \leftarrow y_{2:i} \\ \text{ydn} \end{array}$$

$iCa(v, v1) :=$	$iLP \leftarrow LPF(v1)$ $rv \leftarrow rows(v)$ $rf \leftarrow rows(iLP)$ $s \leftarrow 2 \cdot rv - rf + 2$ $yup_0 \leftarrow v_0$ for $i \in 1..rv - 1$ $yup \leftarrow stack(yup, 0, v_i)$ $y \leftarrow conv(yup, iLP)$ $gr \leftarrow (rows(y) - s) \div 2$ $h \leftarrow rows(y) - gr - 1$ $y \leftarrow submatrix(y, gr, h, 0, 0)$	$iCd(v, v1) :=$	$iHP \leftarrow HPF(v1)$ $rv \leftarrow rows(v)$ $rf \leftarrow rows(iHP)$ $s \leftarrow 2 \cdot rv - rf + 2$ $yup_0 \leftarrow v_0$ for $i \in 1..rv - 1$ $yup \leftarrow stack(yup, 0, v_i)$ $y \leftarrow conv(yup, iHP)$ $gr \leftarrow (rows(y) - s) \div 2$ $h \leftarrow rows(y) - gr - 1$ $y \leftarrow submatrix(y, gr, h, 0, 0)$
-----------------	--	-----------------	--

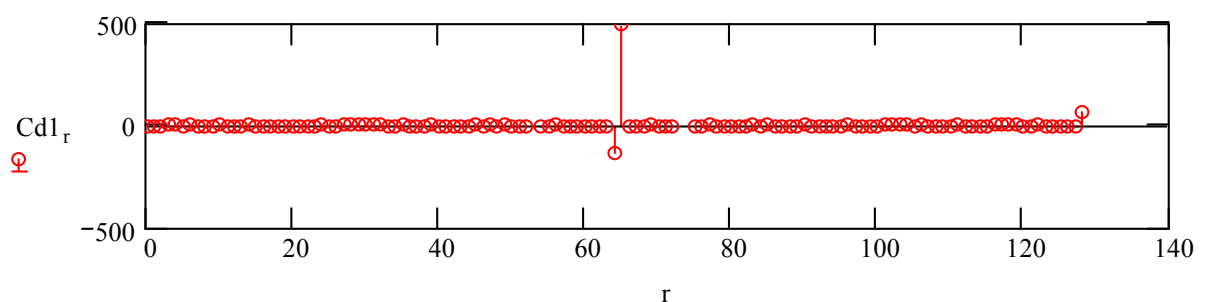
8.2 Области применения алгоритма Маллата

Обнаружение локальных неоднородностей сигнала.

Построим монотонно возрастающую функцию на отрезке $[0, 255]$, скачкообразно изменяющую свое значение в точке $k=128$:

$$k := 0..127 \quad s_k := (k^2) + rnd(5) - 30 \quad k := 128..255 \quad s_k := [(k+4)^2] + rnd(5) - 30 \quad r := 0..255$$


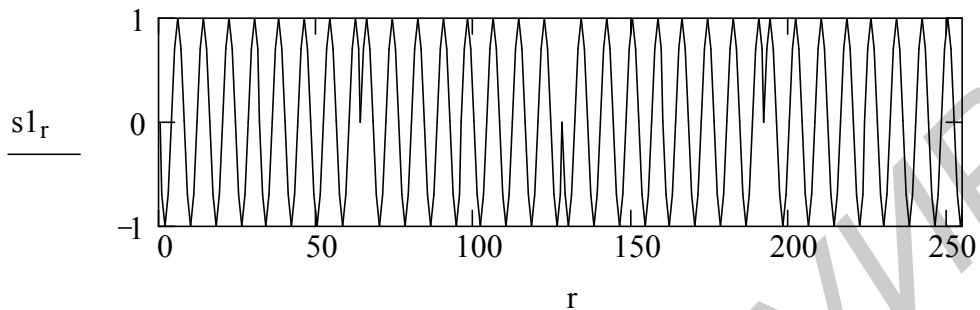
Определим вейвлет-коэффициенты разложения сигнала на одной итерации:

$$Cd1 := Cd(s, c2)$$


Выделение огибающей сигнала с дискретной фазовой модуляцией.

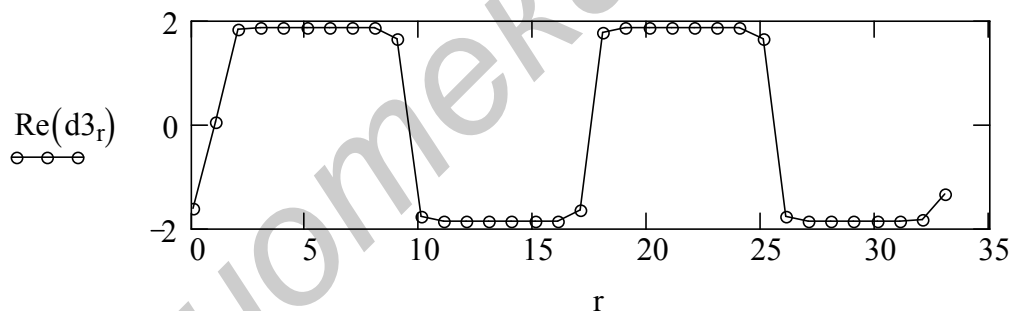
Построим синусоидальный сигнал с дискретной фазовой модуляцией:

$$k := 0..63 \quad s1_k := \sin\left[\frac{2 \cdot \pi \cdot (k)}{8}\right] \quad s1 := \text{stack}(-s1, s1, -s1, s1)$$



Определим вейвлет-коэффициенты разложения сигнала на трех уровнях:

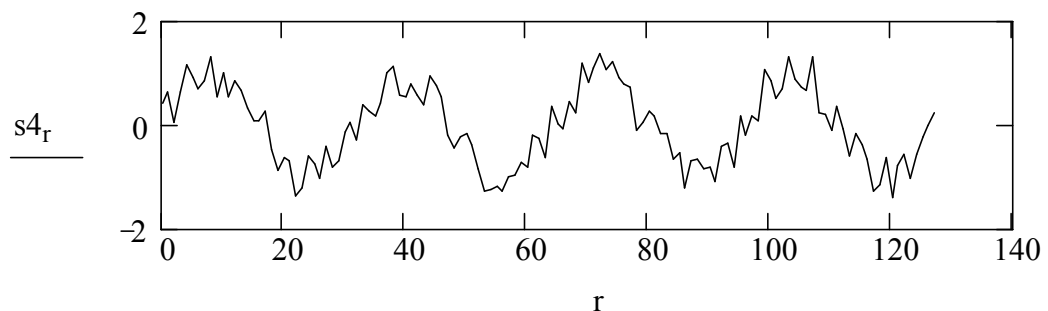
$$\begin{aligned} d1 &:= Cd(s1, c2) & a1 &:= Ca(s1, c2) \\ a2 &:= Ca(a1, c2) & d2 &:= Cd(a1, c2) \\ a3 &:= Ca(a2, c2) & d3 &:= Cd(a2, c2) \end{aligned}$$



Выделение сигнала из шума.

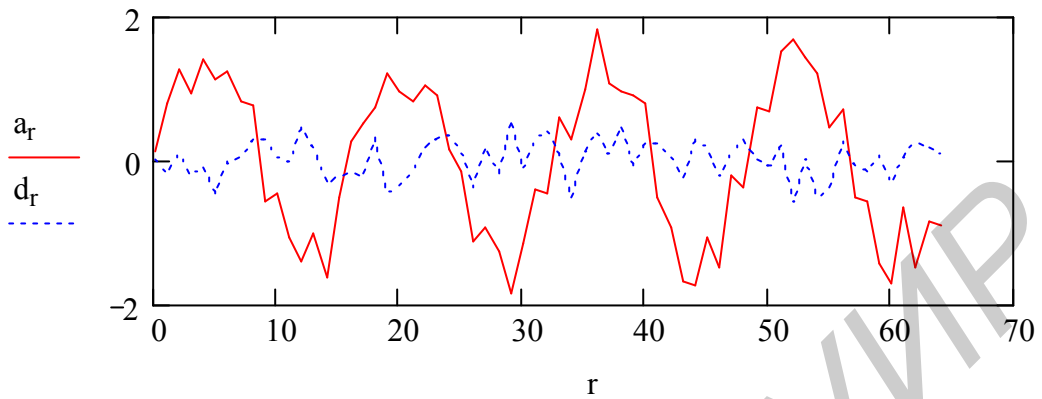
Построим смесь сигнала (синусоиды) с белым шумом:

$$k := 0..127 \quad s3_k := \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{32}\right) \quad s4_k := s3_k + \text{rnd}(1) - 0.5$$



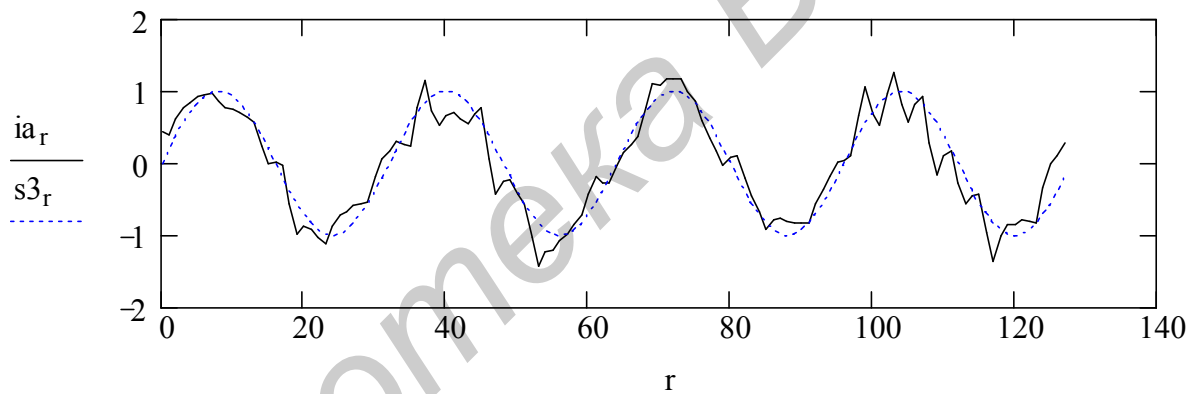
Определим вейвлет-коэффициенты разложения сигнала s_4 на одном уровне:

$$a := Ca(s_4, c_2) \quad d := Cd(s_4, c_2)$$



Восстановим сигнал s_4 , приняв коэффициенты d равными нулю:

$$ia := iCa(a, c_2)$$



Определим, насколько отличаются от синусоиды сигналы $s_4(r)$ и $ia(r)$:

$$\sum_{i=0}^{127} (|s_{3i} - s_{4i}|)^2 = 11.529 \quad \sum_{i=0}^{127} (|s_{3i} - ia_i|)^2 = 7.59$$

Видно, что ошибка во втором случае меньше.

9. Содержание и порядок выполнения работы

1. Изучить свойства непрерывного и дискретизированного вейвлет-преобразования.
2. Провести моделирование равномерно дискретизированного вейвлет-преобразования, проиллюстрировать его свойства.
3. Провести моделирование вейвлет-преобразования дискретизированного на логарифмической сетке, проиллюстрировать его свойства.
4. Провести моделирование алгоритма Маллата.
5. На примере заданных преподавателем сигналов изучить применение алгоритма Маллата для обнаружения локальных неоднородностей сигнала, декодирования сигнала с дискретной фазовой модуляцией, выделения сигнала из шума.

Литература

1. Polikar R. Введение в вейвлет-преобразование. <http://www.autex.spb.ru>.
2. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999.

Св. план 2002, поз. 74

Учебное издание

Саломатин Сергей Борисович
Бурак Андрей Иосифович

Методическое пособие
к лабораторной работе

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВЕЙВЛЕТ-ТИПА
по дисциплине “Цифровая обработка сигналов”
для студентов специальностей 39 09 01 и 39 09 02

Редактор Е.Н.Батурчик

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16

Бумага

Печать офсетная

Усл.печ.л.

Уч.-изд.л.

Тираж экз.

Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Лицензия ЛП №156 от 05.02.2001.

Лицензия ЛВ №509 от 03.08.2001.

220013, Минск, П.Бровки, 6.