ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДЕКОМПОЗИЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ К ПОСТРОЕНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ПОТОКОВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЛОЖЕННОЙ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ ОГРАНИЧЕНИЙ

Л.А. Пилипчук, А.С. Пилипчук
Кафедра компьютерных технологий и систем, Факультет прикладной математики и информатики,
Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: pilipchuk@bsu.by, an.pilipchuk@gmail.com

В работе применена теория декомпозиции линейных систем, обладающих сетевой структурой, к построению оптимальных решений задач потокового программирования. Используется аппарат теории графов, применяются результаты, полученные в теории потоков, а также современные достижения в технологии построения численных решений задач потокового программирования.

Введение

Рассматривается конструктивная теория методов решения экстремальных задач потокового программирования с линейными ограничениями. Разработана технология хранения и преобразования коллекции корневых структур для представления опорного множества дуг на итерациях. На основании результатов из теории сложности вычислений и комбинаторных свойств вложенной сетевой структуры ограничений в системах линейных алгебраических уравнений и неравенств [1] получены эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений для вычисления потенциалов, подходящего направления изменения потока, в которых, наряду с уравнениями системы, составляющими вложенную сетевую структуру, содержится общая часть линейной системы. Используется теоретико-графовая структура опоры разреженной части системы и особенности построения фундаментальной системы решений однородной системы с разреженной матрицей [2, 3]. Применение теории декомпозиции опоры [4] для системы уравнений, ее теоретико-графовых свойств и, как следствие, использование аппарата теории графов, результатов теории потоков и современных достижений в технологии построения численных решений [5] значительно увеличивает эффективность решения задач потокового программирования с дополнительными ограничениямим общего вмда.

I. Математическая модель

Пусть $G = (I, U)$ – конечный ориентированный граф с множеством узлов I и множеством дуг U , $|U| \gg| I |$, $I_i^+(U) = \{j : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j : (i,j) \in U\}$, x_{ij} – дуговой поток по дуге (i,j); μ_{ij} – коэффициент преобразования дугового потока вдоль дуги (i,j), $\mu_{ij} \in]0,1]$, I^* – подмножество узлов множества I, $I^* \neq \oslash$, $sign(i) = 1$, if $i \in I_+^*$; $sign(i) = -1$, if $i \in I_-^*$; $I_+^*, I_-^* \subseteq I^*$, $I_+^* \bigcap I_-^* = \oslash$. x_i – переменная интенсивность узла $i \in I^*$, a_i – значение постоянной интенсивности узла $i \in I \setminus I^*$.

Математическая модель задачи потокового программирования с дополнительными ограничениями имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in I^*} c_i x_i \longrightarrow \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{(i,j)\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji} = \qquad (2)$$

$$= x_i \mathrm{sign}(i), i \in I^*, a_i, i \in I \setminus I^*,$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} + \sum_{i\in I^*} \lambda_i^p x_i = \beta^p, \quad p = \overline{1,q}, \qquad (3)$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, (i,j) \in U, \qquad (4)$$

$$b_{*i} \le x_i \le b_i^*, i \in I^*. \qquad (5)$$

II. Технологии декомпозиции опоры

Теоретико-графовые свойства опоры $R = \{U_R, I_R^*\}$ графа G для сетевой части системы ограничений (2) описаны в [2]. Поскольку некоторые компоненты связности опоры для системы (2) содержат циклы, то для решения разреженных систем с трехдиагональными матрицами используются специальные алгоритмы, описанные в [5]. Эти алгоритмы основаны на использовании специфики обобщенной сети и технологии хранения коллекции корневых структур, разработанной для исследуемой опоры сетевой части ограничений (2).

Для выполнения декомпозиции системы необходимо найти общее решение разреженной системы (2) и полдставить его в общую часть системы (2)–(3). Общее решение системы (2) построено в виде суммы линейной комбинации фундаментальной системы решений однородной системы,порожденной системой (2) и некоторого частного решения разреженной линейной системы (2). Итак, общее решение системы (2) может быть представлено в следующем виде:

$$x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\,\in\,U\setminus U_R} x_{\tau\rho}\delta_{ij}^{\tau\rho} +$$

$$+ \sum_{\gamma\,\in\,I^*\setminus I_R^*} x_\gamma \delta_{ij}^{\gamma} + \widetilde{x}_{ij}, (i,j) \in U_R, \qquad (6)$$

$$x_i = \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} x_{\tau\rho}\delta_i^{\tau\rho} +$$

$$+ \sum_{\gamma\in I^*\setminus I_R^*} x_\gamma \delta_i^{\gamma} + \widetilde{x}_i, i \in I_R^*, \qquad (7)$$

где $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_{ij}, (i,j) \in U; \widetilde{x}_i, i \in I^*)$ – некоторое частное решение системы (2).

Для применения теории декомпозиции получены теоретико-графовые свойства опоры графа для системы (2)–(3). Совокупность множеств $K = \{U_K, I_K^*\}$ является опорой графа $G = (I, U)$ для системы (2)–(3), если выполняются условия:

- Совокупность множеств $K = \{U_K, I_K^*\}$ составляют непересекающиеся множества

$$R = \{U_R, I_R^*\},$$
$$W = \{U_W, I_W^*\},$$

где

$$U_K = U_R \cup U_W,$$
$$U_R \cap U_W = \oslash,$$
$$I_K^* = I_R^* \cup I_W^*, I_R^* \cap I_W^* = \oslash.$$

Совокупность множеств $K = \{U_K, I_K^*\}$ является опорой графа $G = (I, U)$ для системы (2)–(3) [5].

- Совокупность множеств $R = \{U_R, I_R^*\}$ является опорой графа $G = (I, U)$ для системы (2).
- $|W| = q$, где q – число линейно независимых уравнений системы, полученной в результате подстановки общего решения системы (2) в уравнения общего вида (3).
- Матрица $\Lambda_W = (\Lambda_{W_1}, \Lambda_{W_2})$, состоящая из элементов

$$\Lambda_{\tau\rho}^p = \sum_{(i,j)\in U_R} \lambda_{ij}^p \delta_{ij}^{\tau\rho} + \sum_{i)\in I_R^*} \lambda_i^p \delta_i^{\tau\rho} + \lambda_{\tau\rho}^p,$$

$$\Lambda_{W_1} = (\Lambda_{\tau\rho}^p, p = \overline{1,q}; (\tau,\rho) \in U_W),$$

$$\Lambda_{W_2} = (\Lambda_{\gamma}^p, p = \overline{1,q}; \gamma \in I_W^*),$$

$$\Lambda_{\gamma}^p = \sum_{(i,j)\in U_R} \lambda_{ij}^p \delta_{ij}^{\gamma} + \sum_{i)\in I_R^*} \lambda_i^p \delta_i^{\gamma} + \lambda_{\gamma}^p.$$

является невырожденной.

В результате применения теории декомпозиции имеем систему:

$$\sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \Lambda_{\tau\rho}^p x_{\tau\rho} +$$

$$+ \sum_{\gamma\in I^*\setminus I_R^*} \Lambda_\gamma^p x_\gamma = \widetilde{\beta}^p, p = \overline{1,q}, \qquad (8)$$

$$\widetilde{\beta}^p = \beta^p - \sum_{(i,j)\in U_R} \lambda_{ij}^p \widetilde{x}_{ij} - \sum_{(k)\in U_R} \lambda_k^p \widetilde{x}_k;$$

$$\Lambda_{\tau\rho}^p = \sum_{(i,j)\in U_R} \lambda_{ij}^p \delta_{ij}^{\tau\rho} +$$

$$+ \sum_{i)\in I_R^*} \lambda_i^p \delta_i^{\tau\rho} + \lambda_{\tau\rho}^p,$$

$$\Lambda_\gamma^p = \sum_{(i,j)\in U_R} \lambda_{ij}^p \delta_{ij}^{\gamma} +$$

$$+ \sum_{i)\in I_R^*} \lambda_i^p \delta_i^{\gamma} + \lambda_\gamma^p.$$

Детерминанты $\Lambda_{\tau\rho}^p$, Λ_γ^p вычмсляются для дуг $(\tau, \rho) \in U \setminus U_R$ и узлов $\gamma \in I^* \setminus I_R^*$ соответственно.

Систему (8) представим в матричной форме

$$\Lambda_W x_W = \widetilde{\beta} - \Lambda_N x_N, \qquad (9)$$

где переменные x_W, соответствуют совокупности множеств W.

$$x_W = (x_{\tau\rho}, (\tau,\rho) \in U_W; x_\gamma, \gamma \in I_W^*),$$

Переменные x_N формируются следующим образом:

$$x_N = (x_{\tau\rho}, (\tau,\rho) \in U_N; x_\gamma, \gamma \in I_N^*).$$

Матрица системы (9)является невырожденной, поскольку K – опора графа G для системы (2)–(3).Система (9) имеет единственное решение.

Заключение

Эффективными методами решения экстремальных задач потокового программирования, обладающих сетевой структурой, является применение теории декомпозиции опоры для системы уравнений, аппарата теории графов, результатов теории потоков и современных достижений в технологии построения численных решений.

1. Габасов, Р. Методы линейного программирования. Ч. 3: Специальные задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Минск, 1980.
2. Pilipchuk, L. A. Algorithms for construction of optimal and suboptimal solutions in network optimization problems / L. A. Pilipchuk, A. S. Pilipchuk, Y. H. Pesheva // International Journal of Pure and Applied Mathematics (*IJPAM*). Vol. 54, № 2, 2009. P. 193-205.
3. Pilipchuk, L. A. Network optimization problems / L. A. Pilipchuk // Applications of Mathematics in Engineering and Economics'27,eds. D. Ivanchev and M.D. Todorov – Heron Press, Sofia, 2002.
4. Pilipchuk, L. A. Solution of Large Linear Systems with Embedded Network Structure for a Non-Homogeneous Network Flow Programming Problem. / L. A. Pilipchuk, E. S. Vecharynski, Y. H. Pesheva // Mathematica Balkanica. New Series Vol. 22, Fasc. 3-4, 2008. P. 235 - 254.
5. Pilipchuk, L. A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L. A. Pilipchuk. – Minsk: BSU, 2013.