

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

Кафедра радиотехнических систем

С.Б. Саломатин

**ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ
В
РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по курсу

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

для студентов специальности 39 01 02 «Радиоэлектронные системы»
дневная форма обучения

Минск 2002

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. ЦИФРОВЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

1.1. Дискретизация сигналов и теорема отсчетов

1.2. Представление дискретных сигналов с помощью функциональных рядов

1.3. Цифровые сигналы

2. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ, ИЗМЕРЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

2.1. Обработка сигналов в задачах обнаружения

2.2. Пространственно-временная обработка сигналов

2.3. Дискретные алгоритмы частотно-фазовых измерений

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

3.1. Дискретное преобразование Фурье

3.1.1. Дискретные экспоненциальные функции

3.1.2. Свойства ДПФ

3.1.3. Разновидности ДПФ

3.2. Алгоритмы вычисления дискретного преобразования Фурье

3.2.1. БПФ по смешанному основанию

3.2.2. Алгоритм Гуд-Томаса

3.2.3. Алгоритмы БПФ по основанию два

3.2.4. БПФ для простого основания

3.2.5. ДПФ на основе алгоритма ЛЧМ-Z фильтрации

3.4. Преобразование Уолша – Адамара

3.4.1. Функции Уолша – Адамара

3.4.2. Свойства преобразования Уолша – Адамара

3.4.3. Быстрое преобразование Уолша – Адамара

4.1. Линейная и циклическая свертки

4.2. Алгоритмы свертки квазибесконечной последовательности

5. ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

5.1. Нерекурсивное винеровское оценивание

5.2. Обобщенная винеровская фильтрация

6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

6.1. Спектральный анализ стационарных гармонических сигналов

6.2. Статистические методы спектрального анализа

6.3. Методы анализа, основанные на моделях исследуемых процессов

ВВЕДЕНИЕ

Обработкой сигнала называют процесс преобразования сигнала, исходящего от источника информации, с целью освобождения от различного рода помех и информации, вносимой косвенным характером измеряемого физического процесса и нелинейными характеристиками датчиков, а также с целью представления полезной информации в наиболее удобной форме. Если сигнал представляется в цифровой форме и в таком виде подвергается обработке, то говорят о цифровой обработке сигналов – ЦОС.

Основным методом, применяемым в ЦОС, является метод *математического моделирования*. С учетом математической модели сигнала и задач обработки строится математическая модель процесса ЦОС. Реализация модели в виде отдельного специализированного устройства позволяет рассматривать ее как модель системы ЦОС. Конкретный вид реализации определяется с учетом требований к производительности системы, быстродействию, конструктивному исполнению, гибкости перестройки и др. Эффективность ЦОС определяется объемом вычислений и точностью реализации математической модели процесса ЦОС с помощью ЦВМ или специализированного вычислительного устройства.

Классы моделей *систем ЦОС* отличаются по видам решаемых задач, применяемого для описания сигнала математического аппарата и другим признакам. В радиотехнических системах можно выделить классы задач радиолокации, передачи информации, управления и навигации. Каждый из этих классов содержит ряд подклассов первичной (локальной) и вторичной (глобальной) обработки, связанной с обнаружением, различением и фильтрацией, выделением сигналов, прогнозом и оценкой их параметров в различных условиях передачи, распространения и приема. Можно выделить классы *базовых* моделей, часто применяющихся при обработке многих видов сигналов. К таковым относятся классы моделей *свертки, линейной фильтрации и оценки, спектральных преобразований и анализа*.

По виду применяемого для описания сигналов математического аппарата модели ЦОС подразделяются на детерминированные и статистические. В свою очередь каждый из этих классов можно разделить на подклассы в зависимости от конкретной задачи и используемых математических методов и теорий. Выбор модели зависит от ее точности (адекватности оригиналу) и структуры алгоритма, получающегося при реализации модели. В цифровых моделях учитывается эффект дискретизации сигнала во времени. Аппарат непрерывной математики заменяется аппаратом дискретной математики. Реализация таких моделей с помощью вычислительной техники подразумевает выполнение квантования сигналов по уровню, записав выборочные значения непрерывного сигнала в виде кодовых комбинаций. Таким образом осуществляется процесс аналого–цифрового преобразования. Далее, по полученному цифровому сигналу строится цифровая модель обработки.

1. ЦИФРОВЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

Системы цифровой обработки сигналов непосредственно оперируют с последовательностями цифровых кодов (чисел), которые называют *цифровыми сигналами*. Цифровой сигнал в радиоэлектронных системах образовывается в результате аналого-цифрового преобразования непрерывных (континуальных) сигналов. Аналого-цифровое преобразование (АЦП) включает три этапа: *дискретизацию* сигнала по времени (пространству), *квантование* по уровню и *цифровое кодирование*.

На первом этапе образуется *дискретный* сигнал $x[\Delta]$, который является функцией дискретной переменной Δ , принимающей только фиксированные значения. Если эти значения являются равноотстоящими $\Delta = nT_{\partial}$ ($T_{\partial} = \text{const}$), то выбрав соответствующий масштаб, их можно приравнять натуральным числам. В этом случае дискретный сигнал определяют функцией номера отсчета (выборки) $x[n]$. Говорят, что $T_{\partial} = 1/f_{\partial}$ это период дискретизации, f_{∂} - частота дискретизации, а n - номер отсчета.

Второй этап АЦП дает *дискретный квантованный* сигнал $x_{\text{кв}}[nT_{\partial}]$, отличающийся конечным множеством принимаемых им значений. На третьем этапе получается *цифровой* сигнал $x_{\text{ц}}[nT_{\partial}]$ в виде последовательности цифровых кодов с заданным числом разрядов.

Вычислительные средства в соответствии с заданным алгоритмом цифровой обработки Φ преобразуют сигнал $x_{\text{ц}}[nT_{\partial}]$ в *выходной цифровой* сигнал $y_{\text{ц}}[nT_{\partial}] = \Phi\{x_{\text{ц}}[nT_{\partial}]\}$. В цифровых системах с аналоговым выходом цифровая форма выходного сигнала $y_{\text{ц}}[nT_{\partial}]$ преобразуется в аналоговую $y(t)$ с помощью цифро-аналогового преобразования.

1.1. Дискретизация сигналов и теорема отсчетов

Наиболее удобным с точки зрения организации обработки и естественным способом дискретизации является представление сигналов в виде выборок их значений (отсчетов) в отдельных, регулярно расположенных точках $T_{\partial} = \Delta t$. Практически операция дискретизации осуществляется путем измерения значений сигнала с помощью датчика, действие которого можно описать как свертку с некоторым ядром $\lambda_{\partial}(t)$:

$$u(k\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\lambda_{\partial}(t - k\Delta t)dt. \quad (1)$$

Набор значений $\{u(k\Delta t)\}$ составляет дискретное представление сигнала. Ядро $\lambda_{\partial}(t)$ называется *апертурой дискретизации*. Восстановление непрерывного сигнала из приближенных значений $\{u(k\Delta t)\}$ выполняется путем интерполяции

$$\sum_k u(k\Delta t)\lambda_b(t - k\Delta t) \approx u(t) \quad (2)$$

с помощью интерполирующей функции $\lambda_b(t)$, которая называется *апертурой восстановления*.

Если исходить только из точности аппроксимации, то существует важный класс сигналов и соответствующие ему базисные функции, для которых распределения (1) и (2) являются абсолютно точными. Это сигналы, спектр Фурье которых $U(f)=F\{u(t)\}$ отличен от нуля только в пределах ограниченного участка области определения (*сигналы с ограниченным спектром*).

Пусть сектор сигналов отличен от нуля на интервале $(-1/2\Delta t, 1/2\Delta t)$, т.е.

$$U(f) = U(f) \text{rect}(f\Delta t + 1/2), \quad (3)$$

где
$$\text{rect}(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq a < 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Для таких сигналов базисы дискретизации и восстановления образуются из функций отсчетов:

$$\lambda_a(t) = (1/\Delta t) \sin c[\pi(t - k\Delta t)/\Delta t]; \quad \lambda_b(t) = \sin c[\pi(t - k\Delta t)/\Delta t], \quad (4)$$

а (1) и (2) переходят в точные равенства:

$$u(k\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin c[\pi(t - k\Delta t)/\Delta t]; \quad (5)$$

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \sin c[\pi(t - k\Delta t)/\Delta t]. \quad (6)$$

Эти соотношения называются *теоремой отсчетов*. Равенство (5) означает, что отсчетами сигнала являются его значения в точках $\{k\Delta t\}$, полученные после пропускания сигнала через инвариантный к сдвигу «идеальный» фильтр с импульсной и частотной характеристиками:

$$h_\delta(t) = \lambda_a(t) = (1/\Delta t) \sin c(\pi t / \Delta t), \quad (7)$$

$$H_\delta(f) = \text{rect}(f\Delta t + 1/2). \quad (8)$$

Равенство (6) означает, что процедуру восстановления непрерывного сигнала $u(t)$ из его отсчетов $\{u(k\Delta t)\}$ можно представить как пропускание через идеальный фильтр нижних частот (7), (8) непрерывного сигнала вида

$$u_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t), \quad (9)$$

спектр которого $U_1(f)$ представляет собой периодически продолженный с периодом $(1/\Delta t)$ спектр $U(f)$ сигнала $u(t)$:

$$U_1(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U(f - m/\Delta t). \quad (10)$$

Действительно, при такой фильтрации спектр $U_1(f)$ умножается на частотную характеристику фильтра (8), выделяющую только один период спектра, соответствующий $m = 0$ и равный спектру сигнала $u(t)$. Периодическое продолжение спектра (10) возможно, если шаг растривания Δt меньше или равен величине, обратной протяженности спектра. В противном случае происходит перекрытие (*наложение*) соседних периодов спектра сигнала $u_1(t)$, и идеальным фильтром нижних частот уже невозможно выделить спектр сигнала в чистом виде (рис 1).

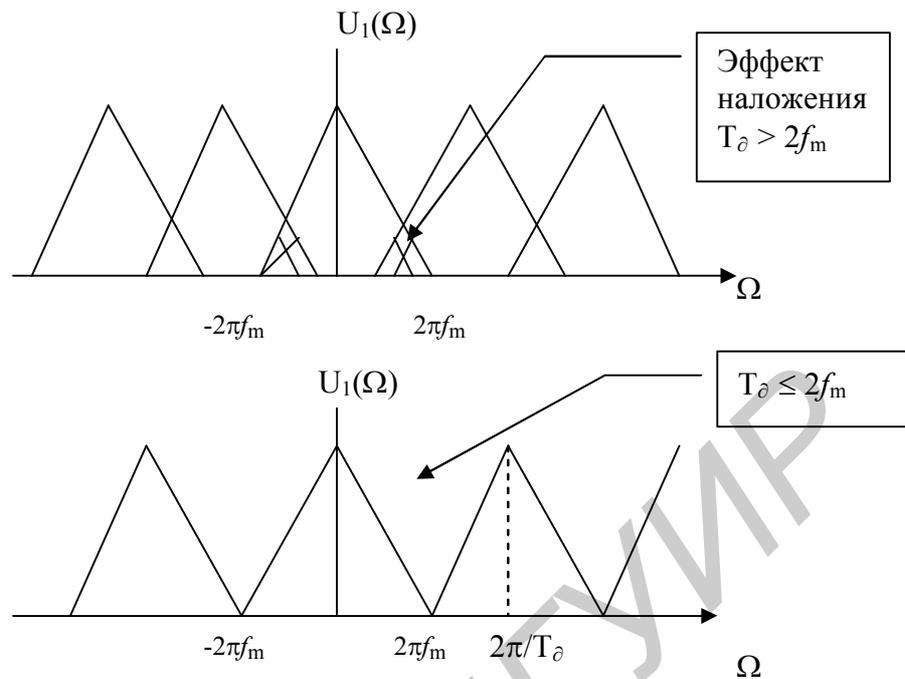


Рис. 1

В восстановленном сигнале появляются излишние компоненты за счет наложения слева и справа на основной (нулевой) период спектра фрагментов спектра плюс первого, минус первого и следующих порядков. При этом, если в исходном сигнале они имели частоту, например, $(1/2\Delta t) + \Delta f$, то в восстановленном сигнале их частота оказывается равной $(1/2\Delta t) - \Delta f$, то есть более низкой. Это влияние снижения частоты периодических составляющих в сигнале при дискретизации с шагом, не соответствующей максимальной частоте сигнала, называется *эффектом наложения*. Для того чтобы этих искажений не было, очевидно, необходимо перед растриванием с шагом Δt пропустить сигнал через идеальный фильтр нижних частот (*антиэлайсинговый*) с полосой пропускания $(\pm 1/2\Delta t)$. Сходные по своей природе искажения возникают, если восстанавливающий фильтр имеет полосу пропускания шире, чем $(\pm 1/2\Delta t)$.

Теорема отсчетов может быть распространена на, содержащие *несущую* частоту f_0 . Это сигналы, спектр которых отличен от нуля на ограниченных интервалах, смещенных относительно нулевой частоты. Дискретизацию сигналов с несущей частотой можно выполнить несколькими способами.

1. *Дискретизация с использованием аналитического сигнала*. Вместо действительного сигнала $u(t)$ можно рассмотреть аналитический сигнал $\dot{u}(t) = u(t) + ju_H(t)$, где $u_H(t)$ - преобразование Гильберта $u(t)$. Аналитический сигнал имеет односторонний спектр и к нему теорема отсчетов применима уже в своем обычном виде:

$$\dot{u}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{u}\left(\frac{k}{f_h - f_l}\right) \lambda_a\left(t - \frac{k}{f_h - f_l}\right), \quad (11)$$

где $\dot{u}\left(\frac{k}{f_h - f_l}\right)$ - отсчеты аналитического сигнала,

$$\begin{aligned} \lambda_a(t) &= h_{\partial}(t) = \mathbf{F}^{-1}\{H_{\partial}(f)\} = \\ &= \frac{1}{f_h - f_l} \int_{f_l}^{f_h} \exp(j2\pi ft) dt = \operatorname{sinc}[\pi(f_h - f_l)t] \exp[j\pi(f_h + f_l)t] \end{aligned}$$

$f_l = (f_0 - F)$ и $f_h = (f_0 + F)$ – границы частотного интервала в положительной части спектра.

Сигнал на несущей частоте описывается отсчетами своей огибающей и фазы следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{u^2\left(\frac{k}{f_h - f_l}\right) + u_H^2\left(\frac{k}{f_h - f_l}\right)} \operatorname{sinc}[\pi(f_h - f_l)t] \times \\ &\times \cos\left[\pi(f_h + f_l)t + \operatorname{arctg} \frac{u_H(k/(f_h - f_l))}{u(k/(f_h - f_l))}\right] \end{aligned}$$

Количество отсчетов определяется только шириной полосы частот сигнала $2F$.

Вещественный узкополосный процесс $u(t)$ может быть представлен посредством ряда с периодически повторяющимися отсчетами после непосредственного выделения вещественной части (11):

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\dot{u}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [u(k/2F) \operatorname{Re}\{\lambda_a(t - k/2F)\} - u_H(k/2F) \operatorname{Im}\{\lambda_a(t - k/2F)\}].$$

Заметим, что в том и в другом случае при временной периодической дискретизации вещественного узкополосного процесса нужно иметь отсчеты не только самого процесса $u(t)$, но также отсчеты квадратурно-сопряженного процесса $u_H(t)$.

2. Другой способ дискретизации состоит в следующем. Попробуем представить вещественный узкополосный сигнал в виде ряда, коэффициентами которого являются отсчеты самого процесса. Спектр вещественного сигнала с несущей частотой занимает две спектральные полосы. Поэтому при дискретизации такого сигнала с интервалом дискретности, равным величине, обратной ширине спектра, периодическое повторение полосы $f \in (-f_0 - F, -f_0 + F)$ всегда наложится на полосу $f \in (f_0 - F, f_0 + F)$ и наоборот. В результате спектр дискретного решетчатого процесса не будет совпадать со спектром исходного процесса.

Эта трудность может быть преодолена путем увеличения частоты дискретизации, что приведет к увеличению периода повторения $1/T \gg 2F$ в спектральной области.

Интервал дискретности T_δ выберем таким образом, чтобы при периодическом повторении спектра $U(f)$ полоса $(-f_0 - F + m/T_\delta, -f_0 + F + m/T_\delta)$ при любом целом m не накладывалась на полосу $(f_0 - F, f_0 + F)$. Примем $1/T_\delta = 4F(1 + \beta)$, где β - коэффициент, величину которого нужно определить. Требование неперекрывания полос приводит к неравенству

$$\frac{1}{m} \left(\frac{f_0}{2F} - \frac{1}{2} \right) - 1 \geq \beta \geq \frac{1}{m+1} \left(\frac{f_0}{2F} + \frac{1}{2} \right) - 1.$$

Целое число m выбираем из условия минимизации β с учетом ограничения $\beta \geq 0$. Это дает $m = \lfloor (f_0/2F) - 1/2 \rfloor$, где $\lfloor a \rfloor$ - целая часть числа a . Если $(f_0/2F) - 1/2$ – целое число, то $\beta=0$ и $T_\delta=1/4F$. Во всех остальных случаях $\beta > 0$ и период временной дискретизации несколько меньше величины $1/4F$.

1.2. Представление дискретных сигналов с помощью функциональных рядов

В системах обработки сигналы задаются на определенном интервале изменения переменной. Для дискретного сигнала – это счетное множество точек, например $[0, N-1]$ или $[0, \infty]$. В первом случае говорят, что дискретные сигналы определены на конечном интервале $[0, N-1]$, включающем в себя N точек.

Дискретное представление можно рассматривать как аппроксимации аналоговых сигналов с помощью рядов. При этом происходит замена непрерывных значений коэффициентами ряда. Дискретные сигналы представляются в виде линейной комбинации базисных функций. Процесс представления заключается в проектировании сигнала на заданный базис. Коэффициенты представления находятся как скалярные произведения сигнала на соответствующие базисные функции:

$$\alpha[n] = (u, \varphi_n). \quad (12)$$

Размерность базиса (количество коэффициентов $\alpha[n]$) ограничивают, основываясь на требуемой точности аппроксимации сигналов $u(t)$, конечной суммой

$$u(t) \approx \tilde{u}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n] \cdot \varphi_n(t). \quad (13)$$

Оптимальные базисы дискретного представления сигналов.

Естественно считать оптимальным такой способ дискретизации, при котором размерность базиса минимальна при заданной точности восстановления сигнала.

Пусть $u(t)$ - сигнал, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} (P_t \{u\}, u) &= 1 - \varepsilon_t^2, \\ (P_f \{u\}, u) &= 1 - \varepsilon_F^2, \\ (u, u) &= \|u\|^2 = 1, \end{aligned} \quad (14)$$

где P_t – оператор стробирования, выделяющий из сигнала участок протяженностью T ; P_f – идеальный полосовой фильтр, пропускающий только частоты спектра в интервале $(-F, F)$; $\varepsilon_t^2, \varepsilon_F^2$ – ошибки такого усечения по протяженности и по спектру.

Тогда наилучшим является представление сигнала по функциям, являющимися решением уравнения

$$2F \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_k(\xi) \operatorname{sinc} 2\pi F(t - \xi) d\xi = \lambda_k \varphi_k(t), \quad (15)$$

и называемыми сфероидальными волновыми функциями (СВФ), причём

$$\left\| u - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 \leq 12(\varepsilon_t + \varepsilon_F)^2 + \varepsilon_F^2, \quad (16)$$

если N – наименьшее целое число, превышающее $2TF$ [3]. При $T \rightarrow \infty$ – сфероидальные волновые функции приближаются к отсчётным функциям $\operatorname{sinc}(2\pi Ft)$, и разложение по ним переходит в разложение по *теореме отсчётов*. При конечном T представление (13) по СВФ сигналов, заданных (14), лучше их разложения по отсчётным функциям при том же N .

При *статистическом описании* сигналов оптимальный N – мерный базис для представления отдельных реализаций сигналов обычно определяют как базис, при котором норма ошибки, усреднённая по ансамблю реализаций, минимальна. В этом случае получается результат, известный как *теорема Карунена–Лоэва* [3]. Минимальное значение нормы ошибки при представлении сигналов на интервале протяженностью T достигается при использовании в качестве базиса N собственных функций, составляющих N наибольших собственных значений оператора λ_k , ядром которого является корреляционная функция сигналов $R_a(t, \xi)$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} R_a(t, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi = \lambda_k \varphi_k(t). \quad (17)$$

Минимальное значение нормы ошибки при этом равно

$$\|\varepsilon\|_{\min}^2 = \left\| u(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \varphi_k(t) \right\|_{\min}^2 = \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k. \quad (18)$$

Такое представление называется *разложением Карунена–Лоэва*. Коэффициенты разложения Карунена–Лоэва являются некоррелированными (ввиду ортогональности $\varphi_k(t)$) случайными величинами).

Для стационарных процессов, когда корреляционная функция зависит только от разности аргументов ($R_a(t, \xi) = R_a(t - \xi)$), при $T \rightarrow \infty$ (T становится достаточно большим по сравнению с протяженностью $R_a(t)$), собственные функции $\varphi_k(t)$ приближаются к комплексным дискретным экспоненциальным функциям с частотами k/T .

В случае бесконечного интервала определения дискретные сигналы представляются с помощью *дискретного преобразования Лапласа* (ДПЛ):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\pi}^{\alpha+j\pi} X(s)e^{sn} ds, \quad X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-sn}.$$

Здесь изображение $X(s)$ есть периодическая функция непрерывной комплексной переменной $s = \alpha + j\omega$. Для удобства ДПЛ часто используют в несколько модифицированном виде, носящим название Z -преобразование и получающееся путем введения новой переменной $z = \exp(s)$.

Z -преобразование дискретной последовательности $\{x[n]\}$ имеет вид

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z)z^{n-1} dz, \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

интегрирование осуществляется в области сходимости функции.

В частотно-временной области сигнал $x[n]$ может быть описан с помощью *дискретного во времени преобразования Фурье* :

$$X_{TF}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{TF}(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega.$$

Дискретное во времени преобразование Фурье связано с преобразованием Фурье непрерывного сигнала $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$ соотношением

$$X(e^{j\omega}) = X(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T_s}.$$

В случае конечного интервала определения для периодического дискретного сигнала, повторяющегося с периодом NT_s $x[n] = x[n+lN]$, удобно использовать базис *ортogonalных дискретно экспоненциальных функций* (ДЭФ). Такое представление называется *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ) и имеет вид

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Здесь сигнал $x[n]$ и его спектр $X(k)$ являются дискретными функциями, определенными на конечном интервале N .

Для анализа нестационарных, *всплесковых*, сигналов часто используют представление с помощью *вейвлетных функций* в виде коротких, солитоноподобных колебаний $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Понятие частоты классического спектрального анализа при этом

заменяется масштабом a , а чтобы перекрыть всю временную ось, вводится сдвиг функции во времени b .

1.3. Цифровые сигналы

Операция квантования непрерывной величины состоит в том, что континуум ее возможных значений заменяется счетным числом значений. Существующие устройства квантования обычно осуществляют равномерное квантование сигналов,

при котором границы интервалов квантования размещаются равномерно в заданном диапазоне значений сигнала, а представители уровней квантования располагаются посередине между этими границами. В случае равномерной процедуры количество порогов квантования оценивается величиной

$$r = \frac{(u_{\max} - u_{\min})}{\Delta u},$$

где u_{\max} и u_{\min} - максимальная и минимальная амплитуды дискретизируемого сигнала. Пороги квантования разбивают интервал $(u_{\max} - u_{\min})$ на $(r+1)$ подынтервалов – уровней квантования.

Отсчет непрерывного процесса в АЦП преобразуется в двоичный код из m разрядов, каждый из которых представлен нулем или единицей. Число разрядов определяется числом уровней квантования:

$$m = \lfloor \log_2(r + 1) \rfloor.$$

При когерентной обработке, когда требуется осуществлять цифровую фильтрацию сигналов, когерентную компенсацию помех, число уровней квантования нужно увеличивать, чтобы уменьшить по возможности искажения (из-за квантования) сигналов и помех. На практике часто выбирают $\Delta u = u_{\min} \approx \sigma_{ш}$, где $\sigma_{ш}^2$ - дисперсия собственного шума приемника. При этом число порогов квантования равно $r = d - 1$, где $d = \frac{u_{\max}}{\sigma_{ш}}$ - динамический диапазон аналоговой части приемника. Отсюда получаем требуемое число разрядов кода и соответственно число разрядов АЦП:

$$m = \lfloor \log_2 d \rfloor.$$

Системы счисления в цифровых преобразованиях. Дискретная система обработки сигналов является конечной машиной, работающей с конечным множеством чисел. Невозможно использовать это множество для выполнения арифметических операций в поле вещественных чисел $(\mathbb{R}, +, \times)$, поскольку \mathbb{R} - бесконечное множество, большинство элементов которого непредставимо в вычислительной машине.

На практике в процессе обработки осуществляют аппроксимацию арифметики в поле $(\mathbb{R}, +, \times)$. Часто для такой аппроксимации используется множество \mathbb{F} так называемых чисел с плавающей точкой (или машинных чисел). Множество \mathbb{F} является частью множества вещественных чисел со следующими свойствами.

1. \mathbb{F} – конечное подмножество множества рациональных чисел \mathbb{Q} .
2. Элементы \mathbb{F} распределены неравномерно на вещественной прямой. Интервал между двумя “соседними” машинными числами очень мал вблизи нуля, а при удалении от него постепенно увеличивается. Интервал между максимально возможным машинным числом и соседним с ним очень велик.
3. Система $(\mathbb{F}, +, \times)$ не будет полем (главным образом из-за того, что нет замкнутости относительно обеих указанных бинарных операций).

Практичный выход из возникающих трудностей состоит в представлении вещественного числа x ближайшим к нему машинным числом \hat{x} ; тем самым вводя ошибку округления $\varepsilon = x - \hat{x}$. Из-за отсутствия замкнутости ошибки округления

возникают также в результате арифметических операций над элементами \mathbb{F} . Например, если \hat{x} и \hat{y} - два соседних элемента \mathbb{F} , то число $z = (\hat{x} + \hat{y})/2$ уже не принадлежит \mathbb{F} . Его следует заменить на \hat{z} - элемент в \mathbb{F} , ближайший к z . В этом примере \hat{z} совпадает либо с \hat{x} , либо с \hat{y} .

Представление целых чисел в системе счисления по смешанным основаниям.

Рассмотрим упорядоченный набор из n целых чисел

$$\rho = [r_1, r_2, \dots, r_n],$$

компоненты которого r_1, r_2, \dots, r_n называются основаниями. Пусть N есть произведение оснований, т.е. $N = \prod_{i=1}^n r_i$. Известно, что каждое целое число s , такое, что

$0 \leq s < N$, можно представить в виде

$$s = d_0 + d_1(r_1) + d_2(r_1 r_2) + \dots + d_{n-1}(r_1 r_2 \dots r_{n-1}),$$

где d_0, d_1, \dots, d_{n-1} являются цифрами стандартного представления для смешанного основания и удовлетворяют неравенствам $0 \leq d_i < r_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Упорядоченный набор цифр d_0, d_1, \dots, d_{n-1} для данного s записывается в виде кода $(s)_\rho = (d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$. Например, если $\rho = [2, 3, 5]$, то $N = 30$. Следовательно, число 29 можно записать в виде $29 = 1 + 2(2) + 4(2 \cdot 3)$ и представление числа по смешанному основанию ρ имеет вид $(29)_\rho = (1, 2, 4)$.

Стандартной системой счисления со смешанным основанием ρ называется множество всевозможных наборов цифр типа $(s)_\rho = (d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$ для целых чисел $s \in [0, N)$. В частном случае $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ приходим к известному представлению числа в позиционной системе с фиксированным основанием.

Контрольные вопросы и задачи

1. Определить условие наложения спектров для q_1, q_2 двух сигналов $s_1(t) = \exp(2\pi q_1 t)$ и $s_2(t) = \exp(2\pi q_2 t)$, если они дискретизируются с интервалом $T_\delta = \Delta t$.
2. Показать, что если в предыдущей задаче положить $q_2 = \frac{m}{\Delta t} - q_1$, где m - целое число, то возникает эффект комплексно-сопряженного наложения.
3. Пояснить, в чем различие между преобразованием Фурье непрерывного сигнала, дискретного во времени преобразованием Фурье и дискретным преобразованием Фурье.
4. Определить код представления числа 25 в системе счисления по смешанному основанию $N=60$.

2. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ, ИЗМЕРЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

Особенностью задач цифровой обработки сигналов в радиоэлектронных системах является их статистическая направленность. Так, при решении задач *статистического синтеза алгоритмов цифровой обработки сигналов* модель системы ЦОС строится на основе вероятностных характеристик случайных числовых последовательностей на выходе АЦП, а также на основе анализа статистических свойств сигналов и помех.

2.1. Обработка сигналов в задачах обнаружения

Некогерентная обработка. В этом случае АЦП стоит после цепочки: согласованный фильтр (СФ), амплитудный детектор (АД) (рис. 2). Напряжение с выхода детектора $u(t)$ дискретизируется по времени $u(t) \rightarrow \tilde{u}(nT_{\partial}) \equiv \tilde{u}[n], n = 0, 1, 2, \dots$ и квантуется по амплитуде $\tilde{u}[n] \rightarrow u[n]$.

Оптимальный обнаружитель должен формировать отношение правдоподобия [3,7]

$$\Lambda = P(u[0], u[1], \dots, u[N-1] | \mathcal{H} = 1) / P(u[0], u[1], \dots, u[N-1] | \mathcal{H} = 0),$$

где $P(u[0], u[1], \dots, u[N-1] | \mathcal{H} = 1), P(u[0], u[1], \dots, u[N-1] | \mathcal{H} = 0)$ условные вероятности отсчетов при различных условиях на входе АЦП и сравнить его с порогом.

Для статистически независимых наблюдений алгоритм цифрового процессора (ЦП) оптимального обнаружения бинарно квантованных сигналов имеет вид

$$\sum_{n=0}^{N-1} u[n] h[n] \underset{d_2}{\overset{d_1}{\geq}} C,$$

где $h[n] = \ln(p_{сш,n} q_{ш,n} / p_{ш,n} q_{сш,n})$ - весовые коэффициенты, $1 - p_{ш,n} = q_{ш,n}$, $1 - p_{сш,n} = q_{сш,n}$ - вероятности появления нуля на n -й позиции при условии, что на входе АЦП один шум и смесь сигнала с шумом соответственно, C - порог обнаружения, выбираемый по критерию Неймана-Пирсона.

Модель когерентной цифровой обработки сигналов. Чтобы снизить требования к быстродействию АЦП и других цифровых элементов, цифровую обработку стараются проводить на пониженной частоте. Для этого используют схему с двумя квадратурными каналами (рис. 3), в которой с помощью умножителей и фильтров нижних частот (ФНЧ) (т.е. фазовых детекторов) осуществляется переход от промежуточной (или высокой) частоты f_0 к видеочастоте. Квадратурные составляющие $\text{Re} \dot{x}(t)$ и $\text{Im} \dot{x}(t)$, где $\dot{x}(t)$ - комплексная огибающая наблюдаемого процесса $x(t)$, содержат всю необходимую информацию о сигнале. Эти составляющие дискретизируются в АЦП и затем поступают в цифровой процессор. При

оптимальной аналоговой обработке квадратурных составляющих находится модуль комплексной статистики в виде корреляционного интеграла

$$\dot{z} = 0,5 \int_0^{T_a} \dot{x}(t) \dot{r}^*(t) dt. \quad (19)$$

Здесь $\dot{r}(t)$ - весовая функция, астерик означает комплексное сопряжение, T_a - интервал анализа. Учитывая представление комплексных функций $\dot{x}(t) = \text{Re } \dot{x}(t) + j \text{Im } \dot{x}(t)$ и $\dot{r}(t) = \text{Re } \dot{r}(t) + j \text{Im } \dot{r}(t)$, корреляционный интеграл распадается на сумму из четырех интегралов, при этом

$$\begin{aligned} \text{Re } \dot{z} &= 0,5 \int_0^{T_a} \text{Re } \dot{x}(t) \text{Re } \dot{r}^*(t) dt - 0,5 \int_0^{T_a} \text{Im } \dot{x}(t) \text{Im } \dot{r}^*(t) dt, \\ \text{Im } \dot{z} &= 0,5 \int_0^{T_a} \text{Re } \dot{x}(t) \text{Im } \dot{r}^*(t) dt + 0,5 \int_0^{T_a} \text{Im } \dot{x}(t) \text{Re } \dot{r}^*(t) dt. \end{aligned}$$

После дискретизации по времени эти интегралы перейдут в суммы

$$\begin{aligned} \text{Re } \dot{z} &= 0,5 \sum_n \text{Re } \tilde{x}[n] \text{Re } \tilde{r}^*[n] - 0,5 \sum_n \text{Im } \tilde{x}[n] \text{Im } \tilde{r}^*[n], \\ \text{Im } \dot{z} &= 0,5 \sum_n \text{Re } \tilde{x}[n] \text{Im } \tilde{r}^*[n] + 0,5 \sum_n \text{Im } \tilde{x}[n] \text{Re } \tilde{r}^*[n]. \end{aligned} \quad (20)$$

В результате квантования по уровню и цифрового кодирования осуществляется переход чисел $\text{Re } \tilde{x}[n] \rightarrow I_x[n]$; $\text{Im } \tilde{x}[n] \rightarrow Q_x[n]$. После этого корреляционные суммы можно вычислить с помощью четырех корреляторов, реализующих операции $\sum_n I_x[n] I_r[n]$, $\sum_n Q_x[n] Q_r[n]$, $\sum_n I_x[n] Q_r[n]$, $\sum_n Q_x[n] I_r[n]$, где $I_r[n]$, $Q_r[n]$ - числа, являющиеся цифровыми значениями коэффициентов $\text{Re } \tilde{r}[n]$ и $\text{Im } \tilde{r}[n]$. Выходы корреляторов объединяются с учетом (20), после чего формируется модуль статистики (19). Все эти операции составляют алгоритм функционирования цифрового процессора (ЦП).

Вычислительная процедура, реализуемая цифровым коррелятором, идентична цифровой фильтрации, в основе которой лежит операция *свертки*:

$$z[k] = \sum_{i=0}^k x[i] h[k-i], k = 0, \dots, N-1,$$

где $x[i]$ - дискретный сигнал на входе фильтра, $h[k-i]$ - весовые коэффициенты, определяющие импульсную характеристику фильтра; N - объем выборки. Алгоритм свертки описывает фильтрацию во временной области. Но можно ее проводить и в частотной, используя для этого *дискретное преобразование Фурье* и *теорему о свертке*. Заметим, что цифровой фильтр не является линейным устройством и может быть им только аппроксимирован при малой погрешности округления чисел.

2.2. Пространственно-временная обработка сигналов.

Система осуществляет пеленгование и обзор пространства по угловым координатам радиосигналов. Рассматривается плоское пространство и линейная антенна. Полезный сигнал представляет собой монохроматическое колебание известной частоты f_0 . Информационным параметром является угловая координата θ . Оптимальная пространственно-временная обработка сначала обрабатывает входной сигнал $\dot{u}(t, \chi)$ с помощью антенных решеток

$$\dot{y}(t, \theta) = \int_{\wp} \dot{u}(t, \chi) \exp(j2\pi\theta\chi) d\chi, \quad (21)$$

где $\chi = x/\lambda_0$ относительная координата оси x , отводимой под раскрыв антенны; λ_0 - длина волны принимаемого колебания; \wp - относительный раскрыв.

Затем на интервале наблюдения $t \in (T_1, T_2)$ производится временная обработка

$$Y(\theta) = \left| \int_{T_1}^{T_2} \dot{y}(t, \theta) \exp(-j2\pi f_0 t) dt \right|. \quad (22)$$

Если функция $\dot{u}(t, \chi)$ удовлетворяет условиям теоремы отсчетов, то она может быть представлена последовательностью своих отсчетов с интервалом дискретности $\Delta\chi = 1/2\theta_m$. В случае, когда можно пренебречь краевыми эффектами антенны, и ограничиться теми точками дискретизации, которые расположены в пределах раскрыва, получаем

$$\dot{u}(t, \chi) = \sum_{k=-m}^m \dot{u}(t, k\Delta\chi) \sin c[2\pi\theta_m(\chi - k\Delta\chi)], \quad m = [2\chi_m\theta_m], \quad \chi \in (-\chi_m, \chi_m). \quad (23)$$

Совокупность $\{\dot{u}(t, k\Delta\chi)\}$ несет в себе всю информацию, содержащуюся в поле $\dot{u}(t, \chi)$, об источниках излучения в заданном секторе. Пространственная обработка для дискретных значений угла $\theta_k = k\Delta\theta$ сводится теперь к *дискретному преобразованию Фурье (ДПФ)*:

$$\dot{y}(t, k\Delta\theta) = \sum_{l=-m}^m \dot{u}(t, l\Delta\chi) \exp\left(j2\pi \frac{lk}{2\theta_m 2\chi_m}\right). \quad (24)$$

Возможен другой вариант, когда система обработки начинается с многоканальной временной обработки, в результате которой формируется совокупность $2m+1$ комплексных значений $\{\dot{U}_l\}$ или $2(2m+1)$ вещественных $\{U_{lc}, U_{ls}\}$ чисел

$$\dot{U}_l = U_{lc} + jU_{ls}; \quad l = -m, \dots, m, \quad U_{lS} = \int_{T_1}^{T_2} u_l(t) \frac{\cos}{\sin}(2\pi f_0 t) dt, \quad (25)$$

где $u_l(t)$ – колебание на выходе l -го элемента антенной решетки, которое пропорционально принимаемому полю в l -й точке дискретизации $\dot{u}(t, k\Delta\chi)$.

Подставляя определенные таким образом значения \dot{U}_l в алгоритм оптимальной обработки, получаем выражение для отсчетов оптимального выходного эффекта $\dot{Y}_k = \dot{Y}(k\Delta\theta)$ в узлах интерполяции $\theta_k = k\Delta\theta$:

$$\dot{Y}_k = \sum_{l=-m}^m \dot{U}_l \exp(j2\pi \frac{kl}{2m}) \quad (26)$$

в виде дискретного преобразования Фурье, которое ставит в соответствие последовательности чисел $\{\dot{U}_l\}, l = -m, \dots, m$ (дискретный пространственный сигнал) последовательность $\{\dot{Y}_k\}$ (дискретный пространственный спектр).

2.3. Дискретные алгоритмы частотно-фазовых измерений

Производится оценка частоты (или частоты и фазы) сигнала, который на интервале наблюдения $t \in (0, T)$ можно считать монохроматическим $s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$. Сигнал $u(t) = s(t) + n(t)$ принимается на фоне гауссовских стационарных помех $n(t)$. Априорный интервал возможных значений частоты сигнала f_c задан: $f_c \in (f_0 - F, f_0 + F)$. Начальная фаза φ_c полагается случайной равномерно распределенной величиной. Оптимальный выходной эффект в этом случае может быть представлен в виде

$$\dot{Y}(f) = \int_0^T u(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{u}(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad f \in (f_0 - F, f_0 + F). \quad (27)$$

Алгоритм получения оценок \hat{f} и $\hat{\varphi}$ сводится к нахождению точки наибольшего значения модуля функции $\dot{Y}(f)$ и к определению аргумента этой функции в точке \hat{f} (или f_c , если частота сигнала известна):

$$\begin{aligned} |\dot{Y}(\hat{f})| &= \max |\dot{Y}(f)|, \quad f \in (f_0 - F, f_0 + F), \\ \hat{\varphi} &= \arg \dot{Y}(\hat{f}). \end{aligned} \quad (28)$$

При оценке частоты сигнала с неизвестной начальной фазой, являющейся мешающим параметром, используется только первая часть алгоритма (28). Применение к (27) периодической временной дискретизации с учетом достаточно большим интервалом наблюдения дает

$$Y(f) = \frac{1}{2} \frac{1}{2F} \sum_{k=0}^M \dot{u}\left(\frac{k}{2F}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{k}{2F} f\right), \quad f \in (f_0 - F, f_0 + F), \quad M = [2FT]. \quad (29)$$

При преобразовании (27) в (29) использовано допущение об отсутствии частотных составляющих вне полосы анализа. Следовательно, при временной дискретизации необходимо обеспечить предварительную фильтрацию принимаемых данных $u(t)$ в полосе априорно возможных значений частоты сигнала.

Согласно (27) функция $\dot{Y}(f)$ представляет собой преобразование Фурье (спектр) принятой реализации $u(t)$, причем интеграл берется по ограниченному интервалу длительностью T . Поэтому функция $\dot{Y}(f)$ может быть представлена рядом Котельникова с интервалом дискретности $1/T$. Иначе говоря, для воспроизведения выходного эффекта $\dot{Y}(f)$ достаточно сформировать совокупность отсчетов

$$\dot{Y}\left(\frac{l}{T}\right) = \sum_{k=0}^M \dot{u}\left(\frac{k}{2F}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{kl}{M}\right), \quad \frac{l}{T} \in (f_0 - F, f_0 + F) \quad (30)$$

и воспользоваться интерполяционной формулой Котельникова. В частности для модуля функции $\dot{Y}(f)$, входящего в алгоритм оценки частоты (28), получим

$$Y(f) = \left| \sum_{l=M_1}^{M_2} \dot{Y}\left(\frac{l}{T}\right) \gamma_{e0}\left(f - \frac{l}{T}\right) \right|, \quad M_1 = [T(f_0 - F) + 1], \quad M_2 = [T(f_0 + F)],$$

$$\gamma_{e0}\left(f - \frac{l}{T}\right) = \text{sinc} 2\pi F \left(f - \frac{l}{T}\right) \exp j2\pi \left(f - \frac{l}{T}\right). \quad (31)$$

Для уменьшения ошибок, связанных с неточной фиксацией моментов дискретизации $k/2F$ и обеспечения эффективной многоканальной обработки, целесообразно процессы $u(t)$ и $u_Q(t)$ перенести на более низкие частоты. Обозначим сигналы, полученные после переноса на частоты $f \in (0, 2F)$ как $u_0(t)$ и $u_{0Q}(t)$. Тогда выходной эффект (30) примет вид

$$\dot{Y}\left(\frac{l}{T}\right) = \sum_{k=0}^M \left[u_0\left(\frac{k}{2F}\right) + ju_{0Q}\left(\frac{k}{2F}\right) \right] \exp\left(-j2\pi \frac{kl}{M}\right), \quad M = [2FT], \quad l = 0, 1, \dots, M. \quad (32)$$

Обработка (32) ведется с помощью алгоритма ДПФ и может быть реализована с использованием программы быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Контрольные вопросы и задачи

1. Раскрыв антенны ϑ равен $\chi \in (-\chi_m, \chi_m)$, выполняется условие $2\chi_m \theta_m \gg 1$, аппроксимировать рядом Котельникова выходной эффект (21).
2. Написать алгоритмы когерентной и некогерентной обработки сигналов.
3. Как влияет размер дискретного преобразования Фурье на эффективность обработки сигналов?
4. Доказать целесообразность обработки радиосигналов на более низких частотах.
5. Составить алгоритм оценки частот суммы двух монохроматических колебаний с помощью дискретного преобразования Фурье.

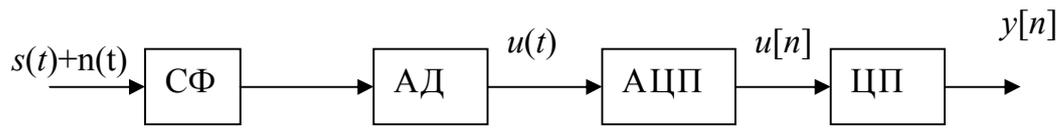


Рис. 2

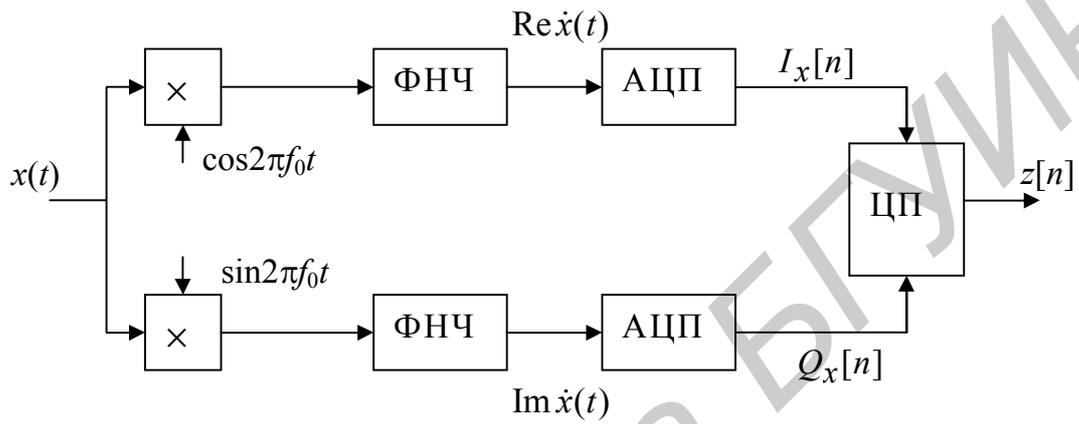


Рис. 3

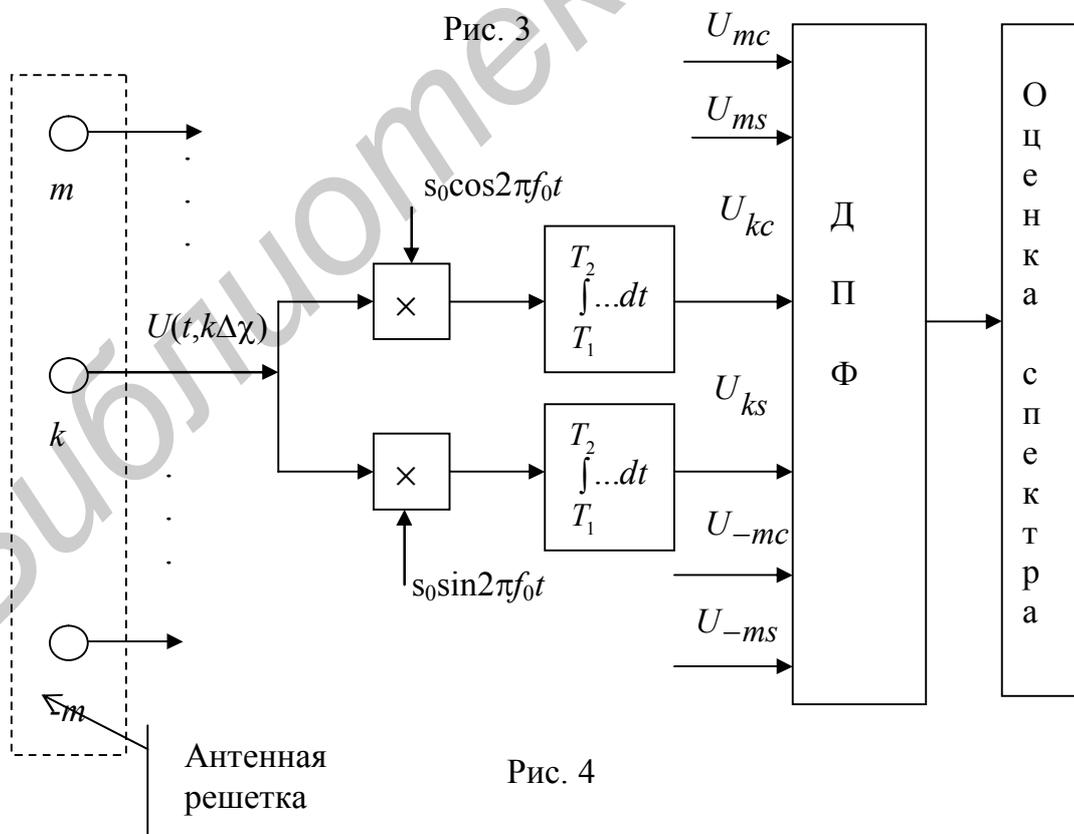


Рис. 4

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

3.1. Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье устанавливает связь между временным и частотным представлениями сигнала при разложении его по гармоническим дискретно-экспоненциальным функциям.

Дискретные прямое и обратное преобразования Фурье по базисам из идеальных отсчетных функций

$$\varphi_n(t) = \sin c [\pi (t - n\Delta t) / \Delta t] \text{ и } \phi_k(f) = \sin c [\pi (f - k\Delta f) / \Delta f]$$

имеют следующий вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi kn / N), \quad k=0, \dots, N-1 \quad (33)$$

и

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi nk / N), \quad n=0, \dots, N-1, \quad (34)$$

где $\{x[n]\}$ - последовательность отсчетов сигнала

$$x[n] = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin c [\pi (t - n\Delta t) / \Delta t] dt;$$

$\{X(k)\}$ - последовательность спектральных коэффициентов

$$X(k) = \frac{1}{\Delta f} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \sin c [\pi (f - k\Delta f) / \Delta f] df;$$

Δt и Δf - интервалы дискретизации сигнала $x(t)$ и его спектра Фурье $X(f)$; $N = 1/\Delta t \Delta f$.

Соотношения (33) и (34) называются прямым и обратным дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) последовательности $\{x[n]\}$.

3.1.1. Дискретные экспоненциальные функции

В дискретных преобразованиях Фурье используется система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), определяемых как

$$def(k, n) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn). \quad (35)$$

Переменные k и n принимают целочисленные значения $(0, 1, \dots, N-1)$. Переменную k отождествляют с номером функции, а переменную n - с номером отсчета.

Если обозначить $W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$, тогда $def(k, n) = W_N^{kn}$. Функция W_N^{kn} носит название *поворачивающий множитель*.

Образуем матрицу

$$F_N = [W_N^{kn}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (36)$$

строки которой нумеруются переменной k , столбцы - переменной n , а на пересечении k -й строки и n -го столбца записана величина W_N^{kn} .

Прямое и обратное ДПФ имеет следующую *матричную форму записи*:

$$\vec{X} = F_N \vec{x}; \quad \vec{x} = F_N^{-1} \vec{X}, \quad (37)$$

где $\vec{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]^T$ - вектор отсчетов сигнала, $\vec{X} = [X(0), \dots, X(N-1)]^T$ - вектор коэффициентов спектра ДПФ; T - оператор транспонирования.

Заметим, что для поворачивающего множителя справедливы следующие соотношения:

- $W_N^N = \exp(-j2\pi) = 1$ и, следовательно, $W_N = \sqrt[N]{1}$, т.е. поворачивающий множитель первой степени является корнем N -й степени из единицы;

- $W_N^{(k+\frac{N}{2})} = -W_N^k; \quad W_N^{N/2} = -1.$

Для любого N матрица F_N обладает следующими свойствами:

1. Матрица F_N ортогональна и унитарна: $F_N^* F_N = F_N F_N^* = N I_N$; I_N - единичная диагональная матрица.

2. Матрица F_N симметричная: $F_N = F_N^T$.

3. $F_N^2 = N Q_N$, где Q_N - симметричная матрица перестановок

$$Q_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. $F_N^4 = N^2 I_N$.

5. Сопряженная матрица имеет вид $F_N^* = Q_N F_N = F_N Q_N$.

6. Обратная матрица имеет вид

$$F_N^{-1} = N^{-2} F_N^3 = N^{-1} F_N^* = N^{-1} Q_N F_N.$$

Для формирования обратной матрицы необходимо прочесть в обратном порядке элементы W_N^{kn} с отличными от нуля степенями ($kn \neq 0$) строк матрицы F_N .

Например:

$$F_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix},$$

$$F_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \\ W_4^0 & W_4^6 & W_4^4 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^9 & W_4^6 & W_4^3 \end{bmatrix}.$$

7. Мультипликативность

$$def(k_1, n)def(k_2, n) = def(k_1 + k_2, n);$$

$$def(k, n_1)def(k, n_2) = def(k, n_1 + n_2).$$

При умножении любых двух строк (столбцов) матрицы ДЭФ получается строка (столбец) той же матрицы. Номер строки (столбца) равен сумме номеров сомножителей.

8. Факторизуемость. Для любого N , разложимого в произведение отличных от 1 чисел N_1 и N_2 , матрица функций ДЭФ порядка N представима в виде

$$F_N = P_{N_2 N_1} (I_{N_1} \times F_{N_2}) D_{N_1 N_2} (F_{N_1} \times I_{N_2})$$

или в виде

$$F_N = (F_{N_1} \times I_{N_2}) D_{N_1 N_2} (I_{N_1} \times F_{N_2}) P_{N_1 N_2},$$

где $P_{N_1 N_2}$ и $P_{N_2 N_1}$ - матрицы перестановок, отвечающие транспонированию прямоугольных матриц соответственно размеров $(N_1 \times N_2)$ и $(N_2 \times N_1)$; $D_{N_2 N_1}$ - диагональная матрица, образованная последовательностью поворачивающих множителей

$$W_N^{0 \cdot 0}, W_N^{1 \cdot 0}, \dots, W_N^{(N_2-1) \cdot 0}, W_N^{0 \cdot 1}, W_N^{1 \cdot 1}, \dots, W_N^{(N_2-1) \cdot 1}, \dots$$

$$\dots, W_N^{0 \cdot (N_1-1)}, \dots, W_N^{(N_2-1) \cdot (N_1-1)}$$

3.1.2. Свойства ДПФ

1. *Цикличность.* Последовательность коэффициентов ДПФ является периодической последовательностью

$$X(k) = X(k)_{\text{mod } N}.$$

Последовательность отсчетов сигнала, полученная обратным ДПФ (ОДПФ) из ее коэффициентов, также периодична:

$$x[n] = \text{ОДПФ}\{X(k)\} = x[n]_{\text{mod } N}. \quad (38)$$

Это свойство следует из периодичности ядра преобразования $\exp\{j2\pi nk/N\}$.

2. Симметрия.

$$\begin{aligned} \{x[N-n]\} &\leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow \{\pm X(N-k)\}; \\ \{x^*[n]\} &\leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow \{X^*(N-k)\}; \\ \{x[n] = \pm x^*[n]\} &\leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow \{X(k) = \pm X^*(N-k)\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Эти соотношения показывают, что понятия симметрии четности и нечетности для последовательностей, порождаемых ДПФ, в отличие от непрерывных сигналов определены не относительно точки ноль, а относительно точки с номером $(N/2)$. В силу целочисленности номеров элементов последовательности смысл четности и нечетности зависит от того, является количество элементов последовательности N четным или нечетным.

Варианты симметрий для одномерных ДПФ показаны на рис. 5 а, б.



Рис. 5.

а - N - четное

б - N - нечетное

3. Теорема сдвига (инвариантность относительно сдвига во времени и частоте).

Пусть $x[n \pm n_0]_{\text{mod } N}$ - последовательность, образованная из последовательности $x[n]$ циклическим сдвигом на n_0 отсчетов. Тогда справедливо соотношение

$$\{x[n \pm n_0]_{\text{mod } N}\} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow X(k) \exp\{\mp j2\pi n_0 k / N\}. \quad (40)$$

Свойство показывает, что при сдвиге по времени амплитудный спектр не меняется. Изменяются только фазы гармонических составляющих.

Аналогичное свойство справедливо и для частотной области

$$\{x[n] \exp(j2\pi nk_0 / N)\} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow X(k + k_0)_{\text{mod } N}. \quad (41)$$

4. Интерполяция.

Спектр последовательности, полученный раздвиганием и дополнением нулями элементов некоторой исходной последовательности, образуется с помощью интерполяции отсчетов ДПФ исходной последовательности.

Рассмотрим последовательность $g[n]$, состоящую из MN отсчетов, из них $(M-1)$ отсчетов являются нулевыми и расположены между отсчетами исходной последовательности $x[n]$:

$$\begin{aligned} g[nM] &= x[n], & n &= 0, \dots, NM - 1, \\ g[nM + m] &= 0, & m &= 1, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

Спектр такой последовательности с учетом только ненулевых коэффициентов, имеет вид

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{NM-1} g[nM + m] \exp[-j2\pi k(nM + m) / NM] = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} g[nM] \exp(-j2\pi kn / NM) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi kn / M) = X(k) \end{aligned} \quad (42)$$

и представляет повторенный M раз спектр исходной последовательности $X(k)$.

Пример. Зададим $\{x[n]\} = \{7, 5, 6, 9\}$. Спектр ДПФ такой последовательности имеет вид $\{X(k)\} = \{27, (1+j4), -1, (1-j4)\}$. Разреженная нулями последовательность $\{g[n]\} = \{7, 0, 5, 0, 6, 0, 9, 0\}$ имеет спектр ДПФ в виде периодического (повторенного 2 раза) спектра исходной последовательности: $G = \{27, (1+j4), -1, (1-j4), 27, (1+j4), -1, (1-j4)\}$. образуем удлиненную последовательность $\{x_1[n]\} = (7, 5, 6, 9, 0, 0, 0, 0)$, дополнив исходную последовательность $x[n]$ N нулями. Спектр ДПФ удлиненной последовательности будет иметь в своем составе компоненты спектра исходной последовательности:

$$\{X_1(k)\} = \{X_1(0)=27; X_1(1)=(4, 14-j15, 9); X_1(2)=(1+j4); X_1(3)=(9, 83-j3, 89); X_1(4)=-1, X_1(5)=(9, 83+j3, 89); X_1(6)=(1-j4); X_1(7)=(4, 14+j15, 9)\}.$$

Четные компоненты спектра удлиненной последовательности совпадают с аналогичными значениями спектра исходной последовательности. Нечетные компоненты спектра удлиненной последовательности можно рассматривать как результат интерполяции.

5. *Теорема отсчетов.* Периодическое M -кратное повторение исходной последовательности приводит к увеличению в M раз значений спектральных компонентов её ДПФ, размещению их с шагом M и дополнением остальных позиций спектра нулями:

$$\{x[l]_{\text{mod } N}; l = 0, 1, \dots, MN - 1\} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow M \times X(k) \delta [k_{\text{mod } M}], \quad (43)$$

$$\text{где } \delta [k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \text{ - символ Кронекера.}$$

Пример. Периодически продолжим исходную последовательность $\{x[n]\} = (7, 5, 6, 9)$, образуя последовательность $\{x_2[l]\} = (7, 5, 6, 9, 7, 5, 6, 9)$. Спектр ДПФ такой последовательности имеет вид

$$\{X_2(k)\} = (2 \times [27, 0, (1+j4), 0, -1, 0, (1-j4), 0]).$$

Аналогично для периодически продолженного спектра ДПФ получаем

$$\begin{aligned} & \{x[l_{\text{mod } N}] \times \delta[l_{\text{mod } M}]; l = 0, 1, \dots, MN - 1\} \\ & \quad \updownarrow \\ & \text{ДПФ} \\ & \quad \updownarrow \\ & \{(1/M) X(k_{\text{mod } N}), k = 0, 1, \dots, MN - 1\}. \end{aligned} \quad (44)$$

6. *Децимация.* Пусть $\{X_{NM}(k)\}$ - множество коэффициентов спектра ДПФ последовательности $\{x[n]; n=0, 1, \dots, NM-1\}$:

$$\begin{aligned} x[nM + m] &= \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{NM-1} X_{NM}(k) \exp[j2\pi k(nm + m)/NM], \\ m &= 0, 1, \dots, M-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (45)$$

Рассмотрим N отсчетов, взятые с шагом M , децимированной последовательности $x'[n]$, полученной через обратное ДПФ. Для $m=0$ получим:

$$\begin{aligned} x'[n] &= x[nM] = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{NM-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N) = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} X(mN + k) \exp[j2\pi (mN + k)n/N] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(mN + k) \right\} \exp(j2\pi kn/N). \end{aligned}$$

Отсюда можно получить выражение для спектра децимированной последовательности:

$$x'[n] \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow X'(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X(mN + k). \quad (46)$$

7. *Теорема о перестановках.* Если P не имеет общих делителей с N , то

$$\{x[Pn]_{\text{mod } N}\} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow \{X(Qk)_{\text{mod } N}\}, \quad (47)$$

где $(PQ)_{\text{mod } N} = 1$. Эта теорема является аналогом теоремы о масштабах интегрального преобразования Фурье. Но если изменение масштаба сигнала, например, растяжение сигнала по координате в P раз, приводит к сжатию его спектра Фурье в P раз, то для дискретных последовательностей и их ДПФ это соответствует перестановкам элементов последовательностей.

8. *Линейность.* Пусть даны две последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$, для которых ДПФ равны соответственно $X_1(k)$ и $X_2(k)$. Спектр взвешенной суммы последовательностей $a x_1[n] + b x_2[n] = x_3[n]$ равен аналогичной взвешенной сумме спектров:

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k). \quad (48)$$

9. *Теорема о свертке.* Спектр свертки двух последовательностей $\{x[n]\}$ и $\{h[n]\}$ равен произведению спектров $X(k)$ и $H(k)$ сворачиваемых последовательностей:

$$y(l) = \sum_{n=0}^{N-1} h[l]x[l-n]_{\text{mod } N} \leftrightarrow \text{ДПФ} \leftrightarrow X(k)H(k). \quad (49)$$

Теорема позволяет вычислить циклическую свертку $y[l]$ при помощи ДПФ по формуле

$$\{y[l]\} = \text{ДПФ}^{-1}(\text{ДПФ}\{x[n]\} \text{ДПФ}\{h[n]\}).$$

10. *ДПФ вещественной последовательности.* Пусть $\{x[n]\}$ – вещественная последовательность. ДПФ такой последовательности имеет следующие особенности:

- Спектральные коэффициенты комплексно сопряжены относительно $N/2$

$$X\left(\frac{N}{2} + l\right) = X^*\left(\frac{N}{2} - l\right),$$

где оператор * означает комплексное сопряжение.

- Если $x[n]$ – четная последовательность, т.е. $x[n]=x[-n]$, то спектр ДПФ $\{X(k)\}$ также представляет собой вещественную последовательность.

- Если $x[n]$ – нечетная последовательность, т.е. $x[n]=-x[-n]$, то $\{X(k)\}$ представляет собой чисто мнимую последовательность.

Данное свойство позволяет при помощи одного преобразования вычислить ДПФ двух действительных последовательностей либо использовать $N/2$ –точечное преобразование для вычисления спектра N точечной последовательности.

3.1.3. Разновидности ДПФ

Кратковременное дискретное преобразование Фурье. В задачах спектрального анализа нестационарных сигналов используется так называемое кратковременное преобразование Фурье (КПФ):

$$X_{STFT}(e^{j\omega}, n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[n-m]e^{-j\omega m}, \quad (50)$$

где $w[n]$ – весовая последовательность. КПФ зависит от двух параметров: целочисленного временного индекса n и значения непрерывной частоты ω . КПФ является периодической функцией с периодом 2π . Модуль $|X_{STFT}(e^{j\omega}, n)|$ часто называют спектрограммой.

Дискретизация КПФ в частотной области в точках $\omega_k = 2\pi k/N$ приводит к дискретному кратковременному преобразованию Фурье, которое можно трактовать как R -точечное ДПФ функции $(x[n-m]w[m])$, $N \geq R$:

$$X_{SDFT}(k, n) = X_{STFT}\left(e^{j\omega}, n\right)_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{m=0}^{R-1} x[n-m]w[m]e^{2\pi km/N},$$

$$0 \leq k \leq N-1, N \geq R. \quad (51)$$

При равенстве размеров ДПФ и массива анализируемых данных $N = R$ получаем взвешенное ДПФ:

$$X_{WDFT} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[k-n]W_N^{nk}. \quad (52)$$

Многомерное преобразование Фурье. При решении ряда задач (например, обработки сигналов в многопозиционной радиолокации) приходится иметь дела с многомерными дискретными сигналами. Так двухмерный дискретный сигнал – это функция, определенная на совокупности упорядоченных пар чисел $\mathbf{x} = \{x(n_1, n_2), -\infty < n_1, n_2 < \infty\}$. Для многомерной или M -мерной последовательности $\mathbf{x} = \{x(n_1, \dots, n_M)\}$ с опорной областью $R_N = \{\mathbf{n} : 0 \leq n_i \leq N_i - 1, i = 1, 2, \dots, M\}$ можно определить многомерное или M -мерное ДПФ:

$$X(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} \in R_N} x(\mathbf{n}) \exp[-j\mathbf{k}^T (2\pi\mathbf{N}^{-1})\mathbf{n}],$$

$$x(\mathbf{n}) = \frac{1}{|\det \mathbf{N}|} \sum_{\mathbf{k} \in R_N} X(\mathbf{k}) \exp[j\mathbf{k}^T (2\pi\mathbf{N}^{-1})\mathbf{n}],$$

где $\mathbf{N} = \text{diag}[N_1, \dots, N_M]$ - диагональная матрица.

Пример. Рассмотрим обратное двухмерное ДПФ $N_1 \times N_2$ - точечной последовательности, заданной соотношением

$$X(k_1, k_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k_1 \leq M_1 - 1, \quad 0 \leq k_2 \leq M_2 - 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}, \quad N_1 \geq M_1, N_2 \geq M_2.$$

Последовательность $x[n_1, n_2]$ выражается следующим образом:

$$x[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{-n_1 k_1} W_{N_2}^{-n_2 k_2} =$$

$$= \exp\left[-j2\pi\left(\frac{n_1(M_1-1)}{2N_1} + \frac{n_2(M_2-1)}{2N_2}\right)\right] \frac{\sin(\pi n_1 M_1/N_1) \sin(\pi n_2 M_2/N_2)}{N_1 N_2 \sin(\pi n_1/N_1) \sin(\pi n_2/N_2)}$$

3.2. Алгоритмы вычисления дискретного преобразования Фурье

Существует два класса алгоритмов вычисления преобразований Фурье: обычное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и быстрое дискретное преобразование Фурье (БПФ).

1. Дискретным преобразованием Фурье условно называют непосредственное вычисление формул (33, 34). При этом допускают все известные способы распараллеливания векторно-матричных операций. Если пользоваться обычным правилом умножения матрицы на вектор, то вычисления векторов x и X требуют N^2 операций комплексного умножения и $N(N-1)$ операций комплексного сложения.

2. *Быстрое преобразование Фурье* включает набор эффективных алгоритмов, предназначенных для вычисления ДПФ. В основе алгоритмов лежит стратегия divide et impera (разделяй и властвуй). Идея БПФ по своей природе является алгебраической и заключается в следующем. Величина N , определяющая длину входной последовательности отсчетов, раскладывается на сомножители, затем вычисляются отдельные ДПФ меньших длин, чем N , из которых потом формируется выходная последовательность. Происходит так называемое *расщепление* исходного алгоритма на комбинацию подобных алгоритмов меньшего размера.

Положим, что для N -точечной последовательности нужно вычислить ее ДПФ и что N представляет собой составное число

$$N = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_\mu,$$

где $\{r_i\}$ – это набор множителей числа N , которые необязательно являются простыми. Алгоритм расщепления для вычисления такого ДПФ через комбинацию преобразований меньших размеров потребует число операций, пропорциональное

$V_{сл} \approx N \sum_{i=0}^{\mu} r_i$. Такие алгоритмы называются алгоритмами быстрого преобразования

Фурье. Наиболее важный частный случай имеет место, когда $r_1 = r_2 = \dots = r_\mu = 2$. Для БПФ число операций в этом случае пропорционально $V_{сл} \approx N \log_2 N$.

Разберем возможность сокращения числа операций при вычислении ДПФ на примере двух сомножителей $N = N_1 N_2$.

3.2.1. БПФ по смешанному основанию

ДПФ последовательности $\{x[n]; n = 0, \dots, N-1\}$, $N = N_1 N_2$ запишется в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N_1 N_2 - 1} x[n] W_N^{nk}.$$

Представим входные n и выходные k индексы в смешанной системе счисления с основаниями N_1 N_2 :

$$n = n_2 N_1 + n_1; k = k_1 N_2 + k_2, \text{ где } n_1, k_1 = 0, \dots, N_1 - 1, n_2, k_2 = 0, \dots, N_2 - 1.$$

Последовательности входных и выходных отсчетов преобразуются в двухмерные массивы:

$$d[n_1, n_2] = x[n_2 N_1 + n_1], n_1 = 0, \dots, N_1, n_2 = 0, \dots, N_2 - 1;$$

$$D(k_1, k_2) = X(k_1 N_2 + k_2), k_1 = 0, \dots, N_1, k_2 = 0, \dots, N_2 - 1.$$

После подстановки алгоритм ДПФ представляется в виде

$$D(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} d[n_1, n_2] \exp\left(-\frac{j2\pi}{N_1 N_2} (k_1 N_2 + k_2)(n_2 N_1 + n_1)\right) =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \exp\left(-\frac{j2\pi}{N_1 N_2} k_2 n_1\right) \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} d[n_1, n_2] \exp\left(-\frac{j2\pi}{N_2} k_2 n_2\right) \right) \exp\left(-\frac{j2\pi}{N_1} k_1 n_1\right).$$
(53)

Таким образом, исходное ДПФ оказалось сведенным к двум ДПФ, производимым над уменьшенными массивами. Алгоритм преобразования может быть представлен следующей трехэтапной схемой.

1. Для всех строк матрицы $[d[n_1, n_2]]$ вычисляются N_2 -точечные ДПФ.
2. Каждый элемент полученной матрицы умножается на фазовый множитель $W_N^{n_1 k_2}$.
3. Для всех столбцов матрицы, полученной на втором этапе, вычисляются N_1 -точечные ДПФ.

Заметим, что алгоритм имеет инверсный порядок следования индексов в выходной последовательности. Это объясняется инверсией разрядов в позиционно-численном представлении индексов по смешанному основанию. Для сохранения естественного порядка следования отсчетов необходимо выполнить операцию обратной перестановки.

Вычислительные затраты такого алгоритма равны: количество операций умножения равно $N(N_1 + N_2 + 1)$; сложений - $N(N_1 + N_2 - 2)$.

Если числа N_1 и N_2 являются составными, то алгоритм БПФ применяется рекурсивно. При этом на каждом шаге рекурсии БПФ сокращает число операций.

Пример. Пусть $N=6=2 \cdot 3$, $N_1 = 2$, $N_2 = 3$. Входная последовательность имеет вид $\{x[n]; n = 0, \dots, 5\} = [1, 1, 1, -1, -1, -1]$. Требуется вычислить ДПФ по смешанному основанию.

Элемент матрицы двухмерного массива в этом случае равен $d[n_1, n_2] = x[2n_2 + n_1]$, $n_1 = 0, 1$; $n_2 = 0, 1, 2$. Сама матрица имеет вид

$$[d[n_1, n_2]] = \begin{bmatrix} x[0] & x[2] & x[4] \\ x[1] & x[3] & x[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

На первом этапе алгоритма вычислений строки матрицы входных отсчетов преобразуются с помощью трехточечного ДПФ. В результате получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & (1-j\sqrt{3}) & (1+j\sqrt{3}) \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

После умножения элементов этой матрицы на поворачивающие множители $\exp(-\frac{2\pi}{6}k_2n_1) = W_6^{k_2n_1}$, $k_2 = 0,1,2$ получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} W_6^0 & (1-j\sqrt{3})W_6^1 & (1+j\sqrt{3})W_6^2 \\ -W_6^0 & 2W_6^1 & 2W_6^2 \end{bmatrix}.$$

Применение двухточечного ДПФ к столбцам матрицы, полученной на втором этапе, приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} [D(k_1, k_2)] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_6^0 & (1-j\sqrt{3})W_6^0 & (1+j\sqrt{3})W_6^0 \\ -W_6^0 & 2W_6^1 & 2W_6^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2(1-j\sqrt{3}) & 0 \\ 2 & 0 & 2(1+j\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) & X(1) & X(2) \\ X(3) & X(4) & X(5) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Спектр ДПФ равен

$$X(0) = 0, X(1) = 2(1-j\sqrt{3}), X(2) = 0, X(3) = 2, X(4) = 0, X(5) = 2(1+j\sqrt{3}).$$

Описанный алгоритм предпочтительнее непосредственного прямого вычисления ДПФ, поскольку при этом требуется меньше арифметических операций. Действительно, сложность алгоритма ДПФ по смешанному основанию определяется сложностью вычислений N_1 раз ДПФ размером N_2 , N_2 раз ДПФ размером N_1 и $(N_1 N_2)$ умножений на фазовые множители. Вычислительные затраты при таком способе вычисления ДПФ равны: количество операций умножения равно $N(N_1 + N_2 + 1)$; сложений - $N(N_1 + N_2 - 2)$. Прямое вычисление ДПФ потребовало бы N^2 операций комплексного умножения и $N(N-1)$ операций комплексного сложения.

Если числа N_1 и N_2 являются составными, то алгоритм БПФ применяется рекурсивно. При этом на каждом шаге рекурсии БПФ сокращает число операций.

3.2.2. Алгоритм Гуд-Томаса

Рассмотрим случай, когда необходимо вычислить N -точечное ДПФ, причем $N=N_1N_2$ и числа N_1 и N_2 являются взаимно простыми, т.е. $\text{НОД}(N_1N_2)=1$. В этом случае применим алгоритм Гуд-Томаса (ГТ) с использованием простых делителей. Используется отображение обрабатываемой последовательности в двухмерную таблицу, позволяющая использовать двухмерное преобразование Фурье.

Отообразим последовательности входных $x[n]$ и выходных $X(k)$ отсчетов в двумерные массивы

$$\begin{aligned}x[n] &\rightarrow x[n_1, n_2]; \\ X(k) &\rightarrow X(k_1, k_2)\end{aligned}$$

по следующим правилам:

- для индексов входного сигнала:

$$\begin{aligned}n_1 &\equiv n \pmod{N_1}, \\ n_2 &\equiv n \pmod{N_2}, \\ n &= n_1 m_2 N_2 + n_2 m_1 N_1; \quad m_2 N_2 + m_1 N_1 = 1;\end{aligned} \quad (54)$$

- для индексов выходного сигнала:

$$\begin{aligned}k_1 &\equiv m_2 k \pmod{N_1}, \\ k_2 &\equiv m_1 k \pmod{N_1}, \\ k &= N_2 k_1 + N_1 k_2 \pmod{N}.\end{aligned} \quad (55)$$

Обоснованность применения такого отображения доказывается следующим образом. Согласно китайской теореме об остатках [1] существуют такие целые m_1 и m_2 , что выполняется равенство $n = n_1 m_2 N_2 + n_2 m_1 N_1$, где $m_2 N_2 + m_1 N_1 = 1$. С другой стороны, для индексов выходного сигнала справедливо равенство

$$k = N_2(m_2 k + Q_1 N_1) + N_1(m_1 k + Q_2 N_2) \pmod{N} = k(N_2 m_2 + N_1 m_1) \pmod{N} = k,$$

где Q_1 целая часть, дополняющая k_1 до k ; Q_2 -целая часть, дополняющая k_2 до k .

ДПФ двумерного массива данных запишется как

$$\begin{aligned}X(k_1, k_2) &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1 m_2 N_2 + n_2 m_1 N_1] W^{(n_1 m_2 N_2 + n_2 m_1 N_1)(N_2 k_1 + N_1 k_2)} = \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] W^{n_1 m_2 N_2^2 k_1} W^{m_1 N_1^2 n_2 k_2}\end{aligned} \quad (56)$$

С учетом того, что $m_2 N_2 \equiv 1 \pmod{N_1}$ и $m_1 N_1 \equiv 1 \pmod{N_2}$ получаем

$$W^{m_2 N_2^2} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} m_2 N_2^2) = \exp(-j \frac{2\pi}{N_1}) = \beta$$

и

$$W^{m_1 N_1^2} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} m_1 N_1^2) = \exp(-j \frac{2\pi}{N_2}) = \gamma.$$

Теперь видно, что ДПФ двумерного массива входных данных можно вычислить с помощью двумерного ДПФ:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_2} \sum_{n_1} x[n_1, n_2] \beta^{n_1 k_1} \gamma^{n_2 k_2}. \quad (57)$$

Элементы β и γ являются простыми корнями из единицы степеней N_1 и N_2 , задающие соответственно N_1 -точечное и N_2 -точечное преобразования Фурье.

Вычислительная сложность алгоритма оценивается как $N(N_1 + N_2)$ операций умножений и сложений.

Пример. Необходимо вычислить ДПФ последовательности $\{x[n]; n=0, \dots, 5\} = (1, 1, 1, -1, -1, -1)$ с использованием алгоритма ГТ.

Длину обрабатываемых отсчетов N можно разложить на два взаимно простых множителя множителя

$$N = 2 \cdot 3 = N_1 \cdot N_2, \quad N_1 = 2, \quad N_2 = 3; \quad \text{НОД}(N_1, N_2) = 1.$$

Алгоритм ГТ запишется как

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left\{ \sum_{n_2=0}^{N_2-1} d(n_1, n_2) W_3^{n_2 k_2} \right\} W_2^{n_1 k_1},$$

$$n_1 = 0, \dots, N_1, \quad n_2 = 0, \dots, N_2; \quad k_1 = 0, \dots, N_1, \quad k_2 = 0, \dots, N_2.$$

Перестановка входных данных имеет вид

$$n = n_1 m_2 N_2 + n_2 m_1 N_1 = n_1 m_2 3 + n_2 m_1 2,$$

где коэффициенты m_1 и m_2 определяются из решения диофантового уравнения:

$$m_2 N_2 + m_1 N_1 = 1 \rightarrow m_2 3 + m_1 2 = 1$$

Для решения диофантового уравнения применим алгоритм Евклида:

$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \quad \text{или} \quad 1 = (1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2,$$

откуда получаем, что $m_1 = -1$ и $m_2 = 1$.

Матрица данных после перестановки имеет вид

$$[d(n_1, n_2)] = \begin{bmatrix} x[0] & x[4] & x[2] \\ x[3] & x[1] & x[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица внутреннего ДПФ равна

$$\left[W_3^{n_2 k_2} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad k_2 = 0, \dots, N_2, \quad n_2 = 0, \dots, N_2.$$

Вычисление внутреннего ДПФ приводит к результату

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n_2=0}^3 d(n_1, n_2) W_3^{n_2 k_2}; \quad n_1 = 0, 1; \quad k_2 = 0, 1, 2 \right\} = \\ & = \left[W_3^{n_2 k_2} \right] [d(n_1, n_2)]^T = [X_1(n_1, k_2)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ (1 + j\sqrt{3}) & -(1 + j\sqrt{3}) \\ (1 - j\sqrt{3}) & -(1 - j\sqrt{3}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Матрица внешнего ДПФ равна

$$\left[W_2^{n_1 k_1} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad k_1 = 0, \dots, N_1, n_1 = 0, \dots, N_1.$$

В результате вычисления внешнего ДПФ получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n_1=0}^1 X_1(n_1, k_2) W_2^{n_1 k_1}; k_1 = 0, 1; k_2 = 0, 1, 2 \right\} = \\ & = \left[W_2^{n_1 k_1} \right] \left[X_1(n_1, k_2) \right]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4W_3^2 & -4W_3^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Связь выходных отсчетов преобразования ГТ $\{X(k_1, k_2)\}$ и отсчетов прямого ДПФ $\{X(k)\}$ определяется исходя из соотношения

$$k = k_1 N_2 + k_2 N_1 \pmod{N}$$

и имеет вид

$$\left[X(k_1, k_2) \right] = \begin{bmatrix} X(0) & X(2) & X(4) \\ X(3) & X(5) & X(3) \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем значения спектральных коэффициентов прямого ДПФ:

$$X(0) = 0, X(1) = 2(1 + j\sqrt{3}), X(2) = 0, X(3) = 2, X(4) = 0, X(5) = 2(1 - j\sqrt{3}).$$

3.2.3. Алгоритмы БПФ по основанию два

Наибольшее распространение в цифровой обработке сигналов получили алгоритмы БПФ по основанию 2. Известны два способа организации вычислений в алгоритмах БПФ по основанию 2: метод прореживания по времени и метод прореживания по частоте.

Алгоритм БПФ с прореживанием по времени. Обрабатывается исходная последовательность $\{x[n], n = 0, \dots, N-1, N = 2^m \Rightarrow r_i = 2$.

На первом шаге алгоритма исходная последовательность разбивается на две последовательности длиной $N/2$, соответствующие четным и нечетным отсчетам:

$$x_1[n] = x[0], x[2], \dots, x[2n'],$$

$$x_2[n] = x[1], x[3], \dots, x[2n'+1], n' = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Вычисление N -точечного ДПФ в этом случае сводится к двум $N/2$ -точечным ДПФ $N/2$ умножениям на поворачивающие фазовые множители и N сложениям:

$$\begin{aligned}
ДПФ_N(k, x) &= \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n'] \cdot e^{-j\frac{2\pi 2n'k}{N}} + \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n'+1] \cdot e^{-j\frac{2\pi(2n'+1)k}{N}} = \\
&= \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n'] \cdot e^{-j\frac{2\pi 2n'k}{N}} + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n'+1] \cdot e^{-j\frac{2\pi 2n'k}{N}}, \\
& \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1.
\end{aligned} \tag{58}$$

Используя свойства:

$$W_N^k = -W_N^{k \pm \frac{N}{2}} \text{ и } W_N^2 = [\exp(-j\frac{2\pi}{N})]^2 = \exp(-j\frac{2\pi}{N/2}) = W_{N/2},$$

получаем

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1[n] W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2[n] W_{N/2}^{nk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k). \tag{59}$$

Для $k = 0, \dots, N-1$ имеем (рис. 6)

$$\begin{aligned}
X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\
X(k) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = \frac{N}{2}, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{60}$$

На втором шаге данная процедура применяется для замены двух $N/2$ -точечных ДПФ на четыре $N/4$ -точечные ДПФ, $N/2$ умножений на W^k и N сложений и т.д. Эта процедура продолжается до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. Заметим, что на каждом шаге происходит разделение данных на четные и нечетные последовательности. В итоге это приводит к тому, что отсчеты исходной последовательности должны быть предварительно переставлены по закону инверсии двоичного кода индекса.

Граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени для $N=8$ показан на рис. 7.

Матричная интерпретация алгоритма, учитывающая свойство факторизации матрицы ДЭФ имеет вид

$$X = \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1 P x,$$

где слабозаполненные матрицы $\Phi_3 \Phi_2 \Phi_1$ и оператор перестановки P равны

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right], \Phi_2 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & W^2 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -W^2 & & & & \\ \hline & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ & 0 & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & -W^2 \end{array} \right], \\
\Phi_1 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W^3 \end{array} \right], P = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, последовательное применение метода к вычислению N -точечных ДПФ, $N=2^m$ приводит к $m=\log N$ шагам, на каждом из которых $2^{i+1}2^{m-i}$ -точечных ДПФ сводятся к $2^{i+1}2^{m-i-1}$ -точечным ДПФ, N сложениям и $N/2$ умножениям на поворачивающие множители. Следовательно, сложность N -точечного ДПФ методом прореживания по времени составляет $(N/2)\log N$ операций комплексного умножения и $M\log N$ операций комплексного сложения. Если учесть все тривиальные умножения на поворачивающие множители, то вычислительные затраты будут еще меньше.

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте. В алгоритме прореживания по частоте исходная последовательность разбивается на две: одна состоит из всех первых $N/2$ отсчетов, другая – из $N/2$ последних отсчетов. Выражение для ДПФ принимает вид

$$\begin{aligned}
\text{ДПФ}_N(k, x) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \\
&= \left| n = n + \frac{N}{2} \right| = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}\left(n + \frac{N}{2}\right)} \right] = \quad (61) \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x[n] + e^{-j2\pi k} x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x[n] + (-1)^k x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}
\end{aligned}$$

Для четных $k=2k'$ и нечетных $k=2k'+1$, $k'=0, \dots, N/2 - 1$ индексов коэффициентов преобразования получаем следующие выражения.

Для четных k

$$\begin{aligned} \text{ДПФ}_N(k, x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x[n] + x \left[n + \frac{N}{2} \right] (-1)^{2k'} \right\} e^{-j \frac{2\pi k' n}{N/2}} = \text{ДПФ}_{N/2}(k', x) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x[n] + x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right\} e^{-j \frac{2\pi k' n}{N/2}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Для нечетных k

$$\begin{aligned} \text{ДПФ}_N(k, x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x[n] + x \left[n + \frac{N}{2} \right] (-1)^{2k'+1} \right\} e^{-j \frac{2\pi n}{N} (2k'+1)} = \text{ДПФ}_{N/2}(k', x) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left(x[n] - x \left[n + \frac{N}{2} \right] \right) e^{-j \frac{2\pi n}{N/2}} \right\} e^{-j \frac{2\pi k' n}{N/2}}. \end{aligned} \quad (63)$$

На втором шаге данная процедура применяется для замены двух $N/2$ -точечных ДПФ на четыре $N/4$ -точечные ДПФ, $N/2$ умножений на W^k и N сложений и т.д. Процедура расщепления продолжается до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. На каждом шаге происходит разделение данных на две части, содержащих соответственно первую и последнюю половинки обрабатываемой части. В итоге это приводит к тому, что отсчеты выходной последовательности спектральных коэффициентов будут переставлены по закону инверсии двоичного кода индекса.

Вычислительная сложность алгоритмы такая же, как и у алгоритма с прореживанием по времени.

Граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте для $N=8$ показан на рис. 8.

Метод с прореживанием по частоте не требует предварительной перестановки входных отсчетов. Эта особенность может быть использована для организации конвейерной обработки данных, что особенно удобно для спектральной обработки сигналов в реальном масштабе времени.

3.2.4. БПФ для простого основания

При решении ряда прикладных задач обработки сигнала требуется вычислить ДПФ заданного размера, но основание N невозможно разложить на множители. В этом случае для повышения эффективности алгоритма обработки можно связать ДЭФ и ДПФ с теорией чисел.

Свойство периодичности экспоненциальных функций с точки зрения модульных операций можно представить следующим образом:

$$W_N^M = W_N^{M \bmod N}. \quad (64)$$

Для любого целого числа a , принимающего значения из множества $(1, 2, \dots, N-1)$, и простого числа N , справедлива теорема Ферма: $a^N \equiv a \pmod{N}$.

Тогда $a^{N-1} = aa^{N-2} = 1 \rightarrow a^{N-2} = a^{-1}$. Отсюда следует периодичность элемента a^m с периодом $N-1$:

$$a^{m+(N-1)} = a^m a^{(N-1)} = a^m \pmod{N}.$$

Простое целое число N позволяет определить конечное поле $GF(N)$. Определим в этом поле примитивный первообразный элемент $(\alpha^i; i = 0, \dots, N-2)$. Тогда для любого целого m множество чисел $(\alpha^i; i = m, \dots, m + N - 2)$ является перестановкой множества $(1, 2, \dots, N-1)$.

Рассмотрим ДПФ :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Выделим отдельно нулевой спектральный коэффициент $X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$.

Остальные коэффициенты преобразования представим в виде

$$X(k) = x[0] + X'(k); \quad X'(k) = \sum_{n=1}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (65)$$

Сопоставим фазовым поворачивающим множителям W^f множество их индексов $\{f\}$, отражающих значения степени поворачивающего множителя. Матрица множества индексов поворачивающих множителей $[f]$ является матрицей циркулянтном. Тогда ДПФ последовательности $X'(k)$ запишется как

$$X'(k) = \sum_{n=1}^{N-1} x[n] \{kn\}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Определим перестановку

$$n' = \alpha^{-n'}, \quad n' = 0, 1, \dots, N-2. \quad (66)$$

Применим такую перестановку к элементам последовательности обрабатываемых отсчетов $\{x[n]\}$, образуя новую последовательность

$$h[n'] = x[\alpha^{-n'}] = x[\alpha^{N-(1+n')}], \quad n' = 0, \dots, N-2.$$

Вычислим ДПФ последовательности h :

$$\begin{aligned}
H(k') &= \sum_{n'=0}^{N-2} h[n'] W_N^{\alpha^{-n'} \alpha^{k'}} = \\
&= \sum_{n'=0}^{N-2} h[n'] \{\alpha^{k'} \alpha^{-n'}\} = \sum_{n'=0}^{N-2} h[n'] \{\alpha^{k'-n'}\}, \quad k' = 0, \dots, N-2.
\end{aligned} \tag{67}$$

Полученный результат можно интерпретировать как циклическую свертку двух последовательностей :

$$H = h \circ g, \quad g[n'] = \{\alpha^{n'}\} = \left(\exp(-j \frac{2\pi \alpha^{n'}}{N}) \right). \tag{68}$$

Используя теорему о свертке последнее выражение можно записать как

$$H = \text{ОДПФ}_{N-1} \{ \text{ДПФ}_{N-1} \{h\} \cdot \text{ДПФ}_{N-1} \{g\} \}. \tag{69}$$

Пример. Пусть $N=5$, $\{x[n]\} = (x[0], x[1], x[2], x[3])$. Определим первообразный элемент $\alpha = 2$. Из соотношения $\alpha^{-n'} = \alpha^{N-(1+n')}$ следует, что перестановка имеет вид

$$\begin{aligned}
n' = 0 &\rightarrow \alpha^4 = 1, \\
n' = 1 &\rightarrow \alpha^3 = 3, \\
n' = 2 &\rightarrow \alpha^2 = 4, \\
n' = 3 &\rightarrow \alpha^1 = 2.
\end{aligned}$$

Последовательности h и g соответственно равны

$$h = [x[1], x[3], x[4], x[2]]^T, \quad g = \left[e^{-j \frac{2\pi}{5}}, e^{-j \frac{4\pi}{5}}, e^{-j \frac{8\pi}{5}}, e^{-j \frac{6\pi}{5}} \right].$$

ДПФ последовательности h представляется как

$$\begin{aligned}
H = h \circ g &= \begin{bmatrix} X'(1) \\ X'(2) \\ X'(3) \\ X'(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[2] \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-j \frac{2\pi}{5}} & e^{-j \frac{6\pi}{5}} & e^{-j \frac{8\pi}{5}} & e^{-j \frac{4\pi}{5}} \\ e^{-j \frac{4\pi}{5}} & e^{-j \frac{2\pi}{5}} & e^{-j \frac{6\pi}{5}} & e^{-j \frac{8\pi}{5}} \\ e^{-j \frac{8\pi}{5}} & 2e^{-j \frac{4\pi}{5}} & e^{-j \frac{2\pi}{5}} & e^{-j \frac{6\pi}{5}} \\ e^{-j \frac{6\pi}{5}} & e^{-j \frac{8\pi}{5}} & e^{-j \frac{4\pi}{5}} & e^{-j \frac{2\pi}{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[3] \\ x[4] \\ x[2] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

В данном примере для вычисления циклической свертки можно использовать БПФ для $N=4$. Полный спектр ДПФ определится как

$$\begin{bmatrix} X[1] \\ X[2] \\ X[3] \\ X[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[0] \\ x[0] \\ x[0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X'(1) \\ X'(2) \\ X'(3) \\ X'(4) \end{bmatrix}.$$

Схема вычисления ДПФ через свертку для простого N представлена на рис. 9 и носит название *схемы Рейдера*.

3.2.5. ДПФ на основе алгоритма ЛЧМ-Z фильтрации

Покажем возможность вычисления ДПФ цифрового сигнала через операцию свертки, используя свойства подобия дискретных экспоненциальных функций и ЛЧМ сигналов. Рассмотрим выражение

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Преобразуем произведение входных и выходных индексов поворачивающего множителя следующим образом

$$nk = -\frac{(k-n)^2}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{k^2}{2}. \quad (70)$$

Подставим полученное выражение в формулу для ДПФ:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x[n] \cdot e^{-j\frac{\pi n^2}{N}} \right\} e^{-j\frac{\pi(k-n)^2}{N}}. \quad (71)$$

В полученном выражении сумма может быть вычислена через операцию свертки

$$X'(k) = (x[n] W^{\frac{n^2}{2}}) \circ (W^{-\frac{n^2}{2}}) = b_1 \circ b_2. \quad (72)$$

Соответственно выражение для полного спектра с использованием оператора свертки имеет вид

$$X(k) = W^{\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} b_1[n] b_2[k-n]. \quad (73)$$

Из формулы видно, что значения спектральных коэффициентов можно найти, рассчитав взвешенную свертку последовательностей b_1, b_2 ; последнее можно эффективно провести, используя алгоритм быстрой свертки на основе БПФ.

Часто такой алгоритм называют алгоритмом ЛЧМ-Z преобразования, подразумевая, что с его помощью можно эффективно вычислить Z-преобразование последовательности $\{x[n]\}$. Действительно, пусть N -точечная последовательность $\{x[n]\}$ имеет Z-преобразование

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot z^{-n}.$$

По определению ДПФ заданной последовательности связано с Z выражением

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=\exp(j(2\pi/N)k)}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (74)$$

Зададим контур преобразования более общего вида

$$z_k = AW^{-k}, \quad A = A_0 e^{j2\pi\theta_0}, \quad W = W_0 e^{j2\pi\varphi_0}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (75)$$

где M -произвольное целое число (необязательно равное N), а A и W - произвольные комплексные числа. Обозначим через X_k искомые значения Z-преобразования при $z = z_k$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot z_k^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot A^{-n} W^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Подстановка в эту формулу выражения для произведения nk дает

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot A^{-n} W^{[n^2+k^2-(k-n)^2]/2} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] \cdot A^{-n} W^{n^2/2}] (W^{k^2/2}) W^{-(k-n)^2/2} \end{aligned}$$

или

$$X_k = W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] h[k-n], \quad \text{где } s[n] = x[n] A^{-n} W^{n^2/2}, \quad h[n] = W^{n^2/2}. \quad (76)$$

Взвешенная свертка может быть рассчитана с использованием БПФ. Основными операциями при этом являются три (иногда два) БПФ, поэтому сложность вычислений будет иметь логарифмическую зависимость.

3.3. Дискретные ортогональные преобразования на конечных абелевых группах

Значительный интерес для цифровой обработки сигналов представляют Фурье-подобные преобразования в пространстве всех функций, заданных на конечной абелевой группе $H_N = H_{N1} * H_{N2} * \dots * H_{Nn}$ и принимающих значения в конечном коммутативном кольце или некотором поле K . Это пространство обозначим как $L(H, K)$. Определим в пространстве L функции аналоги ДЭФ $\exp(j\alpha x)$. Заметим, что экспонента является решением функционального уравнения

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

над полем комплексных чисел с начальным значением $f(0) = 1$. Решениями подобного уравнения над кольцом K являются функции, которые называются

характерами и обозначаются $\chi(x)$. Каждый характер является гомоморфным отображением группы H в кольцо K . Если будем считать, что размер группы $N_i = p_i^{k_i}$, p_i - простое число, и введем понятие ε_i как первообразного корня в степени N_i в поле или кольце K , тогда характер можно определить как

$$\chi_\alpha(x) = \varepsilon_i^{\alpha x}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N_i - 1, \quad (77)$$

где x принадлежит числовой циклической группе $H = \langle \{0, 1, \dots, p_i^{k_i}, +, -, 0\} \rangle$.

Рассмотрим случай, когда группа H равна прямой сумме своих неразложимых циклических подгрупп. Для $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_n$ любой элемент $x \in H$ может быть представлен в виде

$$x = x_n + x_{n-1} \cdot N_n + x_{n-2} \cdot N_n \cdot N_{n-1} + \dots + x_1 \cdot N_n \cdot N_{n-1} \cdot \dots \cdot N_1,$$

где $x_i \in \{0, 1, \dots, N_{i-1}\}$.

Произвольный элемент $x = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ представим как сумму

$$x = (x_n, 0, \dots, 0) + (0, x_{n-1}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_1) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i.$$

Следовательно, для всех возможных характеров группы справедливо равенство

$$\chi(x) = \chi\left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i\right) = \chi(x_1) \cdot \chi(x_2) \cdot \dots \cdot \chi(x_n), \quad (78)$$

где $\chi(x_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ - характеры подгрупп H_{N_i} и, следовательно, все характеры исчерпываются функциями вида

$$\chi_{\alpha_1}(x_1) \cdot \chi_{\alpha_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \chi_{\alpha_n}(x_n) = \varepsilon_1^{\alpha_1 x_1} \cdot \varepsilon_2^{\alpha_2 x_2} \cdot \dots \cdot \varepsilon_n^{\alpha_n x_n}, \quad (79)$$

где $\varepsilon_i = \sqrt[N_i]{1}$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Свойства характеров.

1. Инвариантность относительно группового сдвига:

$$\chi_\alpha(x_1 + x_2) = \chi_\alpha(x_1) \cdot \chi_\alpha(x_2).$$

2. Мультипликативность:

$$\chi_\alpha(x) \cdot \chi_\beta(x) = \chi_{\alpha+\beta}(x).$$

3. Симметричность:

$$\chi_\alpha(x) = \chi_x(\alpha).$$

4. $\sum_{x \in H} \chi_\alpha(x) = N$.

Множество характеров $\chi_\alpha(x)$ $x \in H$, $\alpha \in H^*$ образуют ортонормированные базисы в пространствах $L(H, K)$ и $L(H^*, K)$ относительно скалярных произведений:

$$(\chi_\alpha(x), \chi_\beta(x)) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad \text{и} \quad (\chi_\alpha(x), \chi_\beta(y)) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$$

Используя полученные базисы можно произвольную функцию разложить в ряд

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{\alpha \in H^*} F(\alpha) \cdot \chi_\alpha(x), \\ F(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{x \in H} f(x) \cdot \chi_\alpha^*(x). \end{cases} \quad (80)$$

Условие существования корней N_1, N_2, \dots, N_n -й степени из единицы в конечных кольцах. Пусть $q = \text{НОК}(N_1, \dots, N_n)$ и $\varepsilon = \sqrt[q]{1}$, тогда каждый корень q -й степени является корнем N_i -й степени. Поэтому достаточно потребовать существования корня q -й степени из единицы в K , чтобы имелись все корни степеней (N_1, N_2, \dots, N_n) .

Пример. Пусть абелева группа $H_8 = H_2 + H_2 + H_2$. Тогда элементы этой группы отображаются в отрезок $[0, 7]$ следующим образом:

$$\begin{array}{ll} (0 \ 0 \ 0) \rightarrow 0 & (1 \ 0 \ 0) \rightarrow 4 \\ (0 \ 0 \ 1) \rightarrow 1 & (1 \ 0 \ 1) \rightarrow 5 \\ (0 \ 1 \ 0) \rightarrow 2 & (1 \ 1 \ 0) \rightarrow 6 \\ (0 \ 1 \ 1) \rightarrow 3 & (1 \ 1 \ 1) \rightarrow 7. \end{array}$$

Так как $q = \text{НОК}(2, 2, 2) = 2$, то $\varepsilon_i = \sqrt[2]{1} = -1$. Получим характеры

$$\chi_\alpha(x) = (-1)^{\alpha_2 x_2} \cdot (-1)^{\alpha_2 x_2} \cdot (-1)^{\alpha_3 x_3} = (-1)^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} = (-1)^{(\vec{\alpha}, \vec{x})},$$

образующие систему функций Адамара-Уолша:

$$\begin{array}{l} \chi_0(x) : 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \chi_1(x) : 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \\ \chi_2(x) : 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \\ \chi_3(x) : 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \\ \chi_4(x) : 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \\ \chi_5(x) : 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \\ \chi_6(x) : 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \\ \chi_7(x) : 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1. \end{array}$$

Пример. Пусть $H_6 = H_2 + H_3, N = 6, N_1 = 2, N_2 = 3$. Элементы этой группы погружаются в отрезок $[0, 5]$ следующим образом: $x = x_n + x_{n-1} \cdot N_n = x_2 + x_1 \cdot 3$,

$$\begin{array}{ll}
(0,0) \rightarrow 0 & (1,0) \rightarrow 3, \\
(0,1) \rightarrow 1 & (1,1) \rightarrow 4, \\
(0,2) \rightarrow 2 & (1,2) \rightarrow 5,
\end{array}
\quad \varepsilon_1 = \sqrt[2]{1} = (-1), \quad \varepsilon_2 = \sqrt[3]{1}.$$

Характеры группы определяются как

$$\chi_\alpha(x) = \chi_{\alpha_1, \alpha_2}(x_1, x_2) = (-1)^{\alpha_1 x_1} \cdot \varepsilon_2^{\alpha_2 x_2}.$$

Придавая значения индексам x_i и α_i из области их определения, получим

$$\begin{array}{l}
\chi_0(x) = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
\chi_1(x) = 1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_2^2 \quad 1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_2^2 \\
\chi_2(x) = 1 \quad \varepsilon_2^2 \quad \varepsilon_2 \quad 1 \quad \varepsilon_2^2 \quad \varepsilon_2 \\
\chi_3(x) = 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\
\chi_4(x) = 1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_2^2 \quad -1 \quad -\varepsilon_2 \quad -\varepsilon_2^2 \\
\chi_5(x) = 1 \quad \varepsilon_2^2 \quad \varepsilon_2 \quad -1 \quad -\varepsilon_2^2 \quad -\varepsilon_2.
\end{array}$$

Обозначим $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ и $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \\ 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$. Тогда систему функций можно

получить, используя операцию кронекеровского перемножения матриц.

$$H_6 = H_2 \otimes H_3 = \begin{bmatrix} H_3 & H_3 \\ H_3 & -H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \\ 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 & 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & -1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_2^2 \\ 1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 & -1 & -\varepsilon_2^2 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Классификация Фурье подобных преобразований. В основу классификации преобразований удобно положить следующий принцип, введенный Л. С. Понтрягиным, по инвариантному преобразованию функций. На множестве A значений аргументов (в области определения функции) задается бинарная операция, причем такая, что A по этой операции является абелевой группой G . На множестве Φ значений функций задается пара таких бинарных операций, что Φ образует поле или в более общем случае – кольцо с единицей.

Базисные функции, определяющие ядра преобразований, могут быть выбраны различными способами. В основе Фурье-подобных преобразований лежит идея использовать характеры абелевой группы, соответствующей множеству A отсчетов заданной функции. Над полем комплексных чисел C характерами являются:

- для бесконечной непрерывной (континуальной) абелевой группы вещественных чисел – комплексные экспоненты $\varepsilon(\omega, t) = \exp(j\omega t)$;

- для бесконечной, но счетной, абелевой группы целых чисел – дискретные экспоненты $\varepsilon(\omega, n) = \exp(j\omega n), n = 0, 1, 2, \dots$;

- для конечной циклической группы порядка N – корень N -й степени из единицы, т.е. $\sqrt[N]{1} = \exp(j2\pi / N)$.

Преобразования с подобным выбором характеров, используемых в качестве базисных функций, являются ортогональными.

В общем случае пару интегральных преобразований можно определить в виде

$$X(\omega) = \int_G x(t) \chi(\omega, t) dt;$$

$$x(t) = \int_C X(\omega) \chi^*(\omega, t) d\omega,$$

где $X(\omega)$ - изображение (спектр) сигнала $x(t)$; $\chi(\omega, t)$ и $\chi^*(\omega, t)$ ядра прямого и обратного преобразований.

Подставляя в выражения для интегральных преобразований комплексные экспоненты, получаем пару одномерных интегральных преобразований Фурье. Используя подстановку дискретной экспоненты и заменяя интеграл знаком суммы, а следовательно, непрерывное время t -дискретным nT_0 , получим дискретное преобразование Лапласа (ДПЛ) или Z-преобразование (преобразование Лорана).

Используя характер $\chi = \exp(\pm j \frac{2\pi}{N}) = \sqrt[N]{1}$ конечной циклической группы порядка N , получим выражения для дискретного (прямого и обратного) преобразования Фурье (ДПФ) над полем комплексных чисел. В табл. 1 представлена классификация основных Фурье-подобных преобразований. В табл. 2 представлена классификация рассматриваемых преобразований и приведены их ядра в зависимости от порядка и типа абелевой группы G .

Взаимосвязь спектров. Для линейных ортогональных преобразований возможен переход из одного ортогонального базиса в другой с помощью специальных алгоритмов пересчета (вычисление ядра Фурье).

Рассмотрим взаимосвязь спектров Фурье и Уолша. Преобразование Фурье имеет вид

$$X_F = [W_N^{nk}] \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{x} = \vec{X}_F^T \cdot [W_N^{nk}]^{-1}.$$

Преобразование Уолша-Адамара запишется как

$$\vec{X}_H [had(k, n)] \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{x} = \vec{X}_H \cdot [had(k, n)]^{-1}.$$

Тогда спектр Фурье выражается через спектр Уолша следующим образом

$$\vec{X}_F = [W_N^{nk}] \cdot [had(k, n)]^{-1} \cdot \vec{X}_H \text{ и наоборот, } \vec{X}_H = [had(k, n)] \cdot [W_N^{kn}]^{-1} \cdot \vec{X}_F.$$

Пример. Вычислим ядро Фурье для $N = 4$:

$$\begin{bmatrix} W_N^{nk} \end{bmatrix} \cdot H_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & (2-2j) & (2+2j) \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2+2j) & (2-2j) \end{bmatrix}.$$

Сложнее определить взаимосвязь преобразований цифрового сигнала в полях комплексных чисел \mathbb{C} и конечных полях Галуа $\text{GF}(p^v)$. Предположим, что группа G_N определяет системы базисных функций над полями \mathbb{C} и $\text{GF}(p^v)$, т.е. определяет χ -преобразования в пространствах $L_1(G_N, \mathbb{C})$ $L_2(G_N, \text{GF}(p^v))$. Обозначим спектральные коэффициенты, а также первообразные корни этих преобразований соответственно как $X_F(k)$, ε_F и $X_{GF}(k)$, ε_{GF} . Тогда взаимосвязь спектров можно определить через равенство

$$X_{GF}(k) = \lambda \{ [A \vec{X}_F(k)] \} \quad (81)$$

где $A = [a_1, a_2]$ - матрица преобразований значений спектрального коэффициента X_F в множество действительных чисел R ; $\vec{X}_F(k) = [\text{Re } X_F(k), \text{Im } X_F(k)]^T$.

При этом должны выполняться следующие соотношения относительно первообразных элементов

$$\lambda \{ A \varepsilon_F^0 \} = \varepsilon_{GF}^0, \lambda \{ A \varepsilon_F^1 \} = \varepsilon_{GF}^1, \dots, \lambda \{ A \varepsilon_F^{N-1} \} = \varepsilon_{GF}^{N-1}. \quad (82)$$

Если имеем дело с простым полем $\text{GF}(p)$, то соотношения упрощаются

$$A \varepsilon_F^0 = \varepsilon_{GF}^0 \text{ mod } p, A \varepsilon_F^1 = \varepsilon_{GF}^1 \text{ mod } p, \dots, A \varepsilon_F^{N-1} = \varepsilon_{GF}^{N-1} \text{ mod } p, \quad (83)$$

а оператор λ определяется из равенства $\lambda \rightarrow \lambda_p h = h \pm lp$; $h, l \in Z$, $(h \pm lp) \in \text{GF}(p)$.

3.4. Преобразование Уолша-Адамара

Преобразованию Фурье в базисе гармонических функций присущ определенный недостаток. Даже при наличии алгоритмов БПФ сохраняется необходимость в выполнении большого количества умножений. Значительное упрощение можно достичь, если в качестве базисных использовать кусочно-постоянные, меандровые функции. Одними из таких функций являются функции Уолша-Адамара.

3.4.1. Функции Уолша-Адамара

Исторически сложилось так, что в основе функций Уолша-Адамара лежат ортогональные бинарные матрицы Адамара H_N , которые определяются по простому правилу:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$H_4 = \left[\begin{array}{c|c} H_2 & H_2 \\ \hline H_2 & -H_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right], \quad H_8 = \left[\begin{array}{c|c} H_4 & H_4 \\ \hline H_4 & H_4 \end{array} \right] \text{ и т.д.}$$

Матрицы Адамара можно получить другим путем, используя для этого операцию кронекеровского произведения матриц:

$$H_4 = H_2 \otimes H_2; \quad H_8 = H_4 \otimes H_2 = H_2 \otimes H_2 \otimes H_2,$$

где \otimes - оператор кронекеровского произведения матриц.

Рассматривая элементы матриц Адамара как отсчеты непрерывных меандровых сигналов, можно получить в функции Уолша-Адамара $\{had(k, t)\}$.

Матрица дискретных функций Уолша-Адамара $\{had(k, n)\}$, $t=n\Delta t$ примет вид

$$H_8 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] = [had(k, n)] = \begin{bmatrix} had(0, n) \\ had(1, n) \\ had(2, n) \\ \vdots \\ had(N-1, n) \end{bmatrix}$$

Введем двоичное представление номера k функции и двоичное представление номера отсчета n :

$$k = \sum_{j=0}^{r-1} k_j \cdot 2^j = (k_0, k_1, \dots, k_{r-1}) \stackrel{\Delta}{=} \vec{k}, \quad n = \sum_{j=0}^{r-1} n_j \cdot 2^j = (n_0, n_1, \dots, n_{r-1}) \stackrel{\Delta}{=} \vec{n}. \quad (84)$$

Тогда функции Уолша-Адамара можно определить как

$$had(k, n) = (-1)^{(\vec{n} \cdot \vec{k})}, \quad (85)$$

где $(\vec{n} \cdot \vec{k}) = \sum_{j=0}^{r-1} n_j \cdot k_j$ - скалярное произведение векторов кодов номеров функции и отсчета, соответственно.

Пример. Пусть $n = 3 \rightarrow 0 \ 1 \ 1, k = 2 \rightarrow 0 \ 1 \ 0$, тогда $(\vec{n} \cdot \vec{k}) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$ и элемент матрица с координатами (3,2) равен $had(2,3) = (-1)^1 = -1$.

В зависимости от упорядочивания номера функций различают следующие системы ортогональных функций: *система Адамара* $\{had(k, n)\}$, *система Пэли* $\{pal(k, n)\}$, *система Уолша* $\{wal(k, n)\}$. Система функций Пэли имеет двоичную инверсию кода номера функции k . Номера функций Уолша изменяются по закону двоичной инверсии кода Грея. Например, для $N=8$ имеем

$had(k, n)$	$pal(k, n)$	$wal(k, n)$
000	000	000
001	100	100
010	010	110
011	110	010
100	001	011
101	101	111
110	011	101
111	111	001

Свойства функций Уолша-Адамара.

1. Ортогональность:

$$\sum_{n=0}^{N-1} had(k_1, n) \cdot had(k_2, n) = \begin{cases} N, & k_1 = k_2 \\ 0, & k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

Например, функции $had(4, n) = 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1$ и $had(7, n) = 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1$ ортогональны. Действительно проверка дает

$$\sum_{n=0}^7 had(4, n) had(7, n) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

Функции Адамара-Уолша это равновесные функции с равным числом 1 и -1.

2. Симметричность.

$$H_N \cdot H_N^T = N \cdot I, \quad H_N = H_N^T, \quad H^{-1} = \frac{1}{N} H$$

3. Мультипликативность.

- по номеру функций:

$$had(k_1, n) had(k_2, n) = had(k_1 \oplus k_2, n);$$

- по номеру отсчета:

$$had(k_1, n_1) had(k_2, n_2) = had(k_1, n_1 \oplus n_2).$$

Любая функция Уолша может быть получена путем произведения меандровых функций Радемахера $rad(k, n)$, которые являются базисные функциями для системы Уолша-Адамара. Так, для $N=8, n=0, 1, \dots, N-1$, имеем следующие функции Радемахера:

$$rad(0, n) = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1; \quad rad(1, n) = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1; \quad rad(2, n) = 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \text{ и}$$

$$rad(3, n) = 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1.$$

Соответственно

$$Had(1, n) = rad(3, n); \quad had(3, n) = rad(3, n) rad(2, n) \text{ и т.д.}$$

4. Связь матриц Адамара с конечными полями Галуа $GF(q)$. Усеченная матрица Адамара изоморфна с точностью до перестановки матрице циклических сдвигов псевдослучайной последовательности.

Определим *усеченную* матрицу Адамара H'_N , размером $(N-1) \times (N-1)$ полученную из исходной матрицы путем усечения на первый столбец:

$$H_N = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & H'_N \end{bmatrix}.$$

Определим псевдслучайную линейную рекуррентную последовательность $\{s[n]; n=0,1,\dots,N-2\}$, полученную из элементов $\{\alpha^i; i=0,1,\dots,N-2\}$ конечного поля Галуа $GF(q^m)$ по правилу

$$s[n] = (-1)^{tr(\alpha^n)},$$

где $tr\beta = \sum_{i=0}^{m-1} \beta^{q^i}$ след элемента $\beta \in GF(q^m)$ в поле $GF(q)$, α -примитивный элемент поля $GF(q^m)$.

Пример. Для поля $GF(2^3)$, построенному по полиному $f(x) = x^3 + x + 1$,

n	\rightarrow	α^n	$=$	дв.код	\rightarrow	дес.число
0	\rightarrow	α^0	$=$	100	\rightarrow	4
1	\rightarrow	α^1	$=$	010	\rightarrow	2
2	\rightarrow	α^2	$=$	001	\rightarrow	1
3	\rightarrow	α^3	$=$	110	\rightarrow	6
4	\rightarrow	α^4	$=$	011	\rightarrow	3
5	\rightarrow	α^5	$=$	111	\rightarrow	7
6	\rightarrow	α^6	$=$	101	\rightarrow	5

получаем следующую последовательность:

$$\begin{array}{cccccccc} n & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ s[n] & = & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

Матрица циклических сдвигов последовательности имеет вид

$$[s[i+j] \bmod N-1] = \begin{bmatrix} j/i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

знак «точка» - соответствует начальной фазе (задержки) сигнала.

Определим перестановку символов псевдослучайной последовательности как

$$P_M : n \rightarrow \alpha^n - 1.$$

Для рассматриваемого примера перестановка имеет вид

$$P_M = \begin{pmatrix} n & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \alpha^n & = & 3 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Применение такой перестановки к строкам матрицы-циркулянт псевдослучайной последовательности отображает последнюю в усеченную матрицу Адамара. Для рассматриваемого примера получаем

$$P_M : \{[s[i+j] \bmod N-1]\} = P_M : \begin{bmatrix} j/i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} j/i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что если к полученной матрице добавить единичные верхнюю строку и левый столбец, то получим полную матрицу Адамара с переставленными строками. Если мы имеем дело с многоуровневыми сигналами (кодами), тогда подобная перестановка справедлива для функций Виленкина-Крестенсона.

3.4.2. Свойства преобразования Уолша-Адамара

Для вектора отсчетов $\vec{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]$, $N = 2^m$ можно определить преобразование Уолша-Адамара (ПУ-А) следующим образом

$$X_H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (-1)^{(\vec{k}\vec{n})}, \quad \vec{X}_H = H_N \cdot \vec{x} \quad (86)$$

- прямое преобразование Уолша-Адамара;

$$- x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_H(k) \cdot (-1)^{(\bar{k}\bar{n})}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} H_N^{-1} \cdot \bar{X}_H = \frac{1}{N} H_N \cdot \bar{X}_H \quad (87)$$

- обратное преобразование Уолша-Адамара (ОПУ-А).

Свойства преобразования Уолша-Адамара.

1. Линейность.

Если есть последовательность $\{x[n]\}$ и $\{y[n]\}$, то

$$z[n] = A \cdot x[n] + B \cdot y[n] \xrightarrow{\text{ПУА}} Z_H(k) = A \cdot X_H(k) + B \cdot Y_H(k)$$

2. Инвариантность к диадному сдвигу.

Определим для вектора $\bar{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]^T$ диадный сдвиг τ . Оператор диадного сдвига переставляет отсчеты исходной последовательности по правилу:

$$x[n] \xrightarrow{\tau} x[n \oplus \tau]. \quad (88)$$

Спектра Уолша –Адамара диадного сдвига запишется как

$$X_H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n \oplus \tau] \cdot (-1)^{(\bar{k}\bar{n})} = (-1)^k \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot (-1)^{(\bar{k}\bar{n})}.$$

Из полученного выражения видно, что диадный сдвиг не меняет модуль спектрального коэффициента, а изменяется только знак коэффициента. Доказательство основывается на свойстве функции Адамара:

$$had(k, n \oplus \tau) = had(k, n)had(k, \tau) = \pm had(k, n)$$

3. Теорема о свертке и корреляции.

Диадная свертка или диадная корреляция определяется выражением:

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] \cdot h[l \oplus n] \xleftarrow{\text{ПУ-А}} Y_H(k) = X_H(k) \cdot H_H(k) \quad (89)$$

или

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_H(k) \cdot H_H(k) \cdot (-1)^{(\bar{k}\bar{n})} \quad (90)$$

Заметим, что понятие диадной корреляции совпадает с корреляционной характеристикой булевых функций, что позволяет использовать преобразования Уолша при анализе и синтезе логических функций.

Определение. Булева функция $f(v_1, \dots, v_l)$ называется *максимально-нелинейной*, если все коэффициенты ее преобразования Уолша-Адамара равны $\pm 2^{l/2}$. Например, функция $f(v_1, v_2, v_3, v_4) = v_1 v_2 + v_3 v_4$ – относится к классу максимально-нелинейных.

Энергетический спектр сигнала в базисе функций Уолша. Упорядочение функций по Уолшу $\{wal(k, \vartheta), k = 0, 1, \dots, N-1; 0 \leq \vartheta < 1\}$ имеет определенный

физический смысл. На рис. 10 изображены восемь функций Уолша и пунктирными линиями показаны для сравнения тригонометрические функции базиса Фурье.

В связи со сходством сходство между функциями, упорядоченными по Уолшу и тригонометрическими функциями для первых из них иногда применяют обозначения $sal(l, \vartheta)$ и $cal(l, \vartheta)$, называя их соответственно синусный Уолша и косинусный Уолша. Значения l отражают величину так называемой частоты, которая определяется по количеству пересечения с линией нулевого уровня в заданном интервале значений ϑ . Если не имеется пересечений, то считается, что $\vartheta=0$. При четном числе w пересечений принимается $\vartheta=w/2$, при нечетном принимается $\vartheta=(w+1)/2$. Отсюда следует, что коэффициенты спектра в базисе функций, упорядоченных по Уолша

$$X_W(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] wal(k, n), \quad k=0, \dots, N-1, \quad (91)$$

несут информацию об различных частотах обрабатываемого сигнала.

Можно определить энергетический спектр по Уолшу $P_W(l)$ как

$$\begin{aligned} P_W(0) &= X_W^2(0); P_W(1) = X_W^2(1) + X_W^2(2); P_W(2) = X_W^2(3) + X_W^2(4); \dots \\ P_W(m) &= X_W^2(2m-1) + X_W^2(2m), \dots, P_W((N-2)/2) = X_W^2(N-3) + X_W^2(N-2); \\ P_W\left(\frac{N}{2}\right) &= X_W^2(N-1) \end{aligned} \quad (92)$$

Коэффициенты спектра несут информацию об интенсивности пересечения нулевого уровня с определенной частотой.

3.4.3. Быстрое преобразование Уолша-Адамара

В основе быстрого преобразования Уолша-Адамара (БПУ) лежит свойство расщепления матрицы Адамара.

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & & & H_{N/2} \\ & & & \\ & & & \\ H_{N/2} & & & -H_{N/2} \end{bmatrix}.$$

Быстрое преобразование Уолша аналогично, рассмотренным ранее быстрым преобразованиям Фурье. Однако БПУ не требует применения умножения на поворачивающие множители. БПУ так же производится с прореживанием по времени или с прореживанием по частоте. Так, при прореживании по частоте исходная последовательность также разделяется сначала на две половины, потом каждая из половинок тоже делится пополам и т.д., до получения преобразования размера два.

Для БПУ справедливы графы БПФ с отсутствием множителя W^k . Например, граф БПУ с прореживанием по времени для $N=8$ имеет вид, показанный на рис. 11.

Быстрое преобразование Уолша обладает минимальной вычислительной сложностью, которая оценивается в $N \log_2 N$ операций сложения.

Многоканальная корреляционная обработка псевдослучайных последовательностей. Рассмотрим возможность применения БПУ для многоканальной корреляционной обработки кодовой псевдослучайной последовательности. В задачах радиолокации и систем передачи информации часто возникает необходимость оценить задержку (фазу) периодически повторяющейся псевдослучайной последовательности, принимаемой на фоне аддитивного шума. Цифровая система обработки в этом случае должна вычислять все значения взаимокорреляционной функции сигнала и его опорной копии, т.е. поддерживать многоканальный корреляционный прием сигнала. При больших длинах сигнала число каналов становится значительным, и прямые методы вычисления корреляционной функции потребуют больших вычислительных затрат ($\sim N$). Покажем, что, используя связь структуры псевдослучайного кода с матрицами Уолша-Адамара, вычислительную сложность можно значительно понизить. Действительно, если отсчеты псевдослучайной последовательности длины $N=2^m-1$ переставить с помощью оператора P_M , то любой циклический сдвиг сигнала отобразится в усеченную на первый символ функцию Уолша. Если на месте усеченного символа искусственно разместить ноль, то мы получим последовательность из $N=2^m$ отсчетов, размерность которой совпадает с размерности быстрого преобразования Уолша. Значения спектра Уолша-Адамара такой последовательности будут полностью эквивалентны значениям корреляционной функции обрабатываемого сигнала.

Пример. Пусть принимается кодовая последовательность вида

$$\{s[n]\} = 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1.$$

Автокорреляционная функция такого сигнала вычисляется по формуле

$$R(l) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]s[n+l] \text{ и принимает значения } R(0) = N, R(l \neq 0) = -1.$$

Перестановка последовательности по ранее рассмотренному правилу дает

$$P_M: \{s[n]\} = -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1.$$

Искусственное размещение нуля приводит размер обрабатываемого сигнала к восьми отсчетам:

$$\{x[n]\} = 0, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1.$$

Спектр Уолша-Адамара такой последовательности равен

$$[X_H(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Координаты максимального спектрального коэффициента БПУ несут информацию о величине задержки (циклического сдвига) начальной фазы кодовой последовательности.

3.5. Теоретико-числовые преобразования (ТЧП)

ДПФ в поле комплексных чисел использует, как правило, приближенное представление числа и характеризуется погрешностью вычисления. В ряде задач обработки сигналов, связанных с вычислением сверток, необходимы точные преобразования, инвариантные к циклическому сдвигу. Указанным требованиям удовлетворяют преобразования, осуществляющие модульную обработку в кольце целых чисел. Такие преобразования называются *теоретико-числовыми* (ТЧП).

Прямое и обратное ТЧП задаются формулами

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \varepsilon^{nk} \bmod M \\ x[n] &= N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \varepsilon^{-nk} \bmod M, \end{aligned} \quad (93)$$

где ε - целое число, такое, что $\varepsilon^N \equiv 1 \bmod M$; N^{-1} - число, обратное N по модулю M .

ТЧП имеет ту же структуру, что и ДПФ. Иными словами, ТЧП – это дискретные преобразования Фурье, определенные в кольце чисел по модулю M . ТЧП обладают свойством цикличности свертки и в ряде случаев могут вычисляться с использованием только операций сложения и сдвига ($\varepsilon = 2$). Свойства ТЧП и их применение в существенной степени зависят от параметров преобразования: модуля M , корня ε и длины N преобразуемой последовательности. Отсчеты входных данных для ТЧП обязательно должны быть промасштабированы, в частности должно выполняться условие $|x[n]| \leq M/2$.

Для выполнения обратного ТЧП необходимо, чтобы *существовали* обратные числа N^{-1} и ε^{-1} . Это условие выполняется, если ε и N взаимно простые с M . С точки зрения теории чисел обратные числа существуют, если

$$\varepsilon^N = 1 \pmod{M} \text{ и } \left((\varepsilon^t - 1), M \right) = 1 \text{ или } \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^{tk} = 0 \pmod{M}, \quad t = 1, \dots, N-1. \quad (94)$$

Обычно определение ТЧП начинается с выбора модуля M , а затем исследуются возможные значения N . В качестве модуля чаще всего используют числа Мерсенна и Ферма. Соответственно различают ТЧП Мерсенна (ТЧПМ) и ТЧП Ферма (ТЧПФ).

ТЧП – Мерсенна.

Числа Мерсенна определяются выражением $M = M_p = 2^p - 1$, где p - простое число. ТЧПМ существует, если N делит все числа вида $(q_i - 1)$, где q_i - составные множители из разложения числа Мерсенна:

$$M = 2^p - 1 = q_1^{r_1} q_2^{r_2} \dots q_l^{r_l}.$$

Для простых чисел Мерсенна длину преобразуемой последовательности получают из условия, что число N делит число $(M_p - 1)$ т.е. $N | (M_p - 1)$.

Из теории чисел известно, что если $M_p - 1 = 2^p - 2$, то $M_p - 1$ делится на p . Кроме того, число 2 является делителем числа $2^p - 2$. Следовательно, можно определить $N = p, 2p$ -точечные ТЧПМ.

Рассмотрим вопрос определения ε . Если M простое, то корнем порядка p является 2, так как $2^p \equiv 1 \pmod{M_p}$. Если M_p составное число, то 2 тоже является корнем, но необходимо чтобы p имело обратное число, а это условие выполняется в том случае, если

$$\sum_{k=0}^{p-1} 2^{tk} = 0 \pmod{M_p} \quad t \neq 0 \pmod{p}.$$

Таким образом, можно определить прямое и обратное p -точечное преобразование Мерсенна:

$$X_k = \sum_{n=0}^{p-1} x[n] \cdot 2^{nk} \pmod{2^p - 1} \quad \text{и} \quad x[n] = p^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} X(k) \cdot 2^{-nk}, \quad (95)$$

где $2^{-nk} = 2^{(p-1)nk} \pmod{2^p - 1}$.

Для $2p$ -точечного преобразования корнем является $\varepsilon = -2$, так как $(-2)^{2p} \equiv 1 \pmod{M}$ и степени корня $1, -2, 4, \dots, (-2)^{M_p - 1}$ представляют собой разные числа, отличные от нуля:

$$(2p)^{-1} \equiv 2^{p-1} - (2^p - 2) / 2p \pmod{2^p - 1}.$$

Для составного M_p необходимо выполнить проверку на взаимную простоту чисел:

$$\sum_{i=0}^{2p-1} (-2)^{tk} = \sum_{k=0}^{2p-1} (-2)^k = \frac{-2^{2p} - 1}{3} \equiv 0 \pmod{M_p} \quad \text{для } t_{\text{нечетное}} \neq p.$$

Для $t_{\text{четное}}$ получаем:

$$\sum_{k=0}^{2p-1} (-2)^{tk} = 2 \sum_{k=0}^{p-1} (-2)^{tk} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

Тогда можно определить $2p$ -точечное ТЧПМ следующим образом:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{2p-1} x[n] \cdot (-2)^{nk} \pmod{2^p - 1}, \\ x[n] &= (2p)^{-1} \sum_{k=0}^{2p-1} X(k) (-2)^{-nk}, \end{aligned} \quad (96)$$

где $(-2)^{-nk} = (-2)^{(2p-1)nk} \pmod{2^p - 1}$.

Для $\varepsilon = 2$ преобразования осуществляются без операций умножения. Возможны ТЧПМ другого размера с $\varepsilon \neq 2$, но в этом случае появляются операции умножения.

Пример. Пусть $M = 2^5 - 1 = 31$, $p = 5$,

$$N = 5 \quad X(k) = \sum_{n=0}^4 x[n] \cdot 2^{nk} \pmod{31}, \quad k = 0, \dots, 4.$$

Матрица ТЧП строится так же, как матрица преобразований Фурье с одним отличием: место поворачивающего множителя занимает число 2^{nk} :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= [2 \quad 6 \quad 4 \quad 4 \quad 0]^T \\ \vec{X}_M &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 & 16 & 4 \\ 1 & 16 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 5 \\ 29 \\ 22 \end{bmatrix} \pmod{31} \end{aligned}$$

Определим $N^{-1} \rightarrow 5^{-1}$, используя алгоритм Евклида $5^{-1} = 25 \pmod{31}$, $5 \cdot 25 = 125 \equiv 1 \pmod{31}$. Обратное ТЧПМ имеет вид

$$x[n] = 25 \sum_{k=0}^4 X(k) \cdot 2^{-nk} \pmod{31},$$

$$\vec{x} = 25 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 2 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 5 \\ 29 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \end{bmatrix}.$$

Недостаток преобразования Мерсенна состоит в том, что для него отсутствуют алгоритмы быстрого вычисления, так как числа p и $2p$ не разлагаются на большое количество сомножителей. Этому недостатка лишены преобразования Ферма (ТЧПФ).

ТЧП Ферма. ТЧПФ в качестве корня использует двойки и степени двойки. Это позволяет получить удобную арифметику, N -кратную степени двойки. Числа Ферма имеют вид $F_t = 2^{2^t} + 1 = 2^V + 1$, где $V = 2^t$. Например, $F_0 = 3, F_1 = 5, \dots$. Первые пять чисел – это простые числа остальные числа составные. $F_t = g_1^{\alpha_1} \cdot g_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot g_k^{\alpha_k}$, где g_i – простое число. Если F_t – простое число, то размер выборки определяется из условия $N / 2^{2^t}$.

Если F_t – составное число, то простой множитель g_i имеет вид

$$g_i = c_i \cdot 2^{t+2} + 1.$$

Следовательно всегда можно найти такое N -точечное преобразование по модулю, F_t , для которого выполняется условие: $N / 2^{t+2}$

Определим корни преобразования. Если $\varepsilon = 2$, то он является корнем порядка $N = 2^{t+1}$. Действительно, $2^{2^t} \equiv -1$ по модулю F_t , а величины 2^i принимают 2^{t+1} различных значений. ТЧПФ имеет вид

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{2^{t+1}-1} x[n] \cdot 2^{nk} \pmod{F_t}, \\ x[n] &= -2^{2^t-t-1} \sum_{k=0}^{2^{t+1}-1} X(k) \cdot 2^{-nk} \pmod{F_t}, \end{aligned} \quad (97)$$

где $2^{-nk} = \pm 2^{(2^t-1)nk} \pmod{F_t}$.

Возможны следующие виды «удобных» корней:

- корень $\varepsilon = 2$, является корнем порядка $N = 2^{t+1}$ по $\pmod{F_t}$;
- корень $\varepsilon = 2^{2^i}$ является корнем порядка: $N = 2^{t+1-i}$ по $\pmod{F_t}$;
- корень $\varepsilon = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{ТЧП}} N = 2^{t+2}$, $\sqrt{2} = 2^{V/4} \cdot \left(2^{V/2} - 1 \right)$, $V = 2^t$.

ТЧПФ имеет длины преобразований, которые выражаются составными числами. Это позволяет для их вычисления воспользоваться алгоритмами типа БПФ. N - Так, если длина равна степени двойки, то возможны быстрые алгоритмы преобразований, структура которых аналогично БПФ с прореживанием по частоте и по времени за исключением того, что операционный множитель на поворачивающий множитель заменяется операцией умножения на степень двойки, то есть сдвигами:

$$\begin{cases} X(k) \equiv \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] \cdot 2^{2nk} + 2^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] \cdot 2^{2nk}, \\ X(k) \equiv \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] \cdot 2^{2nl} + 2^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] \cdot 2^{2nl}. \end{cases} \quad (98)$$

Вычислительная сложность быстрого ТЧПФ составит $N \log_2 N$ - операций сложения и $\frac{N}{2} \log N$ - операций сдвига.

Пример. Пусть $F_t = 2^{2t} + 1 = 17 = 2^{2^2} + 1$; $t = 2$. Тогда $N = 2^{t+1} = 2^3 = 8$ для $\varepsilon = 2$. Для $N = 2^{t+1-1} = 2^2 = 4 \rightarrow \varepsilon = 4$.

Выберем $\varepsilon = 4$, тогда:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 4^2 & 4^4 & 4^6 \\ 1 & 4^3 & 4^6 & 4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{-1} = 13 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Основные применения ТЧП - это вычисление точных значений свертки.

Пример. Предположим, необходимо вычислить циклическую свертку двух последовательностей $\vec{x} = [2, -2, 1, 0]T$ и $\vec{h} = [1, 2, 0, 0]T$. Выберем ТЧПФ с параметрами $N = 4$, $\varepsilon = 4$. Спектры последовательностей равны:

$$\vec{X}_{F_t} = T \cdot \vec{x} = [1, 10, 5, 9]_{\text{mod } 17} \text{ и } \vec{H}_{F_t} = T \cdot \vec{h} = [3, 5, 12, 5]_{\text{mod } 17}.$$

Произведение одноименных спектральных коэффициентов дает следующий результат $\vec{X} \cdot \vec{H} = [3, 90, 80, 90]^T = [3, 5, 12, 5]_{\text{mod } 17}^T$. Обратное число $N^{-1} = 13$. Значения циклической свертки равны

$$\vec{Y} = 13 \cdot T^{-1} \cdot (\vec{X} \cdot \vec{H}) = [2, 2, 14, 2]^T = [2, 2, -3, 2]_{\text{mod } 17}^T.$$

4. СВЕРТКА СИГНАЛОВ

4.1. Линейная и циклическая свертки

Дискретным эквивалентом линейного аналогового фильтра (согласованного, полосового и т.п.), выходной сигнал которого определяется интегралом свертки

$$z(T) = \int_0^{T_a} x(t)h(T-t)dt$$

является дискретный фильтр, формирующий весовую сумму (*линейную свертку*):

$$z[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]h[k-n], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, (k-n) \geq 0. \quad (99)$$

Здесь $x[n]=x(n\Delta t)$, $n=0, 1, 2, \dots$, - сигнал на входе фильтра, $h[k-n]$ - весовые коэффициенты, определяющие импульсную характеристику аналогового фильтра $h(t)$, N - объем выборки. Для реализации цифрового фильтра необходимы устройства, выполняющие операции сложения, умножения и задержку.

В более общем виде можно рассмотреть класс линейных инвариантных к сдвигу (ЛИС) систем, который включает много полезных, широко используемых методов обработки сигналов, в том числе и фильтрацию сигналов. Соотношение вход-выход для ЛИС систем задается в виде свертки

$$y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h[k-n],$$

где $\{x[n]\}$ - входной сигнал; $\{y[k]\}$ - множество отсчетов выходного сигнала; $\{h[n]\}$ - импульсный отклик ЛИС системы; символ звездочка как двучленный оператор означает свертку.

Система ЛИС полностью определяется своим импульсным откликом $\{h[n]\}$. Считается, что система является каузальной тогда и только тогда, когда $h[n]=0$ при $n < 0$.

Если импульсная реакция имеет конечную длительность $n = \overline{0, N-1}$, то бесконечная сумма сводится к конечной сумме

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h[k-n].$$

Предположим, что обрабатываются два каузальных цифровых сигнала $\{x[n]\}$ длиной L и $\{h[n]\}$ длиной M . Тогда *линейная (апериодическая)* свертка этих сигналов имеет длину $(L + M - 1)$ и определяется как

$$y[k] = \sum_{n=0}^{L+M-2} h[n] x[k-n]. \quad (100)$$

Если $L = M$, то выражение для линейной свертки можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y[2L-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & & & & & & & & \\ & h[1] & & & & & & & \\ & & h[2] & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ h[L-1] & & h[L-2] & & h[L-3] & & \dots & & h[0] \\ & & & h[L-1] & & h[L-2] & & \dots & h[1] \\ & & & & h[L-1] & & \dots & & h[2] \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & & & & & & & h[L-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x[L-2] \\ x[L-1] \end{bmatrix}. \quad (101)$$

В большинстве алгоритмов вычисления свертки входная последовательность $\{x[n]\}$ делится на последовательные блоки по L отсчетов и $\{y[k]\}$ вычисляется как сумма линейных сверток каждого из этих блоков с M точечной последовательностью $\{h[n]\}$.

Используя понятия алгебры полиномов, процесс вычисления линейных сверток $y(\beta)$ можно представить в виде произведения двух полиномов $x(\beta)$ и $h(\beta)$:

$$\begin{aligned} x(\beta) &= \sum_{l=0}^{L-1} x[l] \beta^l, & h(\beta) &= \sum_{l=0}^{M-1} h[l] \beta^l, \\ y(\beta) &= x(\beta) h(\beta) = \sum_{l=0}^{M+L-2} y[l] \beta^l. \end{aligned} \quad (102)$$

Рассмотрим поведение свертки относительно дискретных преобразований. Начнем с дискретного преобразования Лапласа. Z -преобразование дискретной последовательности $\{x[n]\}$ имеет вид

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

Фундаментальным свойством ЛИС является соотношение, согласно которому операция свертки во временной области, соответствует операции умножения в области Z -преобразований:

$$y[k] = x[k] * h[k] \leftrightarrow Y(z) = X(z)H(z). \quad (103)$$

Важным классом ЛИС систем являются системы, имеющие z – преобразование в виде рациональных функций. В этом случае $H(z) = B(z)/A(z)$, где $A(z) = \sum_{k=0}^P a_k z^{-k}$ и

$B(z) = \sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}$ – полиномы конечной степени. Так как $Y(z) = H(z) X(z)$, то

получаем $A(z) Y(z) = B(z) X(z)$. Во временной области отклик системы и входное воздействие связаны между собой разностным уравнением

$$\sum_{k=0}^P a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^Q b_k x[n-k].$$

Без потери общности можно положить $a_0 = 1$. Тогда отклик системы на заданное входное воздействие при известных начальных условиях запишется как следующее рекуррентное соотношение

$$y[n] = \sum_{k=1}^P a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^Q b_k x[n-k].$$

Заметим, что в рекуррентном соотношении каждая сумма представляет собой оператор свертки. Импульсный отклик такой системы имеет бесконечную длительность. Такие системы называют системами с *бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ) или рекурсивными системами.

Важный подкласс множества рациональных Z-преобразований имеет знаменатель $A(z) = 1$. В этом случае рекуррентное соотношение не содержит членов обратной связи, а отклик $y[n]$ представляет собой просто свертку входного воздействия $x[n]$ с коэффициентами b_k полинома $B(z)$. Такие системы часто называют системами с *конечной импульсной характеристикой* (КИХ) или нерекурсивными системами.

Определим ДПФ для входного воздействия и импульсной характеристики ЛИС:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad \text{и} \quad H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_N^{nk}.$$

Рассмотрим обратное ДПФ произведения двух ДПФ $X(k) H(k)$:

$$y[n] = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) X(k) W_N^{-nk}.$$

Подставив сюда определение $X(k)$ и изменив порядок суммирования, получаем

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-nk},$$

откуда следует

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l] h[n-l].$$

Для того чтобы полученное выражение имело смысл, необходимо периодически продолжить сигнал $h[n-l]$ с периодом N . С учетом периодического продолжения выражение для $y[n]$ можно переписать как

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l]h[n-l] \pmod N. \quad (104)$$

В силу периодичности последовательностей номера отсчетов берутся по модулю N , поэтому $x[-n] = x[N-n]$ и $h[-n] = h[N-n]$. Полученная сумма называется N -точечной *циклической сверткой*. В матричном виде циклическая свертка записывается как

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \dots \\ y[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[N-1] \\ x[1] & x[2] & \dots & x[0] \\ x[2] & x[3] & \dots & x[1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x[N-1] & x[0] & \dots & x[N-2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[N-1] \\ h[N-2] \\ \dots \\ h[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[N-1] \\ h[N-2] \\ \dots \\ h[1] \end{bmatrix} \quad (105)$$

$$= [x[i+l]_{\text{mod } N}] Q \vec{h} = [h[i-l]_{\text{mod } N}] \vec{x} = \vec{y}.$$

Матрица вида $[d[i+l]_{\text{mod } N}]$ относится к классу ганкелевых, а матрицу вида $[d[i-l]_{\text{mod } N}]$ часто называют *циркулянтной*, или *теплицевой*. Циркулянтные матрицы занимают особое место в области математики, связанной с разработкой эффективных алгоритмов [5].

Используя алгебру полиномов, циклическую свертку можно записать в виде произведения двух многочленов свертываемых последовательностей по модулю полинома $(\beta^N - 1)$:

$$y(\beta) = x(\beta) h(\beta) \pmod{(\beta^N - 1)}. \quad (106)$$

В матричном виде, через матрицы Ганкеля и Теплица циклическая свертка запишется как

$$\begin{aligned} \vec{y} &= [h[i+l]_{\text{mod } N}] [x[0], x[N-1], x[N-2], \dots, x[1]]^T = \\ &= [x[i-j]_{\text{mod } N}] [h[0], h[1], \dots, h[N-1]]^T. \end{aligned}$$

Если обозначить значения линейной и циклической сверток соответственно как $y_L[i]$ и $y_U[i]$, при $L=M=N$ можно выразить одни значения свертки через другие следующим образом:

$$\begin{aligned} y_U[0] &= y_L[0] + y_L[N] \\ y_U[1] &= y_L[1] + y_L[N+1] \\ \dots & \dots \dots \\ y_U[N-2] &= y_L[N-2] + y_L[2N-2] \\ y_U[N-1] &= y_L[N-1] \end{aligned}$$

Таким образом, если положить равными нулю значения $y_L[N]$, $y_L[N+1]$, $y_L[2N-2]$, то линейную свертку можно вычислить через циклическую.

Полином линейной свертки $y_L(\beta)$ имеет степень $L+M-2$ и он совпадает со своим вычетом по модулю полинома $p(\beta)$, имеющего степень $L+M-1$:

$$y(\beta) \equiv x(\beta)h(\beta) \pmod{p(\beta)}.$$

Предположим, что полином модуля разлагается на взаимно простые линейные множители над полем коэффициентов F

$$p(\beta) = \prod_{i=1}^{L+M-1} (\beta - a_i) = \prod_{i=1}^d p_i(\beta),$$

где a_i -есть $L+M-1$ различных корней $p(\beta)$ в поле F .

Согласно алгоритму Тоома-Кука линейная свертка может быть вычислена за $L+M-1$ операций умножения. При этом $x[i], h[i]$ - рассматриваются как переменные, через которые выражаются значения $y[i]$. Для этого следует выбрать $L+M-1$ различных чисел (интерполяционных узлов) γ_i и подставить их вместо β в выражение для свертки. Получим произведения $m_i = h(\gamma_i)x(\gamma_i)$ линейных выражений. Затем применим интерполяционную формулу Лагранжа для однозначного определения полинома степени $L+M-2$:

$$y(\beta) = \sum_{k=0}^{L+M-2} m_k \prod_{i \neq k} \frac{(\beta - \gamma_i)}{(\gamma_k - \gamma_i)}. \quad (107)$$

С другой стороны, полиномы $x(\gamma_i=a_i), h(\gamma_i=a_i)$ можно рассматривать как вычеты полиномов $x_i(\beta) x_i(\beta)$ по модулю $(\beta-a_i)$:

$$x_i(\beta) \equiv x(\beta) \pmod{p_i(\beta)}, \quad h_i(\beta) \equiv h(\beta) \pmod{p_i(\beta)}.$$

Полином свертки может быть восстановлен по формуле

$$y(\beta) = \sum_{i=1}^d m_i(\beta) y_i(\beta) \pmod{p_i(\beta)},$$

где $y_i(\beta) = x_i(\beta)h_i(\beta)$, $m_u(\beta) \equiv T_u(\beta) \prod_{i=1, i \neq u}^d p_i(\beta)$, $T_u(\beta) \prod_{i=1, i \neq u}^d p_i(\beta) \equiv 1 \pmod{p_u(\beta)}$. (108)

Так как поле коэффициентов F и интерполяционные узлы могут быть выбраны произвольно, то в качестве a_i - выберем набор из $L+M-1$ последовательных степеней числа W , считая их попарно различными в поле F . В этом случае $a_i = W^i$ и приведение по модулю $(\beta - a_i)$ выражается следующим образом:

$$h(W^i) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]W^{in}, i = 0, \dots, L+M-2.$$

Аналогичное выражение получается и для $x(W^i)$. Таким образом, в результате специального набора a_i алгоритм Тоома-Кука сводится к вычислению циклических сверток с помощью преобразований, имеющих структуру ДПФ.

Если $W = \exp(-j2\pi/(L+M-1))$, то алгоритм Тоома-Кука можно рассматривать как вычисление аperiodической свертки с помощью ДПФ. В этом случае полином $p(\beta)$ имеет вид

$$p(\beta) = \prod_{i=0}^{L+M-1} (\beta - W^i) = \beta^{L+M-1} - 1.$$

Следовательно, если узлы интерполяции выбираются комплексными корнями из единицы, то алгоритм Тоома-Кука эквивалентен вычислению с помощью ДПФ циклической свертки двух входных последовательностей длиной $L+M-1$, получающихся добавлением $(L-1)$ нулей к h и $(M-1)$ нулей к x .

4.2. Алгоритмы свертки квазibesконечной последовательности

На практике при цифровой фильтрации приходится иметь дело с линейной сверткой $y[k]$, ограниченной последовательностью $h[k]$ (импульсной характеристикой цифрового фильтра) с квазibesконечной последовательностью данных $x[n]$. Для эффективного вычисления линейной свертки нужно уметь преобразовывать ее в серию циклических свертки. Это можно сделать двумя методами. Первый называется методом перекрытия с суммированием, второй – перекрытием с накоплением.

Алгоритм перекрытия с суммированием. Алгоритм на первом шаге разбивает входную последовательность $x[n]$ на v смежных блоков $x[u+vN_2]$ длиной N_2 , $m=u+vN_2$, $u=0,1,\dots,N_2-1$ и $v=0,1,2,\dots$ для последовательных блоков. Линейная свертка каждого из этих блоков $x[u+vN_2]$ с последовательностью $h[n]$ длиной N_1 дает выходную последовательность $y_v[l]$ из N_1+N_2-1 членов. В полиномиальных обозначениях вычисление этой свертки равносильно нахождению коэффициентов полинома

$$y_v(\beta) = h(\beta)x_v(\beta),$$

где

$$h(\beta) = \sum_{n=0}^{N_1-1} h[n]\beta^n, \quad x_v(\beta) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x[u+vN_2]\beta^n, \quad y_v(\beta) = \sum_{l=0}^{N_1+N_2-1} y_v[l]\beta^l. \quad (109)$$

Так как $y_v(\beta)$ - полином степени N_1+N_2-2 , то он может быть представлен вычетом по модулю полинома степени $N \geq N_1+N_2-1$ и, в частности, по модулю β^N-1 . В этом случае последовательные линейные свертки $y_v[l]$ вычисляются как N -точечные циклические, в которых входные блоки получаются добавлением $(N-N_1)$ нулей в конце последовательности h и $(N-N_2)$ нулей в конце последовательности $x[u+vN_2]$.

Смежные блоки перекрываются в $(N-N_2)$ позициях. Соответствующие этим перекрытиям выходные отсчеты суммируются и дают в результате истинный

результат. Таким образом, если $N = N_1 + N_2 - 1$, то при цифровой фильтрации вычисляется одна циклическая N -точечная свертка на каждые N_2 выходные отсчета плюс $(N_1 - 1) / (N - N_1 + 1)$ сложений на каждый отсчет.

Алгоритм перекрытия с накоплением. Алгоритм разбивает входную последовательность на v перекрывающихся блоков $x[u + vN_2]$ длиной N при $m = u + vN$, $u = 0, 1, \dots, N - 1$ и $v = 0, 1, 2, \dots$ для последовательных блоков. При этом каждый входной блок имеет длину N , а не N_2 , как для перекрытия с суммированием, и перекрывается с предшествующим блоком в $N - N_2$ отсчетах. Выход цифрового фильтра представляет собой последовательные циклические N -точечные свертки блоков $x[u + vN_2]$ с блоками длиной N , получающиеся в результате добавления $N - N_1$ нулей к h . Следовательно, выход каждой циклической свертки можно записать как

$$y[l_1 + l_2 N_2] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] x[(l_1 - n) \bmod N + v N_2],$$

$$l_1 = 0, 1, \dots, N - 1, \quad l_2 = 0, 1, \dots; \quad l = l_1 + l_2 N_2. \quad (110)$$

Предположим, что $N = N_1 + N_2 - 1$, тогда для $l_1 \geq N_1 - 1$ разность $(l_1 - n) \bmod N$ всегда равна $(l_1 - n)$, так как все отсчеты последовательности h нулевые при $n > N_1 - 1$. Следовательно, последние $(N - N_1 + 1)$ выходные члены каждой циклической свертки являются действительными выходными значениями цифрового фильтра, тогда как первые $(N_1 - 1)$ выходные члены циклической свертки должны игнорироваться, поскольку они соответствуют перекрывающимся интервалам.

Можно показать, что алгоритм перекрытия с накоплением формирует $N - N_1 + 1$ выходных отсчетов цифрового фильтра без добавочного суммирования. Таким образом, этот алгоритм предпочтительнее алгоритма перекрытия с суммированием.

Контрольные вопросы и задачи

1. Написать алгоритм вычисления линейной свертки с помощью ТЧПФ для задачи согласованной фильтрации кода Баркера.
2. Показать на примере вычисления свертки двух последовательностей, состоящих соответственно из 4 и 15 отсчетов, что алгоритм перекрытия с накоплением более эффективен алгоритма перекрытия с суммированием.
3. Синтезировать полиномиальный алгоритм трехточечной циклической свертки.
4. Вычислить линейную свертку последовательностей $\mathbf{x} = [1, 2, -1]^T$ и $\mathbf{h} = [1, -1, 1, 1]^T$.
5. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, вычислить произведение двух полиномов, используя следующие точки интерполяции: 0, 1, -1, 2, -2.
6. Синтезировать алгоритм вычисления корреляционной функции сигнала с помощью циклической свертки, используя понятия теплицевой и ганкелевой матриц.

5. ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Модели *рекурсивных и нерекурсивных* фильтров. Цифровая фильтрация может осуществляться с помощью цифровых фильтров, описываемых во временной области линейными разностными уравнениями вида

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b[i]x[n-i], \quad (111)$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b[i]x[n-i] - \sum_{k=1}^{M-1} a[k]y[n-k], \quad (112)$$

где $x[i]$ – отсчеты воздействия, $y[n]$ – отсчеты реакции; $\{b[i], a[i]\}$ – коэффициенты, определяющие свойства фильтра; M, N – константы, задающие сложность фильтра; $x[n-i], y[n-k]$ – отсчеты воздействия и реакции, задержанные на i и k периодов дискретизации T_∂ . Фильтр, описываемый выражением (111), называют *нерекурсивным*, или *КИХ-фильтром* (фильтр с конечной импульсной характеристикой). Фильтр, описываемый выражением (112), называется *рекурсивным*, или *БИХ-фильтром* (фильтр с бесконечной импульсной характеристикой). Передаточные функции КИХ- и БИХ-фильтров определяются с помощью Z-преобразования и имеют вид соответственно

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b[i]z^{-i}, \quad H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b[i]z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a[k]z^{-k}},$$

откуда после подстановки $z = e^{j\omega T_\partial} = e^{j\omega}$ получают комплексные частотные характеристики:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{i=0}^{N-1} b[i]e^{-j\omega i} \quad \text{и} \quad H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b[i]e^{-j\omega i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a[k]e^{-j\omega k}}. \quad (113)$$

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики задаются соответственно выражениями

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega})|, \quad \varphi(\omega) = \arg|H(e^{j\omega})|. \quad (114)$$

Заметим, что любой линейный фильтр можно выполнить с помощью оператора линейной свертки.

5.1. Нерекурсивное винеровское оценивание

На рис. 12 приведена структурная схема нерекурсивного фильтра Винера

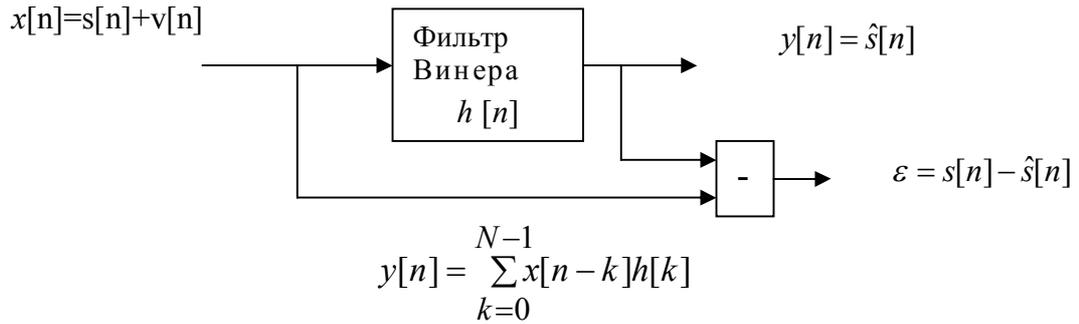


Рис. 12

На вход фильтра поступает аддитивная смесь полезного сигнала $s[n]$ и шума $v[n]$. Фильтр имеет нерекурсивную структуру с импульсной характеристикой $\vec{h} = [h[0], h[1], \dots, h[N-1]]^T$. Задача заключается в создании такого фильтра, чтобы математическое ожидание среднеквадратичного отклонения ε было минимальным.

Определим n -ю реализацию входного сигнала в виде вектора $\vec{x}_n = [x[n], x[n-1], \dots, x[n-(N-1)]]^T$ и значение ошибки как $\varepsilon[n] = (s[n] - \hat{s}[n])$.

Критерий оптимальности имеет вид

$$J = M\{\varepsilon^2[n]\} \rightarrow \min,$$

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания.

Математическое ожидание квадрата ошибки можно записать в виде

$$M\{\varepsilon^2[n]\} = M\{(s[n] - \vec{h}^T \vec{x}_n)\} = M\{s^2[n]\} + \vec{h}^T M\{\vec{x}_n \vec{x}_n^T\} \vec{h} - 2M\{s[n] \vec{x}_n^T\} \vec{h}.$$

Обозначим корреляционную матрицу $M\{\vec{x}_n \vec{x}_n^T\}$ как $R = M\{\vec{x}_n \vec{x}_n^T\}$, а вектор-строку взаимно корреляционных значений $M\{s[n] \vec{x}_n^T\}$ как $P = M\{s[n] \vec{x}_n^T\}$. Тогда выражение для математического ожидания квадрата ошибки примет вид

$$M\{\varepsilon^2[n]\} = M\{s^2[n]\} + \vec{h}^T R \vec{h} - 2P^T \vec{h} = \xi.$$

Определим градиент $\nabla = \frac{\partial \xi}{\partial \vec{h}} = 2R\vec{h} - 2P$. Решение уравнения $\nabla = 0$ даст значения весовых коэффициентов импульсной характеристики фильтра:

$$\vec{h}_{opt} = R^{-1}P. \quad (115)$$

Полученное выражение называется уравнением Винера-Хопфа. Подставив полученное выражение в формулу для среднего квадрата ошибки, получим его минимальное значение:

$$\xi_{min} = M\{s^2[n]\} - P^T R^{-1}P = M\{s^2[n]\} - P^T \vec{h}_{opt}. \quad (116)$$

Пример. Предположим, что требуется синтезировать фильтр Винера для обработки входного сигнала $x[n] = \sin(2\pi n/L)$. Полезный сигнал имеет вид

$s[n] = 2 \cos(2\pi n/L)$. Импульсная характеристика фильтра имеет два весовых коэффициента $N=2$.

Корреляционная матрица входного сигнала имеет вид

$$R = M \begin{bmatrix} x^2[n] & x[n]x[n-1] \\ x[n-1]x[n] & x^2[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \cos \frac{2\pi}{L} \\ 0,5 \cos \frac{2\pi}{L} & 0,5 \end{bmatrix},$$

вектор взаимно корреляционных значений равен

$$P = M[s[n]x[n], s[n]x[n-1]]^T = \begin{bmatrix} 0, -\sin \frac{2\pi}{L} \end{bmatrix}^T.$$

Обратная корреляционная матрица равна

$$R^{-1} = \frac{1}{0,25(1 - \cos^2 \frac{2\pi}{L})} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \cos \frac{2\pi}{L} \\ 0,5 \cos \frac{2\pi}{L} & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Весовые коэффициенты оптимального фильтра Винера равны

$$\vec{h}_{opt} = \begin{bmatrix} 2 \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{L} \\ -2 \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{L} \end{bmatrix},$$

минимальное значение среднеквадратичной ошибки определится из выражения

$$\xi_{min} = 2 - \begin{bmatrix} 0, -\sin \frac{2\pi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{L} \\ -2 \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{L} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что фильтр Винера обладает важным свойством декорреляции сигнала ошибки и отсчетов входного сигнала $M\{\varepsilon^2[n] \bar{x}_n\} |_{\vec{h}=\vec{h}_{opt}} = 0$.

5.2. Обобщенная винеровская фильтрация

Обобщенная модель винеровской фильтрации предполагает матричную обработку сигналов (рис. 13)

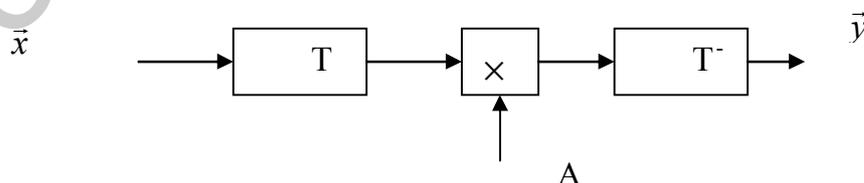


Рис. 13

Винеровский фильтр A представлен в виде матрицы размером $(N \times N)$. Ортогональное преобразование T и обратное ему преобразование T^{-1} также записываются в виде $(N \times N)$ матрицы. Основная задача состоит в создании такого фильтра A , чтобы математическое ожидание квадрата ошибки было бы минимальным. В частном случае, когда T является единичной матрицей,

рассматриваемая модель соответствует фильтру, первоначально предложенному Винером. В этом смысле рассматриваемая структура является более общей.

Предположим, что сигнал и шум имеют нулевые математические ожидания. Откуда следует, что ковариационные матрицы полезного сигнала и шума соответственно равны

$$\Sigma_s = M\{\bar{s}\bar{s}^T\} \text{ и } \Sigma_v = M\{\bar{v}\bar{v}^T\}.$$

Применяя изложенную выше методику оптимизации в матричной интерпретации, можно получить следующие выражения для матрицы фильтра:

1) через ковариационные матрицы, относящиеся к области исходных данных

$$A_0 = T\Sigma_s T^T \left[T(\Sigma_s + \Sigma_v) T^T \right]^{-1} = T A_r T^T,$$

где $A_r = \Sigma_s [\Sigma_s + \Sigma_v]^{-1}$ - матрица отклика.

2) через ковариационные матрицы, относящиеся к области изображений

$$A_0 = \tilde{\Sigma}_s [\tilde{\Sigma}_s + \tilde{\Sigma}_v]^{-1},$$

где $\tilde{\Sigma}_s = T\Sigma_s T^T$, $\tilde{\Sigma}_v = T\Sigma_v T^T$.

Определим условия, которые позволят получить матрицу A в диагональном виде и построить диагональный фильтр. Основным предположением, лежащим в основе определения этих условий, является то, что собственные значения действительной симметричной матрицы A_r являются различными действительными числами.

Теорема. Если λ_i и φ_i , $i=1,2,\dots,N$ соответственно собственные значения и собственные векторы действительной симметричной матрицы G , то

$$\Phi G \Phi^T = \Lambda, \quad (117)$$

где $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ такая $(N \times N)$ матрица собственных векторов, при которой $\Phi\Phi = I$ и $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ - матрица собственных значений.

Из теоремы следует, что если в качестве T выбрать матрицу собственных векторов матрицы отклика A_r , то $A_{0d} = T A_r T^T$ представляет собой требуемый оптимальный диагональный фильтр.

Ортогональное преобразование, базисные векторы которого являются собственными векторами заданных ковариационных матриц, называется дискретным преобразованием Карунена-Лоэва (ПКЛ).

Пример. Пусть ковариационные матрицы имеют следующий вид:

$$\Sigma_s = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \rho < 1, \quad \Sigma_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица отклика равна

$$A_r = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{(2 - \rho^2)}{(4 - \rho^2)}, \quad \beta = \frac{\rho}{(4 - \rho^2)}.$$

Для нахождения собственных значений составим матричное уравнение $|A_r - \lambda I| = 0$, которое приводит к характеристическому многочлену

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим $\lambda_1 = \alpha + \beta$, $\lambda_2 = \alpha - \beta$. Выполнив вычисления, можно получить, что нормированные собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям, имеют вид

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица искомого ортогонального преобразования имеет вид

$$T = [\varphi_1, \varphi_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица оптимального винеровского фильтра в этом случае имеет вид

$$A_{od} = T A_r T^T = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha - \beta \end{bmatrix}.$$

Фильтры с диагональными элементами иногда называются скалярными; векторные фильтры относятся к более общему классу, который определяется матрицами, содержащими внедиагональные элементы.

К сожалению, дискретное ПКЛ нельзя вычислить с помощью быстрых преобразований. В этой связи представляют интерес так называемые субоптимальные диагональные фильтры, которые допускают применение быстрых преобразований. Сравнительный анализ известных преобразований показывает, что при оценивании марковских процессов на фоне белого шума среднеквадратичная ошибка дискретного косинусного преобразования (ДКП) очень близка к ошибке при ПКЛ. Качество работы фильтра с ДПФ асимптотически стремится к соответствующему качеству работы ПКЛ. Этот результат является частным случаем теоремы Теплица, которая утверждает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[T_{ДПФ} \Sigma T_{ДПФ}^{-1} \right] = \Lambda, \quad (118)$$

где Σ - ковариационная матрица стационарного в широком смысле случайного процесса и Λ - матрица собственных значений Σ .

Дискретное косинусное преобразование ДКП последовательности входных значений $x[n]$, $n=0, 1, \dots, N-1$ запишется как

$$L_x(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]; \quad L_x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{(2n+1)k}{2N}, \quad k=1, 2, \dots, N-1. \quad (119)$$

Множество базисных векторов ДКП образует класс дискретных многочленов Чебышева. Обратное ДКП записывается в виде

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} L_x(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} L_x(k) \cos \frac{(2n+1)k}{2N}, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1.$$

N -точечное ДКП может быть вычислено с помощью $2N$ -точечного ДПФ следующим образом:

$$L_x(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n], \quad L_x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ e^{-jk \frac{\pi}{2N} 2N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x'[n] W_{2N}^{kn} \right\}, \quad k=1, 2, \dots, N-1,$$

где $x'[n]$ - последовательность, полученная из исходной $x[n]$ путем дополнения последней до удвоенной длины нулями $x'[n] = 0, n = N, \dots, 2N-1$.

6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Спектральный анализ заключается в разложении сигнала на его частотные или спектральные составляющие и оценке или измерении их характеристик – амплитуды, фазы, мощности, спектральной плотности мощности и др.

Основными методами спектрального анализа являются фильтровые (методы полосового анализа), бесфильтровые (основанные на ДПФ), параметрические (на основе параметрических моделей случайных процессов), текущего, скользящего и скачущего анализа.

К параметрам анализаторов спектра относятся: число каналов анализа; время наблюдения или анализа (ширина окна) и соответствующее ему число отсчетов или длина обрабатываемой реализации; полоса анализа, не превышающая для дискретных сигналов основной полосы спектра; разрешение по частоте, обратное, пропорциональное времени анализа и соответствующее разности частот двух соседних разрешаемых (разделяемых) частотных составляющих сигнала.

6.1. Спектральный анализ стационарных гармонических сигналов

Предполагается, что спектр аналогового сигнала $x(t)$ сосредоточен в ограниченной полосе частот и, следовательно, его параметры могут быть оценены с помощью спектральных характеристик дискретного эквивалента $x[n]$, который формируется после предварительной аналоговой фильтрации на выходе АЦП. Эффекты наложения и шумы цифрового преобразования не учитываются. Параметры гармонического сигнала, такие как, амплитуда, фаза и частота не изменяются во времени.

Для таких сигналов спектральный анализ может быть выполнен с помощью дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

На практике для анализа используется последовательность $g[n] = x[n]w[n]$, которая определяется как произведение дискретного сигнала $x[n]$ на весовую функцию $w[n]$ на конечном интервале N . В качестве оценки спектра $X(e^{j\omega})$ берется спектр взвешенной последовательности $G(e^{j\omega})$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$, который вычисляется с помощью R -точечного ДПФ (БПФ), ($R \geq N$) (рис. 14).

Переход к дискретным частотам осуществляется в точках

$$G(k) = G(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/R}, \quad 0 \leq k \leq R-1.$$

Дискретные частоты ω_k связаны с номером отсчета ДПФ соотношением

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{R}. \quad (100)$$

При этом номер k коэффициента ДПФ связан с частотой сигнала f_c и частотой дискретизации f_∂ соотношением

$$k = \frac{f_c}{f_\partial} R. \quad (101)$$

Выход канала ДПФ $G(k)$ совпадает с выходом нерекурсивного фильтра с импульсной характеристикой, отвечающей условию

$$h[R-1-m] = w[m]e^{-j\omega_k m T_\partial} \quad \text{или} \quad h[m] = w[R-1-m]e^{-j\omega_k (R-1-m)T_\partial}.$$

Такой фильтр имеет частотную характеристику

$$H(j\omega) = e^{-j\omega(N-1)T_\partial} W^*[j(\omega - \omega_k)],$$

являющуюся комплексно-сопряженной частотной характеристикой весовой функции $W^*(j\omega)$, смещенной вправо (или влево) к частоте ω_k .

Для анализатора с прямоугольной весовой функцией

$$H(j\omega_k, \omega) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin[(\omega - \omega_k)NT_\partial/2]}{\sin[(\omega - \omega_k)T_\partial/2]}.$$

Частотная характеристика имеет главный лепесток шириной $\Delta = \frac{4\pi}{2M+1}$ с относительным уровнем максимального бокового лепестка $\delta_{\text{бл}} = -13,6$ дБ.

Однозначное разрешение комплексного гармонического сигнала имеет место только на частотах, совпадающих с частотами анализа ДПФ, когда в интервале анализа укладывается целое число периодов сигнала. В этом случае сигнал присутствует только на выходе одного канала (или иначе) проецируется на один бин ДПФ.

На сигналы с частотой, не равной ω_k , откликаются два соседних канала на уровне главных лепестков их частотных характеристик, а на уровне боковых лепестков откликаются все каналы ДПФ. Это явление называют размыванием спектра или *эффектом просачивания*.

Пример. Предположим, что анализируется сигнал $x[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$, $-\infty < n < \infty$. Представим его в виде

$$x[n] = \frac{1}{2} \left(e^{j(\omega_0 n + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 n + \varphi)} \right).$$

Дискретное во времени преобразование Фурье дает

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi l) + \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi l).$$

Пусть частота сигнала $f_c = 10$ Гц, размер ДПФ $R = 32$, частота дискретизации $f_\partial = 64$ Гц. Тогда $k = 10 \cdot 32 / 64 = 5$. Спектр ДПФ будет содержать два отличных от нуля коэффициента $X(5)$ и $X(32-5=27)$.

Если частота сигнала $f_c = 11$ Гц, при таких же условиях получаем

$$\frac{f_c}{f_\partial} R = \frac{11 \cdot 32}{64} = 5,5.$$

Отсчет дискретного во времени преобразования Фурье для частоты $f_c = 11$ Гц будет располагаться между коэффициентами спектра ДПФ с номерами $k=5$ и $k=6$. Происходит размытие спектра сигнала на выходе спектроанализатора. При введении прямоугольного окна $g[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi)$, $0 \leq n \leq N - 1$ и

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) H(e^{j(\omega-\varphi)}) d\varphi.$$

ДВПФ $G(e^{j\omega})$ определяется в виде частотного сдвига на $2\pi \left(\frac{f_c}{f_\partial} \right) = 2\pi \left(\frac{11}{64} \right) = 0,344\pi$ частотной характеристики весового окна $H(e^{j\omega})$ с учетом масштабирующего множителя 0,5. В частотном диапазоне $0 \leq \omega \leq 2\pi$ это проявляется в виде двух пиков на частотах $0,344\pi$ и $2\pi(1-11/64)=1,656\pi$

Влияние весовой функции. Высокий уровень боковых лепестков и обусловленное им сильное влияние каналов анализатора спектра является основным недостатком прямоугольной весовой функции. Эти недостатки преодолеваются с помощью специальных весовых функций, имеющих меньший уровень боковых лепестков. Наиболее известны весовые функции:

- Хэмминга $w[n] = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N}$, $\delta_{\text{бл}} = -43$ дБ, $\Delta = 8\pi/N$;
- Блэкмана $w[n] = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N}$, $\delta_{\text{бл}} = -58$ дБ и др.

Однако при этом возрастает ширина главного лепестка, что приводит к ухудшению разрешающей способности. Улучшение разрешения анализатора спектра с весовыми функциями обеспечивается путем увеличения числа точек ДПФ, т. е. увеличением времени анализа сигнала.

6.2. Статистические методы спектрального анализа

Для стационарного в широком смысле случайного процесса $x[n]$ среднее не зависит от времени, а корреляция зависит только от разности индексов.

Математическое ожидание от случайной величины $x[n]$ (или среднее) есть

$$E\{x[n]\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n] \right\}.$$

Автокорреляционная функция определяется как

$$r_{xx}[m] = E\{x[n+m]x^*[n]\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n+m]x^*[n] \right\}. \quad (120)$$

На практике имеется последовательность ограниченной длины $x[n]$, $n=0, \dots, N-1$, поэтому вычисление по (120) невозможно и в качестве оценки корреляционной функции принимается величина

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n]. \quad (121)$$

Это оценка называется несмещенной оценкой корреляционной функции, так как ее математическое ожидание будет равно истинной автокорреляционной оценке:

$$\begin{aligned} E\{\hat{r}_{xx}[m]\} &= E\left\{ \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n] \right\} = \\ &= \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} E\{x[n+m]x^*[n]\} = r_{xx}[m] \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} 1 = r_{xx}[m]. \end{aligned}$$

Кроме (121), на практике часто используют смещенную оценку корреляционной функции:

$$\tilde{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n]. \quad (122)$$

Эта оценка называется смещенной оценкой корреляционной функции, так как ее математическое ожидание будет равно отнормированной истинной автокорреляционной оценке:

$$\begin{aligned} E\{\tilde{r}_{xx}[m]\} &= E\left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n] \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} E\{x[n+m]x^*[n]\} = r_{xx}[m] \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} 1 = \frac{N-m}{N} r_{xx}[m]. \end{aligned}$$

Учитывая (121) и (122), можно показать, что смещенная и несмещенная автокорреляционные функции связаны соотношением

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{N}{N-m} \tilde{r}_{xx}[m]. \quad (123)$$

Как смещенная, так и несмещенная оценка удовлетворяет соотношению

$$r_{xx}[m] = r_{xx}^*[-m] \quad (124)$$

и сохраняет полную мощность сигнала

$$\tilde{r}_{xx}[0] = \hat{r}_{xx}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2.$$

Для взаимно корреляционной функции соотношения (120), (121) и (122) выглядят следующим образом:

$$r_{xy}[m] = E\{x[n+m]y^*[n]\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n+m]y^*[n] \right\}, \quad (125)$$

$$\hat{r}_{xy}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]y^*[n], \quad (126)$$

$$\check{r}_{xy}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]y^*[n]. \quad (127)$$

В общем случае для взаимной корреляции соотношение (124) не выполняется $r_{xy}[m] \neq r_{xy}^*[-m]$, но выполняется соотношение вида $r_{xy}[m] = r_{yx}^*[-m]$

Коррелограммный метод оценки. По теореме Винера-Хинчина корреляционная функция и спектральная плотность мощности (СПМ) связаны преобразованием Фурье:

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \exp(-j2\pi f m T), \quad (128)$$

где T - интервал дискретизации сигнала. На практике для вычисления СПМ используют ограниченную сумму, в которой вместо истинной оценки корреляционной функции выбирают оценку из соотношений (121) или (122). Пусть мы получили несмещенную оценку корреляционной функции из соотношения (121) для максимально возможного корреляционного сдвига L , тогда для вычисления СПМ формулу (128) перепишем в виде

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi f m T). \quad (129)$$

На практике L берут много меньше длины последовательности. $L \ll N$. ($L \cong N/10$), где N - длина последовательности. Используя смещенную оценку корреляции, можно получить смещенную СПМ:

$$\check{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \check{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi f m T). \quad (130)$$

Корреляцию при положительных индексах можно получить, используя соотношения (121) и (122), отрицательные индексы должны удовлетворять соотношению (124).

Коррелограммный метод оценки СПМ можно дополнить, умножив корреляционную функцию на функцию окна:

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \hat{r}_{xx}[m] w[m] \exp(-j2\pi f m T),$$

где $w[n]$ - функция весового окна. Выбор весового окна должен определяться из следующих соображений:

$$E\{\hat{P}_{xx}(f)\} = T \sum_{m=-L}^L \hat{r}_{xx}[m]w[m]\exp(-j2\pi fmT) = P_{xx}(f) * \Omega(f), \quad (131)$$

где $\Omega(f)$ - Фурье-преобразование функции окна. Из (131) следует, что желательно выбирать такие окна, у которых $\Omega(f) > 0$ во всей области частот.

Алгоритм коррелограммной оценки.

1. Выбрать последовательность $x[n]$, $n = 0, \dots, N-1$.
2. Вычислить корреляционную функцию по соотношениям (121) или (122) для максимального корреляционного сдвига L ($L \ll N$).

3. Выбрать число отсчетов в частотной области. Пусть M - число отсчетов в области частот от $[-F_d/2; F_d/2]$, где F_d - частота дискретизации. Должно выполняться условие $2L < M$. Определить функцию корреляции из условия

$$\tilde{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \hat{r}_{xx}[m], & m = 0, \dots, L \\ \hat{r}_{xx}[M - m], & m = M - L, \dots, M - 1 \\ 0, & m = L + 1, \dots, M - L - 1 \end{cases}$$

4. Умножить $\tilde{r}_{xx}[m]$ на функцию окна.
5. Вычислить Фурье преобразование и разделить на мощность окна.

$$\tilde{P}_{xx}(k) = \frac{T}{U} \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{r}_{xx}[m]w[m]\exp(-j2\pi km/M),$$

где $U = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |w[m]|^2$.

Взаимная спектральная плотность мощности определяется соотношением

$$P_{xy}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}[m]\exp(-j2\pi fmT)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны СПМ, за исключением использования вместо автокорреляции взаимной корреляции.

Периодограммная оценка СПМ. Определение СПМ основывается еще на эргодичности процесса, когда усреднение по ансамблю заменяется усреднением по времени.

$$P_{xx}(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{(2N+1)T} \left| T \sum_{n=-N}^N x[n]\exp(-j2\pi fnT) \right|^2 \right\} \quad (132)$$

Если не учитывать операцию математического ожидания, то можно прийти к соотношению вида

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^N x[n] \exp(-j2\pi f n T) \right|^2.$$

Данная оценка получается несостоятельной и на практике редко применяется. Для получения состоятельной СПМ необходимо заменить математическое ожидание усреднением по времени.

Алгоритм СПМ имеет следующий вид.

1. Исходная реализация $x(n)$, содержащая N отсчетов, разбивается на P перекрывающихся участков $x^{(i)}(m) = x(m + (i-1)M_C)$, где $m = 0, \dots, M-1$, $i = 1, \dots, P$; $P = \text{ent}\{(N-M)/[(1-C)M]\} + 1$; $M_C = M - \text{ent}\{M \cdot C\}$. Здесь $C < 1$ -параметр (процент) перекрытия. Использование перекрытия особенно целесообразно в тех случаях, когда применяются временные окна с низким уровнем боковых лепестков.

2. На следующем шаге выполняется центрирование сигнала на каждом участке: $\hat{x}^{(i)}(m) = x^{(i)}(m) - M_x(i)$, где $M_x(i) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x^{(i)}(m)$ - среднее значение сигнала на i -м участке реализации.

3. Осуществляется взвешивание сигнала функцией окна и рассчитывается энергия окна

$$s^{(i)}(m) = w(m)\hat{x}^{(i)}(m), \quad m = 0, \dots, M-1; \quad U = \sum_{m=0}^{M-1} |w(m)|^2,$$

где $w(m)$ - весовая функция окна; U - энергия окна.

4. Для каждого участка реализации с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье вычисляется периодограмма и оценка СПМ формируется путем усреднения значений периодограммы

$$\hat{G}_{xx}(k) = \frac{T}{PU} \sum_{i=1}^P \left| \sum_{m=0}^{M-1} s^{(i)}(m) \exp(-j2\pi km/M) \right|^2.$$

5. Оценка взаимного спектра периодограммным методом выглядит следующим образом:

$$\hat{G}_{xy}(k) = \frac{T}{PU} \sum_{i=1}^P X^{(i)}(k) [Y^{(i)}(k)]^*,$$

где $X^{(i)}(k)$ и $Y^{(i)}(k)$ - представляют собой преобразование Фурье на i -м участке реализации от взвешенных с окном последовательностей с нулевым средним.

6.3. Методы анализа, основанные на моделях исследуемых процессов

При моделировании обычными методами предполагается, что корреляция равна нулю за пределами интервала наблюдения. Однако такое предположение неестественно и ограничивает разрешающую способность величиной, приблизительно обратно пропорциональной объему выборки данных. Кроме того, резкий переход к нулю вызывает появление больших боковых лепестков в оценке спектра (явление Гиббса). Правильный выбор функции окна может улучшить статистическую стабильность оценки и снизить уровень боковых лепестков, но ценой дальнейшего ухудшения разрешающей способности.

В рассматриваемых методах корреляционная функция продолжается за пределы интервала наблюдения с помощью некоторых рекуррентных соотношений, определяемых параметрами модели. В общем случае в линейной системе с рациональной передаточной функцией связь между входной v и выходной y величинами описывается линейным разностным уравнением

$$y[k] = \sum_{i=1}^p a_i y[k-i] + \sum_{i=1}^q b_i v[k-i] + v[k].$$

Эта модель известна как модель авторегрессии скользящего среднего (АРСС). Передаточная функция такой системы имеет вид

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad B(z) = 1 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-i}; \quad A(z) = 1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}.$$

В том случае, когда входной величиной $\{v[k]\}$ является белый шум с дисперсией σ^2 спектр мощности y представляет собой $P(\omega) = S(z)|_{z=e^{j\omega}}$, где $S(z) = \sigma^2 H(z)H(z^{-1})$. Функция $S(z)$ является также двухсторонним Z -преобразованием корреляционной функции $y[n]$ в интервале от $-\infty$ до ∞ :

$$S(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)z^{-k}.$$

Если $h[n]$ - импульсная характеристика системы, то $H(z^{-1})$ является Z -преобразованием инвертированной во времени последовательности $h[-n]$. Следовательно, если входное воздействие системы $H(z)$ описывается последовательностью $\sigma^2 h[-n]$, выходная последовательность будет представлять собой корреляционную функцию $r(m)$. Это означает, что

$$r(m) = \sum_{i=1}^p a_i r(m-i) + \sigma^2 \sum_{i=0}^q b_i h[-m+i].$$

Однако, поскольку импульсная характеристика $h[n]$ представляет собой каузальную последовательность, то $h[-m+i]=0$ для всех $m>i$. Выражение для корреляционной функции упрощается и принимает вид $r(m) = \sum_{i=1}^p a_i r(m-i)$.

Таким образом, при линейной модели с рациональной передаточной функцией задание p последовательных значений корреляционной функции позволяет однозначно продолжить ее до бесконечности с помощью рекуррентного соотношения.

В том случае, если $B(z)=1$, то выходная функция формируется как линейная регрессия своих прошлых значений, и поэтому такая модель известна как модель авторегрессии. При $k=0$ рекуррентное соотношение для корреляционной функции имеет вид $r(0) = \sum_{i=1}^p a_i r(-i) + \sigma^2$. Задавая $M \geq p$ значений корреляционной функции,

можно оценить параметры модели авторегрессии из приведенных рекуррентных уравнений для первых p значений из k . В матричной форме они имеют вид

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(p) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \dots & r(p-1) \\ r(2) & r(1) & r(0) & \dots & r(p-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(p) & r(p-1) & r(p-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, параметрическая оценка с использованием модели авторегрессии включает решение линейной системы с симметричной положительно определенной матрицей, которое может быть выполнено очень эффективно с помощью алгоритма Левинсона.

Метод максимума энтропии. Основан на предположении, что корреляционная функция экстраполирована так, что энтропия данных, характеризуемая этой функцией, максимальна. Энтропия определяется как

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\{P(\omega)\} d\omega,$$

где $P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n] e^{-j\omega n}$.

Для того, чтобы найти максимум H , возьмем производную от H по $\{r(i)\}$. Это приведет к уравнению

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-j\omega m}}{P(\omega)} d\omega = 0, \quad |m|=N+1, N+2, \dots,$$

которое означает, что $P^{-1}(\omega)$ определяется рядом Фурье с конечным числом членов, т.е.

$$P^{-1}(\omega) = \sum_{m=-p}^p T(m)e^{-j\omega m}.$$

Учитывая неотрицательность $P^{-1}(\omega)$, в соответствии с теоремой факторизации спектра получаем

$$\sum_{m=-p}^p T(m)e^{-j\omega m} = \frac{1}{K} \sum_{m=0}^p a(m)e^{j\omega m} \sum_{m=0}^p a(m)e^{-j\omega m},$$

при некотором коэффициенте K и множестве значений $\{a(m)\}, a(0)=1$. Иными словами

$$P(\omega) = \frac{K}{a(z)a(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}}.$$

Практическое вычисление коэффициентов включает решение уравнения для авторегрессии.

Метод Писаренко. Предложен для решения задачи выделения синусоидальных сигналов в белом шуме. Предположим, что имеется p комплексных экспоненциальных составляющих с амплитудами $\{q_i, i=1, 2, \dots, p\}$ и частотами $\{\omega_i, i=1, 2, \dots, p\}$ в смеси с некоррелированным белым шумом. Тогда теплицева матрица, образованная точными значениями корреляционной функции, в идеальном случае должна иметь следующий вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_n = \mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}^{*T} + \sigma^2 \mathbf{I},$$

где \mathbf{R}_x – ковариационная матрица сигнала, \mathbf{R}_n – ковариационная матрица шума, знак $*T$ означает транспонирование с переходом к комплексно-сопряженным величинам:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\omega_1} & e^{-j\omega_2} & \dots & e^{-j\omega_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-j\omega_p} & e^{-j\omega_{2p}} & \dots & e^{-j\omega_{pp}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \text{diag}(q_i^2, i=1, 2, \dots, p).$$

Заметим, что для данной модели матрица $\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{F}^{*T}$ имеет ранг p , и поэтому значение σ^2 должно быть собственным значением матрицы \mathbf{R} . Корни, связанные с собственным вектором, соответствующим σ^2 , будут равны $\{e^{j\omega_i}, i=1, \dots, p\}, \omega_i \neq \omega_j$.

Алгоритм метода Писаренко.

- 1) вычислить наименьшее собственное значение матрицы \mathbf{R} ;
- 2) вычислить соответствующий собственный вектор \mathbf{a} ;
- 3) определить местоположение спектральных линий, решая уравнение $a(z)=0$;
- 4) определить мощность каждой синусоидальной составляющей решая матричное уравнение

$$\tilde{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} q_1^2 \\ \dots \\ q_p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) - \lambda_{\min} \\ r(1) \\ \dots \\ r(p-1) \end{bmatrix},$$

где $\tilde{\mathbf{F}}$ получается из матрицы \mathbf{F} исключением последней строки.

Если число синусоидальных сигналов заранее неизвестно, то исследование можно начинать с теплоцевой матрицы размером $N \times N$ и нахождения распределения ее собственных значений. В идеальном случае наименьшее собственное значение будет иметь кратность $(N-p)$, а p можно оценить из распределения собственных значений. Если в окрестности наименьшего собственного значения имеется множество собственных значений, а не одно кратное наименьшее значение, то применение метода Писаренко невозможно. Тогда необходимо обращаться к таким методам, как MUSIC или методу теплоцевой аппроксимации на основе сингулярного разложения. Суть последнего метода состоит в том, что для нахождения характеристик прогнозирующего фильтра определяются собственные векторы матрицы \mathbf{R} , соответствующие наибольшим собственным значениям, а не наименьшему, и затем вычисляются частоты синусоидальных составляющих.

Метод теплоцевой аппроксимации. При использовании метода первый шаг состоит в получении оценки ковариационной матрицы \mathbf{R} , которая в общем случае имеет полный ранг. Это достигается сингулярным разложением следующего вида

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^2\mathbf{V} = [\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{\Sigma}_1$ - $(p \times p)$ – матрица; $\mathbf{\Sigma}_2$ - $(N-p) \times (N-p)$ – матрица.

В присутствии белого шума сингулярные значения изменяются, несмотря на то, что сингулярные вектора остаются неизменными. Фактически все сингулярные значения увеличиваются на величину, равную дисперсии шума, и поэтому самое малое сингулярное значение можно вычесть, чтобы скомпенсировать этот эффект, т.е.

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_1^2 = \mathbf{\Sigma}_1^2 - \sigma_N^2 \mathbf{I},$$

где σ_N^2 - самое малое сингулярное значение матрицы \mathbf{R} .

Далее определяют так называемую матрицу наблюдаемости $\theta = \mathbf{U}_1 \hat{\mathbf{\Sigma}}_1$, при этом $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{\Sigma}}_1 \mathbf{V}_1$. Второй шаг включает определение параметров модели сигнала. Используя метод наименьших квадратов, получают матрицу $F = \theta^t \theta^\uparrow$, где знак t - означает псевдообращение матрицы, а знак \uparrow - означает, что матрица получена смещением исходной матрицы на одну строку вверх.

Собственные значения матрица F определяют частоты синусоидальных сигналов.

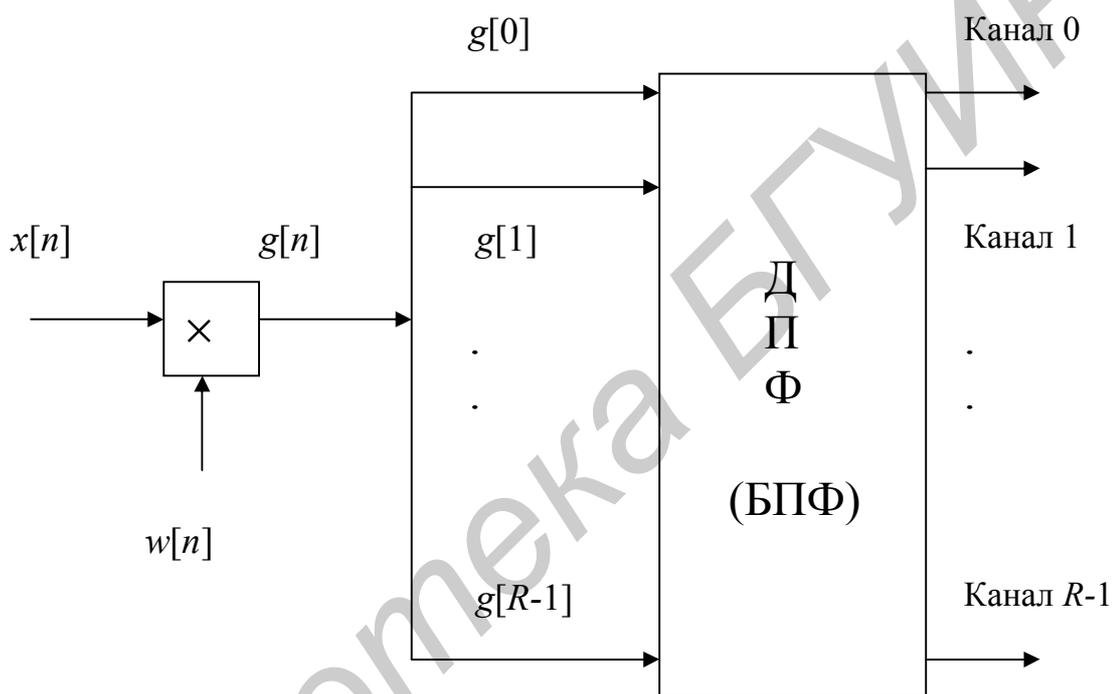


Рис. 14

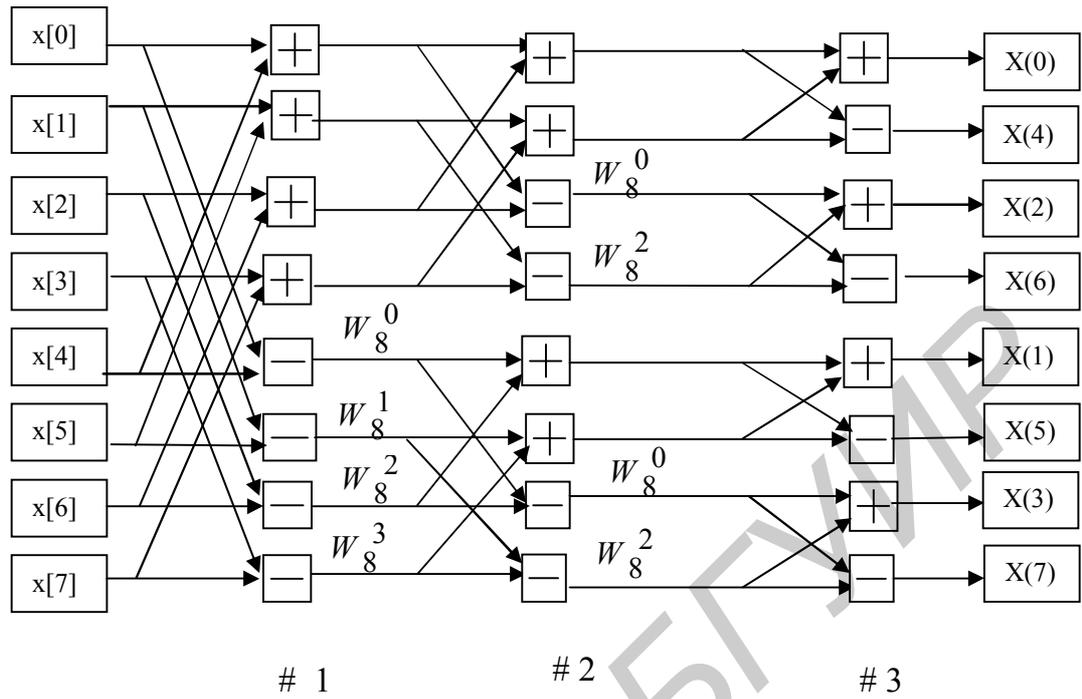


Рис. 8

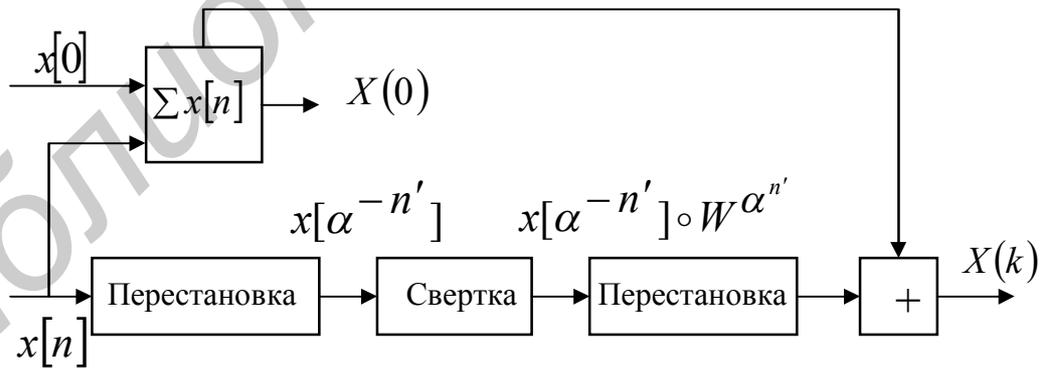


Рис. 9

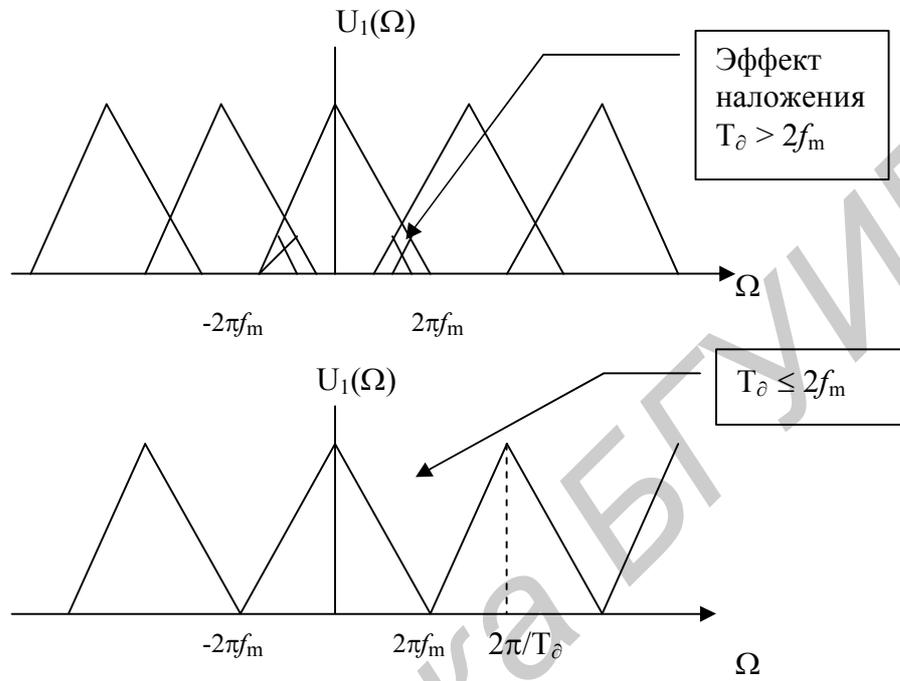


Рис. 1

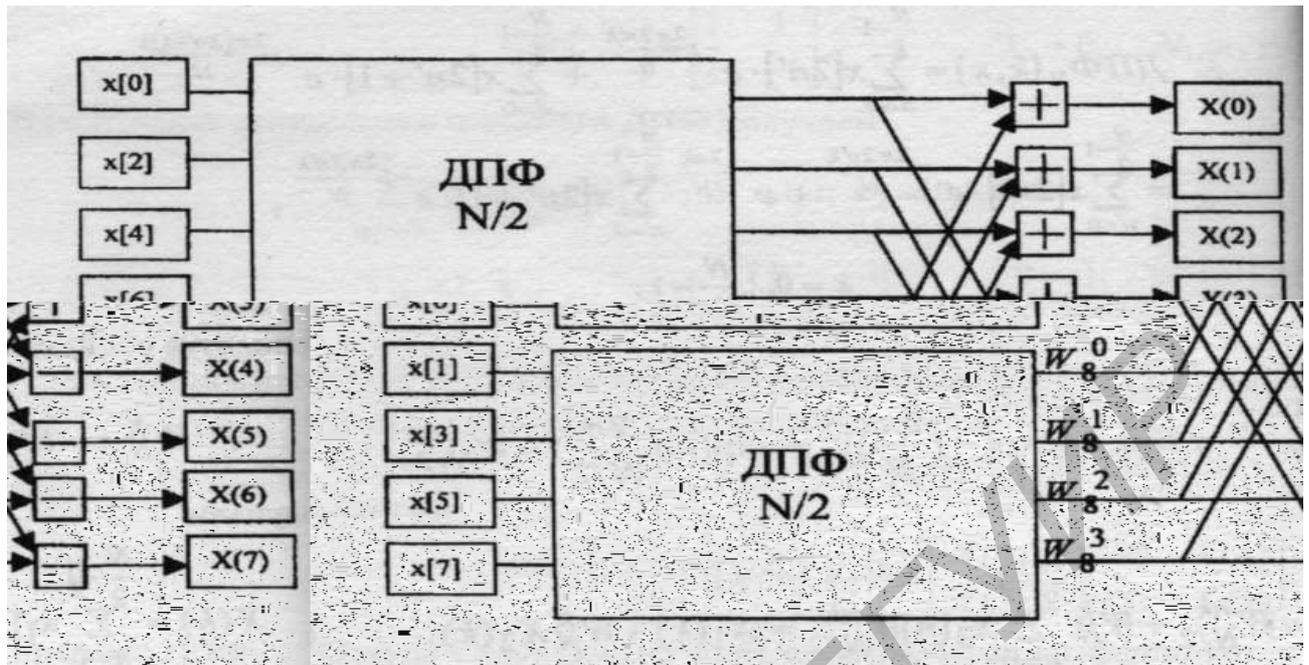


Рис. 6

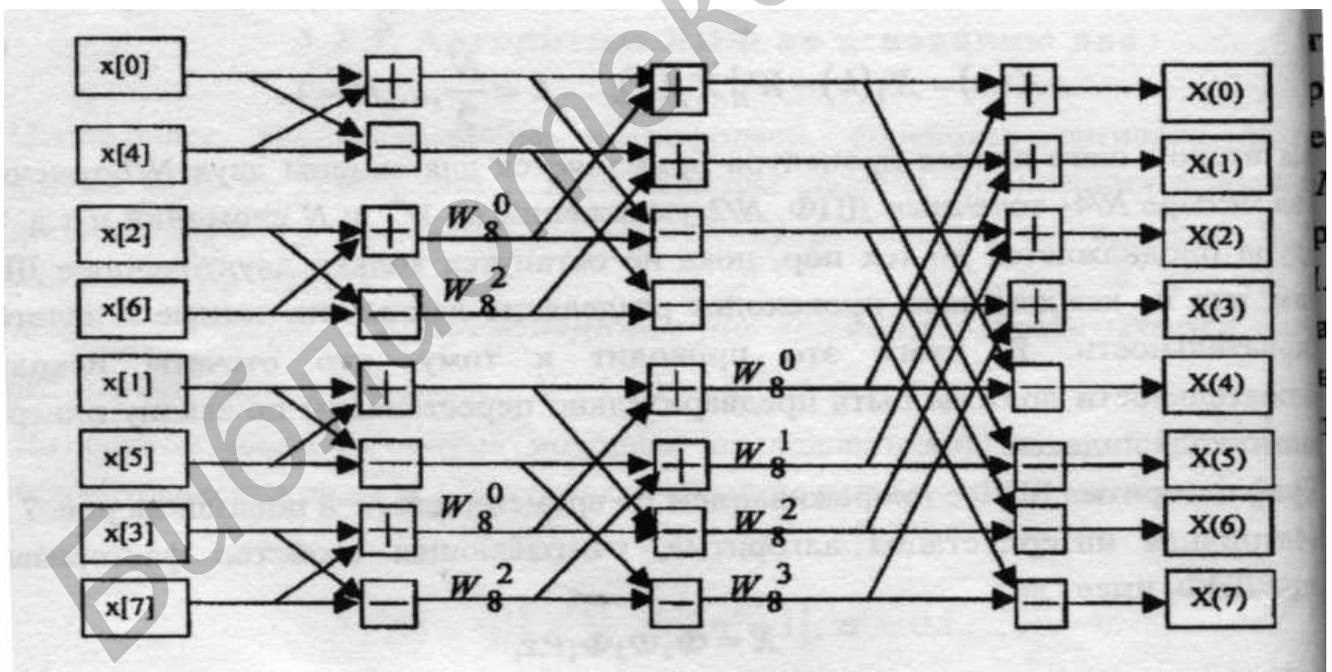


Рис.7

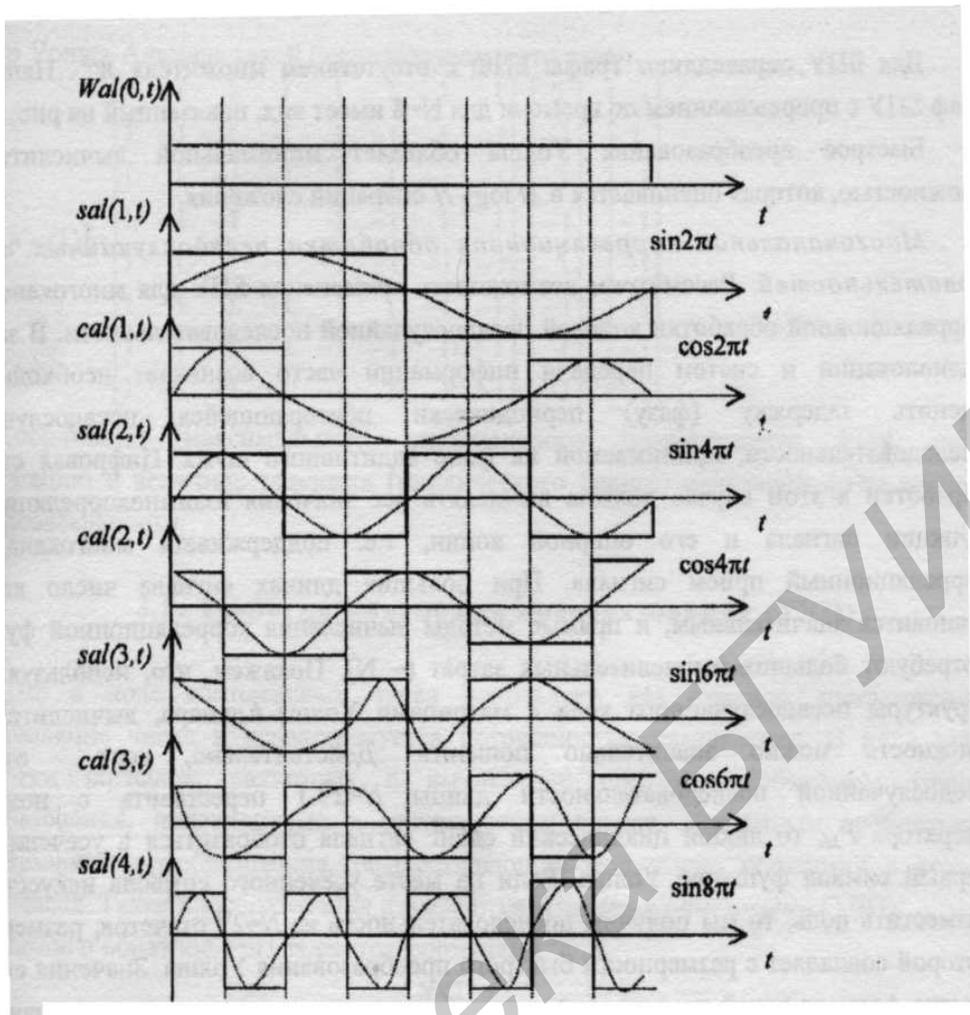


Рис.10

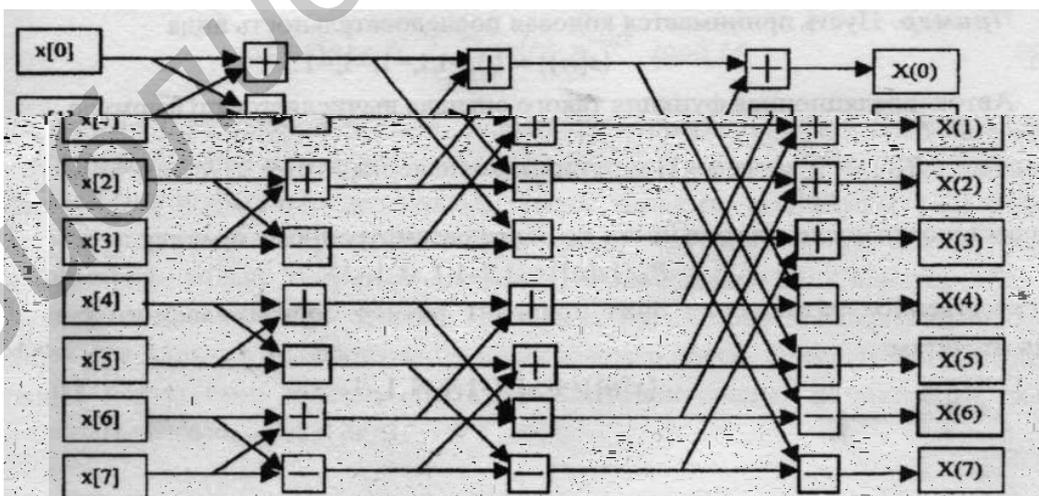


Рис.11

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосев В. В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: Учеб. пособие для вузов. – Мн.: Выш. школа, 1990.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.
3. Лихарев В.А. Цифровые методы и устройства в радиолокации. – М.: Сов. радио, 1973.
4. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов. Учеб. пособие. – М.: Выш. шк., 1990.
5. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989.
6. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов: Пер с англ. / Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата. – М.: Радио и связь, 1989.
7. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1992.
8. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988.
9. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
10. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
11. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975.
12. Петько В. И., Куконин В. Е., Шихов Н. Б. Цифровая фильтрация и обработка сигналов: Учеб. пособие. – Мн.: Універсітэцкае, 1995.
13. Вариченко Л. В., Лабунец В. Г., Раков М. А. Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов. – Киев.: Наук. думка, 1986.
14. Кузьмин С. З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Сов. радио, 1974.
15. Петров В. П. Прикладная спектральная теория оценивания. – М.: Наука, 1982.
16. Ахмед Н., Ро К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Пер с англ. – М.: Связь, 1980.
17. Применение цифровой обработки сигналов / Под ред. А. Оппенгейма. – М.: Мир, 1980.