СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ РОЖДЕНИЯ-ГИБЕЛИ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В.С. Муха, М.В. Прищепчик
Кафедра информационных технологий автоматизированных систем,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлекороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: mukha@bsuir.by, prishchepchikmv@tut.by

Разработана математическая модель скалярного случайного поля, порожденного случайным процессом рождения-гибели. Данная математическая модель может служить моделью пространственной системы массового обслуживания (СМО). Представлены выражения, позволяющие выполнять вероятностный анализ такой СМО при постоянных интенсивностях рождения и гибели порождающего процесса.

Введение

Пространственной системой массового обслуживания (СМО) будем называть СМО, в которой требования распределены в пространственно-временном континууме, в отличие от обычной (локальной) СМО, в которой требования распределены лишь во времени. Впервые на пространственные СМО обращено внимание в работах [1, 2], в которых введено понятие Пуассоновского направленного случайного поля как входного потока требований в пространственной СМО и получены выражения для его вероятностного анализа. В данной работе вводится понятие направленного случайного поля рождения-гибели как математической модели пространственной СМО.

I. Случайный процесс рождения-гибели

Предлагаемая в данной работе математическая модель пространственной СМО строится на основе математической модели случайного процесса рождения-гибели. Случайным процессом рождения-гибели называется случайный процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем и дискретными значениями E_0, E_1, $E_2, ...$, имеющий возможность в любой момент времени t изменять свое значение E_i на значения E_{i+1} или E_{i-1} [3]. Обычно вместо случайного процесса $\xi(t)$ говорят о системе, обладающей возможностью перехода в любой момент времени из состояния E_i в состояния E_{i+1} или E_{i-1}. Переход из E_i в E_{i+1} интерпретируется как рождение, а из E_i в E_{i+1} – как гибель. Такой случайный процесс определяется интенсивностями рождения λ и гибели μ . Вероятности $p_{i,n}(t)$ перехода системы из состояния E_i в состояние E_n за время t удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$p'_{i,n}(t-t_0) =$$

$$= \lambda p_{i,n-1}(t-t_0) - (\lambda+\mu)p_{i,n}(t-t_0) + \mu p_{i,n+1}(t-t_0)$$

с начальными условиями

$$p_{i,n}(t_0) = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений определяется выражением:

$$p_{i,n}(t)e^{(\lambda+\mu)t} = \left(\sqrt{\mu/\lambda}\right)^{i-n} I_{n-i}\left(2\sqrt{\lambda\mu t}\right) + \\ + \left(\sqrt{\mu/\lambda}\right)^{i-n+1} I_{n+i+1}\left(2\sqrt{\lambda\mu t}\right) + \\ +(1-\lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n \sum_{k=n+i+2}^{\infty} \left(\sqrt{\mu/\lambda}\right)^k I_k\left(2\sqrt{\lambda\mu t}\right), \quad (1)$$

где $I_\nu(z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента или, иначе, модифицированная функция Бесселя k-го порядка

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!(k+\nu)!}.$$

Процесс рождения-гибели можно рассматривать как математическую модель локальной системы массового обслуживания типа M/M/1. При выполнении условия $\rho = \lambda/\mu < 1$ в такой системе существуют предельные вероятности $p^*_m = lim_{t\to\infty} p_{i,m}(t)$, определяемые формулой $p^*_m = (1-\rho)\rho^m$, $m = 0, 1, 2, ...$ Они позволяют рассчитать предельные характеристики СМО при большом t (в стационарном режиме работы СМО).

Безусловные вероятности $a_j(t) = P(\xi(t) = E_j)$ нахождения системы в состоянии E_j в любой момент времени t определяются формулой

$$a_j(t) = \sum_i a_i(t_0)p_{i,j}(t-t_0), \quad (2)$$

где $a_i(t_0)$ – безусловные вероятности нахождения системы в состоянии E_i в начальный момент времени t_0 .

II. Случайное поле рождения-гибели

Определение. Случайным полем рождения-гибели $\xi(z)$ назовем случайный процесс рождения-гибели $\xi(t)$ с интенсивностями рождения λ и гибели μ соответственно в случае, когда его аргумент t является функцией $t = \phi(z)$, где $z = (z_1, z_2, ..., z_z) \in Z \subseteq R^n$ – векторная переменная, а $\phi(z)$ – неотрицательная и неубывающая по каждой переменной $z_1, z_2, ..., z_z$ функция.

Одной из скалярных переменных $z_1, z_2, ..., z_z$ в этом определении может быть время, остальные рассматриваются как пространственные переменные.

Аргумент $t = \phi(z)$ в данном определении будем называть обобщенным временем.

Значение z_1 аргумента z будем называть «предыдущим» по отношению к значению z_2, если $\tau = \phi(z_2 - z_1)$ неотрицательно.

Определенное выше случайное поле будем называть случайным полем, порожденным случайным процессом рождения-гибели $\xi(t)$ с помощью порождающей функции $t = \phi(z)$.

Из данного определения случайного поля следует, что при $z_i \to \infty$ хотя бы для одного $i = \overline{1, n}$ случайное поле имеет те же предельные вероятностные характеристики, что и порождающий его случайный процесс.

Теорема 2 *Пусть* $\xi(z)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_z) \in Z \subseteq R^n$, *– скалярное случайное поле, порожденное случайным процессом рождения-гибели* $\xi(t)$ *с параметрами (интенсивностями) рождения и гибели* λ *и* μ *соответственно и неотрицательной неубывающей по каждому аргументу* $z_1, z_2, ..., z_z$ *порождающей функцией* $t = \phi(z)$. *Данное случайное поле является процессом рождения-гибели с постоянными параметрами рождения* λc_k *и гибели* μc_k *по каждой координате* z_k *тогда и только тогда, когда функция* $t = \phi(z) = \phi(z_1, z_2, ..., z_n)$ *является линейной вида*

$$t = \sum_{k}^{n} c_k z_k, \qquad (3)$$

где c_k *– неотрицательные константы.*

Определенное в теореме случайное поле является математической моделью пространственной системы массового обслуживания типа M/M/1. Теорема позволяе рассчитать вероятностные характеристики данной пространственной СМО, а также выполнить ее статистическое моделирование. Расчет вероятностных характеристик данной СМО (данного поля рождения-гибели) выполняется с использованием вероятностных характеристик порождающего его случайного процесса рождения-гибели. В частности, вероятность того, что в гиперпрямоугольнике, определяемом угловыми точками z_0, z, произойдет $n-i$ событий, при условии, что в гиперпрямоугольнике, определяемом угловыми точками 0, z_0, произошло i событий, определяется формулой (1) при

$$t - t_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k (z_k - z_{k,0}), \qquad (4)$$

а безусловная вероятность того же события – формулой (2).

По формулам (1), (3) были рассчитаны поверхности вероятностей $p_{6,30}(z_1, z_2)$, $p_{8,30}(z_1, z_2)$, $p_{10,30}(z_1, z_2)$ скалярного случайного поля на плоскости, порожденного случайным процессом рождения-гибели с параметрами $\lambda = 0,5$, $\mu = 0,8$ и порождающей функцией (3) с $n = 2$ и коэффициентами $c_1 = c_2 = 1$. Рассчитанные поверхности вероятностей представлены на рис. 1. Из рисунка видно, что все три сероятности имеют один и тот же предел при $z_1 \to \infty$, $z_2 \to \infty$,что соответствует теории. Однако характер их приближения к предельному значению различен. Например, вероятность $p_{10,30}(z_1, z_2)$ имеет значительный выброс при достаточно малых значениях z_1, z_2. Это может свидетельствовать о важности анализа пространственной СМО (а также локальной) не только в стационраном режиме, но и в переходном. Выполнив анализ стационарного режима СМО и обнаружив там полный `"штиль"`, мы рискуем пропустить существующее перед ним `"цунами"`, как это происходит на рис. 1.

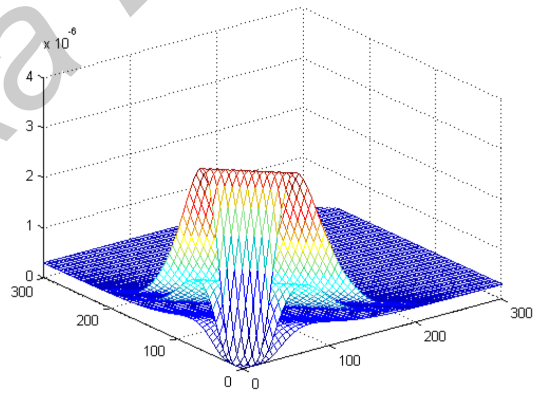

Рис. 1 – Поверхности вероятностей $p_{6,30}(z_1, z_2)$, $p_{8,30}(z_1, z_2)$, $p_{10,30}(z_1, z_2)$ скалярного случайного поля рождения-гибели

1. Mukha, V.S. Modeling of spatial queues system / V.S. Mukha, M.V. Prishchepchik // Computer Data Analysis and Modeling. Theoretical and applied stochastics. Proceedings of the tenth international conference (Minsk, September 10 – 14, 2013). – V. 1. – Minsk: Publishing center of BSU, 2013. – P. 214 – 217.

2. Муха, В.С. Вероятностный анализ Пуассоновского случайного поля / В.С. Муха, М.В. Прищепчик // Информационные технологии и системы. Материалы международной научной конференции (БГУИР, Минск, Беларусь, 23 октября 2013). – Минск, БГУИР, 2013. – С. 300 – 301.

3. Карлин, С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. – М.: Мир, 1971. – 536 с.