Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Контрольные задания для студентов
заочной формы обучения
радиотехнических специальностей

2-е издание, переработанное и дополненное

Минск 2004

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73
В 93

Составитель:
А.А. Карпук

В 93 **Высшая** математика: Контрольные задания для студ. радиотехнич. спец. заочной формы обуч./ Сост. А.А. Карпук. 2-е изд., перераб. и доп. – Мн.: БГУИР, 2004. – 40с.
ISBN 985-444-655-7

Учебные планы радиотехнических специальностей предусматривают выполнение 9 контрольных работ в 10 вариантах по курсу высшей математики, представленных в данном методическом издании. Объем и содержание этих работ определяются программами, утвержденными учебно-методическим управлением БГУИР.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73

ISBN 985-444-655-7

Содержание

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса по рекомендуемым литературным источникам. Если он испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то может получить консультацию на кафедре высшей математики.

Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины и дату отправки работы в университет.

Задачи для контрольной работы выбираются в соответствии с номером, который совпадает с последней цифрой учебного шифра студента. Условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением.

В прорецензированной зачетной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и отправляют на повторную рецензию. Зачтенные контрольные работы предъявляются студентом при сдаче зачета или экзамена.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1 – 10. Даны четыре вектора $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3), $\vec{c}$ (c_1, c_2, c_3) и $\vec{d}$ (d_1, d_2, d_3) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

1. $\vec{a}(4, 5, 2)$, $\vec{b}(3, 0, 1)$, $\vec{c}(-1, 4,2)$, $\vec{d}(5,7,8)$.
2. $\vec{a}(3, -5, 2)$, $\vec{b}(4,5,1)$, $\vec{c}(-3,0,-4)$, $\vec{d}(-4,5,-16)$.
3. $\vec{a}(-2, 3, 5)$, $\vec{b}(1,-3,4)$, $\vec{c}(7,8,-1)$, $\vec{d}(1,20,1)$.
4. $\vec{a}(1, 3, 5)$, $\vec{b}(0,2,0)$, $\vec{c}(5,7,9)$, $\vec{d}(0,4,16)$.
5. $\vec{a}(2, 4, -6)$, $\vec{b}(1,3,5)$, $\vec{c}(0,-3,7)$, $\vec{d}(2,3,52)$.
6. $\vec{a}(4, 3, -1)$, $\vec{b}(5,0,4)$, $\vec{c}(2,1,2)$, $\vec{d}(0,12,-6)$.
7. $\vec{a}(3, 4, -3)$, $\vec{b}(-5,5,0)$, $\vec{c}(2,1,-4)$, $\vec{d}(8,-16,17)$.
8. $\vec{a}(-2,1, 7)$, $\vec{b}(3,-3,8)$, $\vec{c}(5,4,-1)$, $\vec{d}(18,25,1)$.
9. $\vec{a}(1, 0, 5)$, $\vec{b}(3,2,7)$, $\vec{c}(5,0,9)$, $\vec{d}(-4,2,-12)$.
10. $\vec{a}(2, 1, 0)$, $\vec{b}(4,3,-3)$, $\vec{c}(-6,5,7)$, $\vec{d}(34,5,-26)$.

11 – 20. Даны координаты вершин пирамиды $\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$. Найти: 1) длину ребра $\mathbf{A_1A_2}$; 2) угол между ребрами $\mathbf{A_1A_2}$ и $\mathbf{A_1A_4}$; 3) угол между ребром $\mathbf{A_1A_4}$ и гранью $\mathbf{A_1A_2A_3}$; 4) площадь грани $\mathbf{A_1A_2A_3}$; 5) объём пирамиды; 6) уравнения прямой $\mathbf{A_1A_2}$; 7) уравнение плоскости $\mathbf{A_1A_2A_3}$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины $\mathbf{A_4}$ на грань $\mathbf{A_1A_2A_3}$. Сделать чертёж.

11. $A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,6,1)$, $A_3(-1,1,6)$, $A_4(0,4,-1)$.
12. $A_1(3,3,9)$, $A_2(6,9,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$.
13. $A_1(3,5,4)$, $A_2(5,8,3)$, $A_3(1,9,9)$, $A_4(6,4,8)$.
14. $A_1(2,4,3)$, $A_2(7,6,3)$, $A_3(4,9,3)$, $A_4(3,6,7)$.
15. $A_1(9,5,5)$, $A_2(-3,7,1)$, $A_3(5,7,8)$, $A_4(6,9,2)$.
16. $A_1(0,7,1)$, $A_2(4,1,5)$, $A_3(4,6,3)$, $A_4(3,9,8)$.
17. $A_1(5,5,4)$, $A_2(3,8,4)$, $A_3(3,5,10)$, $A_4(5,8,2)$.
18. $A_1(6,1,1)$, $A_2(4,6,6)$, $A_3(4,2,0)$, $A_4(1,2,6)$.
19. $A_1(7,5,3)$, $A_2(9,4,4)$, $A_3(4,5,7)$, $A_4(7,9,6)$.
20. $A_1(6,6,2)$ $A_2(5,4,7)$, $A_3(2,4,7)$, $A_4(7,3,0)$.

21. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки **A(2,2)** и от оси абсцисс.

22. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки **A(3,0)**, чем от оси ординат.

23. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до начала координат к расстоянию до прямой 3x+16=0 равно 0,6.

24. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое ближе к точке **A(1,0)**, чем к точке **B(-2,0)**.

25. Составить уравнение линии, каждая точка которой является центром окружности, касающейся оси абсцисс и проходящей через точку **A(0,3)**.

26. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояния от начала координат и от точки **A(0,5)** относятся как 3:2.

27. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояние от точки **A(0,1)** вдвое меньше расстояния от прямой $y = 4$.

28. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки **A(4,2)** и от оси ординат.

29. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки **A(4,0)** вдвое дальше, чем от прямой $x = 1$.

30. Составить уравнение линии, каждая точка которой является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, проходящую через точку **A(2,0)**.

31 – 40. Доказать совместность данной системы линейных уравнений и решить ее двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления:

31. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 4x_1-3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 7x_1-5x_2=34, \\ 4x_1+11x_2=-36, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_2-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-3. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$

40. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=8, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=11, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=13. \end{cases}$

41 – 50. Найти размерность и базис пространства решений однородной системы линейных уравнений:

41. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3+6x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3-2x_4=0, \\ x_1+7x_2-10x_3+20x_4=0. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-4x_4=0, \\ 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0, \\ 4x_1-x_{2.}+4x_3-9x_4=0. \end{cases}$

43. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3+x_4=0, \\ 5x_1-8x_2-2x_3+8x_4=0, \\ -2x_1-x_2-10x_3-5x_4=0. \end{cases}$

44. $\begin{cases} 5x_1-5x_2+10x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+7x_3+x_4=0, \\ x_1+7x_2+4x_3+3x_4=0. \end{cases}$

45. $\begin{cases} 7x_1+5x_2+3x_3+6x_4=0, \\ 2x_1-x_2-x_3+4x_4=0, \\ x_1+8x_2+6x_3-6x_4=0. \end{cases}$

46. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+5x_2-8x_3-5x_4=0, \\ x_1+4x_2+5x_3+x_4=0. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x+4x_{21}-x_3+3x_4=0, \\ x_1+3x_2-x_3+4x_4=0. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=0, \\ x_1+7x_2-6x_3+4x_4=0. \end{cases}$

49. $\begin{cases} 7x_1+5x_2-3x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+2x_4=0, \\ x_1+x_2+3x_3-3x_4=0. \end{cases}$ 50. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0, \\ 4x_1-x_2-5x_3+3x_4=0. \end{cases}$

51 – 60. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей:

51. $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$ 52. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$

53. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$ 54. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

55. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$ 56. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

57. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 58. $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

59. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$ 60. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

61 – 70. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка, используя теорию квадратичных форм:

61. $5x^2+4xy+2y^2=18.$ 62. $4x^2+2\sqrt{6}xy+3y^2=24.$

63. $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2=21.$ 64. $5x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2=14.$

65. $7x^2+6\sqrt{2}xy+4y^2=15.$ 66. $3x^2+2\sqrt{14}xy+8y^2=10.$

67. $7x^2+2\sqrt{6}xy+2y^2=24.$ 68. $9x^2+4\sqrt{2}xy+2y^2=20.$

69. $6x^2+2\sqrt{10}xy+3y^2=16.$ 70. $4x^2+4\sqrt{3}xy+5y^2=40.$

2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

71 – 75. Построить график функции $y=f(x)$ преобразованием графика функции $y=\sin x$:

71. $y=3\sin(2x-1).$ 72. $y=-3\sin(2x+3).$

73. $y=\frac{5}{2}\sin(4x-2).$ 74. $y=2\sin\left(\frac{4}{3}x+2\right).$

75. $y=-\frac{3}{4}\sin(2x+2).$

76 – 80. Построить график функции $y=f(x)$ преобразованием графика функции $y=\cos x$:

76. $y=\frac{4}{3}\cos(3x+3).$ 77. $y=-\frac{2}{3}\cos(3x+2).$

78. $y=-\frac{6}{5}\cos\left(\frac{3}{2}x+1\right).$ 79. $y=3\cos\left(\frac{1}{2}x+1\right).$

80. $y=2\cos(2x-1).$

81 – 90. Дана функция $r=f(\varphi)$ на отрезке $0\le\varphi\le 2\pi$. Требуется: 1) построить график функции в полярной системе координат по точкам, давая φ значения через промежуток π/8, начиная от φ = 0; 2) найти уравнение полученной линии в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с полюсом, а положи-

тельная полуось абсцисс – с полярной осью, и по уравнению определить, какая это будет линия.

81. $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$.   82. $r=\dfrac{6}{3+2\cos\varphi}$.

83. $r=\dfrac{4}{2+3\cos\varphi}$.   84. $r=\dfrac{2}{1-\sin\varphi}$.

85. $r=\dfrac{5}{4-3\cos\varphi}$.   86. $r=\dfrac{3}{5+6\cos\varphi}$.

87. $r=\dfrac{5}{1+\sin\varphi}$.   88. $r=\dfrac{3}{2+\cos\varphi}$.

89. $r=\dfrac{6}{1-2\cos\varphi}$.   90. $r=\dfrac{4}{1+\cos\varphi}$.

91 – 100. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

91. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$.

92. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$.

93. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-4)\left[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)\right]$.

94. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

95. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)\left[\ln(1-x)-\ln(2-x)\right]$.

96. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

97. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-5x^2+5}{5x^5+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]$.

98. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$.

99. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}5x$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)\left[\ln(3x+4)-\ln 3x\right]$.

100. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)\left[\ln(x+5)-\ln x\right]$.

101 – 110. Заданы функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы при приближении к точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

101. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$, $x_1=3$, $x_2=5$.

102. $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}$, $x_1=2$, $x_2=4$.

103. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}$, $x_1=4$, $x_2=3$.

104. $f(x)=7^{\frac{1}{x-5}}$, $x_1=7$, $x_2=5$.

105. $f(x)=10^{\frac{1}{x-6}}$, $x_1=8$, $x_2=6$.

106. $f(x)=25^{\frac{1}{x-8}}$, $x_1=10$, $x_2=8$.

107. $f(x)=9^{\frac{1}{x-7}}$, $x_1=9$, $x_2=7$.

108. $f(x)=4^{\frac{1}{x-1}}$, $x_1=3$, $x_2=1$.

109. $f(x)=16^{\frac{1}{x-2}}$, $x_1=6$, $x_2=4$.

110. $f(x)=8^{\frac{1}{x-2}}$, $x_1=4$, $x_2=2$.

111 – 120. Задана функция $y=f(x)$ различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

111. $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1<x\le 3, \\ x+2, & x>3. \end{cases}$ 112. $y=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x>4. \end{cases}$

113. $y=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0, \\ x, & 0<x\le 1, \\ x+2, & x>1. \end{cases}$ 114. $y=\begin{cases} x-1, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

115. $y=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x\le 0, \\ 1, & 0<x<2, \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$ 116. $y=\begin{cases} \cos x, & x\le 0, \\ 1-x, & 0<x\le 2, \\ x^2, & x>2. \end{cases}$

117. $y=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0\le x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$ 118. $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le \pi/4, \\ 2, & x>\pi/4. \end{cases}$

119. $y=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ tgx, & 0<x<\pi/2, \\ x, & x\ge \pi/2. \end{cases}$ 120. $y=\begin{cases} \cos x, & x\le \pi/2, \\ 0, & \pi/2<x<\pi, \\ \pi/2 & x\ge \pi. \end{cases}$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

121 - 130. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций:

121. а) $y=\sqrt[3]{x^4+5x}-\sqrt[4]{(5x-1)^3}$; б) $y=\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$; г) $y=x^{2/x}$; д) $x\sin y-y\cos x=0$.

122. а) $y=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}-6\sqrt[3]{2+x}$; б) $y=\sin^3 2x$;

в) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; г) $y=x^{e^x}$; д) $e^{xy}-x^2+y^2=0$.

123. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y=e^{1+\ln^2 x}$; в) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$;

г) $y=x^{\arcsin x}$; д) $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y$.

124. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$; б) $y=tg\ln\sqrt{x}$; в) $y=3^{\cos^2 x}$;

г) $y=x^{e-x}$; д) $\cos(x-y)-2x+4y=0$.

125. а) $y=x+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$; б) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$;

в) $y=\ln\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x}$; г) $y=x^{\frac{1}{x^2}}$; д) $xe^y+ye^x=xy$.

126. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{\left(x^3+2\right)^3}}$; б) $y=\cos\ln^2 x$;

в) $y=\left(e^{\sin x}-1\right)^2$; г) $y=2x^{\sqrt{x}}$; д) $\cos(xy)=y/x$.

127. а) $y=x\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$; б) $y=\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$;

в) $y=2^{\frac{1-x}{1+x}}$; г) $y=(\ln x)^x$; д) $xy+\ln y-2\ln x=0$.

128. а) $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; б) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $y=e^{1/x^2}$; г) $y=(\sin x)^{\cos x}$; д) $e^{x+y}=\sin\dfrac{y}{x}$.

129. а) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y=x\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$;

в) $y=e^{-\cos^4 5x}$; г) $y=(\operatorname{arctg}2x)^{\sin 3x}$;

д) $(x+y)^2=(x-2y)^3$.

130. а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y=e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$;

в) $y=x\operatorname{arctg}^3 5x+\ln\operatorname{tg}x$; г) $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$;

д) $y\ln x-x\ln y=x+y$.

131–140. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

131. а) $y=\dfrac{x-1}{x+1}e^{-x}$; б) $\begin{cases} x=t+\ln\cos t, \\ y=t-\ln\sin t. \end{cases}$

132. а) $y=\operatorname{arctg}x^2$; б) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

133. а) $y=x^2\ln x$; б) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

134. а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\begin{cases} x=t^5+2t, \\ y=t^3+8t-1. \end{cases}$

135. а) $y=\ln\operatorname{ctg}4x$; б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+t, \\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

136. а) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$; б) $\begin{cases} x=\arcsin(t^2-1), \\ y=\arccos 2t. \end{cases}$

137. а) $y=\cos^2 x$; б) $\begin{array}{l} x=t^2+t+1, \\ y=t^3+t. \end{array}$

138. а) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; б) $\begin{array}{l} x=\mathrm{ctg}\,t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{array}$

139. а) $y=xe^{-x}$; б) $\begin{array}{l} x=\dfrac{2-t}{2+t^2}, \\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2}. \end{array}$

140. а) $y=\ln\ln x$; б) $\begin{array}{l} x=2\cos^3 2t, \\ y=\sin^3 2t. \end{array}$

141–150. Применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лангранжа к функции $f(x)=e^x$, вычислить с точностью до 0,001 значения e^a и e^b. Методом линейной интерполяции вычислить приближенное значение e^{x_0}.

141. a = 0, 11, b = 0, 14, x_0 = 0, 12.
142 . a = 0, 15, b = 0, 18, x_0 = 0, 16.
143. a = 0, 19, b = 0, 22, x_0 = 0, 20.
144. a = 0, 23, b = 0, 26, x_0 = 0, 24.
145. a = 0, 27, b = 0, 30, x_0 = 0, 28.
146. a = 0, 31, b = 0, 34, x_0 = 0, 32.
147. a = 0, 35, b = 0, 38, x_0 = 0, 36.
148. a = 0, 39, b = 0, 42, x_0 = 0, 40.
149. a = 0, 43, b = 0, 46, x_0 = 0, 44.
150. a = 0, 47, b = 0, 50, x_0 = 0, 48.

151. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на сжатие пропорционально площади этого сечения. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d , чтобы ее сопротивление на сжатие было наибольшим?

152. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V, причем стоимость квадратного метра материала, из которого изготавливается дно бака, равна p_1 (руб.), а стоимость квадратного метра материала, идущего на стенки, равна p_2 (руб.). При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут наименьшими?

153. В прямоугольной системе координат через точку (1, 2) проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая вместе с осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

154. Из полосы жести шириной 11 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобедренной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 7 см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

155. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения и квадрата высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим?

156. В прямоугольной системе координат через точку (1, 4) проведена прямая, пересекающаяся с положительными полуосями координат. Написать уравнение прямой, если сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, принимает наименьшее значение.

157. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

158. Из полосы жести шириной 30 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобедренной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

159. Стрела прогиба балки прямоугольного поперечного сечения обратно пропорциональна произведению ширины этого сечения на куб его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d , с наименьшей стрелой прогиба (наибольшей жесткости)?

160. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр имеет при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

161 - 170. Исследовать методами дифференциального исчисления функции и построить ее график, используя результаты исследования:

161. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

162. $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

163. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$.

164. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

165. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

166. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

167. $y=\frac{x^3+16}{x}$.

168. $y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$.

169. $y=\frac{x^3-4}{4x^2}$.

170. $y=\frac{2}{x^2+x+1}$.

171. Дана функция $z = e^{xy}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

172. Дана функция $z = e^{-\cos(ax+y)}$. Показать,что $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

173. Дана функция $z = \ln(x^2+y^2+2y+1)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

174. Дана функция $z=\sin^2(y-ax)$. Показать, что

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

175. Дана функция $z=\frac{y}{x}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

176. Дана функция $z=y\sqrt{\frac{y}{x}}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

177. Дана функция $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

178. Дана функция $z=arctg\frac{x}{y}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

179. Дана функция $z=\frac{\sin(x-y)}{x}$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

180 . Дана функция $z=e^{x/y}$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

181 – 190. Даны функция $z=f(x,y)$ и две точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$. Требуется: 1) вычислить значение z_1 функции в точке B;

2) вычислить приближенное значение z_1 функции в точке *B* исходя из значения z_0 функции в точке А, заменив приращение функции при переходе от точки *A* к точке *B* дифференциалом; оценить в процентах относительную погрешность, возникающую при замене приращения функции ее дифференциалом; 3) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке *C* (x_0, y_0, z_0).

181. $z = x^2 + 3xy + y^2$, *A* (1; 2), *B* (1,03; 1,97).
182. $z = xy + y^2 - 2x$, *A* (2; 1), *B* (2,03; 0,96).
183. $z = x^2 + y^2 - x + y$, *A* (–2; 2), *B* (-2,02; 2,05).
184. $z = 2x^2 + 2xy - y^2$, *A* (1; 3), *B* (0,95; 2,94).
185. $z = x^2 + 3xy - y^2$, *A* (1; 3), *B* (0,96; 2,95).
186. $z = xy + 2x - y$, *A* (2; 2), *B* (1,93; 2,05).
187. $z = 3y^2 - 9xy + y$, *A* (1; 3), *B* (1,07; 2,94).
188. $z = xy + x - y$, *A* (1,5; 2,3), *B* (1,43; 2,35).
189. $z = y^2 - xy - x^2$, *A* (–4; –5), *B* (–3,92; 5,06).

190. $z = x^2 + y^2 - x - y$, *A* (1; –3), *B* (1,08; –2,94).

191 – 200. Даны функция $z=z(x, y)$**, точка** $A(x_0, y_0)$ **и вектор** ***a*****. Найти: 1)** ***grad*** z **в точке** ***A*****; 2) производную в точке** A **в направлении вектора** ***a:***

191. $z = 2x^2 + xy$, ***A*** **(-1, 2),** ***a*** **= 3i + 4j .**
192. $z = arctg(y/x)$, ***A*** **(-1, 1),** ***a*** **= i - j .**
193. $z = x^3y + xy^2$, ***A*** **(1, 3),** ***a*** **= -5i + 12j .**
194. $z = \ln(2x + 3y)$, ***A*** **(2, 2),** ***a*** **= 2i - 3j .**
195. $z = 5x^2y + 3xy^2$, ***A*** **(1, 1),** ***a*** **= 6i - 8j .**
196. $z = 3x / y^2$, ***A*** **(3, 4),** ***a*** **= -3i - 4j .**
197. $z = arctg(xy)$, ***A*** **(2, 3),** ***a*** **= 4i + 3j .**
198. $z = \ln(3x^2 + 2xy^2)$, ***A*** **(1, 2),** ***a*** **= 3i - 4j .**
199. $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, ***A*** **(1, -2),** ***a*** **= i + 2j .**
200. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$, ***A*** **(1, 1),** ***a*** **= 2i - j .**

4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

201 – 210. Найти неопределенные интегралы (результаты в слу- чаях “а” и “б” проверить дифференцированием):

201. а) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$; **б)** $\int x^3 e^{2x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$; **г)** $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3 \sqrt{x}}$; **д)** $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx$.

202. а) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\, dx$; **б)** $\int x^2 \cos^2 x\, dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$; г) $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}} dx$; д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

203. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$; б) $\int x^3 \ln x\, dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$; д) $\int \frac{dx}{\left(1+e^x\right)^2}$.

204. а) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$; б) $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$; г) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$; д) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$.

205. а) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$; б) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\, dx$; в) $\int \frac{x^2}{x^4 - 16} dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; д) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

206. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx$; б) $\int (x+1)\ln^2(x+1)\, dx$;

в) $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$; г) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}}$; д) $\int (3+\cos 2x)\sin^2 x\, dx$.

207. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5+x^6}}$; б) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$; в) $\int \frac{(x-1)\, dx}{x^3 + x}$;

г) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$; д) $\int ctg^4 x\,dx$.

208. а) $\int \frac{\cos x \sin 2x}{3\cos^3 x+2}\,dx$; б) $\int x^2 \cos x\,dx$;

в) $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$; г) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$; д) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x}$.

209. а) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$; б) $\int x^3 arctgx\,dx$; в) $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}$; д) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

210. а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$; б) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$;

в) $\int \frac{(x^3-2x)\,dx}{x^4+2x^2+1}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$; д) $\int \mathrm{tg}^4 x\,dx$.

211 – 220. Вычислить определенный интеграл. Окончательный результат представить в виде приближенного числа, произведя вычисление с округлением до третьего десятичного знака:

211. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$. 212. $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

213. $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$. 214. $\int\limits_0^{\pi/6} x\cos 3x\,dx$.

215. $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$. 216. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x\,dx$.

217. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$. 218. $\int\limits_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

219. $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$. 220. $\int\limits_0^{1,5} \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

221 – 230. Вычислить интеграл с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака:

221. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2-\sin x}\, dx$. 222. $\int\limits_0^1 \sqrt{2-x^3}dx$.

223. $\int\limits_0^1 \sqrt{5+x^3}\, dx$. 224. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1\sin^2 x}\, dx$.

225. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{2+\sin x}\, dx$. 226. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+2x^3}\, dx$.

227. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-3x^2}\, dx$. 228. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+1} dx$.

229. $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^3}dx$. 230. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2-\cos x}\, dx$.

231–240. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

231. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. 232. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}dx$.

233. $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^5}}dx$. 234. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

235. $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$. 236. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$.

237. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. 238. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx$.

239. $\int\limits_2^3 \frac{x}{\sqrt{(x^2-4)^3}}dx$. 240. $\int\limits_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

241. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

242. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 3x$ и $x^2 = 3y$.

243. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x^2 = 4y$ и локоном Аньези $y = \dfrac{8}{x^2+4}$.

244. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой **$\rho = 4\cos 2\theta$.**

245. Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $\rho = 5 \sin 3\theta$.

246. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x\,(0 \le x \le \pi)$.

247. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox астроиды $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$.

248. Вычислить длину полукубической параболы $y = \sqrt{x^3}$ от точки 0 (0, 0) до точки A $(5{,}5, \sqrt{5})$.

249. Вычислить длину дуги кривой $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t$, от $t = 0$ до $t = \pi/2$.

250. Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\theta$.

251. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной дугой эллипса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, расположенной в первой четверти, и осями координат.

252. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $x^2 + 4y - 16 = 0$ и осью Ox.

253. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$.

254. Найти координаты центра тяжести однородной дуги астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, расположенной над осью Ox.

255. Найти координаты центра тяжести однородной дуги одной арки циклоиды $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

256. Найти работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен 20 м.

257. Найти работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из цилиндрической цистерны, имеющей радиус основания 2 м и высоту 3 м.

258. Найти работу, необходимую для того, чтобы вытащить из воды конус, подвешенный на канате так, что вершина его находится на поверхности воды. Удельный вес конуса $\gamma = 3$ т/м^3, радиус основания $R = 2$ м, высота $H = 6$ м.

259. Найти работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из корыта, имеющего форму полуцилиндра. Радиус цилиндра $R = 2$ м, длина $l = 6$ м.

260. Найти работу, необходимую для того, чтобы вытащить из воды шар радиусом $R = 3$ м и удельным весом $\gamma = 1$ т/м^3, погруженный в воду так, что он касается ее поверхности.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

261 — 270. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

261. $xy' = y\left[1 + \ln\left(y/x\right)\right]$.

262. $y' + y = e^{-x}$.

263. $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$.

264. $xy' + y = \sin x$.

265. $\left[x - y\cos\left(y/x\right)\right]dx + x\cos\left(y/x\right)dy = 0$.

266. $\left(1 - x^2\right)y' + xy = 1$.

267. $\left(2x - y\right)\ dx + \left(x + y\right)\ dy = 0$.

268. $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x$.

269. $\left(x^2 + y^2\right)dx + xydy = 0$.

270. $xy' - 2y + x^2 = 0$.

271 – 280. Найти частное решение дифференциального урав-нения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

271. $y'' - 3y' = x + \cos x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1/9$.

272. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

273. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

274. $y'' - y' = 9x\,e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.

275. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

276. $y'' - y' = x + 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

277. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(3 - 4x\right)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

278. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

279. $y'' + 2y' + y = x + \sin x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

280. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/9$.

281 – 290. Найти общее решение системы уравнений (рекомендуем решать с помощью характеристического уравнения):

281. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

282. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y. \end{cases}$

283. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

284. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

285. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

286. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

287. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

288. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

289. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9y. \end{cases}$ 290. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 9y. \end{cases}$

291. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству x. Найти зависимость x от времени t, если известно, что по истечении 1600 лет остается половина первоначального количества радия. Принять первоначальное количество радия $x_0 = 2$.

292. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти угловую скорость диска через 3 мин после начала вращения, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 200 об/мин, по истечении 1 мин вращается со скоростью 120 об/мин.

293. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 10$ км/ч. На полном ходу двигатель катера был выключен, и через 2 мин скорость катера уменьшилась до $v_1 = 0{,}5$ км/ч. Определить скорость, с которой двигался катер через 40 с после выключения двигателя, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

294. По закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20 ^{0}C и тело в течение часа охлаждается от 100 до 30 ^{0}C, то через сколько минут (с момента начала охлаждения) его температура понизится до 60 ^{0}C?

295. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (3, 1) и обладающей тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

296. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 1) и обладающей тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке M кривой вдвое больше углового коэффициента радиуса-вектора точки M.

297. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (-1,-1) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси Ох касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.

298. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1,0) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси Оу, равен длине радиуса-вектора точки касания.

299. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1,2) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен абсциссе точки касания.

300. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 3) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси Ох касательной, проведенной в любой точке кривой, равен половине абсциссы точки касания.

6. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

301. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$$

вдоль линии $y = |x|$ от точки A (-1, 1) до точки B (2, 2).

302. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} x\,dy - y\,dx$ вдоль дуги циклоиды $x= a\,(t—\sin t)$, $y=a(1—\cos t)$ от точки А($2\pi a$,0) до точки В (0, 0).

303. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{C} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$ вдоль окружности $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки.

304. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y)\,dx+(y^2+x)\,dy$ от точки А(1, 2) до точки В (3, 5) вдоль ломаной линии, состоящей из отрезков прямых $x=1,\ y=5.$

305. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{C} x\,dy-y\,dx$ вдоль треугольника с вершинами А(-2, 0), В (2, 0), D (0, 2), обходя его против хода часовой стрелки.

306. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} xe^{x^3}dy+y\,dx$ вдоль дуги параболы $y=x^2$ от точки А (0, 0) до точки В (1, 1).

307. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{OA} 2xy\,dx-x^2\ dy$ вдоль дуги параболы $x=2y^2$ от точки O (0, 0) до точки A (2, 1).

308. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}\frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$ вдоль дуги астроиды x=8cos^3 t, y=8sin^3 t от точки A (8, 0) до точки B (0, 8).

309. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$ от точки А(1, 1) до точки В (3, 4) вдоль прямой, проходящей через эти точки.

310. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{OAB}(x-y)^2dx+(x+y)^2dy$ вдоль ломаной $OAB,$ где O(0, 0), A(2, 0), B (4, 2).

311 – 320. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Данное тело и его проекцию на плоскость xOy изобразить на чертежах:

311. $z=0,\quad z=2x,\quad x+y=3,\quad x=\sqrt{y/2}.$

312. $z=0,\ z=\sqrt{1-y},\quad y=x^2.$

313. $z=0,\ x=0,\quad y=0,\quad x+y=1,\quad z=x^2+3y^2.$

314. $z=0,\ z=x^2,\quad 2x-y=0,\ x+y=9.$

315. $z = 0, \quad z = 2 - x, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{4}x^2$.

316. $z^2 = 4 - y$, $x^2 + y^2 = 4y$.

317. $z = 0, \quad x = 0, \quad z = y^2$, $2x + 3y = 6$.

318. $z = 0, \quad z = (x-1)^2, \quad y^2 = x$.

319. $z = 0, \quad z = 4 - x^2, \quad x^2 + y^2 = 4$.

320. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = y^2 + 1$, $x + y = 1$.

321 – 330. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах. Параметр a положителен:

321. $\left(x^2 + y^2\right)^5 = a^4 x^4 y^2$. 322. $\left(x^2 + y^2\right)^7 = a^8 x^2 y^4$.

323. $\left(x^2 + y^2\right)^5 = a^6 x^3 y$. 324. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 + 2y^2\right)$.

325. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2 y^4$. 326. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = ax^3$.

327. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(5x^2 + 7y^2\right)$. 328. $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2\left(x^4 + y^4\right)$.

329. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$. 330. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 xy$.

331. Найти момент инерции однородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R$ с массой М относительно оси Oz.

332. Найти момент инерции однородной пирамиды относительно оси Oy, если ее вершины находятся в точках О (0, 0, 0), А (a, 0, 0), В (0, a, 0), С(0, 0, a), где $a > 0$.

333. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостью XOY, относительно оси Ox.

334. Найти массу пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $3x + 2y + 3z = 6$, если плотность в каждой точке ее равна абсциссе этой точки.

335. Найти массу тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$, если плотность в каждой точке численно равна произведению координат этой точки.

336. Найти массу куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$, если его плотность в точке (x, y, z) равна $\gamma\,(x, y, z) = x + y + z$.

337. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $y^2+z^2=x$ и плоскостью $x = 2$.

338. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $x^2+z^2=2y$ и плоскостью $y = 2$.

339. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного конической поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z = 2$.

340. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $x^2+y^2=z$ и плоскостью $z = 9$.

341 – 350. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через плоскость треугольника $\boldsymbol{\sigma}$, вырезанного из плоскости (p) координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол:

341. $\vec{F} = (2z - x)\,\mathrm{i} + (x - y)\,\mathrm{j} + (3x + z)\,\mathrm{k}$; ($p$): $x + y + 2z - 2 = 0$.

342. $\vec{F} = 4z\mathrm{i} + (x - y - z)\,\mathrm{j} + (3y + z)\,\mathrm{k}$; ($p$): $x - 2y + 2z - 2 = 0$.

343. $\vec{F} = (y - z)\,\mathrm{i} + (2x + y)\,\mathrm{j} + (x + y + z)\,\mathrm{k}$;
(p): $2x + y + z - 2 = 0$.

344. $\vec{F} = (x - 2z)\,\mathrm{i} + (y - 2z)\,\mathrm{j} + (2x - y + 2z)\,\mathrm{k}$;
(p): $-x + 2y + 2z - 2 = 0$.

345. $\vec{F} = (2x - z)\,\mathrm{i} + (y - x)\,\mathrm{j} + (x + 2z)\,\mathrm{k}$; ($p$) : $x - y + z - 2 = 0$.

346. $\vec{F} = (2z + x)\,\mathrm{i} + (x - 3z)\,\mathrm{j} + (y + z)\,\mathrm{k}$;
(p): $-3x + 2y + 4z - 6 = 0$.

347. $\vec{F} = (x + y)\,\mathrm{i} + (y + z)\,\mathrm{j} + (2x + 2z)\,\mathrm{k}$;
(p):$3x - 2y + 2z - 6 = 0$.

348. $\vec{F} = (x + y + z)\,\mathrm{i} + 2z\,\mathrm{j} + (y + 7z)\,\mathrm{k}$;
(p): $2x + 3y + z - 6 = 0$.

349. $\vec{F} = 4z\mathrm{i} + (x - y - z)\,\mathrm{j} + (3y + 2z)\,\mathrm{k}$;
(p): $-2x + y + z - 4 = 0$.

350. $\vec{F} = (2z - x)\,\mathrm{i} + (x+2z)\,\mathrm{j} + 3z\,\mathrm{k}$; ($p$): $x + 4y + z - 4 = 0$.

351 – 360. Проверить, будет ли потенциальным и соленоидальным поле $\vec{F}$. В случае потенциальности поля найти его потенциал U (x, y, z):

351. $\vec{F} = (-2x - yz)\,\mathrm{i} + (-2y - xz)\,\mathrm{j} + (-2z - xy)\,\mathrm{k}$.

352. $\vec{F} = (2x - yz)\,\mathrm{i} + (2y - xz)\,\mathrm{j} + (2z - xy)\,\mathrm{k}$.

353. $\vec{F} = (2x + yz)\,\mathrm{i} + (2y + xz)\,\mathrm{j} + (2z + xy)\,\mathrm{k}$.

354. $\vec{F} = (2x - 4yz)\,i + (2y - 4xz)\,j + (2z - 4xy)\,k$.
355. $\vec{F} = (2x - 3yz)\,i + (2y - 3xz)\,j + (2z - 3xy)\,k$.
356. $\vec{F} = (-3x + yz)\,i + (-3y + xz)\,j + (-2z - xy)\,k$.
357. $\vec{F} = (2x + 2yz)\,i + (2y + 2xz)\,j + (2z + 2xy)\,k$.
358. $\vec{F} = (4x + yz)\,i + (4y + xz)\,j + (4z + xy)\,k$.
359. $\vec{F} = (2x + 5yz)\,i + (2y + 5xz)\,j + (2z + 5xy)\,k$.
360. $\vec{F} = (2x + 3yz)\,i + (2y + 3xz)\,j + (2z + 3xy)\,k$.

7. РЯДЫ

361 – 370. Исследовать сходимость числового ряда:

361. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$.

362. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$.

363. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)}$.

364. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$.

365. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

366. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

367. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n!}$.

368. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

369. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3 - 2}$.

370. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

371 – 380. Найти интервал сходимости степенного ряда:

371. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt[n]{n}} x^n$.

372. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

373. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$.

374. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} x^n$.

375. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(2^n+1)} x^n$.

376. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$.

377. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}x^{n}$.

378. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}n!}{(n+1)^{n}}x^{n}$.

379. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}x^{n}}{\sqrt{(2n-1)3^{n}}}$.

380. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/3}}{n!}x^{n}$.

381 – 390. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001. Для этого подынтегральную функцию следует разложить в ряд, который затем почленно проинтегрировать:

381. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin x^{2}dx}{x^{2}}$.

382. $\int\limits_{0}^{0,5}x\ln(1+x^{2})dx$.

383. $\int\limits_{0}^{1}e^{-x^{2}/2}dx$.

384. $\int\limits_{0}^{1}x\sin x^{2}dx$.

385. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}\cos x dx$.

386. $\int\limits_{0}^{0,5}\sqrt{x}e^{-x}dx$.

387. $\int\limits_{0}^{0,5}\operatorname{arctg}x^{2}dx$.

388. $\int\limits_{0}^{0,5}\sqrt{1+x^{2}}dx$.

389. $\int\limits_{0}^{1}\cos\sqrt[3]{x}dx$.

390. $\int\limits_{0}^{0,5}x^{2}\ln(1+\sqrt{x})dx$.

391 – 400. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$:

391. $y'=\cos x+y^{2}$, $y(0)=1$.

392. $y'=e^{x}+y^{2}$, $y(0)=0$.

393. $y'=y+y^{2}$, $y(0)=3$.

394. $y'=2e^{y}-xy$, $y(0)=0$.

395. $y'=\sin x+y^{2}$, $y(0)=1$.

396. $y' = e^x + y$, $y(0) = 4$.

397. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 2$.

398. $y' = \sin x + 0{,}5y^2$, $y(0) = 1$.

399. $y' = 2e^y + xy$, $y(0) = 0$.

400. $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 5$.

8. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

401 – 410. Представить заданную функцию $w=f(z)$, где $z = x + iy$, в виде $w = u(x,y) + i\text{v}(x,y)$; проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке z_0 :

401. $w = 1/z$, $z_0 = -i$.

402. $w = iz^3$, $z_0 = 1 + i$.

403. $w = z^3 + z - i$, $z_0 = i$.

404. $w = ze^z$, $z_0 = -1 + i\pi$.

405. $w = e^{1-2iz}$, $z_0 = \pi/6$.

406. $w = \dfrac{1}{2z+3}$, $z_0 = (3i-3)/2$.

407. $w = (z+1)e^{2z}$, $z_0 = 0$.

408. $w = 2z^2 - iz$, $z_0 = 1 - i$.

409. $w = e^{1-2z}$, $z_0 = \pi i/3$.

410. $w=z^3+z^2+i$, $z_0 = 2i/3$.

411– 420. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$:

411. $w = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1 + 2i$.

412. $w = \dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = 1 + 3i$.

413. $w = \dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 2+i$.

414. $w=\dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0=-3-2i.$

415. $w=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+2i$.

416. $w=\dfrac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=-2-i$.

417. $w=\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-3+2i.$

418. $w=\dfrac{2z}{z^2-4}$, $z_0=2+2i.$

419. $w=\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=2-3i.$

420. $w=\dfrac{2z}{z^2+1}$, $z_0=2+i.$

421–430. Определить область (круг) сходимости данного ряда и исследовать сходимость его (расходится, сходится условно, сходится абсолютно) в точках z_1, z_2, z_3:

421. $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\dfrac{(z+i-1)^n}{n(n+1)}$, $z_1=0,$ $z_2=1-i,$ $z_3=-i$.

422. $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\dfrac{2^n(z-1)^n}{n(n^2+1)}$, $z_1=0,$ $z_2=1+\dfrac{i}{2},$ $z_3=\dfrac{5}{4}.$

423. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2i)^n(z+1)^n}{n^2}$, $z_1=0,$ $z_2=-1+\dfrac{i}{2},$ $z_3=-\dfrac{3}{4}.$

424. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-i)^n(z-2)^n}{3^n(n+1)}$, $z_1=0,$ $z_2=2+3i,$ $z_3=5-2i.$

425. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{2^n n}$, $z_1=1+i$, $z_2=3i,$ $z_3=-3+i.$

426. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2+i)^n}{2^n(n^2+1)}$, $z_1=2+3i,$ $z_2=4-i,$ $z_3=2-i.$

427. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+i)^n}{3^n(2n-1)}$, $z_1=0$, $z_2=2i$, $z_3=4+i$.

428. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-1+i)^n}{2^n(n^2+1)}$, $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=-1+i$.

429. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2)^n}{3^n(n+1)}$, $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=1+4i$.

430. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+2i)^n}{3^n n^2}$, $z_1=0$, $z_2=-5i$, $z_3=2+2i$.

431 – 440. При помощи вычетов вычислить данный интеграл по контуру l:

431. $\oint\limits_l \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(z-2i)}dz$, $l:|z+1-i|=3$.

432. $\oint\limits_l \dfrac{\sin z}{z^2(z+i)}dz$, $l:|z+1+i|=2$.

433. $\oint\limits_l \dfrac{z}{(z-3i)(z+2)^2}dz$, $l:|z+1-2i|=3$.

434. $\oint\limits_l \dfrac{e^{-2z}}{z^2(z+3i)}dz$, $l:|z+2i|=3$.

435. $\oint\limits_l \dfrac{1-z}{(z+1)(z+i)^2}dz$, $l:|z|=2$.

436. $\oint\limits_l \dfrac{z^2+1}{(z+2i)^2(z-1)}dz$, $l:|z+i|=3$.

437. $\oint\limits_l \dfrac{\cos z}{z^2(z+i)}dz$, $l:|z-i|=3$.

438. $\oint\limits_l \dfrac{1-z^2}{(z-i)^2(z+2)}dz$, $l:|z|=3$.

439. $\oint\limits_{l} \dfrac{e^{-3z}}{z^2(z+i)}dz$, $\qquad l: |z-1+i| = 3$.

440. $\oint\limits_{l} \dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+i)}dz$, $\qquad l: |z| = 2$.

9. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

441 – 450. Найти изображение заданного оригинала *f(t)*:

441. $f(t) = t\cos 2t\ ch2t$.
442. $f(t) = t^2 e^{3t}$.
443. $f(t) = t^2 \sin 3t$.
444. $f(t) = t\sin 2t\ sh2t$.
445. $f(t) = t^2 sh3t$.
446. $f(t) = \sin 2t\ e^{-2t}$.
447. $f(t) = t^2 ch4t$.
448. $f(t) = e^{-t} \sin 3t$.
449. $f(t) = e^{4t} \cos 2t$.
450. $f(t) = te^{t}$.

451– 460. Найти изображение заданного оригинала *f(t):*

451. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\cos 3\tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$.
452. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\sin 7\tau \sin 3\tau}{\tau} d\tau$.
453. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{ch3\tau - \cos 4\tau}{\tau} d\tau$.
454. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{e^{-2\tau} - \tau - 1}{\tau} d\tau$.
455. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{e^{2\tau} - 1 - 3\tau}{\tau} d\tau$.
456. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{1 - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$.
457. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\cos 2\tau - \cos 3\tau}{\tau} d\tau$.
458. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{ch2\tau - ch5\tau}{\tau} d\tau$.
459. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{e^{3\tau} - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$.
460. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\cos 4\tau - e^{3\tau}}{\tau} d\tau$.

461 — 470. Построить график функции *u(t)* и найти ее изображение, используя для этого теорему запаздывания, если $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$:

461. $u_1(t) = \begin{cases} 4\sin wt & при \quad wt \geq 0, \\ 0 & при \quad wt < 0; \end{cases}$

$$u_2(t)=\begin{cases}4\sin(wt-\pi) & при \quad wt\ge\pi,\\ 0 & при \quad t<\pi.\end{cases}$$

462. $$u_1(t)=\begin{cases}t & при \quad t\ge 0,\\ 0 & при \quad t<0;\end{cases}$$

$$u_2(t)=\begin{cases}-t+3 & при \quad t\ge 3,\\ 0 & при \quad t<3.\end{cases}$$

463. $$u_1(t)=\begin{cases}-3\sin wt & при \quad wt\ge 0,\\ 0 & при \quad wt<0;\end{cases}$$

$$u_2(t)=\begin{cases}-3\sin(wt-\pi) & при \quad wt\ge\pi,\\ 0 & при \quad wt<\pi.\end{cases}$$

464. $$u_1(t)=\begin{cases}-t & при \quad t\ge 0,\\ 0 & при \quad t<0;\end{cases}$$

$$u_2(t)=\begin{cases}t-4 & при \quad t\ge 4,\\ 0 & при \quad t<4.\end{cases}$$

465. $$u_1(t)=\begin{cases}2\cos wt & при \quad wt\ge 0,\\ 0 & при \quad wt<0;\end{cases}$$

$$u_2(t)=\begin{cases}2\cos(wt-\pi) & при \quad wt\ge\pi,\\ 0 & при \quad wt<\pi.\end{cases}$$

466. $$u_1(t)=\begin{cases}t & при \quad t\ge 0,\\ 0 & при \quad t<0;\end{cases}$$

$$u_2(t)=\begin{cases}-(t-3) & при \quad t\ge 3,\\ 0 & при \quad t<3.\end{cases}$$

467. $$u_1(t)=\begin{cases}-t & при \quad t\ge 0,\\ 0 & при \quad t<0;\end{cases}$$

$$u_2(t)=\begin{cases}t-3 & при \quad t\ge 3,\\ 0 & при \quad t<3.\end{cases}$$

468. $u_1(t)=\begin{cases}-t & \text{при } t\ge 0,\\ 0 & \text{при } t<0;\end{cases}$

$u_2(t)=\begin{cases}t-5 & \text{при } t\ge 3,\\ 0 & \text{при } t<3.\end{cases}$

469. $u_1(t)=\begin{cases}-4\cos wt & \text{при } wt\ge 0,\\ 0 & \text{при } wt<0;\end{cases}$

$u_2(t)=\begin{cases}-4\cos(wt-\pi) & \text{при } wt\ge \pi,\\ 0 & \text{при } wt<\pi.\end{cases}$

470. $u_1(t)=\begin{cases}-t & \text{при } t\ge 0,\\ 0 & \text{при } t<0;\end{cases}$

$u_2(t)=\begin{cases}t-2 & \text{при } t\ge 2,\\ 0 & \text{при } t<2.\end{cases}$

471 – 480. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

471. $x'''+x''=\sin t$; $x(0)=1$, $x'(0)=1$, $x''(0)=0$.

472. $x''-x'=te^t$; $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

473. $x'''-2x''+x'=4$; $x(0)=1$, $x'(0)=0$, $x''(0)=-2$.

474. $x''-9x=e^{-2t}$; $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

475. $x''+x'=t^2+2t$; $x(0)=4$, $x'(0)=-2$.

476. $x''+9x=\cos 3t$; $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

477. $x'''+x=1$; $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$.

478. $x''-4x=t-1$; $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

479. $x''+2x'+x=\cos t$; $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

480. $x''+2x'+x=\cos t$; $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 4-е изд. – М.: Наука, 1980.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985. Т.1,2.

3. Бугров Н.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.

4. Бугров Н.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1981.

5. Жевняк М.Р., Карпук А.А. Высшая математика. Ч. I, II. – Мн.: Высш. шк., 1992, 1993.Ч. III, IV – Мн.: Обозрение, 1997.

6. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1978.

7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1965–1980.

8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1964–1978.

9. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения). – М.: Наука, 1971.

10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I, II. – М.: Высш. шк., 1980.

11. Гурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. шк., 1979.

12. Методические указания по высшей математике для студентов заочной формы обучения (с применением учебного телевидения). Ч. I, II. – М.: МРТИ, 1989.

13. Элементы теории вероятностей и математической статистики: Метод. пособие для студентов заочной формы обучения.– М.: МРТИ, 1986.

14. Высшая математика: Метод. указания и контрольные задания (с программой). - М.: Высш. шк., 1983.

Св.план 2003, поз. 47

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Контрольные задания для студентов
радиотехнических специальностей
заочной формы обучения

Составитель **Карпук** Андрей Андреевич

Редактор Н.А. Бебель
Компьютерная верстка И.Э. Антонович

Подписано в печать 10.05.2004.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура "Таймс".	Печать ризографическая.	Усл.печ.л. 2,44.
Уч.-изд. л. 1,8.	Тираж 1000 экз.	Заказ 46.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
Лицензия ЛП №156 от 30.12.2002.
Лицензия ЛВ №509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки, 6.