Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Подготовительные курсы

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

для слушателей заочных подготовительных курсов БГУИР

2-е издание, исправленное

Минск 2003

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 Я 73
М54

Рецензент: доцент кафедры высшей математики БГУИР Н. И. Кобринец

Составители: В. И. Васильева, Л. К. Юхо

Методические указания и контрольные задания по математике М 54 Для слушателей заочных подготовительных курсов БГУИР. / Сост. В. И. Васильева, Л. К. Юхо. — 2-е изд. испр. — Мн.: БГУИР, 2003. — 80 с: ил.

Приведены одиннадцать контрольных работ по основным разделам школьного курса математики в соответствии с программой вступительных экзаменов в вузы, подробно разобраны решения аналогичных примеров и задач, что в значительной мере должно облегчить самостоятельное решение и оформление задач, предлагаемых в контрольных работах.

Методические указания и контрольные задания предназначены для слушателей заочных подготовительных курсов БГУИР.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 Я 73

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Цель методических указаний — помочь слушателям подготовительных курсов подготовиться к поступлению в вуз и ознакомить их с примерным уровнем требований на вступительных экзаменах по математике в БГУИР.

Настоящие методические указания не претендуют на полноту охвата всей программы по математике за среднюю школу. Для понимания решений приведенных примеров и успешного выполнения рекомендуемых контрольных работ необходимо, в первую очередь, очень внимательно изучить соответствующие вопросы программы вступительных экзаменов в вузы.

Правила выполнения контрольных работ следующие.

Работы необходимо выполнять самостоятельно. Рекомендуется все контрольные задачи решать в порядке номеров, указанных в работах, условия задач записывать полностью. Решение каждой задачи довести до окончательного ответа. Если вы испытываете затруднения при решении задачи, то следует обратиться за письменной консультацией и привести свой предполагаемый план решения.

Получив проверенную работу, слушатель должен исправить отмеченные преподавателем ошибки и недочеты.

Тема 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на следующие вопросы: множество действительных чисел, его подмножества, модуль действительного числа, арифметический корень из действительного числа, степени и корни, действия над ними, формулы сокращенного умножения, разложение многочлена на множители, пропорциональное деление, затем рассмотреть ряд примеров, решенных перед контрольной работой, и выполнить контрольную работу.

Пример 1. Выполните перевод периодических дробей в обыкновенные:

а) 0, (81), б) 2,3 (27), в) 0,51 (9).

Решение.

а) Положим $x = 0,(81) = 0,818181\ldots$

Умножим x на такое число, чтобы запятая сдвинулась вправо ровно на период, в данном случае на 100, получим:

$100x = 81,8181\ldots = 81,(81)$.

Выполним вычитание :

$$100x - x = 81,(81) - 0,(81),$$

$$99x = 81, \qquad x = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}.$$

Ответ : $0,(81) = \dfrac{9}{11}$.

б) Положим $x = 2,3\,(27) = 2,327272\ldots$

Умножим x сначала на 10, чтобы получилась чистая периодическая дробь, затем на 1000. Получим $10x = 23,(27)$, $1000x = 2327,(27)$.

Выполним вычитание :

$$1000x - 10x = 2327,(27) - 23,(27),$$

$$990x = 2304, \qquad x = \frac{2304}{990} = 2\frac{18}{55}.$$

Ответ : $2,3(27) = 2\dfrac{18}{55}$.

в) Положим $x = 0,15\,(9)$, $100x = 15,(9)$

$$1000x = 159,(9), \qquad 1000x - 100x = 159,(9) - 15,(9),$$

$$900x = 144, \qquad x = \frac{144}{900} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0{,}16.$$

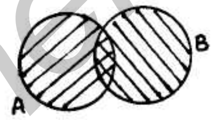
Ответ : $0{,}15(9) = 0{,}16$.

Вообще любое целое число или конечная десятичная дробь могут быть представлены в виде бесконечной периодической дроби с периодом 0 или 9. Например : 1 = 1, (0) = 0, (9), 5 = 5, (0) = 4, (9); 2,7 = 2,7 (0) = 2,6 (9).

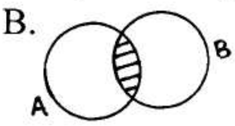
Примечание. Перевод периодических дробей в обыкновенные можно выполнять, пользуясь формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q|<1$).

<u>Пример 2.</u> Даны множества $A = \{(x; y) / x^2 + y^2 \le 9\}$ и
$B = \{(x; y) / x^2 + y^2 > 1\}$.
Найдите AU B и A∩B.

<u>Решение.</u> По определению **объединением** двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A или множества B.
AU B = {x / x Є A или x Є B }.



Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих множествам A и B.
A∩B = {x / x Є A и x Є B }.



В данном примере множество A графически представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом R = 3, множество B – внешность круга с центром в начале координат и радиусом R = 1, не включая границу.

AU B = {(x; y) / x Є R, y Є R }.
$A\cap B = \{(x; y) / 1 < x^2 + y^2 \le 9\}$.

Примечание. В дальнейшем при решении систем уравнений и неравенств будут использоваться обозначения :

{ - знак, соответствует пересечению множеств, заменяет союз “и”.
[- знак, соответствует объединению множеств, заменяет союз “или”.
∃ – знак существования, заменяет слово “существует”, ”можно найти”.

$\forall$ - знак общности, заменяет слова "всякий", "любой".

<u>Пример 3</u>. Найдите все пары натуральных чисел m и n, сумма которых равна 85, НОК (m, n) = 102.

<u>Решение</u>. Имеем систему $\begin{cases} m+n=85 \\ НОК(m,n)=102 \end{cases}$

Обозначим НОД (m, n) = d, тогда $m=m_1d$; $n=n_1d$, где m_1 и n_1 - натуральные числа, не имеющие общих множителей. Используя формулу

$НОК(m,n)=\dfrac{m\cdot n}{НОД(m,n)}$ и введенные обозначения, запишем систему в виде

$$\begin{cases}(m_1+n_1)d=85 \\ m_1\cdot n_1d=102\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m_1+n_1)d=5\cdot 17 \\ m_1\cdot n_1\cdot d=6\cdot 17\end{cases} \Rightarrow d=17$$

$$\begin{cases}m_1+n_1=5 \\ m_1\cdot n_1=6\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m_1=3 \\ n_1=2\end{cases} \\ \begin{cases}m_1=2 \\ n_1=3\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=3\cdot 17=51 \\ n=2\cdot 17=34\end{cases} \\ \begin{cases}m=2\cdot 17=34 \\ n=3\cdot 17=51\end{cases}\end{array}\right. .$$

Ответ: {(51; 34), (34;51)}.

<u>Пример 4</u>. Найдите все пары целых чисел $(x\,;y)$, удовлетворяющих условию: $x^2-47=y^2$.

<u>Решение</u>. $\begin{cases}x^2-y^2=47, \\ x,y\in Z.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x+y)=47, \\ x,y\in Z.\end{cases}$

Так как 47 = 47·1 = 1·47 = (-47) ·(-1) = (-1) ·(-47), то данная система будет равносильна совокупности четырех систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=1, \\ x+y=47.\end{cases} \\ \begin{cases}x-y=47, \\ x+y=1.\end{cases} \\ \begin{cases}x-y=-47, \\ x+y=-1.\end{cases} \\ \begin{cases}x-y=-1, \\ x+y=-47.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=24, \\ y=23.\end{cases} \\ \begin{cases}x=24, \\ y=-23.\end{cases} \\ \begin{cases}x=-24, \\ y=23.\end{cases} \\ \begin{cases}x=-24, \\ y=-23.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ : { (24; 23), (24; -23), (-24, 23), (-24; -23) }.

Прежде чем упрощать выражения, содержащие степени и корни, повторите действия со степенями, а также формулы сокращенного умножения:

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$.
5. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Дроби, входящие в выражение, сначала нужно упростить, сокращая числитель и знаменатель на общие множители, если они существуют. Проводя преобразования, надо учитывать область определения выражения. Обратите внимание на определение модуля $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

Например: $\left|\sqrt{3} - 7\right| = 7 - \sqrt{3}$, т.к. $\sqrt{3} - 7 < 0$

$\left|\sin 200^0\right| = -\sin 200^0$, т.к. $\sin 200^0 < 0$

$\left|2^x\right| = 2^x$, т.к. $2^x > 0, \forall x \in R$.

Арифметический корень : $\sqrt[n]{a} = c, \quad a \geq 0, \quad c \geq 0, \quad c^n = a$. Например:

$\sqrt[3]{27} = 3$ - арифметический корень,

$\sqrt{25} = 5$ - арифметический корень,

$\sqrt[5]{-32} = -2$ - не является арифметическим корнем.

Принято обозначать арифметический корень четной степени знаком $\sqrt[2n]{\ldots}, \left(\sqrt[2n]{a} \geq 0, a \geq 0\right)$. В частном случае $\sqrt{a^2} = |a|$.

Запись $\sqrt{a^2} = \pm a$ неправильная. Почему?

Пример 5. Упростите выражение $\dfrac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 4x}}{x^2 + 1 - 2|x|}$.

Решение. Обозначим выражение буквой А и преобразуем его:

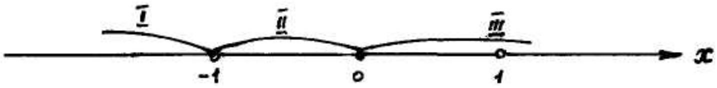
$$A = \frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2}}{|x|^2 - 2|x| + 1} = \frac{(x-1)|x+1|}{(|x|-1)^2}.$$

Найдем область определения выражения А:

Д(А): $|x| - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow \quad x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

Найдем те значения x, при переходе через которые выражения под модулем меняют свой знак: x = -1, x = 0.

Нанесем эти значения на координатную ось



Область определения Д(А) разбилась на три интервала, на каждом из которых рассмотрим выражение А.

Установим знаки выражений, стоящих под модулем, на этих интервалах:

	$(-\infty;-1)$	$(-1,0)$	$[0;1)\cup(1;+\infty)$
x+1:	-	+	+
x:	-	-	+

Знаки выражений определяем, придавая x какое-нибудь значение, принадлежащее этому интервалу:

1. $$\begin{cases} x<-1 \\ A=\dfrac{(x-1)(-x-1)}{(-x-1)^2}=\dfrac{x-1}{-x-1}=-\dfrac{x-1}{x+1}. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} -1<x<0 \\ A=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(-x-1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{x+1}. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 0\le x<+\infty, x\ne 1 \\ A=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x+1}{x-1}. \end{cases}$$

Ответ: $$A=\left[\begin{array}{ll} -\dfrac{x-1}{x+1}, & x\in(-\infty;-1) \\ \dfrac{x-1}{x+1}, & x\in(-1,0) \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x\in[0;1)\cup(1,+\infty)\ . \end{array}\right.$$

Теперь познакомьтесь с делением многочлена на многочлен «углом». Многочлены – делимое и делитель – приведите к стандартному виду. Например.

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{r} 5x^4-3x^3+2x^2-7x+3 \\ \underline{5x^4-10x^3} \end{array} & \dfrac{x-2}{5x^3+7x^2+16x+25-} \quad \textit{частное} \\
\qquad -\begin{array}{r} 7x^3+2x^2-7x+3 \\ \underline{7x^3-14x^2} \end{array} & \quad 1\ \textit{остаток} \\
\qquad\qquad -\begin{array}{r} 16x^2-7x+3 \\ \underline{16x^2-32x} \end{array} & \quad 2\ \textit{остаток} \\
\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{r} \underline{25x+3} \\ \underline{25x-50} \\ 53 \end{array} & \quad \begin{array}{l} 3\ \textit{остаток} \\ \\ 4\ \textit{остаток} \end{array}
\end{array}
$$

Чтобы получить старший член частного, надо старший член делимого разделить на старший член делителя $(5x^4 : x = 5x^3)$.

Затем умножить на делитель $(5x^3(x-2))$ и результат вычесть из делимого, подписывая подобные члены под подобными.

Получим первый остаток от деления многочленов $(7x^3 + 2x^2 - 7x + 3)$.

Следующий член частного получаем делением старшего члена 1 остатка на старший член делителя $(7x^3 : x = 7x^2)$, умножаем его на $(x-2)$, получаем $(7x^3 - 14x^2)$ и вычитаем из первого остатка, получим $(16x^2 - 7x + 3)$ и т.д.

Процесс деления прекращаем, когда остаток не будет делится на делитель, т.е. степень остатка станет меньше степени делителя, или когда остаток получается равным нулю.

В нашем примере 53 не делится на $(x-2)$.

Замечание.

Многочлен-делимое можно представить так:

$$5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = (5x^3 + 7x^2 + 16x + 25)\cdot(x-2) + 53.$$

Пример 5.

Выделите целую часть дроби $\dfrac{2x^3 - 3x + 1}{x+2}$.

Решение.

Выполним деление «углом» многочленов:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{r} 2x^3-3x+1 \\ \underline{2x^2+4x^2} \end{array} & \dfrac{x+2}{2x^2-4x+5} \\
\qquad -\begin{array}{r} -4x^2-3x+1 \\ \underline{-4x^2-8x} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{r} 5x+1 \\ \underline{5x+10} \\ 9 \end{array} &
\end{array}
$$

Заметьте, что члену $4x^2$ нет подобного, поэтому его переписываем в 1 остаток, помня, что выполняется вычитание:

$$(2x^3 - 3x + 1) - (2x^3 + 4x^2) = -4x^2 - 3x + 1.$$

Итак, $\dfrac{2x^3 - 3x + 1}{x + 2} = 2x^2 - 4x + 5 - \dfrac{9}{x + 2}$.

Ответ: $2x^2 - 4x + 5$.

Замечание .

Выделение целой части дроби аналогично правилу перевода неправильной обыкновенной дроби в правильную:

$\dfrac{25}{6} = 4 + \dfrac{1}{6} = 4\dfrac{1}{6}$, 25 : 6 = 4 (1 в остатке).

При решении различных задач встречаются задачи на пропорциональное деление.

Вспомните теорию:

1. Основное свойство ряда равных отношений:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n},$$

где a_1, a_2, …, a_n, b_1, …, b_n - числа .

2. Две величины x и y называются прямо пропорциональными, если $\dfrac{y}{x} = k$, или $y = k \cdot x$, k – коэффициент пропорциональности.

Две величины x и y называются обратно пропорциональными, если $x \cdot y = k$, или $y = \dfrac{k}{x}$, k – коэффициент обратной пропорциональности.

3. ***<u>Задача 1</u>***.

Число A разделить на n слагаемых прямо пропорционально числам a_1, a_2, …, a_n.

Обозначим искомые слагаемые x_1, x_2, …, x_n. Тогда

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Отсюда следует :

$$\frac{x_i}{a_i} = \frac{A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \Rightarrow \qquad x_i = \frac{a_i A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Замечание .

$\dfrac{A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = k$ k – коэффициент прямой пропорциональности.

Задача 2.

Число А разделить на n слагаемых обратно пропорционально числам a_1, a_2, …, a_n.

Обозначим искомые слагаемые буквами x_1, x_2, …, x_n. Тогда

$a_1 x_1 = a_2 x_2 = ... = a_n x_n$, или

$$\frac{x_1}{1/a_1} = \frac{x_2}{1/a_2} = ... = \frac{x_n}{1/a_n} = \frac{x_1 + x_2 + ... x_n}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n} = \frac{A}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n}.$$

Отсюда следует $\dfrac{x_i}{1/a_i} = \dfrac{A}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n} \Rightarrow x_i = \dfrac{1/a_i A}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n}$,

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Замечание.

$\dfrac{A}{1/a_1 + 1/a_2 + ... + 1/a_n} = k$, k – коэффициент обратной пропорциональности.

Пример 6. Даны два подобных четырехугольника. Стороны одного из них равны 2; 3; 4; 5. Найдите стороны другого, если их сумма равна 98.

Решение. Обозначим искомые стороны x_1, x_2, x_3, x_4.

Тогда $\dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_2}{3} = \dfrac{x_3}{4} = \dfrac{x_4}{5} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2 + 3 + 4 + 5} = \dfrac{98}{14} = 7$.

$$\frac{x_1}{2} = 7 \Rightarrow x_1 = 14.$$

$$\frac{x_2}{3} = 7 \Rightarrow x_2 = 21.$$

$$\frac{x_3}{4} = 7 \Rightarrow x_3 = 28.$$

$$\frac{x_4}{5} = 7 \Rightarrow x_4 = 35.$$

Ответ: {14; 21; 28; 35}.

Пример 7. Высоты треугольника относятся как 3 : 4 : 6. Найдите стороны этого треугольника, если периметр равен 18.

Решение . Обозначим стороны треугольника a, b, c, a + b + c = 18. Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h \Rightarrow ah = 2S = k$, где k - коэффициент обратной пропорциональности, т.е. стороны треугольника обратно пропорциональны соответствующим высотам. Тогда $\dfrac{a}{1/3} = \dfrac{b}{1/4} = \dfrac{c}{1/6} = \dfrac{18}{9/12} = 24$,

$$a = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8, \qquad b = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6, \qquad c = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$$

Ответ : $\{8;\ 6;\ 4\}$.

Контрольная работа № 1

1. Даны множества $A = \{x \,/\, x \in [-1;1]\}$, $B = \{x \,/\, x \in (-\infty;0)\}$, $C = \{x \,/\, x \in [0;2]\}$. Найдите $A \cup C$, $A \cap C$, $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \cap C$.

2. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 25 умеют играть в шахматы, а 5 не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют играть в шахматы и плавать?

3. Найдите все числа вида $\overline{517XY}$, делящиеся на 6 и 9. В ответ запишите их количество.

4. Найдите два натуральных числа m и n, если $\begin{cases} m - n = 66 \\ HOK(m,n) = 360. \end{cases}$

5. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих условию $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

6. Найдите число, если 5% его равны

$$\frac{2\frac{11}{25} - 0{,}84\left(6,(8) : 2{,}58(3) - 0{,}41(6) \cdot 4\frac{4}{35}\right)}{7{,}605 : 7\frac{1}{2} + 3{,}086}.$$

7. Найдите x из пропорции $x : 9{,}8(9) = 0,(12) : 0{,}1(6)$.

8. Упростите выражения:

а) $\dfrac{12b - 4b^2}{2b + 3} + \dfrac{1}{2b - 3} : \left(\dfrac{4}{4b^2 - 9} - \dfrac{6b - 9}{8b^3 + 27}\right)$,

б) $\left(\dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \dfrac{3\sqrt{ab} - 3b}{a - b}\right)^2$.

9. Упростите выражения:

а) $\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 5)^4} - \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$,

б) $\dfrac{|2x - 3| + 6}{2x - 3} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{x}\left(9x^{-1} + 4x - 12\right)}$.

10. Выделите целую часть дроби

$$\frac{2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1}{x^2 - x}.$$

11. Разделите число 798: а) прямо пропорционально числам 5, 6, 8; б) обратно пропорционально числам $\frac{2}{3}$; 0,75; 0,8.

12. В классе учится менее 50 учеников. За контрольную работу $\frac{1}{7}$ всех учеников получили пятерки, $\frac{1}{3}$ - четверки, $\frac{1}{2}$ - тройки. Остальные – двойки. Сколько учеников в классе?

Задачи для самостоятельного решения

1. Сумма трех натуральных чисел больше, чем их произведение, а сумма двух из них равна 33. Найдите эти числа.

2. Найдите все пары натуральных чисел n и m, удовлетворяющих системе:

а) $\begin{cases} m + n = 20 \\ HOD(m,n) = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} m \cdot n = 20 \\ HOK(m,n) = 10 \end{cases}$

в) $\begin{cases} HOK(m,n) = 2310 \\ HOD(m,n) = 11 \\ m > n \end{cases}$ В ответе запишите меньшее значение (m-n).

3. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих условию:

а) $x^2 + 23 = y^2$; б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$.

4. Искомое трехзначное число заканчивается цифрой 1. Если эту цифру перенести с последнего места на первое, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное число будет меньше искомого на 90. Найдите это число.

5. Найдите двухзначное число, если цифра единиц на 2 больше десятков, а произведение этого числа на сумму цифр равна 144.

6. Докажите $\sqrt{\underbrace{111...1}_{40} - \underbrace{222...2}_{20}} = \underbrace{333...3}_{20}$.

7. Разность $\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}$ является целым числом. Найдите это число.

8. Найдите все целые n, при которых дробь $\dfrac{5n^2+4n+1}{n+2}$ принимает целые значения. В ответ запишите их сумму.

9. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели обратно пропорциональны числам $1, \frac{1}{3}, \frac{11}{7}$ соответственно. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найдите эти дроби. В ответ запишите число, обратное наименьшей из дробей.

10. Вычислите $\sqrt{17+4\sqrt{13}}+\sqrt{\left|4\sqrt{13}-17\right|}-\sqrt{52}$.

11. Найдите число элементов множества А, которое содержит натуральные числа, кратные 4 и 3. Известно, что 70 чисел делятся на 4; 60 чисел делятся на 3, 32 числа делятся на 12.

12. Найдите значение выражений:

а) $\left(\dfrac{m+2}{m+1}-\dfrac{8m^2-8}{m^3-1}:\dfrac{4m+4}{m^2+m+1}\right)\cdot\dfrac{1}{m}$, при $m=-\dfrac{8}{7}$,

б) $\dfrac{2m\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, если $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}}+\sqrt{\dfrac{n}{m}},\right)$, $n \ge m > 0$.

13. Вычислите $\dfrac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}-\dfrac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}-\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}+3$.

Ответы:

1. 32; 1; 1.
2. а) (15; 5), (5;15)   б) (2; 10), (10;2)   в) 11.
3. а) (12; -11), (12; 11), (-12; -11), (-12; 11); б) (2; 3), (3; 2).
4. 211.
5. 24.

7. –6.

8. –8.

9. 10,5.

10. 0.

11. 98.

12. а) 7 б) n-m

13. 3 .

Тема 2. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

При изучении данной темы следует обратить внимание на определение функции, ее основные свойства: четность и нечетность, периодичность, монотонность, а также на условия существования обратной функции и ее нахождение. Надо уметь строить графики элементарных функций, функций, заданных несколькими аналитическими выражениями или содержащих модули.

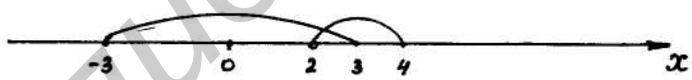
Пример 1. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\arccos(3-x)}+\frac{1}{\sqrt{4x^2-20x+25}}-\sqrt[3]{1-x}\,.$$

Решение. Данная функция есть алгебраическая сумма трех функций $y=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$, где $f_1(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\arccos(3-x)}$, $f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-20x+25}}$, $f_3(x)=-\sqrt[3]{1-x}$. Область определения D(y) есть пересечение областей определения каждой из функций, т.е. $D(y)=D(f_1)\cap D(f_2)\cap D(f_3)$.

Найдем их:

$$D(f_1):\begin{cases}9-x^2\ge 0\\ -1\le 3-x\le 1\\ \arccos(3-x)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\le 9\\ -4\le -x\le -2\\ 3-x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 3\\ 2<x\le 4\,.\end{cases}$$



$x\in(2;3]$.

$$D(f_2):4x^2-20x+25>0\Leftrightarrow(2x-5)^2>0\Rightarrow\begin{cases}x\in R\\ x\ne 2{,}5\,.\end{cases}$$

$D(f_3)$ $x\in R$, т.к. корень нечетной степени можно извлечь из любого действительного числа:

$$D(y):\begin{cases}2<x\le 3\\ x\in R, x\ne 2{,}5\Rightarrow x\in(2;2{,}5)\cup(2{,}5;3]\\ x\in R\,.\end{cases}$$

Ответ: $(2;\,2{,}5)\cup(2{,}5;\,3]$.

Пример 2. Установите, является данная функция четной или нечетной:

а) $f(x) = x \cdot |x| - 3x^5$, б) $f(x) = tg^2 x + \dfrac{3x^4 + 1}{|x|} - 1$,

в) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$.

Решение. Функция $y = f(x)$ называется четной, если: 1) область определения функции есть симметричное относительно точки О (0,0) множество; 2) для $\forall x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$, т.е.

$$y = f(x) \text{ - четная} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D(f), & -x \in D(f), \\ \forall x \in D(f), & f(x) = f(-x). \end{cases}$$

$$y = f(x) \text{ - нечетная} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D(f), & -x \in D(f), \\ \forall x \in D(f), & f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

а) $f(x) = x \cdot |x| - 3x^5$

1. $D(f) = R$, т.е. область определения есть симметричное относительно точки О (0,0) множество.

2. $f(-x) = -x \cdot |-x| - 3(-x)^5 = -x \cdot |x| + 3x^5 = -(x \cdot |x| - 3x^5) = -f(x)$. Значит, данная функция нечетная.

б) $f(x) = tg^2 x + \dfrac{3x^4 + 1}{|x|} - 1$.

1. $$D(f) = \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Область определения есть симметричное множество относительно точки О (0,0).

2. $f(-x) = (tg(-x))^2 + \dfrac{3(-x)^4 + 1}{|-x|} = -1 = tg^2 x + \dfrac{3x^4 + 1}{|x|} - 1 = f(x)$. Значит, функция четная.

в) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$.

$$D(f) = \begin{cases} x - 5 \geq 0, \\ 7 - x \geq 0 \end{cases}, \Rightarrow x \in [5;7].$$

Область определения несимметрична относительно точки О (0, 0). Значит, данная функция ни четная, ни нечетная. Такую функцию называют функцией общего вида.

Пример 3. Найдите период функции, если он существует:

а) $y = 2\sin\frac{x}{3} - 3\cos(1 - \frac{x}{5})$,

б) $y = \sin^2 2x + \sin 12x \cdot \cos 6x$.

Решение. Функция $y = f(x)$, $x \in D(y)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$, такое, что выполняются два условия: 1) если $x \in D(y)$, то $x \pm T \in D(y)$; 2) $f(x \pm T) = f(x)$. Число T называется периодом функции. Числа вида kT, $k \in Z, k \neq 0$ также являются периодами. Наименьший положительный период называют основным периодом, или просто периодом.

Известно, что функции вида $y = ASin(\omega x + \varphi)$, $y = ACos\,(\omega x + \varphi)$ имеют периодом число $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, а функции $y = Atg(\omega x + \varphi)$, $y = Actg(\omega x + \varphi)$ имеют период $T = \frac{\pi}{|\omega|}$. Если функция $y = f(x)$ есть линейная комбинация периодических функций, т.е. $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, где c_1 и c_2 - постоянные, не равные нулю числа, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ периодические функции с периодами T_1 и T_2 соответственно, то периодом функции $y = f(x)$ является число T, в котором целое число раз содержатся периоды T_1 и T_2, т.е. $T = mT_1 = nT_2$, $m, n \in Z$.

Проверить, является ли данная функция периодической,можно по отношению $\frac{T_1}{T_2}$. Если $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{k}$ - число рациональное, то периоды T_1 и T_2 называются соизмеримыми и период T существует. Если $\frac{T_1}{T_2} \neq \frac{m}{k}$, т.е. является числом иррациональным, то периоды T_1 и T_2 несоизмеримы и T не существует.

а) $y = 2\sin\frac{x}{3} - 3\cos\left(1 - \frac{x}{5}\right)$.

Обозначим $y = y_1 + y_2$, где $y_1 = 2\sin\frac{x}{3}$, $T_1 = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$,

$y_2 = -3\cos\left(1 - \frac{x}{5}\right)$, $T_2 = \frac{2\pi}{1/5} = 10\pi$.

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{6\pi}{10\pi} = \frac{3}{5}$ - рациональное число, значит, период T существует.

$T = k \cdot 6\pi = m \cdot 10\pi$, $k, m \in Z$.

Подбором находим наименьшие целые положительные числа k = 5, m = 3, при которых равенство выполняется: $T = 5 \cdot 6\pi = 3 \cdot 10\pi = 30\pi$.

Ответ **:** 30π.

б) $y = \sin^2 2x + \sin 12x \cdot \cos 6x$.

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y = \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1}{2}(\sin 18x + \sin 6x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 18x + \frac{1}{2}\sin 6x$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}\cos 4x,\ T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\sin 18x,\ T_2 = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9},$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\sin 6x,\quad T_3 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Так как $\frac{T_1}{T_2} = \frac{9}{2}$, $\frac{T_2}{T_3} = \frac{3}{9}$, $\frac{T_1}{T_3} = \frac{3}{2}$ есть рациональные числа, то период T существует и равен $T = k\frac{\pi}{2} = m\cdot\frac{\pi}{9} = n\cdot\frac{\pi}{3}$, $k, m, n \in Z$,

при k = 2, m = 9, n = 3 T = π.

Ответ **:** π.

<u>Пример 4</u>. Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и множество значений прямой и обратной функций:

а) $y = 5\sin\frac{x}{3}$,

б) $y = \begin{cases} x-1, & x \in [-1;3), \\ 1-x, & x \in [3;+\infty). \end{cases}$

<u>Решение.</u>

Необходимым и достаточным условием существования обратной функции является взаимно однозначное соответствие между переменными x и y, т.е. одному значению $x \in D(y)$ ставится в соотствие одно значение $y \in E(y)$ и обратно : одному значению $y \in E(y)$ соответствует одно значение $x \in D(y)$.

Достаточным условием существования обратной функции является монотонность ее для $\forall x \in D(y)$. Это условие не является необходимым, так, дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ не является монотонной в области определения $D(f) = \left\{x / x \in R, \quad x \neq -\frac{d}{c}\right\}$, но обратная функция существует, т.к. между переменными существует взаимно однозначное соответствие.

Чтобы найти обратную функцию для функции

$y = f(x,) \quad x \in D(y), \quad y \in E(y)$,

надо:

1) проверить выполнимость условий существования обратной функции;

2) из уравнения $y = f(x)$ выразить $x = f^{-1}(y)$;

3) поменять обозначения переменных: x на y, а y на x.

Полученная таким образом функция $y = f^{-1}(x)$ называется обратной по отношению к данной. Область определения и множество значений для этих функций (их называют также взаимно обратными функциями) меняются местами. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

а) $y = 5\sin\frac{x}{3}$, $D(y) = \{x / x \in R\}$, $E(y) = \{y / y \in [-5;5]\}$.

Для данной функции обратная функция не существует, т.к. не выполняется взаимно однозначное соответствие между переменными. Одному значению y соответствует бесчисленное множество значений x. Но если рассмотреть функцию $y = 5\sin\frac{x}{3}$ на промежутке $\frac{x}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, на котором она монотонно возрастает, а значит, каждое свое значение принимает ровно один раз, то для нее можно указать обратную. Итак, имеем $y = 5\sin\frac{x}{3}$,

$D(y) = \left\{x / x \in \left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\right\}$,

$E(y) = \{y / y \in [-5;5]\}$.

1. Выражаем x через y:

$\frac{x}{3} = \arcsin\frac{y}{5} \Rightarrow x = 3\arcsin\frac{y}{5}$.

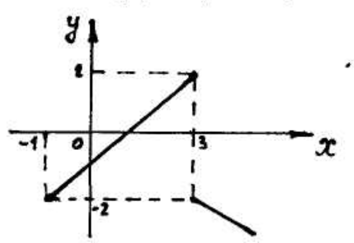
2. Заменяем y на x, а x на y, получим $y = 3\arcsin\frac{x}{5}$ - обратная функция. Для нее $D(y) = \{x / x \in [-5;5]\}$, $E(y) = \left\{y / y \in \left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\right\}$.

Ответ: $y = 3\arcsin\frac{x}{3}$.

б) $y = \begin{cases} x-1, & x \in (-1,3) \\ 1-x, & x \in [3,+\infty) \end{cases}$.

Функция задана двумя формулами, для нее $D(y) = (-1,\infty)$, $E(y) = (-\infty,2)$.

График данной функции имеет вид



Между переменными существует взаимно однозначное соответствие (хотя функция не монотонная), поэтому для нее существует обратная функция. Найдем ее.

Рассмотрим функцию на промежутках.

I. $y = x - 1, \quad x \in (-1;3), \quad y \in (-2;2)$

1) выражением x через y получим $x = y + 1$,

2) меняем обозначения переменных $y = x + 1$,

$x \in (-2;2), \qquad y \in (-1;3)$.

2. $y = 1 - x, \quad x \in [3,+\infty), \quad y \in (-\infty;-2]$

1) выражением x через y получим $x = 1 - y$,

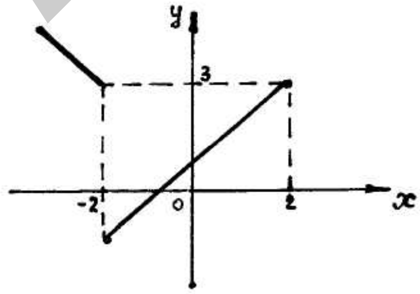
2) меняем обозначения переменных $y = 1 - x$,

$x \in (-\infty;-2], \qquad y \in [3;+\infty)$.

Итак, получаем обратную функцию

$$y = \begin{cases} 1 - x, & x \in (-\infty,-2], \\ x + 1, & x \in (-2,2). \end{cases}$$

График обратной функции имеет вид



Для нее $D(y) = (-\infty,+2), \qquad E(y) = (-1,+\infty)$.

При решении многих задач по тригонометрии приходится пользоваться теорией обратных тригонометрических функций. Ниже приводим формулы, которые желательно запомнить.

1.
$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$
$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad x \in [-1;1]$$
$$\arcsin(\sin x) = x, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

2.
$$0 \le \arccos x \le \pi$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$
$$\cos(\arccos x) = x, \qquad x \in [-1;1]$$
$$\arccos(\cos x) = x, \qquad x \in [0;\pi]$$

3.
$$-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$$
$$arctg(-x) = -arctgx$$
$$tg(arctgx) = x, \qquad x \in R$$
$$arctg(tgx) = x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

4.
$$0 < arcctgx < \pi$$
$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$$
$$ctg(arcctgx) = x, \qquad x \in R$$
$$arcctg(ctgx) = x, \qquad x \in (0;\pi)$$

Пример 5. Вычислите: а) $arcctg(ctg(-5{,}2))$; б) $\sqrt{2}ctg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. а) $arcctg(ctg(-5{,}2)) \neq -5{,}2$, т.к. $-5{,}2 \notin (0;\pi)$

$$arcctg(ctg(-5{,}2)) = arcctg(-ctg5{,}2) = \pi - arcctg(ctg5{,}2) =$$
$$= \pi - arcctg(ctg(5{,}2-\pi)) = \pi - (5{,}2-\pi) = 2\pi - 5{,}2 = 1{,}08, \qquad 1{,}08 \in (0,\pi)$$

Ответ: 1,08.

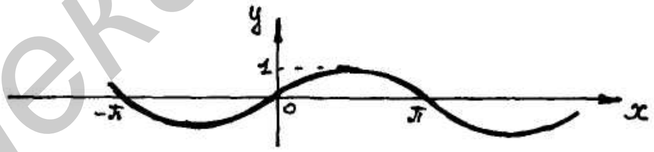
б) $$\sqrt{2}ctg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{2}ctg\left(-\arcsin\frac{1}{3}\right) = -\sqrt{2}ctg\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) =$$
$$= -\sqrt{2}\,\frac{\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)} = -\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{1}{3})}}{\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)} = -\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} = -4.$$

Ответ: -4.

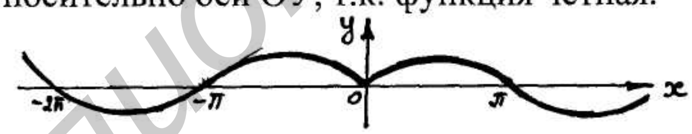
Пример 6. Постройте графики:

а) $y = \sin x$, б) $y = \sin|x|$, в) $y = |\sin x|$, г) $|y| = \sin x$.

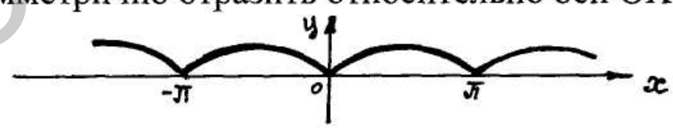
Решение. а) $y = \sin x$,



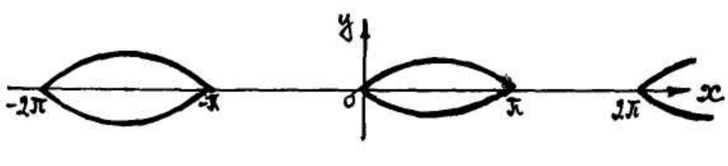
б) $y = \sin|x|$, надо построить график $y = \sin x$, для $x \ge 0$ и симметрично отразить его относительно оси ОУ, т.к. функция четная.



в) $y = |\sin x|$, надо построить график $y = \sin x$ и участки, расположенные ниже оси ОХ, симметрично отразить относительно оси ОХ.



г) $|y| = \sin x$, т.к. $|y| \ge 0$, то $\sin x \ge 0$; $x \in [2k\pi; \pi + 2k\pi]$, надо построить график $y = \sin x$, $y \ge 0$ и симметрично отразить относительно оси ОХ.



Пример 7. Изобразите на координатной плоскости множество точек $\{(x;y) / x + y \le 3; \quad y + 3 > x^2 + 2x\ .\}$

Решение.

1. Строим прямую $x + y = 3$, заметим, что точки, лежащие над прямой, удовлетворяют условию $y > 3 - x$, точки, лежащие под прямой, будут удовлетворять условию $y < 3 - x$.

Значит, точки, координаты которых удовлетворяют условию $y \le 3 - x$, лежат на прямой и под прямой.

2. Строим параболу $y + 3 = x^2 + 2x \Rightarrow y = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 4$. Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > (x+1)^2 - 4$, лежат внутри параболы, исключая саму параболу.

3. Точки, координаты которых удовлетворяют обоим неравенствам, будут находиться в области, ограниченной параболой (исключая кривую), и прямой, включая прямую.

Контрольная работа № 2

1. Найдите область определения функций:

а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1-|x|}} - \sqrt[6]{4-x}$, б) $y = \sqrt{\sin 5x} - ctg 5x$,

в) $y = \arcsin \dfrac{x^2 - 1}{3}$.

2. Установите , является ли данная функция четной или нечетной:

а) $y = x\sqrt{x-5}$, б) $y = \sin^4 x - x^2 + 5$, в) $y = \sqrt[3]{(x-5)^2} - \sqrt[3]{(x+5)^2}$.

3. Найдите периоды функций, если они существуют :

а) $y = 3 + 5tg(1 - 3x)$, б) $y = 15\sin^2 12x + 12\cos^2 15x$,

в) $y = \cos(x\sqrt{2}) - 2\sin 5x$.

4. Найдите функцию обратную данной, если она существует, и укажите область определения и множество значений прямой и обратной функций:

а) $y = \dfrac{2+x}{3x-1}$, б) $y = 2\cos 3x$, в) $y = \begin{cases} 2x - 3, & x \in (-\infty, 1), \\ -x, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$ Постройте график функции.

5. Вычислите:

а) $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + arctg(-1) - \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3arcctg(-\sqrt{3})$, б) $\sqrt{5}\sin\left(arctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, в) $\arccos(\cos 4{,}8)$.

6. Постройте графики:

а) $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+x$,

б) $y=-\sqrt{25-x^2}$,

в) $y=x^2-7x+6$,

г) $y=x^2-7|x|+6$,

д) $y=\left|x^2-7x+6\right|$,

е) $|y|=x^2-7x+6$.

7. Изобразите на координатной плоскости множество точек:

а) $\{(x;y)/|x|-|y|=1\}$,

б) $\{(x;y)/1\le x\le 2, \quad y<x\}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите множество значений функций:

а) $y=\sqrt{2x-x^2-1}-\frac{1}{1-x}$, б) $y=2\cos^2 3x-5\sin^2 3x$.

2. Найдите период функции:

а) $y=tg\frac{4\pi x}{3}-tg\frac{3\pi x}{11}$,

б) $y=tg\frac{2\pi x}{3}-3ctg\frac{3\pi x}{5}+3\sin 3\pi x$,

в) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

3. При каких значениях x функция $y=|x-1|+|x-3|$ имеет наименьшее значение? В ответ запишите наименьшее значение функции.

4. Найдите функцию, обратную данной:

а) $y=x^2+1, \quad x\in(-\infty,0]$, б) $y=\frac{x^2+3x}{x^2-2x}$.

5. Вычислите: а) $arcctg\left(ctg\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$,

б) $tg\left(5arctg\frac{\sqrt{3}}{3}-0{,}25\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

в) $20\cos\left(2arctg\frac{1}{3}\right)$.

6. Постройте графики функций:

а) $y=\sin x+\sqrt{1-\cos^2 x}$, б) $y=\cos x\cdot tgx$, в) $y=\frac{x^2-9}{|x+3|}$,

г) $y=\left|x-|x|\right|$, д) $y=\frac{x+1}{x-2}$, е) $y=\frac{|x|+1}{|x|-2}$,

ж) $y=\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$, з) $|y|=\frac{x+1}{x-2}$,

и) $y=\begin{cases}1+x, & x\in(-\infty;0]\\ (x-1)^2, & x\in(0;2]\\ \frac{1}{x-2}, & x\in(2;+\infty)\end{cases}$

Ответы: 1. а) $E(y)=\{y/y\in 0\}$; б) $E(y)=[-5{,}2]$.

2. а) 33; б) 30; в) $\frac{\pi}{2}$.

3. 2.

4. а) $y=-\sqrt{x-1}$; б) $y=\frac{2x+3}{x-1}$.

5. а) $\frac{4}{5}\pi$, б) -1; в) 16.

Тема 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

При изучении данной темы особое внимание следует обратить на область определения уравнения (О.О.У), понятия равносильности уравнений, решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля, решение иррациональных уравнений, уравнений с параметром. Полезно знать теоремы алгебры, не входящие в программу вступительных экзаменов, но часто применяемые при решении уравнений.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P_n(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + d$ на двучлен $x - x_0$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = x_0$.

Следствие. Чтобы многочлен $P_n(x)$ делился на двучлен $(x - x_0)$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы число x_0 было его корнем, т.е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема. Если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + d = 0$ имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Пример 1. Решите уравнение $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$. В ответ запишите сумму корней.

Решение. Так как коэффициенты многочлена целые числа, то уравнение может иметь целый корень, который ищем среди делителей свободного члена, т.е. среди чисел ± 1, ± 3. Непосредственно убеждаемся, что $x = -1$ является корнем уравнения. Разделим многочлен $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ на двучлен $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{2x^3 + 2x^2} \qquad\qquad\quad & 2x^2 - 5x - 3 \\
-5x^2 - 8x - 3 & \\
-\ \underline{-5x^2 - 5x} \qquad & \\
-3x - 3 & \\
-\ \underline{-3x - 3} & \\
0 &
\end{array}$$

Тогда уравнение запишется в виде

$$(x+1)(2x^2 - 5x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0, \end{array} \right.$$ корнями будут

$x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -0{,}5$. Сумма корней будет равна $-1 + 3 - 0{,}5 = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

Пример 2. Решите уравнение $-2|1 + x| + 5|2 - x| = 3x$.

Решение. Найдем значения x, при которых выражения под модулем обращаются в ноль и нанесем их на числовую ось, т.е. $x = -1$, $x = 2$.

	I	II	III
$1+x$:	$-$	$+$	$+$
$2-x$:	$+$	$+$	$-$

Рассмотрим решение уравнения на каждом интервале:

1. $\begin{cases} x < -1 \\ 2 + 2x + 5(2 - x) = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

2. $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ -2 - 2x + 5(2 - x) = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x = \dfrac{8}{10} \end{cases} \Rightarrow x = 0{,}8\ .$

3. $\begin{cases} x > 2 \\ -2 - 2x - 10 + 5x = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Ответ: 0,8.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{2x-15} - \sqrt{x+16} = -1$.

Решение. Найдем область определения уравнения:

$$\text{О.О.У} = \begin{cases} 2x - 15 \ge 0 \\ x + 16 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{15}{2} \\ x \ge -16 \end{cases} \Rightarrow \quad x \ge \frac{15}{2}.$$

Перенесем один радикал в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$\sqrt{2x-15} + 1 = \sqrt{x+16}$$
$$(\sqrt{2x-15} + 1)^2 = (\sqrt{x+16})^2\ .$$

Получим уравнение $2\sqrt{2x-15} = 30 - x$.

Так как $2\sqrt{2x-15} \ge 0$, то $30 - x \ge 0 \ \Rightarrow \ x \le 30$.

Возведем уравнение еще раз в квадрат, получим квадратное уравнение $4(2x-15) = (30-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 68x + 960 = 0$, корнями которого являются $x_1 = 20, \quad x_2 = 48$.

Так как $x \le 30$, то $x_2 = 48$ корнем данного уравнения не является. Значит, корень уравнения $x = 20$.

Ответ: 20.

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{x-4}{x+2} + 3\dfrac{x+2}{x-4} = 4$.

Решение. Область определения уравнения $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 4 \end{cases}$. Обозначим

$\dfrac{x-4}{x+2} = y$, тогда уравнение запишется в виде $y + 3 \cdot \dfrac{1}{y} = 4$ или $y^2 - 4y + 3 = 0$.
Его корнями будут
$y = 1$ и $y = 3$. Тогда получим два уравнения, решим их.

1. $\dfrac{x-4}{x+2} = 1$

$\dfrac{x-4}{x+2} - 1 = 0$

$\dfrac{-6}{x+2} = 0$

уравнение решений не имеет.

2. $\dfrac{x-4}{x+2} = 3.$

$\dfrac{x-4}{x+2} - 3 = 0$

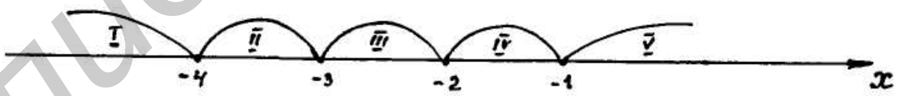
$\dfrac{-2x-10}{x+2} = 0$

$x = -5.$

Ответ **:** $x = -5$.

Пример 5. При каком значении a уравнение $\left|x^2 + 5x + 6\right| + \left|x^2 + 5x + 4\right| = a$ имеет более десяти решений?

Решение. Из условия следует, что $a \geq 0$. Определим знаки выражений, стоящі х под знаком модуля, на интервалах и рассмотрим решение уравнения на каждом из них. Разложим квадратные трехчлены на множители
$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, $\quad x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$



$x^2 + 5x + 6$: + + − + +
$x^2 + 5x + 4$: + − − − +

На I и V интервалах $x \in (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$ и уравнение примет вид $2x^2 + 10x + 10 - a = 0$. Максимальное число решений в зависимости от a может быть равно двум.

На III интервале $x \in [-3; -2]$

$2x^2 + 10x + 10 + a = 0$. Максимальное число решений равно двум.

На II и IV интервалах $x \in (-4, -3) \cup (-2, -1)$ уравнение принимает вид $2 = a$ и решением его будет любое x из указанных промежутков.

Итак, при $a = 2$ уравнение имеет бесчисленное множество решений, а значит, больше 10.

При других значениях параметра a уравнение не может иметь более 10 решений.

***Ответ*:** 2.

Пример 6. Решите систему уравнений при всех значениях параметра a:
$\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 . \end{cases}$

При решении систем линейных уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ее исследуют на совместность.

1. Если коэффициенты при x и y не пропорциональны, т.е. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение.

Геометрически это означает, что прямые, определяемые каждым уравнением системы, пересекаются в одной точке.

2. Если коэффициенты при x, y и свободные члены пропорциональны, т.е. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Геометрически это означает, что прямые совпадают.

3. Если коэффициенты при x и y пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам, т.е. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система решений не имеет (не совместна).

Геометрически это означает, что прямые параллельны.

Решение. Исследуем на совместность данную систему.

1. Так как коэффициенты при x, y и свободные члены пропорциональны, т.е. $\dfrac{a}{1} = \dfrac{1}{a} = \dfrac{a^2}{1}$ при $a = 1$, то в этом случае система имеет бесчисленное множество решений.

2. Так как коэффициенты при x и y пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам, т.е. $\dfrac{a}{1} = \dfrac{1}{a} \neq \dfrac{a^2}{1}$ при $a = -1$, то система решений не имеет.

3. Так как коэффициенты при x и y не пропорциональны, т.е. $\dfrac{a}{1} \neq \dfrac{1}{a}$ при $a \neq \pm 1$, то в этом случае система имеет единственное решение.

Найдем его, решив систему методом подстановки. Выразим из первого уравнения y и подставим во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a^2 - ax \\ x + a(a^2 - ax) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = a^2 - ax \\ x - a^2x = 1 - a^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = a^2 - ax \\ x(1-a^2) = 1 - a^3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1-a^3}{1-a^2} = \frac{a^2+a+1}{1+a}, \quad y = -\frac{a}{a+1}.$$

Итак, при $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение: $x = \dfrac{a^2+a+1}{a+1}$,

$y = \dfrac{-a}{a+1}$.

При решении ряда задач полезно знать так называемую обобщенную теорему Виета. Сформулируем ее для алгебраического уравнения третьей степени.

Дано уравнение $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_3 \neq 0$, x_1, x_2, x_3 - корни уравнечия.

Тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}$ (1).

В ответ запишите количество решений системы.

Решение. Обозначим: $\begin{cases} x+y+z=u \\ xy+xz+zy=v \\ xyz=w \end{cases}$ (2).

Тогда данная система примет вид $\begin{cases} u=2, \\ u^2-2v=6, \\ u^3-3uv-6w=8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2, \\ v=-1, \\ w=-2. \end{cases}$

Примечание. Использовали формулы:

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$.

$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3y^2x+3x^2z+3z^2x+3y^2z+3z^2y+6xyz$.

К системе (2) можно применить теорему Виета, если тройку чисел $(x;\ y;\ z)$ считать корнями кубического уравнения $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$.

Решая уравнение, находим корни $t_1 = 2$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$.

В силу симметрии системы (2) относительно x, y, z выписываем упорядоченные тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, которые и будут являться решениями системы (1):

(2; 1; -1), (2; -1; 1), (1; 2; -1), (1; -1; 2), (-1; 2; 1), (-1; 1; 2).

Ответ: 6.

Контрольная работа № 3

1. Решите уравнение $-2x^3-3x^2+11x+6=0$. В ответ запишите произведение корней.

2. Решите уравнение $(x^2+9)^2+4(x^2+9)(x^2+4)-12(x^2+4)^2=0$. В ответ запишите сумму корней.

3. Решите уравнение $|x|+|2-x|-x=2|x-1|$. В ответ запишите $(3x-2)$, где x - больший корень.

4. Решите уравнение $x^2+8x-\dfrac{7}{x^2+8x+17}=-11$. В ответ запишите сумму корней.

5. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}=\dfrac{5}{6}$.

6. Решите уравнение $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$.

7. При каком отрицательном значении a уравнение $\left|x^2+4ax+8\right|=28$ имеет три различных корня?

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x-11=\sqrt{ax-9}$ имеет единственное решение. В ответ запишите наименьшее целое значение a.

9. Найдите наименьшее целое значение a, при котором система уравнений $\begin{cases}-3x+ay=1\\5ax+2y=13\end{cases}$ имеет решение $x<0,\quad y>0$.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases}x+y+z=4,\\xy+yz+xz=-4,\\xyz=-16.\end{cases}$ В ответ запишите количество решений, умноженное на наименьшее значение y.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решите уравнение $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$. В ответ запишите меньший корень.

2. Решите уравнение $\dfrac{6}{\sqrt{x+7}} - \dfrac{6}{\sqrt{6-x}} = 1$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-6} - \sqrt{1-x} = 8$.

4. Решите уравнение $x + \sqrt[8]{x^5} - 12x^{1/4} = 0$. В ответ запишите меньший корень.

5. Решите уравнение $|x-a| + |x-2a| = 3a$.

6. При каких значениях a уравнение $x^2 - (a+1)|x| + a = 0$ имеет три решения?

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 + 3 = 2\sqrt{xz} \\ z^2 - 1 = 8xy\sqrt{9-4xz} \end{cases}$. В ответ запишите значение z. Если система имеет несколько решений, то в ответ запишите наименьшее z.

8. При каком значении a уравнение $x^{10} - a|x| + a^2 - a = 0$ имеет единственное решение.

9. При каком значении a уравнение $\dfrac{x^{2000}}{2} - \dfrac{x^2 + a}{x^2 + 1} + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Ответы:

1. -8.
2. -3.
3. Нет.
4. 0.
5. $\begin{cases} (-\infty, a), & x = 0 \\ (a, 2a), & \varnothing \\ (2a, +\infty), & x = 3a \end{cases}$.
6. 0.
7. -1.
8. 0.
9. 1.

Тема 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При изучении данной темы следует обратить особое внимание на понятие равносильности неравенств, решение неравенств, содержащих неизвестную величину под знаком модуля, решение иррациональных неравенств, решение неравенств с параметром.

Напомним теоремы о равносильности неравенств.

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства $f_1(x) > f_2(x)$, где $x \in X$, X – множество допустимых значений переменной, прибавить одно и то же выражение $\varphi(x)$, имеющее смысл при всех $x \in X$, то новое неравенство $f_1(x) + \varphi(x) > f_2(x) + \varphi(x)$ равносильно данному на множестве X.

Теорема 2. Если обе части неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ умножить на одно и то же положительное число или выражение $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in X$, то новое неравенство $f_1(x)\varphi(x) > f_2(x)\varphi(x)$ равносильно данному на множестве X.

Теорема 3. Если обе части неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число или выражение $\varphi(x) < 0$ для всех $x \in X$, то получим неравенство противоположного смысла $f_1(x)\varphi(x) < f_2(x)\varphi(x)$ равносильное данному на множестве X.

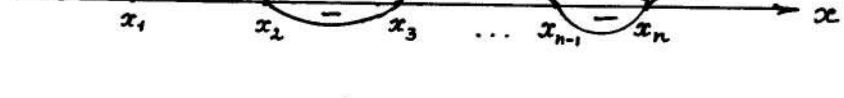
Метод интервалов

Метод интервалов основан на теореме:

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси и обращается в ноль в точках $x_1, x_2, ..., x_n$, тогда на любом интервале $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, +\infty)$ функция сохраняет знак.

Пусть надо решить неравенство $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0$, $x_1, x_2, ..., x_n \in R$.

Будем считать, что $x_1 < x_2 < ...x_n$. Отметим эти числа на числовой прямой и рассмотрим функцию $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$. Для всех $x > x_n$ все выражения в скобках положительны, значит при $x > x_n$, $f(x) > 0$. При $x_{n-1} < x < x_n$ выражение в последней скобке отрицательно, а все остальные положительны, поэтому $f(x) < 0$. Аналогично получаем, что при $x_{n-2} < x < x_{n-1}$ $f(x) > 0$ и т.д.



Если x_i такое, что $(x - x_i)^{h_i}$, h_i - четное, то справа и слева от x_i, т.е. в смежных промежутках, функция $f(x)$ имеет одинаковые знаки, а если же x_i

такое, что, $(x-x_i)^{h_i}$, h_i - нечетное, то справа и слева от x_i, т.е. в смежных промежутках функция $f(x)$ имеет противоположные знаки.

Если дано неравенство вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены, то его можно привести к равносильному неравенству умножением обеих частей на $(Q_m(x))^2>0$, т.е. $\dfrac{P_n(x)\cdot Q_m{}^2(x)}{Q_m(x)}>0\cdot Q_m{}^2(x)\Leftrightarrow P_n(x)\cdot Q_m(x)>0$, которое решаем методом интервалов.

Итак, неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0\Leftrightarrow\begin{cases}P_n(x)\cdot Q_m(x)>0\\ Q_m(x)\neq 0\end{cases}$. Обратите внимание на решение простейших неравенств:

$$|x|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a,$$

$$|x|\ge a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -a\\ x\ge a.\end{array}\right.$$

При решении иррациональных неравенств следует помнить, что основным методом решения является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

$$1.\ \sqrt[n]{f(x)}<\sqrt[n]{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f(x)<g(x),\end{cases} & n=2k,\quad k\in Z\\ f(x)<g(x), & n=2k+1,\quad k\in Z\end{array}\right.$$

$$2.\ \sqrt[n]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)>g^n(x),\end{cases} & \\ \begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\ge 0,\end{cases} & n=2k, k\in Z\\ f(x)>g^n(x), & n=2k+1, k\in Z\end{array}\right.$$

$$3.\ \sqrt[n]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)>0\\ f(x)<g^n(x),\end{cases} & n=2k, k\in Z,\\ f(x)<g^n(x), & n=2k+1, k\in Z.\end{array}\right.$$

Пример 1. Решите неравенство $x<\sqrt{x+2}$. В ответ запишите сумму всех целых решений.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 < x+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x+2 \ge 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \ge -2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 0, \\ -1 < x < 2, \end{cases} \\ -2 \le x < 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \le x < 2,$$

Сумма всех целых решений будет равна: -2 – 1 + 0 + 1 = -2.

Ответ: -2.

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{x+5} \le x+3$. В ответ запишите наименьшее решение.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ x+5 \ge 0, \\ x+5 \le (x+3)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ x \ge -5, \\ x^2 + 5x + 4 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ x \ge -5. \\ (x+1)(x+4) \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [-3,+\infty), \\ (-\infty,-4] \cup [-1,+\infty). \end{cases}$$

Пересечением полученных множеств является $[-1,+\infty)$.

Ответ: -1.

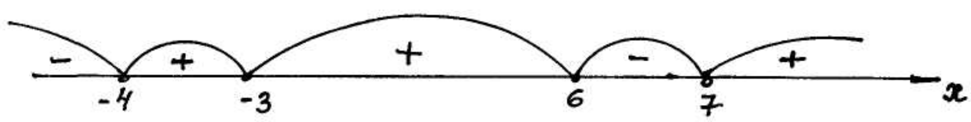
Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{(x-6)(x+3)^2}{(x+4)(x-7)} < 0$.

В ответ запишите наибольшее целое положительное решение.

Решение. Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-6)(x+3)^2(x+4)(x-7) \le 0. \\ x \ne -4, \quad x \ne 7. \end{cases}$$

Значения $x = -4$, $x = -3$, $x = 6$, $x = 7$ разбивают числовую ось на интервалы



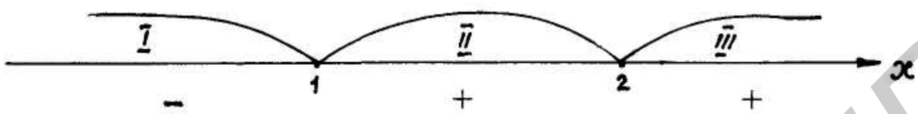
Полученное неравенство решаем методом интервалов.
Решением неравенства является $x \in (-\infty,-4) \cup (3) \cup [6,7)$.

Ответ: 6.

Пример 4. Решите неравенство $|x-1|+|2-x|>3+x$. В ответ запишите наименьшее целое положительное решение.

Решение. Точки $x=1$ и $x=2$ делят числовую прямую на промежутки: $(-\infty;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Решим данное неравенство на каждом из этих промежутков:



$x-1$:	−	+	+
$2-x$:	+	+	−

1. $\begin{cases} x<1 \\ 1-x+2-x>3+x \end{cases} \Leftrightarrow x<0$

2. $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x-1+2-x>3+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x<-2 \end{cases} \Rightarrow 0$

3. $\begin{cases} x>2 \\ x-1+x-2>3+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>6 \end{cases} \Rightarrow x>6.$

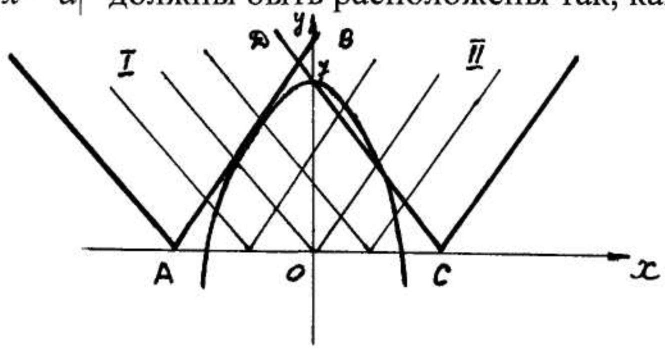
Объединяя полученные решения, имеем: $x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$

Ответ: 7.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $7-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение. В ответ запишите сумму целых значений a.

Решение. Запишем неравенство в виде $|x-a|<7-x^2$ и рассмотрим геометрическую иллюстрацию решения.

Чтобы неравенство имело хотя бы одно отрицательное решение, графики $y=7-x^2$ и $y=|x-a|$ должны быть расположены так, как показано на рисунке.



При крайнем левом положении (I) прямая AB касается параболы. Ее угловой коэффициент $y' = -2x = 1, \quad x = -\frac{1}{2}, \qquad y = 6{,}75$ - точка касания. Уравнение касательной AB: $y = 6{,}75 + 1\left(x + \frac{1}{2}\right)$,

$$y = 7{,}25 + x \qquad (y = x - a) \Rightarrow a = -7{,}25.$$

При крайнем правом положении (II) прямая СД проходит через точку $x = 0, \quad y = 7$. Ее уравнение $y = -(x - a) \Rightarrow \quad y = a \Rightarrow \quad a = 7$.

Итак, для $a \in [-7{,}25;7)$ неравенство имеет хотя бы одно отрицательное решение. Сумма всех целых значений a равна –7.

Ответ: -7.

Контрольная работа №4

1. Решите неравенство $\frac{x+1}{x-1} + 2 > \frac{x-1}{x}$. В ответ запишите наименьшее целое положительное решение.
2. Решите неравенство $\frac{x^2(x-2)^3(x+3)^4}{(x-4)^7} \geq 0$. В ответ запишите наименьшее целое положительное решение.
3. Решите неравенство $|x+1| - 2|x-5| < x + 3$. В ответ запишите наибольшее целое отрицательное решение.
4. Решите неравенство $\sqrt{2x+4} \geq x + 3$.
5. Решите неравенство $\sqrt{x+5} < 1 - x$.
6. Решите неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} < 7$. В ответ запишите наибольшее целое решение.
7. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2 - 9x + 22}}{5-x} \geq 1$. В ответ запишите сумму целых решений.
8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2 > |x+a| + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение. В ответ запишите сумму целых значений a.
9. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{x-3}{x-2} < 2 - \frac{x-2}{x-1} \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$.

9. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2} < 2 - \dfrac{x-2}{x-1}, \\ x^2 - 4x - 5 < 0 . \end{cases}$

10. Для каких значений a система неравенств $\begin{cases} -x^2 + 12x - a \ge 0, \\ x \le 2 \end{cases}$ выполняется хотя бы при одном x?

В ответ запишите наибольшее a.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите неравенство $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{x}$. В ответ запишите наименьшее целое решение.

2. Решите неравенство $\dfrac{|x-1|}{x+2} < 1$. В ответ запишите наибольшее целое отрицательное решение.

3. Решите неравенство $\sqrt{x+7} < x$. В ответ запишите наименьшее целое решение.

4. Решите неравенство $\sqrt{x^2+x-2} > x$. В ответ запишите сумму наибольшего целого отрицательного и наименьшего целого положительного.

5. Решите неравенство $|2a - 3x| < x + 1$. Найдите все значения a, при котором неравенство имеет хотя бы одно положительное решение. В ответ запишите наименьшее целое a.

6. Решите неравенство $\dfrac{(2+x)^2(10+x)^2}{\sqrt{49-x^2}\,(9-x)(x-4)} \ge 0$. В ответ запишите сумму целых решений.

7. При каких значениях параметра a неравенство $(a+2)x^2 - 4x + 3a + 7 > 0$ выполняется для всех значений $x > 0$? В ответ записать наименьшее целое a.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4} + \dfrac{19-2x}{2} < 2x, \\ \dfrac{2x+15}{9} > \dfrac{1}{5}(x-1) + \dfrac{x}{3}. \end{cases}$ В ответ запишите наибольшее целое решение.

Ответы: 1) -1; 2) –3; 3) 4; 4) 1; 5) 0; 6) -9; 7) 0; 8) 5.

Тема 5. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Задачи на составление уравнений и систем уравнений занимают значительное место в общем объеме заданий на вступительных экзаменах. Составить уравнение или систему уравнений, значит, записать условие текстовой задачи на формализованном математическом языке, что бывает часто не легче, чем решение самих уравнений. При составлении уравнений и систем важно «хорошо» ввести обозначения и правильно использовать фи^ческие, механические и другие определения и понятия.

Приведем решения некоторых типовых задач.

<u>Задача 1.</u> Два крана, включенные одновременно, могут заполнить бассейн за 2 ч. За сколько часов может заполнить бассейн каждый кран в отдельности, ^сли после того, как первый кран проработал 2 ч, а второй 1 ч, бассейн был заполнен на 5/6 своего объема?

<u>Решение.</u> Пусть $x_ч$ и $y_ч$ - время заполнения бассейна соответственно первым и вторым кранами в отдельности. Примем объем бассейна равным 1 куб. единице. По условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x}=1-\dfrac{2}{y} \\ 1-\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=6. \end{cases}$$

Ответ: 3 ч , 6 ч.

<u>Задача 2.</u> Два велосипедиста выехали одновременно из двух мест, отстоящих друг от друга на 270 км, и едут навстречу друг другу. Второй проезжает в час на 1,5 км меньше, чем первый, и встречается с ним через столько часов, сколько километров в час проезжает первый. Определить скорость каждого велосипедиста.

<u>Решение.</u> Пусть v_1 км/ч и v_2 км/ч - скорости соответственно 1-го и 2-го велосипедистов. Из условия имеем: $v_1 = v_2 + 1{,}5$.Второй велосипедист ехал до встречи v_1 ч и, следовательно, проехал расстояние $v_1 \cdot v_2$. Первый велосипедист до встречи ехал $\dfrac{270 - v_1 \cdot v_2}{v_1}$ ч. Имеем второе уравнение:

$$\frac{270 - v_1 \cdot v_2}{v_1} = v_1.$$

Итак, $\begin{cases} 270 - v_1 v_2 = v_1^2 \\ v_2 + 1{,}5 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1^2 - 1{,}5v_1 - 270 = 0 \\ v_2 = v_1 - 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 12 \\ v_2 = 10{,}5 \end{cases}.$

Ответ: 12 км/ч., 10,5 км/ч.

Задача 3. По окружности равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 3с быстрее второй. Время между последовательными встречами точек равно 18с. Определить время в секундах полного обхода окружности первой точкой (более быстрой).

Решение. Известно, что если две точки движутся по окружности радиусом R с постоянными скоростями v_1 и v_2 в разных направлениях, то время между их встречами равно $\frac{2\pi R}{v_1 + v_2}$, а если они движутся в одном направлении, причем $v_1 > v_2$, то время между их встречами равно $\frac{2\pi R}{v_1 - v_2}$. Обозначим время обхода окружности первой точкой через x_c, второй через $(x+3)$ c. Скорость движения первой точки будет $\frac{2\pi R}{x}$, второй - $\frac{2\pi R}{x+3}$.

Составим уравнение

$$\frac{2\pi R}{\frac{2\pi R}{x} - \frac{2\pi R}{x+3}} = 18, \quad x^2 + 3x - 54 = 0, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = -9.$$

Ответ: 6 с.

Задача 4. В сосуд емкостью 6 л налито 4л 70%-ного раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же емкости налито 3л 90%-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился *ч* %-ный раствор серной кислоты. Найти все значения *ч*, при которых задача имеет решение.

Решение. Пусть x литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый. В x литрах раствора будет содержаться $\frac{9x}{10}$ чистой (100%) серной кислоты. В первом сосуде первоначально было $\frac{7}{10} \cdot 4$ л чистой серной кислоты.

После того как в первый сосуд долили x л 90% - ного раствора серной кислоты, в нем стало $\left(\frac{7}{10}\cdot 4+\frac{9}{10}x\right)$ л чистой серной кислоты.

Составим уравнение: $\dfrac{\frac{7}{10}\cdot 4+\frac{9}{10}x}{x+4}\cdot 100\% = ч\% \Rightarrow \dfrac{4(ч-70)}{90-ч}$. Исследуем, при каких $ч$ задача имеет решение. Из условия видно, что долить раствора можно не более 2 л (объем сосуда – 6 л, налито – 4л), т.е. $0\le x\le 2$. Используя это неравенство, получим $0\le \dfrac{4(ч-70)}{90-ч}\le 2$, $\quad 70\le ч\le 76,(3)$.

Ответ: $\dfrac{4(ч-70)}{90-ч}$, $\quad 70\le ч\le 76,(3)$.

<u>Задача 5.</u> В одной бочке содержится смесь воды и спирта в соотношении 2 : 3, а в другой – 3 : 7. Сколько ведер смеси надо взять из первой бочки, чтобы смешав ее с некоторым количеством смеси из второй бочки, получить 12 ведер смеси воды и спирта в отношении 3 : 5 ?

<u>Решение.</u>

	Вода	Спирт
1 бочка	2	3
2 бочка	3	7
3 бочка (12 ведер)	3	5

Пусть x ведер смеси нужно взять из 1 бочки, тогда из 2 бочки – (12-x) ведер смеси. В x ведрах смеси, взятой из 1 бочки, будет содержаться $\frac{2}{5}x$ ведер чистой воды, в (12-x) ведрах смеси, взятых из 2 бочки - $\frac{3}{10}\cdot(12-x)$ ведер чистой воды. Составим уравнение: $\quad \frac{2}{5}x+\frac{3}{10}\cdot(12-x)=\frac{3}{8}\cdot 12,\quad x=9.$

Ответ: 9 ведер.

Можно было составить уравнение, вычисляя количество спирта в каждой из бочек.

<u>Задача 6.</u> Первое число составляет 50% от второго. Сколько процентов от первого числа составляет второе ?

Решение. Пусть x - второе число, тогда $0{,}5x$ – первое число. Составим пропорцию: $\begin{array}{ll} 0{,}5x & -100\% \\ x & -y\% \end{array}$ $\quad y=\dfrac{x\cdot 100\%}{0{,}5x}=200\%$.

Ответ: 200%.

Контрольная работа №5

1. Автомобиль прошел расстояние от А до В со скоростью, равной 40 км/ч, а обратно - со скоростью 30 км/ч. Какова средняя скорость рейса? (ответ округлчть до 0,1).

2. На участке трамвайного пути в 1 км пешеход, проходящий этот участок за 12 мин., ежедневно подсчитывал число трамваев, обгоняющих его и идущих навстречу. В течение месяца первых оказалось 45, вторых - 120. Какова ско рость трамвая?

3. Один из двух заводов может выполнить некоторый заказ на 4 дня бы стрее чем другой. За сколько дней может выполнить этот заказ завод с боль шей производительностью, если известно, что при совместной работе они вы полняли за 24 дня заказ в 5 раз больший?

4. Рабочий увеличил выработку деталей на 27 шт. и стал производить 297 деталей в день. На сколько процентов увеличил рабочий производительность труда?

5. В бассейн проведена труба. Вследствие ее засорения приток воды через нее уменьшился на 20%. На сколько процентов увеличилось время наполнения бассейна?

6. Руда содержит 40% примесей, а выплавляемый из нее металл содержит 4% примесей. Сколько тонн металла получится из 24 т руды?

7. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей каждого сплава можно получить новый сплав, содержащий те же метал лы в отношении 17 : 27 ? В ответ запишите сумму этих частей.

8. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена фотоаппарата упала с 30 до 19,2 р. На сколько процентов сни жалась цена фотоаппарата каждый раз?

9. Объемы трех помещений А, В, С соответственно равны *24\0м*, 1790л/ , 1050л* . Распределить 2625 р., затраченных на отопление

этих помещений, пропорционально их кубатуре. В ответ записать стоимость отопления помещения А.

10. Три автора делили гонорар в соотношении $5:6:8$. Если бы они делили гонорар в соотношении 4 : 5 : 7, то один из них получил бы на 25 р больше. Сколько всего было денег?

Задачи для самостоятельного решения

1. Первое число на 25% больше второго. На сколько процентов второе число меньше первого?

2. По окружности длиной 60м равномерно и в одном направлении дви жутся две точки . Одна из них делает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадение точек происходит каждый раз через одну минуту. Опре делить скорость (в м/с) точек. В ответ записать сумму скоростей.

3. Пять человек выполняют некоторую работу. 1, 2 и 3, работая вместе, выполняют всю работу за 7,5 ч; 1, 3 и 5 - за 5 ч; 1, 3 и 4 - за 6 ч, 4, 2, 5 - за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все пять человек, работая вместе.

4. Найти скорость поезда, зная, что он проходит с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехал, с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

5. Два автомобиля выехали одновременно из одного пункта в одном на правлении. Первый автомобиль едет со скоростью 40 км/ч, а скорость второго автомобиля составляет 125% скорости первого. Через 30 мин из того же пункта в том же направлении выехал третий автомобиль, который сначала обогнал первый и через 1,5 ч после этого обогнал второй. Какова скорость третьего ав томобиля?

6. Мощности двух насосов относятся как $2:3$. При совместной работе двух насосов ванна наполняется за 10,8 мин. Через сколько минут наполнится ванна при включенном только первом насосе?

Ответы:
1. 20%
2. 7 м/с
3. 3 часа.
4. 21 м/с.
5. 60 км/ч.
6. 27 мин.

Тема 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ

По данной теме необходимо обратить внимание на следующие вопросы: 1) графики тригонометрических функций; 2) формулы приведения; 3) основные тригонометрические тождества и выражения одних тригонометрических функций через другие; 4) формулы решения простейших тригонометрических уравнений, к которым сводятся после ряда тождественных преобразований любые тригонометрические уравнения:

1. $\sin x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$, $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. $\cos x = a, \quad |a| \le 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$, $\arccos a \in [0; \pi]$.

3. $tgx = a, \quad a \in R, \quad x = arctga + \pi n, \quad n \in Z$, $arctga \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. $c\,tgx = a, \quad a \in R, \quad x = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$, $arcctga \in (0; \pi)$.

Полезно знать частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений:

$\sin x = 0 \quad x = \pi n, \quad n \in Z$,

$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$,

$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$,

$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$,

$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$,

$\cos x = 1 \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z$.

Решение простейших тригонометрических неравенств:

а) $\sin x \ge 0$ - сначала находим решение при изменении угла в пределах периода функции, т.е. на промежутке [0;2π]: $\sin x \ge 0$ в 1 и 2 четвертях, т.е. $0 \le x \le \pi$, затем учитываем периодичность функции. Итак, $\sin x \ge 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n$, или $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], \quad n \in Z$.

б) $\sin x < 0 \quad \Rightarrow \quad \pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Можно ответ записать и так: $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n, \quad n \in Z$.

в) $\cos x \ge 0 \Rightarrow$ 1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, 2) $2\pi n - \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

г) $\cos x < 0 \Rightarrow$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

д) $tgx \ge 0, \Rightarrow$ 1) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ 2) $\pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

е) $tgx < 0 \Rightarrow \pi n - \frac{\pi}{2} < x < \pi n$, $n \in Z$.

Примечание. Для иллюстрации решений вместо тригонометрических кругов можно брать графики соответствующих функций.

Пример 1. Вычислите без таблиц $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}$.

Решение.

$\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} =$ (умножим и разделим выражение на $2\sin\frac{2\pi}{7}$) =

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}}{2 \cdot 2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)}{4\sin\frac{2\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)}{4 \cdot 2\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

Ответ: 0,125.

Пример 2. Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что $2tg^2\alpha - 7tg\alpha + 3 = 0$ и угол α удовлетворяет неравенству $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Решим уравнение $2tg^2\alpha - 7tg\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = 0{,}5. \end{array}\right.$

Так как $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $1 < tg\alpha < \infty$, т.е. $tg\alpha = 3$. Воспользуемся формулой: $\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$. Получим: $\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{3}{1+9} = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

Пример 3. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = b$. (1)

Найти: 1. $\sin\alpha + \cos\alpha$; 2. $\sin\alpha - \cos\alpha$; 3. $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;
4. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$; 5. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

Решение. 1. Возведем в квадрат равенство (1):

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = b^2 \Rightarrow 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = b^2 \Rightarrow \sin 2\alpha = b^2 - 1$.

2. Рассмотрим выражение $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - (b^2 - 1) = 2 - b^2$,

$\sin\alpha - \cos\alpha = \pm\sqrt{2 - b^2}$.

3. Возведем в куб равенство (1):

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^3 = b^3 \Rightarrow \sin^3\alpha + \cos^3\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) =$

$= b^3 \Rightarrow \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \frac{b}{2}(3 - b^2)$.

4. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$

$= 1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2}(b^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}(1 - 2b^2 - b^4)$.

5. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = \pm b\sqrt{2 - b^2}$.

В тригонометрических задачах нередко встречаются выражения вида $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha$. Нужно уметь их преобразовывать:

1. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

2. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 =$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cdot(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2$

3. $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha =$

$= \cos^2 2\alpha + \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha$.

Существуют различные методы решения тригонометрических уравнений: метод оценки, метод подставки, разложение на множители и др., нередко эти методы комбинируют. Получив уравнение, подумайте, имеет ли оно смысл . Если да, то при каких условиях?

<u>Пример 4.</u> Решите уравнение: $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$.

<u>Решение.</u> Преобразуем левую часть уравнения и применим метод оценки:

$$(-2\sin 3x \cdot \sin x)^2 = 4 + \cos^2 3x,$$

$$4\sin^2 3x \sin^2 x = 4 + \cos^2 3x.$$

Нетрудно заметить, что левая часть ≤ 4, а правая ≥ 4, т.к. $0 \le \cos^2 3x \le 1$. Значит, равенство возможно, если:

$$\begin{cases} \sin^2 3x \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\sin 3x| = 1 \\ |\sin x| = 1 \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}, & k \in Z \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, & m \in Z \\ x_3 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, & n \in Z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in Z$$

$x_1 = x_3$ при $k = n$

$$\left(x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi m \Rightarrow 1 + 2k = 3 = 6m \Rightarrow k = 3m + 1 \Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow x_2 \subset x_1 = x_3\right).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in Z$.

<u>Пример 5</u>. Решите уравнение $\cos 2x = 3\sin 63^\circ \cos 58^\circ$.

<u>Решение.</u> Применим метод оценки

Очевидно, что $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le \sin 63^\circ$, $\quad \dfrac{1}{2} \le \cos 58^\circ$, перемножим неравенства:

$\dfrac{\sqrt{3}}{4} \le \sin 63^\circ \cdot \cos 58^\circ \le 1 \Rightarrow \quad \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \le 3\sin 63^\circ \cos 58^\circ \le 3$, т.к. $-1 \le \cos 2x \le 1$, то равенство левой и правой частей уравнения невозможно $\Rightarrow \quad x \in \emptyset$.

Ответ: нет.

При решении уравнений вида $a\sin x + b\cos x = c$, где a, b, c – постоянные (1), удобно преобразовать левую часть, вводя вспомогательный угол, следующим образом:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$

т.к. $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то числа $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *и* $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ можно рассматривать как синус и косинус одного и того же угла φ, т.е. $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, угол φ можно найти решая уравнение $tg\varphi = a/b$ и выбирая какое-нибудь одно значение, например, $\varphi = arctg\, a/b$.

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x \cdot \sin\varphi + \cos x \cdot \cos\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Уравнение (1) принимает вид $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi) = c$,

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, то $x - \varphi = \pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi n$.

$$x = \varphi \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad \varphi = arctg\frac{a}{b}.$$

Таким образом, $x = arctg\frac{a}{b} \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi n, \quad n \in Z$.

Пример 6. Найдите в градусах наименьшее положительное решение уравнения $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sqrt{3+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}.$$

Обозначим $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\varphi$, $\frac{1}{2} = \cos\varphi$, тогда $tg\varphi = \sqrt{3}$, $\varphi = 60^\circ$.

Уравнение примет вид $\cos(x + 60^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$x + 60^{\circ} = \pm \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 360^{\circ} k, \quad k \in Z.$

$x = -60^{\circ} \pm 135^{\circ} + 360^{\circ} k, \quad k \in Z.$

Найдем наименьшее положительное решение уравнения. Будем давать значения k :

$k = 0 \quad x_1 = -60^{\circ} + 135^{\circ} = 75^{\circ},$
$\quad x_2 = -60^{\circ} - 135^{\circ} = -195^{\circ},$

$k = 1 \quad x_3 = 435^{\circ}, \quad x_4 = 165^{\circ}, \qquad k = -1 \quad x_5 = -285^{\circ}, \quad x_6 = -555^{\circ}.$

Очевидно, что наименьший корень уравнения равен 75°.

Ответ: 75° .

Уравнение вида $a(\sin x \pm \cos x) + b \sin 2x = c$ можно решить подстановкой: $\sin x \pm \cos x = Z$.

$(\sin x \pm \cos x)^2 = Z^2, \quad 1 \pm \sin 2x = Z^2, \quad \pm \sin 2x = Z^2 - 1.$

Уравнение вида $a \cos 2x + b \sin^2 x + c \cos^2 x = 0$ удобно решать с помощью формул понижения степени: $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$. Вводится подстановка $\cos 2x = Z$.

Уравнение вида $R(\sin x, \cos x) = 0$ можно решать с помощью универсальной подстановки $tg(x/2) = Z$, $\sin x = 2Z/(1 + Z^2)$, $\cos x = (1 - z^2)/(1 + z^2)$ и уравнение принимает вид $R\left(\dfrac{2z}{1 + z^2}; \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) = 0$, но при введении этой подстановки область определения уравнения сужается:

$\cos\dfrac{x}{2} \neq 0, \quad \dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in z$, и возможна потеря корней вида $x = \pi + 2\pi n$. Нужна проверка.

Обратите внимание и на однородные уравнения n-го порядка:

$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cdot \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x + \ldots + a_n \cos^n x = 0.$

Путем деления всех членов уравнения на $\cos^n x \neq 0$ (или $\sin^n x \neq 0$) приходим к алгебраическому уравнению относительно tgx:

$a_0 tg^n x + a_1 tg^{n-1} x + \ldots + a_n = 0, \quad tgx = z.$

$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$

Нежелательно в уравнении одну тригонометрическую функцию выражать через другую, вводя действие извлечения квадратного корня (например, $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$), т.к. это может привести либо к потере корней, либо к появлению посторонних. Нужна проверка.

Пример 7. Решите уравнение $\sqrt{8}(\sin x - \cos x) = tgx - ctgx$.

Решение. О.О.У. $\left[\begin{array}{l}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}x \neq k\pi, & k \in z\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, & n \in z\end{array}\right.$

$$\sqrt{8}(\sin x - \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left(\sqrt{8} - \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\sin x - \cos x = 0\\ (\textit{однородное уравнение } 1 \textit{ степени}) \Leftrightarrow\\ \dfrac{\sqrt{8}\sin x \cos x - (\sin x + \cos x)}{\sin x \cdot \cos x} = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}tgx = 1\\ 2\sqrt{2}\sin x \cos x - (\sin x + \cos x) = 0, \textit{введем подстановку}\\ \sin x + \cos x = z, \quad \sin 2x = z^2 - 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}tgx = 1\\ \sqrt{2}(z^2 - 1) - z = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ z_1 = \sqrt{2}, \quad z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\\ \sin x + \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, & k \in z\\ x_2 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, & n \in z\\ x_3 = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, & n \in z\end{array}\right..$$

Так как множество решений x_2 содержится в множестве x_1, то имеем ответ:

$$\left[\begin{array}{ll}x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, & k \in z\\ x_2 = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, & m \in z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, & k \in z\\ x_2 = \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi m, & m \in z\\ x_3 = -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi m\end{array}\right..$$

Пример 8. Решите уравнение $|2\sin(x/5)+\cos(x/5)|=2$, приводя к однородному.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения, т.к. $|a|^2=a^2$, то

$$\left(2\sin\frac{x}{5}+\cos\frac{x}{5}\right)^2=4, \qquad 4\sin^2\frac{x}{5}+4\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}+\cos^2\frac{x}{5}=4\left(\sin^2\frac{x}{5}+\cos^2\frac{x}{5}\right).$$

Приводя подобные члены, получим:

$$4\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}-3\cos^2\frac{x}{5}=0, \qquad \cos^2\frac{x}{5}\neq 0,$$

$$4tg\frac{x}{5}-3=0, \qquad tg\frac{x}{5}=\frac{3}{4}, \qquad \frac{x}{5}=arctg\frac{3}{4}+\pi n, \qquad n\in z.$$

Ответ: $5arctg\frac{3}{4}+5\pi n, \quad n\in z.$

Пример 9. Найдите в градусах наибольшее решение уравнения $\cos(2\pi-6x)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right), \quad x\in(0^\circ;180^\circ)$.

Решение. Используя формулы приведения, получим:

$$\cos 6x=-2\cos 2x \Leftrightarrow \cos 6x+\cos 2x=-\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x=-\cos 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\cos 4x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\\ \cos 4x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}\\ 4x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\pi n\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}\\ 4x_2=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}, & k\in z\\ x_2=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}, & n\in z\end{array}\right..$$

Выделим решения, принадлежащие $(0^\circ;180^\circ)$

при $\left[\begin{array}{ll}k=0 & x_1=45^\circ\\ k=1 & x_1=135^\circ\\ k=2 & x_1=225^\circ\end{array}\right.$ при $\left[\begin{array}{ll}n=0 & x_2=30^\circ\\ n=1 & x_2=120^\circ \text{ или } 60^\circ\\ n=2 & x_2=150^\circ \text{ или } 210^\circ\\ n=3 & x_2=300^\circ \text{ или } 240^\circ\end{array}\right..$

Наибольшим решением, принадлежащим этому промежутку, будет $x=150^\circ$.

Ответ: 150°

Пример 10. При каких a уравнение $actgx - 1 = \cos 2x$ имеет 4 решения, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$?

Решение. Воспользуемся формулой $\cos 2x = \dfrac{ctg^2 x - 1}{ctg^2 x + 1}$, получим:

$$actgx - \frac{ctg^2 x - 1}{ctg^2 x + 1} - 1 = 0 \qquad \text{О.О.У. } \sin x \neq 0 \Rightarrow \quad x \neq \pi k, \quad k \in z.$$

$$actg^3 x + actgx - ctg^2 x + 1 - ctg^2 x - 1 = 0$$

$$ctgx(actg^2 x - 2ctgx + a) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} ctgx = 0 \\ actg^2 x - 2ctgx + a = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in z \\ ctgx_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}, a \neq 0, \quad |a| \leq 1. \end{array}\right.$$

Выделим решения $\in [0;2\pi]$ из множества x_1:

$k = 0 \quad x_1 = \dfrac{\pi}{2}, \qquad k = 1 \quad \dfrac{3\pi}{2}$, их два.

Запишем второе множество решений:

$$x_2 = arcctg \frac{1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a} + \pi n, \quad n \in z, \quad a \neq 0, \quad |a| \leq 1.$$

Проанализируем это множество решений.

1. Если $|a| = 1$, то $x_2 = \pm \dfrac{\pi}{4} + \pi n$.

Если $a = 1$, то $x_2 = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in z$.

Решения $\in [0;2\pi]$ получаются при $n = 0 \quad x_2 = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 1 \quad x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$, их два.

Если $a = -1$, то $x_2 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in z$.

Решения $\in [0;2\pi]$ получаются при $n = 1 \quad x_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, $n = 2 \quad x_2 = \dfrac{7\pi}{4}$, их тоже два.

2. Если $|a| < 1$, то $x_2 = arcctg \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a} + \pi n, \quad n \in z, \quad a \neq 0$ и решений, $\in [0;2\pi]$, имеем уже 4, они получаются при $n = 0$ и $n = 1$.

3. При $a = 0$ исходное уравнение принимает вид $\cos 2x = -1$ (или $ctgx = 0$), которое на промежутке $[0;2\pi]$ имеет 2 решения.

4. При $|a| > 1$ исходное уравнение имеет два решения, $\in [0;2\pi]$, за счет уравнения $ctgx = 0$.

Итак, исходное уравнение на отрезке $[0;2\pi]$ имеет 6 решений при $|a| < 1$, 2 решения при $|a| > 1$ и $a = 0$, и 4 решения при $|a| = 1$.

Ответ: $\{-1;1\}$.

Контрольная работа №6

1. Упростите до числа:

а) $\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{4}\left(1 + ctg^2\dfrac{3\alpha}{4}\right)}{\sec\dfrac{\alpha}{2}\left(ctg^2\dfrac{\alpha}{4} - ctg^2\dfrac{3\alpha}{4}\right)}$;

б) $1 - \sin 4\alpha + ctg\left(\dfrac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)\cdot\cos 4\alpha$;

в) $4\cos^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha}, \quad \alpha \in (180^\circ;270^\circ)$.

2. Вычислите:

а) $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5}$;

б) $tg9^\circ - tg27^\circ - tg63^\circ + tg81^\circ$;

в) $7\sqrt{2}\sin 15^\circ(\sqrt{3} + ctg15^\circ)$.

3. Вычислите:

а) $\sqrt{2}\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\sin 2\alpha = -\dfrac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$;

б) $\dfrac{3\sin^2 x + 12\sin x\cos x}{\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x}$, если $tgx = 2$;

в) $\sqrt{12}\cos\alpha + 2\sin\alpha$, если $\sin(60^\circ + \alpha) = \dfrac{3}{4}$;

г) $13\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{7\pi}{4}\right)$, если $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{2}$.

4. Найдите область изменения функции. В ответе запишите наибольшее целое значение функции:

$y = 9 - 2\sin^2 x + 3\cos 2x + 2\sin 2x$.

5. Решите уравнения:

а) $2\sin 3x = 2\cos 3x + \sqrt{6}$. В ответ запишите наименьшее положительное решение;

б) $\sin 7x = \cos 3x$. В ответ запишите наибольшее отрицательное решение;

в) $tgx + tg2x - tg3x = 0, \quad x \in (0^o, 90^o)$;

г) $\sin x + \cos x = 3\sin x \cdot \cos 2x, \quad x \in [-90^o, -45^o]$;

д) $ctgx - 2\cos 2x = 1$. В ответ запишите количество решений , принадлежащих промежутку $[15^o, 90^o]$;

е) $\cos x = 3\sin 62^o \cos 59^o$;

ж) $5\sin x - \sin 5x = 0$. В ответ запишите сумму наименьшего положительного и наибольшего отрицательного решений;

з) $\sin \dfrac{\pi}{4 - x} = x^2 - 4x + 5$;

и) $4arcctg^2(x+1) + 5\pi arcctg(x+1) - 6\pi^2 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

I. Вычислите:

1. $tg^2 36^o \cdot tg^2 72^o$.

2. $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

3. $\sin 42^o - \sin 78^o + \sin 66^o - \sin 6^o$.

4. $2\cos^2\dfrac{\alpha - \beta}{2}$, если $\alpha; \beta \quad (\alpha \neq \beta)$ удовлетворяют уравнению $3\cos x + 4\sin x = 5$.

5. $\sqrt{2}\left(\cos^3 x - \sin^3 x\right)$, если $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

6. $\dfrac{1 + 2\cos\alpha - \cos 2\alpha}{1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}$, если $ctg\dfrac{\alpha}{2} = 5$.

7. $\dfrac{tg(\alpha + \beta)}{tg\alpha}$, если $5\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$.

2. Решите уравнения:

1. $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$. В ответ запишите наибольшее решение, принадлежащее $(270^\circ;360^\circ)$.

2. $2\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 4x$. В ответ запишите сумму решений, принадлежащих $(0^\circ;90^\circ)$.

3. $5\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.

4. $tgx + tg\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{3x}{2}$. В ответ запишите наименьшее положительное решение (в градусах).

5. $\sqrt{\sin 2x - \sin 4x + 2} = \sqrt{2}\cos x$. В ответ запишите сумму решений, принадлежащих $[0^\circ;360^\circ]$.

6. $6\sin \pi x - x^2 + 5x - 12{,}25 = 0$.

7. $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2$.

8. $2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 3 + 2\sin 2x = 0$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

9. $2\arccos^2 2x - \pi \arccos 2x - 3\pi^2 = 0$.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{7}{4} \\ x + y = 150^\circ \end{cases}$

$x \in (0^\circ;70^\circ)$, $y \in (0^\circ;90^\circ)$. В ответ запишите $2x + y$.

11. Сколько существует целых a, при которых уравнение $a\sin x + 1 = a^2 - \sin x$ имеет хотя бы одно решение?

Ответы: I. 1) 5; 2) - 0,5; 3) 0,5; 4) 2; 5) -1; 6) -15 $\frac{1}{12}$; 7) 1,5 .

2. 1) 315°; 2) 90°;3) $\frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi$; 4) 120° 5) 990°; 6) 2,5; 7) нет; 8) -45°; 9) нет; 10) 180°; 11) 4.

Тема 7. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

При изучении данной темы необходимо обратить внимание на то, что арифметическая и геометрическая прогрессии являются примерами числовых последовательностей. При решении задач на прогрессии используют их определения и основные формулы.

Для арифметической прогрессии:

формула общего члена $a_n = a_1 + d(n-1)$,

формула суммы n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии $a_n + a_m = a_k + a_e$, если $m + n = k + e$, в частности, при $k = n + i, \quad e = n - i, \quad i = \overline{1, n}$, имеем $a_n = \dfrac{a_{n-i} + a_{n+i}}{2}$.

Для геометрической прогрессии:

формула общего члена $b_n = b_1 q^{n-1}$,

формула суммы n первых членов прогрессии $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии с положительными членами $b_n{}^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, где $1 \le k < n, \quad n \ge 2$. В частности $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1, \quad S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Задача 1. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 10. Каждый из остальных членов в $\dfrac{10}{3}$ раза меньше суммы двух соседних с ним. Найдите сумму членов этой прогрессии.

Решение. Запишем прогрессию: $10, \quad 10q, \quad 10q^2, \quad \ldots$. По условию $10q \cdot \dfrac{10}{3} = 10 + 10q^2, \quad 3q^2 + 10q + 3 = 0, \quad q_1 = \dfrac{1}{3}, \quad q_2 = 3$. Значение $q_2 = 3$ не удовлетворяет условию задачи, т.к. $|q| < 1$. Тогда сумма членов прогрессии

$$S = \frac{10}{1 - \frac{1}{3}} = 15.$$

Ответ: 15.

Задача 2. Найдите трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры, выражающей число сотен, вычесть 4, а остальные цифры искомого числа оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть $\overline{xyz}$ - искомое число. Тогда $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Учитывая данные условия задачи и свойства арифметической и геометрической прогрессий, запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 100x + 10y + z - 792 = 100z + 10y + x \\ y^2 = xz \\ y = \dfrac{x-4+z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 6 \\ z = y - 2 \\ y^2 = xz \end{cases}$$

$y^2 = (y+6)(y-2), \quad x = 9, \quad y = 3, \quad z = 1.$

Итак, искомое число 931.

Ответ: 931.

Задача 3. Три числа, сумма которых 114, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии, или как первый, четвертый и двадцать пятый члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

Решение. Пусть x, y, z - первое, второе и третье числа. По условию $x + y + z = 114$. Так как эти числа образуют геометрическую прогрессию, то имеет место равенство $y^2 = xz$. С другой стороны, т.к. эти числа являются первым четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии, то $y = x + 3d, \quad z = x + 24d$.

Запишем систему:

$$\begin{cases} x + x + 3d + x + 24d = 114 \\ (x+3d)^2 = x(x+24d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 27d = 114 \\ d^2 = 2xd \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 38 \\ d_1 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 2 \\ d_2 = 4 \end{cases}.$$

Учитывая найденные x и d, найдем y и z, т.е. $y_1 = 38, \quad y_2 = 14, \quad z_1 = 38, \quad z_2 = 98$.

Ответ: 38, 38, 38; 2, 14, 98.

Задача 4. Найдите сумму все четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение. Нетрудно заметить, что наименьшее четное трехзначное число, делящееся на 3, есть 102, следующее 108, затем 114 и так далее до 996.

Эти числа образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 102, \quad d = 6, \quad a_n = 996$. Найдем количество таких чисел:

$996 = 102 + 6(n-1), \qquad n = 150$. Тогда $S = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 82350$.

Ответ: 82350.

Контрольная работа №7

1. Сколько нужно взять членов в арифметической прогрессии 81, 78, 75,- - ... чтобы сумма их равнялась нулю?

2. Найдите четвертый член возрастающей арифметической прогрессии, сумма первых десяти членов которой равна 155, а произведение первого члена на десятый равно 58.

3. Найдите сумму всех целых положительных трехзначных чисел, которые при делении на 57 дают в остатке 19.

4. Известно, что числа 9, x - 4, cos(arccos x), взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите x.

5. Найдите первый член возрастающей геометрической прогрессии, состоящей из 6 членов, если сумма первых трех членов равна 26, а сумма последних трех равна 702.

6. Сумма трех последовательных членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найдите члены этой геометрической прогрессии.

7. Некоторые члены арифметических прогрессий 17, 21,… и 16, 21, ... одинаковы. Найдите сумму первых 100 одинаковых членов, встречающихся в обеих прогрессиях.

8. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

9. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 144. Если от этих членов отнять соответственно 25, 27, 1, то получится три числа, образующих геометрическую прогрессию. Найдите седьмой член арифметической прогрессии.

10. Найдите четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних членов равна 140, а сумма средних равна 60. В ответ запишите сумму этих чисел.

Задачи для самостоятельного решения

1. Корни уравнения $x \quad + 9x \quad +2x + a = 0$ при некотором значении а об разуют арифметическую прогрессию. Найдите эти корни. В ответ запишите их сумму.

2. В арифметической прогрессии четвертый член равен 9. При каком зна чении разности этой прогрессии величина <яг$_1$ • я$_3$ + $^{a}г\ '\ ^{a}$ъ будет наименьшей ?

3. Решите уравнение

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8).$$

4. Крайние члены арифметической прогрессии, имеющей семь членов, равны 11 и 35. Сколько членов в другой арифметической прогрессии, крайние члены которой 38 и 13, если четвертые члены у обеих прогрессий одинаковы.

5. Восьмой член арифметической прогрессии составляет 40% от четвер того, а их сумма равна 2,8. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равна 14,3?

6. Найдите пятый член и разность арифметической прогрессии, если сумма первых n членов этой прогрессии вычисляется по формуле $S_n=2n \quad$ *-Ъп.*

7. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии, если из вестно, что ее первый, второй и последний члены равны 3, 12 и 3072.

8. Число 195 разделить на три части так, чтобы полученные числа со ставляли геометрическую прогрессию, при этом первый член был бы меньше третьего на 120.

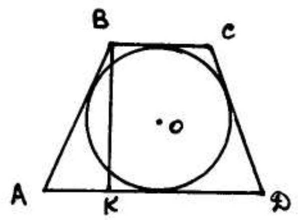
Ответы: 1.-9
2. 6,3
3. 15
4. 6
5. 13
6. 15
7. 6
8. 15,45,135,..., 125,-175,245,...

Тема 8. ГЕОМЕТРИЯ

Прежде чем приступить к выполнению данной контрольной работы, необходимо четко усвоить соответствующие разделы теоретического курса, знать основные определения, теоремы, свойства, соотношения фигур на плоскости и в пространстве, уметь изобразить геометрические фигуры на чертеже, строить сечения. Особое внимание следует обратить на формулы тригонометрии и их применение при решении задач. Объем такого материала достаточно обширный и, естественно, охватить все разнообразие задач в одной контрольной работе практически невозможно. Для самостоятельного дополнительного решения задач можно воспользоваться одним из пособий. Решения некоторых задач приводятся без объяснений, т.к. записанные формулы и последовательность действий достаточно освещают ход решения.

Задача 1. Около окружности описана равнобочная трапеция, периметр которой равен 8, а острый угол равен 30°. Найдите площадь трапеции.

Решение.



Известно, что «если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны». Следовательно, имеем $2AB = BC + AD$. С другой стороны, по условию имеем

$2AB + BC + AD = 8$

$4AB = 8, \quad AB = 2.$

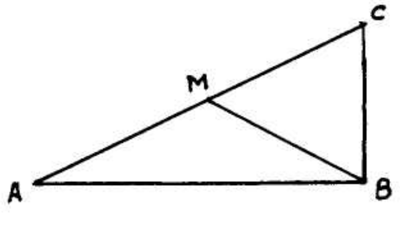
Используем второе условие: $\dfrac{BK}{AB} = \sin 30^{\circ}, \qquad KB = AB \cdot \sin 30^{\circ} = 1,$

$$S_{1BCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BK \cdot AB = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 2. В треугольнике ABC $\angle A = 30^{\circ}, \quad \angle B = 90^{\circ}$, BM – медиана. Найдите угол BMC (в градусах).

Решение.



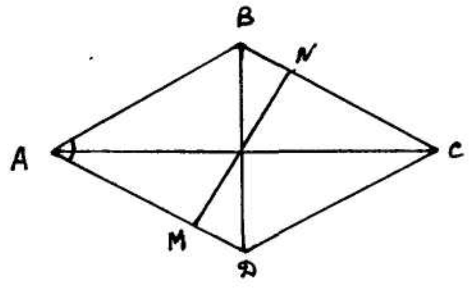
Сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Следовательно, $\angle C = 60^{\circ}$. Так как BM – медиана, то AM = MC. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против угла 30°, составляет половину гипотенузы, так что CB = MC. Значит, ABC – равнобедренный, поэтому $\angle CBM = \angle CMB = \alpha$.

$2\alpha + 60^{\circ} = 180^{\circ}, \qquad \alpha = 60^{\circ}.$

Ответ: $\alpha = 60^{\circ}$.

Задача 3. Острый угол ромба равен α, длина меньшей диагонали равна d. Найдите длину стороны ромба и радиус вписанной в него окружности.

Решение.



$$BD = a, \qquad AC = \frac{1}{2}d_1 = \frac{1}{2}dctg\frac{\alpha}{2},$$

$$d_1 = AC = dctg\frac{\alpha}{2}, \qquad AB = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Найдем площадь ромба:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d = \frac{1}{2}d^2 ctg^2\frac{\alpha}{2}.$$

С другой стороны,

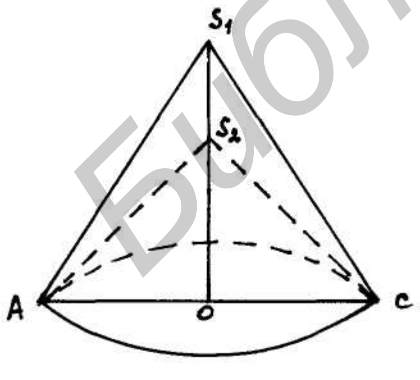
$$S = AD \cdot NM = 2Ra \quad \Rightarrow$$

$$R = \frac{S}{2a} = \frac{1}{2}d\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad \dfrac{d\cos\frac{\alpha}{2}}{2}\right\}$.

Задача 4. Два конуса имеют общее основание и один из них помещен внутри другого. Образующая внешнего конуса наклонена к плоскости основания под углом α, внутреннего – под углом β. Объем тела, ограниченного боковыми поверхностями конусов, равен V. Определите радиус основания конусов.

Решение.



Осевое сечение конусов приведено на рисунке. Имеем: $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_1, \qquad (H_1 = OS_1)$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_2, \qquad (H_2 = OS_2),$$

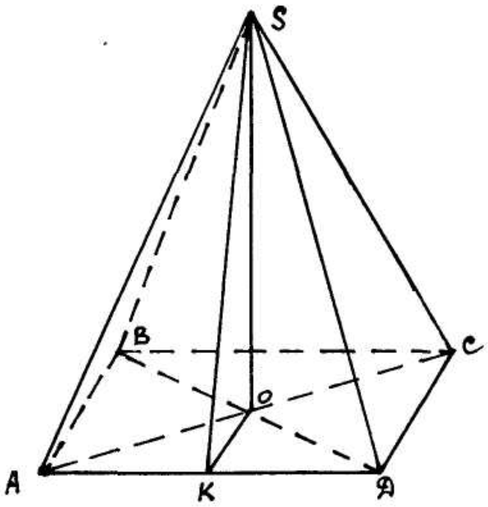
$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 (H_1 - H_2), \qquad H_1 = Rtg\alpha,$$

$$H_2 = Rtg\beta, \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 (tg\alpha - tg\beta).$$

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi(tg\alpha - tg\beta)}}$.

Задача 5. Найдите объем правильной пирамиды, высота которой $3\sqrt[3]{4}$ и все грани - равносторонние треугольники.

Рсшение.



$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$. Пирамида правильная. Значит, ABCD квадрат и $S_{осн} = AD$. Так как все грани – правильные треугольники, то $\angle SAD = 60^{\circ}$, SK – и медиана, и высота, поэтому

$$\frac{SK}{AK} = tg60^{\circ} = \sqrt{3}, \quad SK = AK\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} AD.$$

С другой стороны,

$$SK^2 = OK^2 + SO^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} AD\right)^2 + SO^2 = \frac{AD^2}{4} + 9\sqrt[3]{16},$$

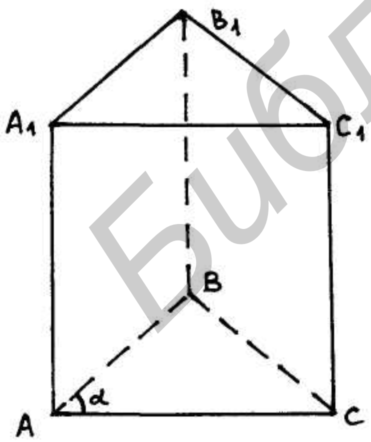
$$AD^2 = 18\sqrt[3]{16},$$

$$V = \frac{1}{3} 18\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} = 72.$$

Ответ: 72.

Задача 6. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a. Угол при основании равен α. Найдите объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

Решение.



По условию $AB = BC, \quad AC = a, \quad S_{\delta} = 2S_{осн}$. Обозначим $A_1A = H$:

$$S_{осн} = \frac{a^2}{4} tg\alpha, \quad S_{\delta} = Ha + 2H\frac{a}{2\cos\alpha} = Ha\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right),$$

$$S_{\delta} = 2S_{осн} = \frac{a^2}{2} tg\alpha = Ha\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

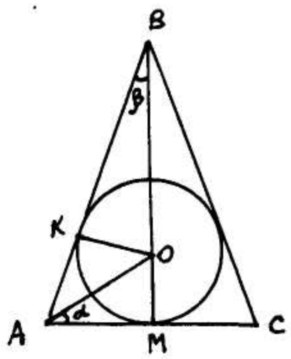
$$H = \frac{a\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)}, \quad V = \frac{a^2}{4} tg\alpha \cdot \frac{a\sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{a^3\sin^2\alpha/2}{4\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{a^3}{4}\frac{\sin^2\alpha/2}{\cos\alpha}$.

Задача 7. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найдите косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

Решение.

ΔABC – осевое сечение конуса, r – радиус шара, $\angle ABC = 2\beta$, R – радиус основания конуса. Согласно условию задачи имеем:



$$\pi R^2 = 4\pi r^2, \quad R = 2r, \quad BM = H = Rctg\beta = 2rctg\beta.$$

С другой стороны,

$$H = BM = OB + OM = r + \frac{r}{\sin\beta} = 2r \cdot ctg\beta,$$

Обозначая $\cos\beta = x$, получим уравнение

$$\sin\beta + 1 = 2\cos\beta, \quad \sqrt{1 - x^2} = 2x - 1,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{5}.$$

Так как $1 + \cos 2\beta = 2\cos^2\beta$, то

$$\cos 2\beta = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}.$$

Ответ: 0,28.

Контрольная работа №8

1. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Длина одной из них равна 8 см. Длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 5 см. Найдите площадь трапеции.

2. В треугольнике АВС высота ВД равна 11,2 см, а высота АЕ равна 12 см. Точка Е лежит на ВС и ВЕ : ЕС = 5 : 9. Найдите длину АС.

3. Длина меньшей стороны параллелограмма равна 6 см. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, пересекаются в точке, принадлежащей противоположной стороне. Найдите периметр параллелограмма.

4. Дан прямоугольник. Перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на две части в отношении $3 : 1$. Найдите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

5. У трапеции АВСД основание СД равно 3, диагональ ВД равна 3 и боковая сторона АД равна 3. Найдите квадрат другой диагонали, если боко вая сторона ВС равна 4.

6. Отрезки FN и KM равны 3 и 5. Известно, что они соединяют сере дины противоположных сторон выпуклого четырехугольника АВСД. Найдите сумму квадратов длин диагоналей АВСД.

•7. Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм, сто-
4

роны которого 26 и 10, а синус угла между ними —. Найдите высоту парал-

лелепипеда, если его объем равен 40.

8. Объем конуса равен 81. Высота разделена на 3 равные части и через точки деления проведены плоскости параллельные основанию. Найдите объем средней части.

9. Основанием пирамиды служит ромб, длины диагоналей которого 6 и 8. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и имеет длину, равную 1. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

10. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4, площади боковых граней равны 9, 10 и 17. Определите объем призмы.

11. Найдите координаты *(x, y)* центра окружности, описанной около тре угольника, образованного координатными осями и касательной к гиперболе *xy=\2* в точке касания М(1; 12). В ответ запишите *(x + y)* - сумму коорди нат центра окружности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите площадь трапеции, если известно, что при последователь ном соединении середин ее сторон образуется квадрат, длина стороны которого равна 5.

2. Перпендикуляры, опущенные из двух вершин прямоугольника на диа гональ, разделили ее на 3 равные части. Большая сторона прямоугольника рав на V2 . Найдите другую сторону.

3. Определите площадь параллелограмма, две высоты которого равны 5 и 6, а угол между высотами равен 30°.

4. Стороны треугольника равны 25, 39 и 56. Определите расстояние от плоскости треугольника до точки, которая удалена от каждой стороны тре угольника на 25.

5. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, боковое ребро составляет угол 45° с плоскостью основания. Найдите объем пирамиды.

6. Найдите площадь поверхности шара, описанного около куба, полная поверхность которого равна $\frac{54}{\_}$.

7. Во сколько раз нужно увеличить высоту прямого кругового конуса, чтобы поверхность его увеличилась в 16 раз.

8. Цилиндр объема *n* вписан в правильную треугольную пирамиду так, что одно из его оснований принадлежит основанию пирамиды, а другое осно вание вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Найдите наименьший возможный объем *V* пирамиды, в которую можно вписать данный цилиндр. В ответ запишите —=.
л/3

Ответы: **1. 50** **2. 1** **3.60** **4. 24** **5. 36**

6. 27 **7. 4** **8.** 6,75

Тема 9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

При изучении данной темы следует обратить особое внимание на графики показательной и логарифмической функций и с их помощью уметь формулировать основные свойства этих функций, также хорошо усвоить нижеприведенные свойства показательных функций и логарифмов.

1. $a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0;$
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y;$
3. $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x;$
4. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y};$
5. $a^x \cdot b^x = (ab)^x;$
6. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x;$
7. а) $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y, \quad x > 0, \quad y > 0;$

   б) $\log_a (x \cdot y) = \left| xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \right| = \log_a |x| + \log_a |y|;$

(надо следить за тем, чтобы не произошло сужение или расширение области определения выражения).

8. а) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0;$

   б) $\log_a \dfrac{x}{y} = \left| \dfrac{x}{y} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \right| = \log_a |x| - \log_a |y|;$
9. $\log_a x^k = k \log_a |x|, \quad x^k > 0, \quad k \in R.$

Область определения выражений в правой и левой частях должна быть одна и та же.

Например: $\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$

$D(\log_a x^2) = R, \quad x \neq 0, \quad D(2 \log_a |x|) = R, \quad x \neq 0$

(если бы вы записали $\log_a x^2 = 2 \log_a x$, то произошло бы сужение области определения: $D(2 \log_a x) = R+$

Но $\log_a x^3 = 3 \log_a x, т.к. \quad D(\log_a x^3) = D(3 \log_a x) = R+.$

10. а) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1, \quad c > 0, \quad c \neq 1;$

б) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$;

11. а) $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b, \quad m,n \in R, \quad a>0, \quad a\neq 1, \quad b>0$;

б) $\log_b a = \log_{b^k} a^k, \quad k\in R$.

12. $a^{\log_a b} = b, \quad a>0, \quad a\neq 1, \quad b>0$ (основное логарифмическое тождество).

13. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (в частном случае: $a^{\lg b} = b^{\lg a}$)
$a>0, \quad a\neq 1, \quad b>0, \quad b\neq 1, \quad c>0, \quad c\neq 1$.

Пример 1. Найдите $\log_8 30$, *если* $\lg 5 = a, \quad \lg 3 = b$.

Решение. $\log_8 30 = \dfrac{\lg 30}{\lg 8} = \dfrac{\lg 3 + \lg 10}{3\lg 2} = \dfrac{\lg 3 + 1}{3\lg\dfrac{10}{5}} = \dfrac{b+1}{3(1-a)}$.

Ответ: $\dfrac{b+1}{3(1-a)}$.

Общий вид простейшего показательного уравнения
$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a>0, \quad a\neq 1$. Оно равносильно уравнению $f(x)=g(x)$. Если $a=\varphi(x)$, то $\begin{cases}\varphi(x)>0\\ f(x)=g(x)\end{cases}$. Случаи $\varphi(x)=0$ и $\varphi(x)=1$ рассматриваются отдельно и найденные корни проверяются подстановкой в данное уравнение. Если они не удовлетворяют ему, или получаются выражения вида 0^0 или $0^{-\alpha^2}$, то эти значения x не являются корнями исходного уравнения.

Существуют различные методы решения показательных уравнений. Рассмотрим некоторые из них на примерах.

Пример 2. Решите уравнение
$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6$.

Решение. Обратите внимание, что $3-\sqrt{8} = \dfrac{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})}{3+\sqrt{8}} = \dfrac{1}{3+\sqrt{8}}$, т.е. выражения $(3-\sqrt{8})$ и $(3+\sqrt{8})$ взаимно обратны. Введем подстановку $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = z$, тогда $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = \dfrac{1}{z}, \quad z>0$.

Уравнение примет вид $z+\dfrac{1}{z}=6, \quad z^2-6z+1=0, \quad z_{1,2}=3\pm\sqrt{8}$. Итак,

$$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 3-\sqrt{8}, \quad x=3, \text{ и } \quad \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 3+\sqrt{8}, \quad x=-3.$$

Ответ: $\{-3; 3\}$.

Пример 3. Решите уравнение $5^{2x+1} + 6^{x+1} = 30 + 150^x$.

Решение. О.О.У.: $x \in R$, $5^{2x} \cdot 5 + 6^x \cdot 6 = 5 \cdot 6 + \left(5^2\right)^x \cdot 6^x$.

Сгруппируем первое и четвертое, втрое и третье слагаемые и вынесем общий множитель, получим:

$$5^{2x}(5-6^x) + 6(6^x - 5) = 0, \quad (5-6^x)\cdot(5^{2x}-6) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 5-6^x=0 \\ 5^{2x}-6=0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{matrix} 6^x = 5 \\ 5^{2x} = 6 \end{matrix}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{matrix} x = \log_6 5 \\ x = \log_{25} 6 \end{matrix}\right. .$$

Ответ: $\{\log_6 5; \log_{25} 6\}$.

Пример 4. Решите уравнение $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0$.

Решение. О.О.У. $x \in R$, $x \neq 0$.

Уравнение содержит показательные функции с разными основаниями. Чтобы свести данное уравнение к уравнению, содержащему одну показательную функцию, разделим почленно все члены уравнения на показательную функцию с большим основанием, т.е. на $9^{1/x} \neq 0$.

$6 - 13\left(\dfrac{6}{9}\right)^{1/x} + 6\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/x} = 0$. Обозначим $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/x} = z, \quad z > 0$,

$$6 - 13z + 6z^2 = 0, \quad z_1 = \frac{3}{2}, \quad z_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1/x} = \frac{3}{2}, \quad x = -1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{1/x} = \frac{2}{3}, \quad x = 1.$$

Ответ: $\{-1; 1\}$.

Общий вид простейшего логарифмического уравнения

$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$.

Такое уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0\,, \\ g(x) > 0\,, \\ f(x) = g(x)\,, \end{cases}$$

Все логарифмические уравнения различными способами сводятся к простейшим.

Пример 5. Решите логарифмическое уравнение путем потенцирования:

$$2\lg\sqrt{x^2-36}+\frac{1}{3}\lg(x^3+3x^2+3x+1)-\lg(x+6)=\lg(15-x).$$

Решение.

О.О.У. $\begin{cases} x^2-36>0 \\ x^3+3x^2+3x+1>0 \\ x+6>0 \\ 15-x>0 \end{cases}.$

Так как отыскание О.О.У. займет много времени, то вначале решим уравнение, затем сделаем проверку:

$\lg(x^2-36)\cdot(x^3+3x^2+3x+1)^{1/3}\cdot(x+6)^{-1}=\lg(15-x)$,

$\dfrac{(x^2-36)(x+1)}{x+6}=15-x$

$(x-6)(x+1)=15-x$

$x^2-4x-21=0, \quad x_1=7, \quad x_2=-3.$

Выполним проверку:

$x_1=7 \qquad \begin{cases} 47-36>0 \\ (7+1)^3>0 \\ 7+6>0 \\ 15-7>0 \end{cases}$ - истинно $x_2=-3$. Легко убедиться, что это значение не удовлетворяет О.О.У.

Ответ: 7.

***Пример* 6.** Решите уравнение с помощью перехода к одному основанию: $\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0$.

Решение.

О.О.У. $\begin{cases} 4x+1>0, \quad 4x+1\neq 1 \\ 9x>0, \quad 9x\neq 1 \end{cases}$

$$\frac{1}{\log_7(4x+1)}+\frac{1}{\log_7 9x}=0\Rightarrow \quad \frac{\log_7 9x+\log_7(4x+1)}{\log_7(4x+1)\cdot\log_7 9x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log_7\left(9x\cdot(4x+1)\right)=\log_7 1\Rightarrow \quad 9x(4x+1)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 36x^2+9x-1=0, \quad x_1=-\frac{1}{3}, \quad x_2=\frac{1}{12}.$$

Ответ: (1/12).

Пример 7. Решите уравнение
$\log_2(x-2)\log_2(x-4)=\log_2(x^2-6x+8)-1$.

Решение.

$$\text{О.О.У.}=\begin{cases} x>2 \\ x>4 \\ x^2-6x+8>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ (x-2)(x-4)>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(4,+\infty)$$

$\log_2(x-2)\log_2(x-4)=\log_2((x-2)(x-4))-1$.

Обозначим $\log_2(x-2)=u$, $\log_2(x-4)=v$, тогда уравнение примет вид
$uv=u+v-1$, $(uv-u)-v+1=0$, $u(v-1)-(v-1)=0$,

$$(v-1)(u-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u-1=0 \\ v-1=0. \end{array}\right.$$

$u-1=0$
$\log_2(x-2)=1$, $x-2=2$, $x_1=4$ не удовлетворяет О.О.У.
$v-1=0$, $\log_2(x-4)=1$, $x-4=2$, $x_2=6$.

Ответ: 6.

Пример 8. Решите уравнение путем логарифмирования левой и правой частей уравнения $2^{x-3}=5^{x^2-5x+6}$. Укажите целое решение.

Решение. О.О.У. $x\in R$
$(x-3)\lg 2=(x^2-5x+6)\lg 5$,
$(x-3)\lg 2=(x-3)(x-2)\lg 5$,
$(x-3)(\lg 2-(x-2)\lg 5)=0$,
$x_1=3$, $x_2=2+\log_5 2$.

Ответ: 3.

Пример 9. Решите уравнение $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$. В ответ запишите сумму корней.

Решение. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, считая $|x-3|>0$. $\begin{cases} (3x^2-10x+3)\lg|x-3|=0 \\ |x-3|\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-10x+3=0 \\ \begin{cases} \lg|x-3|=0 \\ x\neq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3, \quad x_2=1 \\ \begin{cases} |x-3|=1 \\ x\neq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3, \quad x_2=1 \\ x_3=4, \quad x_4=2 \end{array}\right..$$

При $|x-3|=0, \quad x=3$. Если это значение подставить в исходное уравнение, то в левой части получим неопределенное выражение 0^0, откуда следует, что $x=3$ не является корнем уравнения. Итак, корнями уравнения будут числа 1; 4; 2. Их сумма равна 7.

Ответ: 7.

<u>Пример 10</u>. Решите уравнение $5^{3x^2-2x^3}=\dfrac{2x^2+x+2}{x}$.

<u>Решение.</u> Решим это уравнение путем исследования функций, стоящих в левой и правой частях уравнения.

$y_1=5^{3x^2-2x^3}$, $y_1>0$, $y_2=\dfrac{2x^2+x+2}{x}$, т.к. $y_1>0$, то $y_2>0$, т.е.

$\dfrac{2x^2+x+2}{x}>0 \quad \Rightarrow \quad x>0$.

Найдем точки экстремума функций y_1 и y_2.

$y_1'(x)=5^{3x^2-2x^3}\cdot \ln 5(6x-6x^2)$, $y_1'(x)=0$, при $x_1=0$, $x_2=1$, т.к. $x>0$, то исследуем точку $x=1$. В этой точке функция имеет максимум, т.к. $y_1'(x)>0$ для $x<1$ и $y_1'(x)<0$ для $x>1$, $y_1(1)=5$.

$y_2'(x)=2-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^2-2}{x^2}$, $y_2'(x)=0$, при $x=\pm 1$, но т.к. $x\in(0,+\infty)$ то исследуем только точку $x=1$. В этой точке функция имеет минимум, т.к. $y_2'(x)<0$ для $x<1$ и $y_2'(x)>0$ для $x>1$, $y_2(1)=5$.

То есть графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ касаются в точке (1; 5).

Значит, корнем уравнения будет $x=1$.

Ответ: 1.

Пример 11. Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_3 x^2 = \sqrt{\log_3 x^8} + a$ имеет четыре решения. В ответ запишите наибольшее значенче a.

Решение. $\text{О.О.У.} = \begin{cases} x \neq 0 \\ \log_3 x^8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^8 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow |x| \geq 1.$

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{\log_3 x^8} = \log_3 x^2 - a$. Т.к. левая часть уравнения неотрицательна, то $\log_3 x^2 - a \geq 0, \quad 2\log_3|x| \geq a, \quad \log_3|x| \geq \dfrac{a}{2}$ (3)

$$\sqrt{8\log_3|x|} = 2\log_3|x| - a \qquad (1)$$

$$8\log_3|x| = 4\log_3{}^2|x| - 4a\log_3|x| + a^2$$

обозначим $\log_3|x| = t$

$$4t^2 - (4a+8)t + a^2 = 0 \qquad (2)$$

При $D > 0$ уравнение (2) будет иметь два решения, а уравнение (1) – четыре, если корни уравнения будут удовлетворять условию (3).

$$\frac{D}{4} = (2a+4)^2 - 4a^2 = 16a + 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > -1,$$

$$t_{1,2} = \frac{2a + 4 \pm \sqrt{16a+16}}{4} = \frac{a}{2} + 1 \pm \sqrt{a+1},$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3|x|_1 = \dfrac{a}{2} + 1 + \sqrt{a+1} \\ \log_3|x|_2 = \dfrac{a}{2} + 1 - \sqrt{a+1} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x|_1 = 3^{a/2+1+\sqrt{a+1}} \\ |x|_2 = 3^{a/2+1-\sqrt{a+1}} \end{array}\right.$$

Проверим выполнение условий (3):

1) $\dfrac{a}{2} + 1 + \sqrt{a+1} \geq \dfrac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 + \sqrt{a+1} \geq 0$ - истинно при $a > -1$.

2) $\dfrac{a}{2} + 1 - \sqrt{a+1} \geq \dfrac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \sqrt{a+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a+1} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad a \leq 0.$

Итак, при $a \in (-1;0]$ исходное уравнение будет иметь 4 корня:

$$x_{1,2} = \pm 3^{a/2+1+\sqrt{a+1}}, \quad x_{3,4} = \pm 3^{a/2+1-\sqrt{a+1}}.$$

Легко показать, что эти корни удовлетворяют О.О.У: $|x| \geq 1$. Для этого достаточно показать, что $\dfrac{a}{2} + 1 \pm \sqrt{a+1} \geq 0$ при $a \in (-1,0]$.

Проведем оценку:

$$-1 < a \leq 0, \quad -\frac{1}{2} < \frac{a}{2} \leq 0, \quad \frac{1}{2} < \frac{a}{2} + 1 \leq 1.$$

$$0 < a + 1 \leq 1, \quad 0 < \sqrt{a+1} \leq 1.$$

1) $\frac{1}{2} < \frac{a}{2} + 1 + \sqrt{a+1} \le 2$, 2) $\frac{a}{2} + 1 - \sqrt{a+1} \ge 0$ (допустим)

тогда $\sqrt{a+1} \le \frac{a}{2} + 1$, $a + 1 \le \frac{a^2}{4} + a + 1$, $\frac{a^2}{4} \ge 0$ для $a \in R$.

Итак, оба показателя неотрицательны, значит, корни удовлетворяют О.О.У.

***Ответ*:** 0.

***Пример 12*.** При каких a неравенство $\log_{\frac{a+4}{a+9}}\left(x^2 + 3\right) > 1$ выполняется для любого x? В ответ запишите наибольшее целое a.

Решение. Нетрудно заметить, что данное неравенство будет выполняться для любого x при условии $1 < \frac{a+4}{a+9} < 3$, т.к. $x^2 + 3 \ge 3$.

$$\begin{cases} \frac{a+4}{a+9} > 1 \\ \frac{a+4}{a+9} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{a+9} > 0 \\ \frac{-2a-23}{a+9} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 9 < 0 \\ -2a - 23 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -9 \\ 2a < -23 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $a < -\frac{23}{2}$. Итак, при $a \in (-\infty; -11{,}5)$ неравенство выполняется для любого $x \in R$.

Ответ: -12.

Контрольная работа №9

1. Дано $\log_a b + \log_b a = 3$.

Найдите: а) $\log_a{}^2 b + \log_b{}^2 a$, б) $\log_a{}^3 b + \log_b{}^3 a$

в) $\sqrt{5} \cdot \left|\log_a b - \log_b a\right|$.

2. Найдите $\log_{\frac{49}{17}}\left|\sin 3\alpha\right| + \log_{\frac{49}{17}}\left|\sin \alpha\right|$, если

$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{7}}$.

3. Дано $\lg 3 = a$, $\lg 2 = b$. Найдите $\log_5 6$.

4. Вычислите $0{,}2^{\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)}$.

5. Решите уравнения:

а) $(0{,}41(6))^{1-\sin x}\cdot(2{,}4)^{1/2+\sin x}=\left(\frac{12}{5}\right)^{1/2}$.

В ответ запишите наибольшее отрицательное решение.

б) $25\cdot 9^{x}-34\cdot 15^{x}+9\cdot 5^{2x}=0$.

в) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x}=10$.

г) $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$. В ответ запишите сумму корней.

д) $\log_4(x+1)+\log_4(7-x)=\log_4\left((x+1)(x^2+x-17)\right)$.

е) $\log_2{}^2 4x-4\log_4 x=12$. В ответ запишите произведение корней.

ж) $3^{x-3}=5^{x^2-7x+12}$. В ответ запишите целую часть суммы корней.

з) $\log_3(5+\sqrt{x})=\log_4 x$.

и) $\log_{x^2-2}(x^2-8x+8)=\log_{x^2-5}(x^2-8x+8)$.

к) $5x^{\log_x{}^2 4}-3\cdot 4^{\log_x 4}=32$.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_x\log_2\log_x y=0,\\ \log_y 9=1.\end{cases}$$

В ответ запишите $(2x+y)$, где (x,y) – решение системы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите: а) $5^{\log_{25}(3+\sqrt{7})^2}-4^{\log_{16}(2-\sqrt{7})^2}$,

б) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$,

в) $\log_7 6\cdot\log_{36} 7+\log_4 6+\log_4 28-\log_4 42$.

2. Дано: $\log_3 7=a$, $\log_7 5=b$, $\log_5 4=c$.
Найдите $\log_3 12$.

3. Решите уравнения:

а) $2^{5x+5}-7^{5x+1}-2^{5x+2}-7^{5x}=0$.

б) $2^{x^2+3x-3} - 2^{x^2+3x-5} = 12$. В ответ запишите сумму корней.

в) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$. В ответ запишите произведение корней.

г) $3^x = 10 - \log_2 x$.

д) $3 \cdot 7^{\log_x^2 7} + 2 \cdot x^{\log_7 x} = 35$. В ответ запишите произведение корней.

е) $\dfrac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \dfrac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$. В ответ запишите наибольший корень.

ж) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$.

з) $\log_2(2\sqrt{5-x} + 5) = 1 - \log_{0,5}(x - 0,5)$.

и) $\log_2 \sqrt{x^2} = \sqrt{\log_2(-x)}$.

к) $4(\log_2 \cos x)^2 + \log_2(1 + \cos 2x) = 3$.

л) $\log_{21}(7^x - x - 8) = x - x\log_{21} 3$.

м) $(x+1)\lg^2 x + 11x \lg x - 121 = 0$.

4. При каких a уравнение $|\log_5(x+4)| = -(x+a)^2$ имеет решение?

5. При каких p уравнение $p \cdot 6^x + 2 \cdot 6^{-x} = 4$ имеет единственное решение?

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5(x^2 + y^2) = 2, \\ 2\log_9 x + \log_3 y = \log_3 12. \end{cases}$$

В ответ запишите значение x, или если решений несколько, сумму значений x.

Ответы:

1. а) -5; б) 3; в) 1,5.
2. авс + 1
3. а) 0,2; б) -3; в) 1; г) 2; д) 1;
е) 2; ж) 10; з) 4; и) (1; 2);
к) $\pm 60^\circ + 360^\circ k, \quad k \in z$; л) -8; м) 10.
4. 3.
5. $p \in (-\infty, 0] \cup \{2\}$.
6. 7.

Контрольная работа №10

1. Докажите без таблиц $2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3$.

2. Сравните $\frac{1}{5}\log_5 \frac{1}{7}$ и $\frac{1}{7}\log_7 \frac{1}{5}$.

3. Найдите область определения функции, в ответе запишите сумму целых значений $x \in D(y)$ а) $y = \log_2(21x - 4x^2 - 5) + \sqrt{x-3}$

б) $y = \log_x \lg\frac{10}{x}$.

4. Решите неравенства:

а) $32^{\frac{3x^2-8x}{15}} < \left(\frac{12}{90}\right)^{\log_{\frac{75}{10}} 0{,}5}$. В ответ запишите наибольшее целое решение.

б) $0{,}5^{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots} < \sqrt[4]{0{,}5^{2x^2-x}} < 1$. В ответ запишите целое решение.

в) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$. В ответ запишите наименьшее целое решение.

г) $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 14) \geq 0$. В ответ запишите сумму целых решений.

д) $\log_{1/3}\left|\frac{x+2}{x+3}\right| \geq 2$. В ответ запишите наименьшее решение.

е) $\log_2 x \leq \frac{2}{\log_2 x - 1}$. В ответ запишите сумму целых решений.

ж) $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$. В ответ запишите количество целых решений.

з) $\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > 2$. В ответ запишите целое решение.

и) $(x+1)^{\log_2 (x+1)} > (x+1)^2$. В ответ запишите наименьшее целое положительное решение.

5. При каких a неравенство $\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 + 2) > 1$ выполняется при всех x? В ответ запишите наибольшее целое значение a.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите неравенства:

а) $2^{1-2^{1/x}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$. В ответ запишите наибольшее решение.

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$. В ответ запишите наибольшее целое решение.

в) $(0,5)^{\log_{1/3}\frac{x+5}{x^2+3}} > 1$. В ответ запишите сумму целых решений.

г) $\sqrt{\log_2 \frac{3x-5}{5-x}} \le 1$. В ответ запишите сумму наибольшего и наименьшего решений.

д) $\log_5 x + \log_7 x < \log_5 35$. В ответ запишите сумму наибольшего и наименьшего целых решений.

е) $\log_{\frac{1}{7}} \log_2 \frac{3x}{x^2-1} \le 0$. В ответ запишите количество целых решений.

ж) $\log_{2x+5} \frac{1}{3} < \log_{3x-2,5} \frac{1}{3}$. В ответ запишите сумму целых решений.

з) $\log_6 \log_3 \frac{x-4}{x-2} < \log_{\frac{1}{6}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x+11}$. В ответ запишите наибольшее целое решение.

и) $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} \ge 1000$. В ответ запишите наименьшее целое решение.

к) $\lg_{x-3}(x^3 - 4x + 4) \le 0$.

л) $(x-1)^{2x^2-x} > 1$.

м) $x - \frac{1}{2} < 2\log_5(x+2)$. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству.

2. Найдите все значения a, при которых неравенство
$a \cdot 9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ справедливо для всех x.

Ответы: 1. а) 0,5; б) нет; в) 1; г) 5,5;
д) 7; е) 1; ж) 28; з) 0;
и) 1000; к) (3; 4) л) $x > 2$;
м) -1; 0; 1; 2.

2. $a \ge 1$.

Тема 10. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Данная тема является одной из основных тем математического анализа. При ее изучении следует обратить внимание на определение производной, теоремы о производной алгебраической суммы, произведения и частного. Особое внимание следует обратить на вычисление производной сложной функции и на приложения производной.

Задача 1. Вычислите производную функции $y = \dfrac{5x^3 + 2x}{4 + \sqrt{x}}$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования дроби:

$$\left(\frac{5x^3 + 2x}{+\sqrt{x}}\right)' = \frac{(5x^3 + 2x)'(4 + \sqrt{x}) - (4 + \sqrt{x})'(5x^3 + 2x)}{\left(4 + \sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{(15x^2 + 2)(4 + \sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(5x^3 + 2x\right)}{\left(4 + \sqrt{x}\right)^2} = \frac{-5x^3 + 120x^2\sqrt{x} + 30x^2 + 12x + 16}{2\sqrt{x}\left(4 + \sqrt{x}\right)^2}.$$

Задача 2. Покажите, что касательные, проведенные к графику функции $y = \dfrac{x - 4}{x - 2}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

Решение. Две прямые l_1 и l_2 параллельны, если их угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны. Учитывая геометрический смысл производной, будем иметь: тангенс угла наклона касательной, проведенной к данной кривой, равен $y' = \dfrac{x - 2 - x + 4}{(x - 2)^2} = \dfrac{2}{(x - 2)^2}$.

Найдем точки пересечения кривой с осью ОХ:
$y = 0$, $x = 4$ или $M_1(4{,}0)$. С осью ОУ: $x = 0$, $y = 2$ или $M_2(0{,}2)$.

Значения k в этих точках будут $k_1 = y'(4) = \dfrac{1}{2}$, $k_2 = y'(0) = \dfrac{1}{2}$. Т.к. $k_1 = k_2$, то касательные параллельны.

Задача 3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{10x}{1 + x^2}$ на отрезке $[0, 3]$.

Решение. Найдем производную функции

$$y' = \frac{10(1 + x^2) - 2x \cdot 10x}{(1 + x^2)^2} = \frac{10 - 10x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{10(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}.$$

Приравняем y' к нулю и найдем критические точки, т.е. $1-x^2=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$. Т.к. точка $x=-1$ не принадлежит данному отрезку, то ее не рассматриваем.

Далее находим значение функции в точке $x=1$ и на концах отрезка, т.е.

$y(0)=0$, $y(1)=5$, $y(3)=3$.

Итак, наименьшее значение функции равно 0, наибольшее значение равно 5.

Задача 4. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом 6,28 м^3. Каким должен быть радиус бака, чтобы на изготовление его ушло наименьшее количество листовой стали? (Считать $\pi=3{,}14$).

Решение. Полная поверхность цилиндра равна $S=2\pi R^2+2\pi RH$, а объем цилиндра равен $V=\pi R^2 H=6{,}28$. Найдем H цилиндра: $H=\dfrac{6{,}28}{\pi R^2}$.

Итак, $S=2\pi R^2+2\pi R\cdot\dfrac{6{,}28}{\pi R^2}=2\pi R^2+\dfrac{12{,}56}{R}$.

Будем рассматривать полную поверхность цилиндра S как функцию радиуса R, т.е. $S(R)$ и найдем производную этой функции:

$$S'(R)=4\pi R-\frac{12{,}56}{R^2}=\frac{4\pi R^3-12{,}56}{R^2}.$$

Найдем критические точки функции:

$$S'(R)=\frac{4\pi R^3-12{,}56}{R^2}=0,\quad 4\pi R^3-12{,}56=0,$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{12{,}56}{4\pi}},\ \text{при}\ \pi=3{,}14\quad R=1.$$

При $R<1$, $S'(R)<0$, а при $R>1$, $S'(R)>0$. Значит, при $R=1$ функция достигает минимума. А если при $R>0$ критическая точка одна и в ней функция имеет минимум, то это и будет наименьшее значение нашей функции. Итак, при $R=1$ на изготовление бака уйдет наименьшее количество листовой стали.

Контрольная работа № 11

1. При каких значениях x производная функции $y=\sin^4 x+\cos^4 x+2x$ равна 1 ?

2. При каких значениях a функция $y=2x^5+5ax^4+10x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$ на отрезке [2; 4].

4. Найдите меньший корень уравнения $f'(x) = -2f(x)$, если $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x - 2)$.

5. На графике функции $y = \frac{x+8}{x+15}$ найдите все точки, касательные в которых параллельны прямой $y = 7x + 1$. В ответ запишите сумму абсцисс этих точек.

6. В точке с абсциссой $x = 1$ к графику функции $y = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-(x^2 - 7x + 6)}$ проведена касательная. Найдите ординату касательной при $x = 0$.

7. Под каким углом к оси OX наклонена касательная, проведенная к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M(2, -4)$?

8. Две точки движутся по сторонам угла в 60°. Первая находится на расстоянии 10 км от вершины, а вторая – 15 км. Скорость первой точки 5 км/ч, скорость второй – 10 км/ч. В какой момент времени расстояние между ними будет наименьшим. В ответ запишите это расстояние.

9. Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 $м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

10. Тело, брошенное вверх, движется по закону $S = -4{,}905t^2 + 981t + 950$. Найдите, в какой момент времени скорость тела станет равной нулю и какую наивысшую высоту в этот момент времени достигнет тело.

Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, что функция $y = x + \frac{1}{1+x^2}$ возрастает на всей числовой прямой.

2. На прямой $y = 2x - 4$ найдите точку, через которую проходят две взаимно перпендикулярные касательные к графику функции $y = \frac{x^2}{8}$. В ответ запишите ординату найденной точки.

3. В каких точках кривой $y = x^2 + 17x - 1$ следует провести касательные, чтобы они проходили через точку $M(1, 1)$? В ответ запишите сумму абсцисс этих точек.

4. При каких значениях m и n функция $y = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x + 5}, & x \le 1 \\ mx + n, & x > 1 \end{cases}$ имеет одну критическую точку ? В ответ запишите их сумму.

5. При подготовке к экзамену ученик за t дней изучает $\frac{t}{t+2}$ часть материала, а забывает $\frac{t}{18}$ часть. Сколько дней нужно затратить ученику на подготовку к экзамену, чтобы была изучена максимальная часть курса?

6. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найдите длину наименьшего отрезка, соединяющего точки двух сторон треугольника и делящего его площадь пополам.

Ответы:

2. -1.
3. 2.
4. 3.
5. 4.
6. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Учебное издание

Методические указания и контрольные задания по математике

для слушателей заочных подготовительных курсов БГУИР.

С о с т а в и т е л и :
Васильева Виктория Ивановна
Юхо Людмила Константиновна

Редактор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать 03.01.2003. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая. Гарнитура «Таймс».
Усл.печ.л. 4,88. Уч.-изд.л. 4,8 Тираж 500 экз. Заказ 6.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
^Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия ЛП № 156 от 30.12.2002.
Лицензия ЛВ № 509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки, 6