Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
Кафедра высшей математики

Методические указания и контрольные работы по высшей математике

для студентов специальности
«Экономика и управление предприятием»
заочной формы обучения

Минск 2004

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73
М 54

С о с т а в и т е л ь:
Ж.А. Черняк

М 54 Методические указания и контрольные работы по высшей математике для студентов специальности «Экономика и управление предприятием» заочной формы обучения / Сост. Ж.А.Черняк. – 2-е изд., испр. и доп. - Мн.: БГУИР, 2004. – 56 с.

Материал содержит методические указания и условия восьми контрольных работ по высшей математике для студентов экономических специальностей БГУИР заочной формы обучения.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель изучения математики в вузах – развитие логического и алгоритмического мышления; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений, а также для решения различных прикладных (инженерных и экологических) задач, приобщение к самостоятельному изучению учебной литературы по математике и ее приложениям; овладение основными численными методами исследования и решения математических задач.

Учебные планы экономических специальностей вузов предусматривают выполнение девяти контрольных работ по курсу высшей математики. Объем и содержание этих работ определяются программами, утвержденными Учебно-методическим управлением по высшему образованию Министерства образования Республики Беларусь.

Настоящее издание для студентов-заочников содержит методические указания и контрольные задания (десять вариантов) для восьми контрольных работ.

Об изменениях учебных планов и методики изучения курса кафедра высшей математики сообщает дополнительно.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Перед выполнением контрольного задания следует изучить соответствующие разделы курса по изданиям, которые рекомендуются ниже. В тексте каждая позиция из списка литературы обозначается номером в квадратных скобках, например [1] означает в нашем случае ссылку на учебник Д.В. Беклемишева. В методических указаниях даются некоторые начальные теоретические сведения для решения задач из контрольных работ. При затруднении в освоении теоретического или практического материала можно получить консультацию на кафедре высшей математики или в учебно-консультационных пунктах.

Каждая контрольная работа должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины и дату отправки работы в университет.

Задачи контрольной работы выбираются из таблицы вариантов в соответствии с номером, который совпадает с последней цифрой учебного шифра студента. Решения задач необходимо проводить в последовательности, указанной в таблице вариантов. При этом условие задачи должно быть полностью переписано.

В зачтенной контрольной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и отправляют на повторную рецензию. Зачтенные контрольные работы предъявляются преподавателю при сдаче зачета или экзамена.

Методические указания к контрольным работам

Контрольная работа №1

Элементы векторной алгебры, аналитической геометрии и линейной алгебры

Литература: [1, гл.1, §1-3; гл.2,3, §1-3; гл.5, §1-5; гл.6] ; [2, гл. 1, §1-3]; [5, ч.1, §1.1-1.6, 1.10, 1.15-1.19]; [7, гл. 4, 7, 9]; [9, гл.3]; [12, ч.1].

Основные теоретические сведения

1. *Базисом* пространства R_3 называется совокупность линейно независимых векторов, по которым можно разложить любой вектор этого пространства. Если векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ образуют базис, то любой вектор $\vec{a} \in R_3$ можно представить в виде

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q} + \gamma \cdot \vec{r}\,. \qquad (1)$$

При этом числа α, β, γ называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ и определяются однозначно. Если известны координаты векторов $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ и $\vec{\alpha}$ в некотором базисе, то из (1) может быть получена система трёх уравнений с тремя неизвестными α, β, γ. Для нахождения α, β, γ такая система может быть решена по правилу Крамера:

$$\alpha = \Delta_\alpha / \Delta,\ \beta = \Delta_\beta / \Delta,\ \gamma = \Delta_\gamma / \Delta,$$

где определитель системы Δ имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix},\ \vec{p}(p_1, p_2, p_3),\ \vec{q}(q_1, q_2, q_3),\ \vec{r}(r_1, r_2, r_3),$$

а $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma$ - определители, полученные из основного определителя Δ заменой 1, 2, 3-го столбца соответственно столбцом из координат вектора $\vec{a}$.

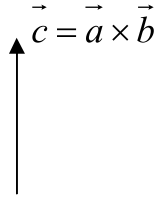
2.1. *Скалярным произведением двух векторов* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ и $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ называется число, определяемое равенством

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

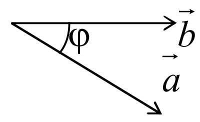
где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.2. *Векторным произведением двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который направлен перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (рис. 1), и длина которого равна

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \quad .$$



Геометрически $|\vec{c}|$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:



$$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \ .$$

Рис. 1

2.3. *Смешанное произведение трех векторов* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ есть число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, и равное значению определителя, составленного из координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2.4. Общее уравнение плоскости p имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – вектор, нормальный (перпендикулярный) плоскости (рис.2). Угол φ между двумя плоскостями с нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}.$$

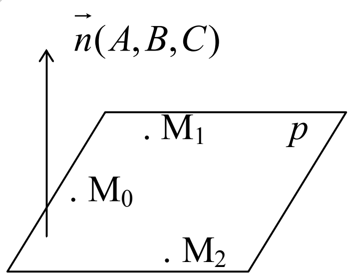


Рис. 2

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

2.5. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

3. Уравнение прямой на плоскости вида $y = kx + b$ называется уравнением с угловым коэффициентом k. Если две прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно –1, т.е. $k_1 \cdot k_2 = -1$. Уравнение прямой с угло-

вым коэффициентом *k*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

4. Пусть *L* – некоторая линия, каждая точка *M* которой обладает следующим свойством: отношение расстояния $|MM_0|$ до данной точки M_0 к расстоянию *d* от М до данной прямой *Ax+By+C=0* равно числу ε, т.е. $\frac{|MM_0|}{d} = \varepsilon$. Число ε называется эксцентриситетом линии *L*. Если ε<1, то множество точек *L* определяет эллипс:

$$(x - x_0)^2 / a^2 + (y - y_0)^2 / b^2 = 1.$$

Если $\varepsilon > 1$, то *L* – гипербола: $(x - x_0)^2 / a^2 - (y - y_0)^2 / b^2 = 1$.

Если ε=1, то *L* – парабола: $y = p(x - x_0)^2$.

5. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты системы; b_i – свободные члены.

Обозначим $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Если определитель матрицы *A* системы $|A| \neq 0$, то система совместна и её решение может быть получено матричным способом по формуле

$$X = A^{-1}B,$$

где *A* – матрица системы; A^{-1} – обратная матрица.

В случае, когда определитель матрицы $|A| = 0$, для исследования совместности системы следует найти ранги r_A матрицы A и $r_{\widetilde{A}}$ расширенной матрицы $\widetilde{A}$, где

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}.$$

Если система совместна, т.е. $r_A = r_{\widetilde{A}}$, но это число меньше числа неизвестных (в данном случае $r_a = r_{\widetilde{a}}$<3), то система имеет бесконечное множество решений, которые можно найти, например, методом Гаусса [4]. Он применим также и в случае, когда $|A| \neq 0$.

6. Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется *собственным вектором* некоторого линейного преобразования с матрицей A, если $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. При этом число λ называется собственным значением матрицы A.

Для нахождения собственных векторов матрицы A находят сначала собственные значения из уравнения $|A - \lambda E| = 0$.

Координаты $(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}^T$, соответствующие собственному значению λ,

являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя собственные значения в систему (2) и решая ее, находят соответствующие собственные векторы (с точностью до постоянного множителя).

Контрольная работа №2

Введение в математический анализ

Литература: [2, гл.1, §1-8; гл.2, §1-5]; [4, §5.3] ; [5, §2.1-2.6]; [12, ч.1].

Основные теоретические сведения

1. *Комплексным числом*, записанным в алгебраической форме, называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительная и мнимая части числа z соответственно, $x, y \in R$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, то арифметические операции над ними выполняются по следующим правилам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad z_2 \neq 0.$$

Всякое комплексное число $z = x + iy \neq 0$ можно представить в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ или в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа z; φ – аргумент числа z; $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$.

Тригонометрическую и показательную формы представления целесообразно применять при умножении и делении комплексных чисел, а также при возведении в степень и извлечении корня. Пусть

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \qquad z_2 \neq 0;$$

$$z^n = r^n(\cos n(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r^n e^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\varphi+2\pi k)/n} \ (k = \overline{0,1,\dots n-1}).$$

2. В ряде случаев график функции *y=F(x)* можно получить преобразованием известного графика другой функции *y=f(x)*.

Функция *y=F(x)*	Преобразование графика функции *y=f(x)*
$F(x)=f(x)+c$	Параллельный перенос вдоль оси ординат на *c* единиц
$F(x)=f(x-a)$	Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на *a* единиц
$F(x)=-f(x)$	Зеркальное отражение относительно оси абсцисс
$F(x)=f(-x)$	Зеркальное отражение относительно оси ординат
$F(x)=k\,f(x)$	Умножение каждой ординаты на *k* («растяжение» в *k* раз вдоль оси ординат)
$F(x)=f(k\,x)$	Деление каждой абсциссы на *k* («сжатие» в *k* раз вдоль оси абсцисс)
$F(x)=\lvert f(x)\rvert$	Отражение участков графика, лежащих ниже оси абсцисс, относительно этой оси
$F(x)=f(\lvert x\rvert)$	Отражение участков графика, лежащих справа от оси ординат, относительно этой оси

3. Для выполнения задания № 3 необходимо знание следующих определений и правил:

а) число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x \to a$, если для любого ε >0 найдется такое δ >0, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Обозначение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$;

б) функция *f(x)* называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$);

в) две функции *f(x)* и *g(x),* бесконечно малые при $x \to a$, называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначение $f(x) \sim g(x), \quad x \to a$;

г) справедливы следующие основные правила вычисления пределов. Пусть α - постоянная, *f(x)* и *g(x)* имеют пределы при $x \to a$.Тогда

1) $\lim\limits_{x\to a} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x);$

2) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x);$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x);$

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0;$

если $g(x) \sim g_1(x)$ *при* $x \to a$, то

5) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g_1(x);$

6) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g_1(x)}.$

д) вычисление пределов может привести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$. Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность ;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x \to \infty$);

3) применение эквивалентных бесконечно малых функций;

4) использование замечательных пределов

$$\lim_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ (x\to a)}} \frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1; \quad \lim_{\substack{\alpha(x)\to 0\\ (x\to a)}} (1+\alpha(x))^{\frac{K}{\alpha(x)}} = e^K.$$

4. Функция называется *непрерывной* в точке $x=a$, если функция определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$ справа (слева), если существует правый (левый) предел функции, равный значению функции в этой точке. Обозначения: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$ (правый предел), $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ (левый предел). Если функция непрерывна в точке a слева и справа, то она непрерывна в этой точке.

Точка $x=a$ является *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция не является непрерывной, т.е. функция в ней либо не определена

$$\text{(например,}\quad f(x)=\frac{1}{x},\quad \text{в точке}\quad x=0\text{),}$$

либо предел функции не равен значению функции в этой точке

$$\text{(например,}\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}\ \text{в точке}\quad x=0\text{).}$$

Точка $x=a$ называется *точкой устранимого разрыва*, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\neq f(a).$$

Точка $x=a$ называется *точкой разрыва первого рода*, если правый и левый пределы функции в этой точке конечны, но не равны друг другу:

$$B=\lim_{x\to a+0} f(x)\neq \lim_{x\to a-0} =A.$$

Точка $x=a$ называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из пределов (правый или левый) не существует или равен бесконечности.

Контрольная работа №3

Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных

Литература: [2, гл. 1-4, гл.8]; [3, гл. 9 -11]; [4, гл. 3]; [5, ч.I, §3.1-3.7; ч.2, гл.6]; [11, гл.3,4,7]; [12, ч.II].

Основные теоретические сведения

1. *Производной* функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, обозначаемое $f'(x_0)$, равное пределу разностного отношения $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x\to x_0$, т.е.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x};\quad \text{где } \Delta y=f(x)-f(x_0),\ \Delta x=x-x_0.$$

Для решения задач по дифференциальному исчислению функции одной переменной нужно знать:

а) таблицу производных;
б) правила дифференцирования функций:

$$[\alpha \cdot f(x)]' = \alpha \cdot f'(x);$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0;$$

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x) + f(x)^{g(x)} \cdot \ln f(x) \cdot g'(x);$$

в) правила дифференцирования сложной функции $y = f[\varphi(x)]$:

$$y' = f'_{\varphi} \cdot \varphi'(x);$$

обратной функции $x = f^{-1}(y)$: $x'_y = \dfrac{1}{f'(x)}$;

функции, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$.

В последнем случае надо продифференцировать равенство $F(x,y)=0$ по x, считая y функцией от x, а затем из полученного соотношения выразить y';

г) производные высших порядков.

2. Формула *Тейлора* с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, x_0 \le c \le x$ или $x \le c \le x_0$.

При $x_0=0$ эта формула называется формулой *Маклорена*. Следует знать разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена. Так,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x);$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + R_n(x);$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Если задана погрешность ε вычисления приближенного значения, то из условия $|R_n(x)| < \varepsilon$ можно найти число n членов разложения функции по формуле Тейлора. Пример с подробным описанием можно найти в [4].

3. Общая схема исследования функции и построения ее графика:

а) найти область определения функции;

б) исследовать функцию на периодичность, четность или нечетность;

в) исследовать функцию на монотонность и экстремумы с помощью первой производной;

г) найти промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной;

д) выяснить существование асимптот графика функции;

е) по полученным результатам построить график функции.

4. Если в некоторой окрестности точки x_0 для функции $f(x)$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$, то точка x_0 называется *точкой экстремума* (точкой максимума или точкой минимума) этой функции. Необходимое условие экстремума: если x_0 – точка экстремума, то либо $f'(x_0)=0$, либо $f'(x_0)$ не существует. Достаточное условие экстремума: если первая производная при переходе через точку x_0, в которой функция непрерывна, меняет знак, то x_0 - точка экстремума, причем x_0 – точка максимума, если знак $f'(x)$ меняется с "+" на "–" (при переходе через точку x_0 слева направо), x_0 – точка минимума в противном случае.

В задачах 131-140 следует выразить искомую величину как функцию некоторой переменной и исследовать полученную функцию на экстремум.

5. *Частной производной* первого порядка функции нескольких переменных (ф.н.п.) $z=f(x,y)$ по аргументу x называется предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

Обозначение $z'_x, \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по аргументу *y*: z'_y или $\dfrac{dz}{dy}$.

Отыскание частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $\dfrac{dz}{dy}$ сводится к дифференцированию функции *z=f(x,y)* по одной из переменных *x* или *y*, при этом другая переменная не меняется, т.е. постоянна. Функция двух переменных *z=f(x,y)* имеет две частные производные первого порядка: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Частных производных второго порядка у нее уже четыре: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Последние две называются смешанными производными. При определенных условиях выполняется равенство $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

6. Часто в приближенных вычислениях используется формула $\Delta z \approx dz$, где Δz - приращение функции в точке $A(x_0,y_0)$, *dz* - дифференциал функции в данной точке:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Поэтому приближенная формула для вычисления значения функции в точке $B(x_1,y_1)$ имеет вид

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y_1 - y_0).$$

Если задана функция *z=f(x,y)*, то вектор-градиент функции *z* определяется формулой $\overrightarrow{gradz} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$.

Если вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ имеет направляющие косинусы $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$, то производная от функции *z=f(x,y)* в точке $A(x_0,y_0)$ по направлению вектора выражается формулой $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\cos\beta$.

7. Уравнение касательной плоскости к поверхности *z=f(x,y)* в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

8. При решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений ф.н.п. необходимо помнить, что если ф.н.п. дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего и наимень-

шего значений или в стационарной точке (точке, где все частные произ-водные обращаются в ноль), или на границе области. Поэтому при решении таких задач используется следующая схема:

а) находят стационарные точки, т.е. решают систему уравнений $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ (причем эти точки должны принадлежать рассматриваемой области) и вычисляют значения функции в найденных точках;

б) исследуют поведение функции на границе области, задача в этом случае сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на некотором отрезке;

в) сравнивая все полученные значения функции, отбирают наибольшее и наименьшее значения. Подробное решение см. в работе [12].

9. Метод наименьших квадратов часто применяется при построении эмпирических формул.

Подробнее см. [2, гл.8,§19]; [12, ч.2].

Контрольная работа №4

Неопределенный и определенный интегралы

Литература: [2, гл. X, XI]; [3, гл. XII]; [5, ч.II, гл. V]; [11, гл. V].

Основные теоретические сведения

1. *Неопределенным интегралом* от функции *f(x)* называется выражение

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{где } F'(x) = f(x).$$

Функция *F(x)* называется *первообразной* для данной функции *f(x).*

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы и свойства:

а) свойство линейности:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx;$$

б) подведение под знак интеграла:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x), т.к. \varphi'(x)dx = d\varphi(x);$$

в) формула интегрирования по частям :

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

К классам функций, интегрируемых по частям, относятся функции вида $P(x) \cdot b^{ax}$, $P(x) \cdot \sin ax$, $P(x) \cdot \cos ax$, $P(x) \cdot \ln x$, $P(x) \cdot \arcsin x$, $P(x)$ arctg x, где

$P(x)$ – многочлен от x. В первых трех случаях за u принимается функция $P(x)$, в последних трех – $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$;

г) интегрирование рациональных дробей, т.е. отношения двух многочленов $\frac{P_n(x)}{Q_k(x)} = R(x)$, сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на элементарные, всегда интегрируемые дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l},$$

где $m,l \in \mathrm{N}$, а x^2+px+q не имеет действительных корней. В случае неправильной дроби ($n \geq k$) предварительно выделяется целая часть (многочлен);

д) интегрирование методом замены переменной (подстановки) за-ключается в переходе от старой переменной x к новой переменной t: $x = \varphi(t)$. Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т.е. выбор $x = \varphi(t)$, не всегда очевидна. Подробно о подстановках см.[8, гл.IV].

2. Формула *Ньютона – Лейбница* для вычисления определенного интеграла имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$.

3. Не всегда удается вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона – Лейбница, поэтому часто значение интеграла находится приближенно, например, с помощью формулы *Симпсона:*

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})],$$

где n – четное число; $h = \frac{b-a}{n}$.

Подробнее см. [2, гл. XI, §8]; [6, §2,3].

4. Определенный интеграл применяется при решении различных геометрических задач. Вот некоторые из них:

а) площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox, вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)$;

б) длина дуги кривой $y=f(x)$, $a \le x \le b$, выражается по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Если кривая задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Длина дуги, заданной в полярных координатах функцией $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$,

вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi;$$

в) объем V_x тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной

трапеции *y*=*f*(*x*), *x*=*a*, *x*=*b*, вычисляется по формуле $V_x = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2\, dx$.

Контрольная работа №5

Несобственные интегралы. Кратные интегралы

Литература: [3, §12.10, 12.11]; [5, ч.IV, гл.11, §1.1]; [6, гл.II, §2.6; гл.VI, §6.1-6. 2]; [11, гл.V, § 4].

Основные теоретические сведения

1. Если промежуток интегрирования не ограничен (например $b=\infty$) или функция *f*(*x*) не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, при *x*=*b*), то, по определению, полагают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Интегралы слева называются *несобственными интегралами*. Несобственный интеграл называется *сходящимся*, если существует конечный предел правой части. Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

2. Вычисление двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ сводится к вычислению

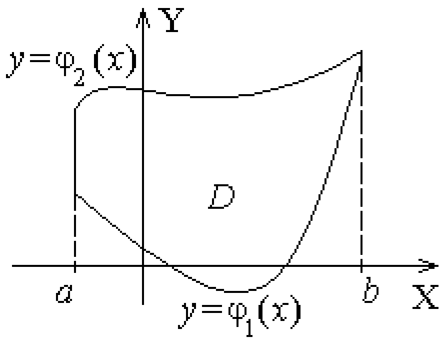


Рис.3

повторного интеграла.

Если область интегрирования D ограничена кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$, причем на отрезке $[a,b]$ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и при этом $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ (рис.3), тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Интеграл справа называется повторным.

Отметим, что если одна из кривых, например $y=\varphi_1(x)$ в промежутке $a \le x \le b$, задается различными аналитическими выражениями

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_{11}(x), a \le x \le c, \\ \varphi_{12}(x), c < x \le b, \end{cases}$$

то
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_{11}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_{12}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

При вычислении повторного интеграла сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x – параметр), а полученная в результате функция интегрируется по x.

Аналогично, если область D ограничена кривыми $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $y=c$, $y=d$, причем всюду на $[c,d]$ функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны и $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Пример. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$$

Построим область интегрирования D, которая ограничена кривыми $y=0$, $y=1$, $x=-\sqrt{1-y^2}$, $x=1-y$ (рис. 4).

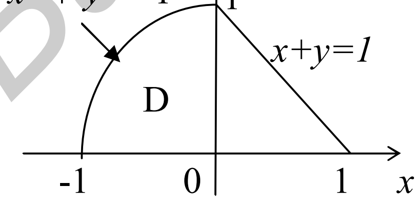


Рис. 4

Уравнение $x=-\sqrt{1-y^2}$ определяет левую полуокружность окружности с уравнением $x^2+y^2=1$. Таким образом, область D ограничена сверху кривой

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0, \\ 1-x, & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

а снизу – прямой $y=0$. Поэтому имеем

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy.$$

3. Объем V некоторого пространственного тела T вычисляется с помощью тройного интеграла:

$$V = \iiint\limits_T dxdydz.$$

В свою очередь, вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторного (трехкратного) интеграла

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

где D_{xy} – проекция тела T на плоскость $x0y$, $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$ – уравнения поверхностей, ограничивающих тело T в направлении оси $0z$ снизу и сверху соответственно.

Контрольная работа №6

Дифференциальные уравнения

Литература: [2, гл.XIII]; [3, гл.XIII]; [5, ч.III, гл.8]; [6, гл.III].

Основные теоретические сведения

1. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $F(x,y,y')=0$ называется дифференцируемая функция $y=\varphi(x,C)$, которая при любом значении произвольной постоянной C является решением данного уравнения. Решения, получающиеся из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при определенном значении произвольной постоянной С, называются частными решениями. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y=y_0$ при $x=x_0$, называется *задачей Коши.*

А. Уравнение вида

$$M_1(x)\cdot N_1(y)\cdot dx + M_2(x)\cdot N_2(y)\cdot dy = 0$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*. Разделив обе части уравнения на $M_2(x)\cdot N_1(y)\neq 0$, получим общий интеграл уравнения

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Б. Уравнение вида $y' = f(x,y)$ называется *однородным уравнением*, если $f(tx, ty)=f(x,y)$ при любом $t\in R$. С помощью подстановки $u=y/x \Leftrightarrow y=ux$, $u=u(x)$ уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

В. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (3)$$

называется *линейным*.

Если $q(x)=0$, то оно называется *однородным линейным* и его решение может быть получено путем разделения переменных. Если $q(x)\neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным; его общее решение получается из общего решения соответствующего линейного однородного уравнения с помощью вариаций произвольной постоянной интегрирования C. Данное уравнение можно также решить с помощью подстановки $y = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ - две новые неизвестные функции.

2. При решении дифференциального уравнения высшего порядка необходимо помнить, что его общее решение или общий интеграл содержат столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. С помощью введения новой функции в некоторых случаях можно понизить порядок уравнения. В частности, таким образом уравнение второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ можно свести к уравнению первого порядка, метод решения которого известен.

3. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (4)$$

где $p,\ q$ – заданные числа.

Задача нахождения решения данного уравнения, удовлетворяющего условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, называется *задачей Коши*.

Если $f(x)=0$, то уравнение (4) называется *линейным однородным уравнением*. Для его решения следует составить и решить характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (5)$$

Рассмотрим три возможных случая, отражающие характер корней уравнения (5):

а) если корни характеристического уравнения λ_1, λ_2 различны и действительны, то общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{одн} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$;

б) если корни $\lambda_1 = \lambda_2$, совпадают, то $y_{одн} = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$;

в) если корни λ_1 и λ_2 комплексные, т.е. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то

$y_{одн} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

Решение линейного неоднородного уравнения (4) основывается на следующей теореме.

<u>Теорема</u>. Если $y^*(x)$ - некоторое частное решение неоднородного уравнения (4), а $y_{одн}(x)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, то общее решение уравнения (4) имеет вид $y = y_{одн} + y^*$.

Правила для нахождения частного решения y^* неоднородного уравнения (4) следующие:

а) пусть $f(x) = e^{\alpha x}(b_0 x^2 + b_1 x + b_2)$.

Если α не является корнем уравнения (5), то частное решение ищется в виде

$$y^* = e^{\alpha x}(A_0 x^2 + A_1 x + A_2).$$

Если α - k-кратный корень (5), то в виде

$$y^* = x^k e^{\alpha x}(A_0 x^2 + A_1 x + A_2) \text{ (k=1 или 2)};$$

б) пусть $f(x) = e^{\alpha x}(B_1 \cos\beta x + B_2 \sin\beta x)$.

Если $\alpha + \beta i$ не является корнем (3), то

$$y^* = e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x).$$

Если $\alpha + \beta i$ - корень уравнения (6), то

$$y^* = xe^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x).$$

Здесь числа A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, M, N находятся в результате подстановки частных решений в исходное уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x.

4. Пусть дана система двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{6}$$

В матричном виде систему (6) можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

где $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \dfrac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$

Будем искать частное решение системы в виде $x = \gamma_1 e^{\lambda t}$, $y = \gamma_2 e^{\lambda t}$, где $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ - константы. Подставляя это решение в систему (6), получим систему уравнений для определения γ_1 и γ_2:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача нахождения чисел γ_1 и γ_2 сводится к задаче нахождения координат собственных векторов матрицы A. Пусть $\overrightarrow{p_1}(\gamma_{11}, \gamma_{21})$ и $\overrightarrow{p_2}(\gamma_{12}, \gamma_{22})$ - собственные векторы матрицы A. Тогда общее решение системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_{12}e^{\lambda_2 t}, \\ y = C_1\gamma_{21}e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

где λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения.

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В матричном виде $X = C_1\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}e^{\lambda_1 t} + C_2\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}$.

5. Приступая к решению задачи с физическим содержанием, нужно определить, какую переменную удобнее взять в качестве искомой функции. Далее, используя физические законы, составить для ее нахождения дифференциальное уравнение и решить его.

Контрольная работа №7

Ряды

Литература: [2, гл.16,17]; [3, гл.14]; [5, ч.3, гл.9-10]; [12, ч.3].

Основные теоретические сведения

1. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (7)$$

называется *сходящимся,* если существует предел его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда. Если же предел частичных сумм не существует или равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

Необходимый признак сходимости: если ряд (7) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами $(a_n > 0)$ содержатся в следующих теоремах.

Признаки сравнения

I. Если для любого натурального n выполняются неравенства $0 \le a_n \le b_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

II. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ (здесь $a_n > 0, \quad b_n > 0$), то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

В качестве эталонных рядов для сравнения обычно используют две серии рядов:

ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, сходящиеся при $\alpha > 1$ и расходящиеся при $\alpha \le 1$;

ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, сходящиеся при $0 \le q < 1$ и расходящиеся при $q \ge 1$.

Признаки сходимости Даламбера и Коши: если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q),$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$. При $q=1$ вопрос о сходимости ряда требует дополнительного исследования.

Интегральный признак сходимости: для исследования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$ рассмотрим интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, где $f(x)$ неотрицательна, непрерывна и монотонно убывает для $x \in [1,+\infty)$, $f(n)=a_n$, $n \in N$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами, имеющими разные знаки, называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*. Для исследования сходимости знакочередующихся рядов применяется признак Лейбница.

2. Ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + ... + c_n(x\text{-}x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \qquad (8)$$

называется *степенным рядом*. Число R называется радиусом сходимости ряда (2), если при $|x - x_0| < R$ ряд (8) сходится, а при $|x - x_0| > R$ расходится. При $|x - x_0| = R$ ряд (8) может как сходиться, так и расходиться. Радиус сходимости может быть найден по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \text{ или } R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

3. Используя известные разложения основных элементарных функций в ряд Тейлора, можно разложить подынтегральную функцию в ряд и почленно проинтегрировать (внутри интервала сходимости). Для приближенного вычисления интеграла с точностью ε берется сумма *n* первых членов про-интегрированного ряда, где число *n* определяется исходя из оценки остатка ряда. Если полученный ряд является знакочередующимся, то по теореме Лейбница остаток ряда не превосходит первого отброшенного члена ряда, взятого по абсолютной величине.

4. Пусть требуется представить в виде ряда решение дифференциального уравнения $y' = \varphi(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=y_0$. Предположим, что решение $y=f(x)$ уравнения существует и представимо в виде ряда Тейлора:

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... \quad .$$

Входящие в этот ряд значения $f(0), f'(0), f''(0),..., f^{(n)}(0),...$ можно найти из исходного уравнения и начального условия. Так, $f(0)=y_0$, $f'(0)=\varphi(0, y_0)$. Далее, дифференцируя уравнение по x, получаем $y''=\varphi'_x(x,y)+\varphi'_y(x,y)\cdot y'(x)$, откуда находим $y''(0)=f''(0)$. Дифференцируя соотношение для y'' еще раз, найдем $y'''(0)=f'''(0)$ и т.д.

5. Рядом *Фурье* периодической функции $f(x)$, $-l \le x \le l$ называется ряд вида

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}+b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,\ n=0,1,2,\ldots\ ;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ n=1,2,\ldots\ .$$

Для разложения в ряд Фурье четных, нечетных функций, а также непериодических функций см. [2, гл.XVII, §3-4].

Контрольная работа №8

Задачи с экономическим содержанием

Литература:[3,гл 3, §3,10; гл.4, §4.4; гл.10, §10.4-10.5; гл.11, §11.3; гл.12, §12.8].

Основные теоретические сведения

1. В математической экономике большую роль играют так называемые *продуктивные матрицы*. Доказано, что неотрицательная квадратичная матрица является продуктивной тогда и только тогда, когда все её собственные значения по модулю меньше 1 (первый критерий продуктивности). Неотрицательная квадратичная матрица А является продуктивной тогда и только тогда, когда для матрицы Е–А существует обратная неотрицательная матрица (второй критерий продуктивности).

2. Чтобы интерпретировать математически закономерности реальных явлений (в том числе и в экономике), формируют соответствующие им математические модели. Широкое распространение в экономических исследованиях получили линейные модели. Они во многих случаях с достаточно высокой точностью соответствуют описываемым явлениям. Почти все линейные модели сводятся к системам алгебраических уравнений или неравенств. Приведем пример составления линейной математической модели для конкретной экономической задачи.

Задача. Три судна доставили в порт 6000 т чугуна, 4000 т железной руды и 3000 т апатитов. Установлены следующие условия разгрузки. Разгрузку можно осуществлять либо сразу в железнодорожные вагоны (общая вместимость которых 8000 т), либо в портовые склады. Вагоны должны быть загружены полностью. Известно также, что поданные в порт вагоны не приспособлены для перевозки апатитов. Стоимость выгрузки в вагоны 1 т груза каждого вида составляет соответственно 4,3; 5,25 и 2,2 ден.ед., стоимость отправки 1 т груза на склад составляет соответственно 7,8; 6,4 и 3,75 ден.ед. Составить математическую модель условий полной разгрузки судов, при затратах на разгрузки 58850 ден.ед.

Решение. В соответствии с условиями задачи прибывший груз можно либо отправить в портовые склады, либо загрузить в железнодорожные вагоны.

Обозначим:

x_1 и x_2 (y_1 и y_2 / z_1 и z_2) — количество чугуна (руды / апатитов), разгружаемых соответственно на склады и в вагоны.

Запишем условия полной разгрузки каждого вида груза:

$$x_1 + x_2 = 6000; \tag{9}$$

$$y_1 + y_2 = 4000; \tag{10}$$

$$z_1 + 0 = 3000; \tag{11}$$

где $z_2 = 0$, так как по условию задачи апатиты нельзя разгружать в вагоны.

Условие полной загрузки всех поданных вагонов:

$$x_2 + y_2 = 8000. \tag{12}$$

И, наконец, условие, определяющее установленные затраты на разгрузку судов:

$$4{,}3x_2 + 5{,}25y_2 + 7{,}8x_1 + 6{,}4y_1 + 3{,}25z_1 = 58850. \tag{13}$$

Итак, условия полной разгрузки судов выражаются системой линейных уравнений (9-13).

Система (9-13) решается методом Гаусса.

3. Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая в точке x функция. *Эластичностью функции* $y = f(x)$ относительно переменной x называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Обозначение эластичности функции y относительно переменной x – $E_x(y)$. Величина $E_x(y)$ выражает приближенное процентное изменение функции y, соответствующее приращению независимой переменной x на 1%.

Аналогично для функции $z = f(x,y)$, имеющей частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, вводятся понятия эластичности относительно независимых переменных x и y. Так, эластичностью $E_x(z)$ по переменной x называется

$$E_x(z) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

а эластичностью $E_y(z)$ по переменной y

$$E_y(z) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

4. Издержки производства K однородной продукции есть функция количества продукции, т. е. K = K(x). Пусть объём продукции меняется от a до b единиц. Тогда, если функция K(x) непрерывна на [a,b], то среднее значение издержек можно вычислить по теореме о среднем значении интеграла $\int_a^b K(x)dx$:

$$K(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)dx.$$

Решая затем уравнение K(x) = K(c), можно указать объём продукции x>0, для которого издержки принимают среднее значение.

Если непрерывная функция f(t) характеризует зависимость производительности труда от времени t, то объём продукции, произведённой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, будет выражаться формулой

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

Условия контрольных работ

Контрольная работа №1

Элементы векторной алгебры, аналитической геометрии и линейной алгебры

Задачи 1-10. Даны векторы *a,b,c,d*. Требуется:
– вычислить скалярное произведение векторов из п. 1;
– найти модуль векторного произведения векторов из п. 2;
– проверить коллинеарность и ортогональность векторов из п. 3;
– убедиться, что векторы *a,b,c* образуют базис;
– найти координаты вектора *d* в этом базисе.

1. $a=i-2j+3k,\ b=4i+7j+2k,\ c=6i+4j+2k,\ d=14i+18j+6k;$
   1) $3a,\ 2c;$ 2) $b,\ -4c;$ 3) $a,\ c.$

2. $a=2i-j+11k,\ b=i+j,\ c=j+2k,\ d=2i+5j+3k;$
   1) $4b,\ 2c;$ 2) $a,\ c;$ 3) $b,\ -c.$

3. $a=2i+7j+5k,\ b=i+k,\ c=i-2j,\ d=3j+k;$
   1) $3a,\ -7b;$ 2) $c,\ -2a;$ 3) $3b,\ c.$

4. $a=8i+2j+3k,\ b=4i+6j+10k,\ c=3i-2j+k,\ d=7i+4j+11k;$
   1) $3a,\ 5c;$ 2) $2b,\ 4c;$ 3) $b,\ -2a.$

5. $a=3i+j+3k,\ b=2i+j,\ c=i+k,\ d=4i+2j+k;$
   1) $-2b,\ c;$ 2) $3a,\ -5c;$ 3) $b,\ c.$

6. $a=10i+3j+k,\ b=i+4j+2k,\ c=3i+9j+2k,\ d=19i+30j+7k;$
   1) $-7a,\ 4c;$ 2) $3a,\ 7b;$ 3) $a,\ c.$

7. $a=2i+4j+k,\ b=i+3j+6k,\ c=5i+3j+k,\ d=24i+20j+6k;$
   1) $3a,\ -8c;$ 2) $3b,\ c;$ 3) $b,\ c.$

8. $a=-i+7j-4k,\ b=-i+2j+k,\ c=-3j+2k,\ d=2i+j-k;$
   1) $5b,\ 3c;$ 2) $7a,\ -4b;$ 3) $c,\ a.$

9. $a=3i+j+8k,\ b=j+3k,\ c=i+2j-k,\ d=2i-k;$
   1) $3a,\ -2c;$ 2) $3b,\ c;$ 3) $a,\ b.$

10. $a=4i+7j+8k,\ b=9i+j+3k,\ c=2i-4j+k,\ d=i-13j-13k;$
   1) $-5a,\ 4b;$ 2) $8c,\ -3a;$ 3) $c,\ b.$

Задачи 11-20. Даны вершины $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ треугольника ABC.

Требуется найти:

1) уравнение стороны AB;

2) уравнение высоты CH и длину этой высоты;

3) уравнение медианы AM;

4) точку N пересечения медианы AM и CH;

5) уравнение прямой, параллельной стороне AB и проходящей через вершину C;

6) внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

11. $A(-2,4)$, $B(3,1)$, $C(10,7)$.   12. $A(-3,-2)$, $B(14,4)$, $C(6,8)$.

13. $A(1,7)$, $B(-3,-1)$, $C(11,-3)$.   14. $A(1,0)$, $B(-1,4)$, $C(9,5)$.

15. $A(1,-2)$, $B(7,1)$, $C(3,7)$.   16. $A(-2,-3)$, $B(1,6)$, $C(6,1)$.

17. $A(-4,2)$, $B(-6,6)$, $C(6,2)$.   18. $A(4,-3)$, $B(7,3)$, $C(1,10)$.

19. $A(4,-4)$, $B(8,2)$, $C(3,8)$.   20. $A(-3,-3)$, $B(5,-7)$, $C(7,7)$.

Задачи 21-30. Даны четыре точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$. Требуется найти:

1) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

2) уравнение прямой, проходящей через точку A_4, перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$;

3) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;

4) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

5) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

21. $A_1(3,-1,2)$, $A_2(-1,0,1)$, $A_3(1,7,3)$, $A_4(8,5,8)$.

22. $A_1(3,5,4)$, $A_2(5,8,3)$, $A_3(1,2,-2)$, $A_4(-1,0,2)$.

23. $A_1(2,4,3)$, $A_2(1,1,5)$, $A_3(4,9,3)$, $A_4(3,6,7)$.

24. $A_1(0,7,1)$, $A_2(2,-1,5)$, $A_3(1,6,3)$, $A_4(3,-9,8)$.

25. $A_1(6,1,1)$, $A_2(4,6,6)$, $A_3(4,2,0)$, $A_4(1,2,6)$.

26. $A_1(7,5,3)$, $A_2(9,4,4)$, $A_3(4,5,7)$, $A_4(7,9,6)$.

27. $A_1(4,2,5)$, $A_2(0,7,1)$, $A_3(0,2,7)$, $A_4(1,5,0)$.

28. $A_1(1,-1,3)$, $A_2(6,5,8)$, $A_3(3,5,8)$, $A_4(8,4,1)$.

29. $A_1(1,-2,7)$, $A_2(4,2,10)$, $A_3(2,3,5)$, $A_4(5,3,7)$.

30. $A_1(2,3,5)$, $A_2(5,3,-7)$, $A_3(1,2,7)$, $A_4(4,2,0)$.

<u>Задачи 31-40</u>. Даны две матрицы A и B. Требуется найти: 1) $A^2 + B^T$; 2) A^{-1}; 3) $\left|2A^{-1} - 3E\right|$, где E - единичная матрица третьего порядка.

31. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

32. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

35. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

36. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

37. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

38. $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

39. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

40. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Задачи 41-50. Проверить, совместна ли система уравнений, и в случае совместности решить ее: 1) по формулам Крамера; 2) методом Гаусса; 3) с помощью обратной матрицы (матричным методом).

41. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3. \end{cases}$

43. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12, \\ x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=11, \\ x_1-2x_2+2x_3=-7. \end{cases}$

45. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6, \\ 2x_1-x_2-x_3=-9. \end{cases}$

46. $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12, \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33, \\ 4x_1+x_3=-7. \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1, \\ x_1+5x_2+x_3=-3. \end{cases}$

50. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1. \end{cases}$

Задачи 51-60. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A.

51. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. 52. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 53. $A=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

54. $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{bmatrix}$. 55. $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$. 56. $A=\begin{bmatrix}4 & -3 & -3\\ 3 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

57. $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$. 58. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}$. 59. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$.

60. $A=\begin{bmatrix}2 & 6 & 3\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$.

Контрольная работа №2

Введение в математический анализ

<u>Задачи 61-70</u>. Требуется: 1) выполнить действия над комплексными числами, записав результат в показательной форме; 2) найти все корни уравнения.

61. 1) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; 2) $z^3-8=0$. 62. 1) $\left(2+i\sqrt{12}\right)^5$; 2) $z^4+4=0$.

63. 1) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; 2) $z^5-1=i\sqrt{3}$. 64. 1) $\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{24}$; 2) $z^6+1=0$.

65. 1) $\dfrac{(2i)^7}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^6}$; 2) $z^4+8=8\sqrt{3}\,i$. 66. 1) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$; 2) z^4-$3z^2$+4=0.

67. 1) $\left(\dfrac{i^8+i^5\sqrt{3}}{4}\right)^5$; 2) z^4-$30z^2$+289=0.

68. 1) $\dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$; 2) $z^3-1+i\sqrt{3}=0$.

69. 1) $\dfrac{(i-\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})}{1-i}$; 2) $z^3-6z-9=0$.

70. 1) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)^7}{i^5}$; 2) $z^3+i\sqrt{48}=4$.

<u>Задачи 71-80</u>. Построить график функции $y=F(x)$, используя преобразования графика известной функции $f(x)$.

71. $F(x)=\left|\dfrac{2x-1}{x}\right|, \quad f(x)=\dfrac{1}{x}$.

72. $F(x)=3\sin(2x+3), \quad f(x)=\sin x$.

73. $F(x)=x^2-|x|-2, \quad f(x)=x^2$.

74. $F(x)=-2\cos(3x+1), \quad f(x)=\cos x$.

75. $F(x)=\log_2|3-x|, \quad f(x)=\log_2 x$.

76. $F(x)=\left|5^{x-1}-6\right|, \quad f(x)=5^x$.

77. $F(x)=\dfrac{3x}{x-2}, \quad f(x)=\dfrac{1}{x}$.

78. $F(x)=\left|6x-x^2-5\right|, \quad f(x)=x^2$.

79. $F(x)=-\sin\left(\dfrac{x}{2}-1\right), \quad f(x)=\sin x$.

80. $F(x)=\left|1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}\right|, \quad f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Задачи 81-90. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

81. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$.

82. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x^3-7}$; 3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-\sin 2x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$.

83. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$.

84. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{arctg3x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$.

85. 1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{tg3x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$.

86. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{\arcsin x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$.

87. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3x^4+x}{x^4+3x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\sin x+\sin 7x}$; 5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{5x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$.

88. 1) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{2x^2-x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{4x+3}{x+5}\right)^{7x}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$.

89. 1) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+2+14x^2}{1+2x+7x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3arctg^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-10x}\right)^{15x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

90. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{tgx\cdot arctgx}$; 5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+5}{4x-2}\right)^{3x+7}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$.

Задачи 91-100. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность и построить ее график.

91. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x<2,\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$ 92. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$

93. $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^3, & -1<x<0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$ 94. $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$

95. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1, \\ x-1, & -1\le x\le 3, \\ 5-x, & x>3. \end{cases}$

96. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0\le x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$

97. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0, \\ 2^x, & 0<x\le 2, \\ x+3, & x>2. \end{cases}$

98. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0, \\ tgx, & 0<x\le \pi/4, \\ 2, & x>\pi/4. \end{cases}$

99. $f(x)=\begin{cases} -1+x, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\pi, \\ 3, & x\ge \pi. \end{cases}$

100. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1, \\ (x-2)^2, & 1<x<3, \\ -x+6, & x\ge 3. \end{cases}$

Контрольная работа №3

Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных

<u>Задачи 101-110</u>. Вычислить: 1-3) производную $\frac{dy}{dx}$; 4) производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$; 5) $\frac{d^3y}{dx^3}(x_0)$ в данной точке x_0; 6) производную n-го порядка для данной функции $y(x)$.

101. 1) $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\frac{2}{(x-3)^5}$; 2) $y=\sqrt{\arccos 2x}\cdot 3^{-x}$;

3) $y=(\cos 5x)^{arctg\sqrt{x}}$; 4) $y\text{-}4x=e^y$;

5) $y=\ln(2+x^2)$, $x_0=0$; 6) $y=2^x$.

102. 1) $y=\frac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$; 2) $y=arctg^4 5x\cdot\ln(x^2+x-1)$;

3) $y=\left(\sqrt{3x+2}\right)^{\arccos 3x}$; 4) $3x+\sin y=5y$;

5) $y=e^{-x}\cdot\cos x$, $x_0=0$; 6) $y=\frac{1}{x+5}$.

103. 1) $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\frac{4}{(x-4)^6}$; 2) $y=5^{-x^2}\cdot\arcsin 3x^3$;

3) $y=(\ln(2x-10))^{\sin\sqrt{x}}$; 4) $xy=ctg\,y$;

5) $y=x\sin 2x$, $x_0=-\pi/4$; 6) $y=\sqrt{x+7}$.

104. 1) $y=\frac{3}{(x+2)^4}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$; 2) $y=\log_3(2x+5)\cdot\sqrt{arctg 6x}$;

3) $y=(ctg(7x+4))^{\sqrt{3x-5}}$; 4) $tg\,y=3x+6y$;

5) $y = x^4 \ln x, \quad x_0 = 1$; 6) $y = \cos 3x$.

105. 1) $y = \sqrt[4]{(x-1)^5} - \dfrac{4}{7x^2 - 3x + 2}$; 2) $y = e^{-\cos x} \cdot arctg 2x^3$;

3) $y = \left(\log_2(5x+7)\right)^{ctg 2x}$; 4) $y^2 + x^2 = \sin y$;

5) $y = \cos^2 x, \quad x_0 = \pi/4$; 6) $y = 10^x$.

106. 1) $y = \sqrt[5]{(x-2)^6} - \dfrac{3}{\left(12x^3 - x^2 - 4\right)^4}$; 2) $y = ctg^3 4x \cdot \arcsin 5x^6$;

3) $y = \left(\lg(8x+3)\right)^{\sqrt{tg 2x}}$; 4) $4\sin^2(x+y) = x$;

5) $y = x + arctg x, \quad x_0 = 1$; 6) $y = \dfrac{x}{x+5}$.

107. 1) $y = \dfrac{3}{\left(4x - 3x^2 + 1\right)^2} - \sqrt{(x+1)^5}$; 2) $y = 2^{\sin x} \cdot \sqrt[3]{\arccos^2 3x}$;

3) $y = \left(tg\sqrt{2x+3}\right)^{\log_5(3x+8)}$; 4) $y = 7x - ctg y$;

5) $y = x^4 \cdot \ln x, \quad x_0 = 1$; 6) $y = \ln(5x-1)$.

108. 1) $y = \sqrt[3]{(x-8)^4} - \dfrac{2}{\left(1 + 3x - 4x^2\right)^{10}}$; 2) $y = \sqrt{\log_3(5x+1)} \cdot arctg^3 4x$;

3) $y = (\arcsin 6x)^{tg\sqrt{10x+3}}$; 4) $xy - 6 = \cos y$;

5) $y = \ln\left(x^2 - 4\right), \quad x_0 = 3$; 6) $y = e^{-3x}$.

109. 1) $y = \dfrac{4}{(3x-7)^5} + \sqrt[3]{\left(3x^2 - x + 1\right)^4}$; 2) $y = \sqrt[3]{arcctg^5 2x} \cdot \lg(6x+1)$;

3) $y = \left(\cos(4x+5)\right)^{\arcsin 3x}$; 4) $x^2 y^2 + x = 5y$;

5) $y = \sin\left(x^3 + \pi\right), \ x_0 = \sqrt[3]{\pi}$; 6) $y = \ln(3x-5)$.

110. 1) $y = \sqrt[7]{(2x+1)^5} + \dfrac{5}{\left(2x^2 - 4x + 3\right)^6}$; 2) $y = \log_5(7x-2) \cdot \arcsin^2 x^3$;

3) $y = \left(tg 7x^3\right)^{\sqrt{x+2}}$; 4) $3y - 7 = xy^3$;

5) $y = x\cos 2x, \quad x_0 = \pi/12$; 6) $y = \dfrac{4}{x+3}$.

Задачи 111-120. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, вычислить значение функции с точностью до 0,001.

111. $\sqrt[3]{65}$. 112. $(3{,}03)^5$. 113. $\cos 151°$. 114. $e^{0,2}$. 115. $\sin 29°$.
116. $\sqrt[7]{130}$. 117. $\ln(e^2 + 0{,}2)$. 118. $(4{,}01)^{1,5}$. 119. $\sin 93°$. 120. $e^{2,01}$.

Задачи 121-130. Провести полное исследование данной функции и построить ее график.

121. $y = e^{2x - x^2}$. 122. $y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}$. 123. $y = x\ln^2 x$.

124. $y = xe^{1/x}$. 125. $y = xe^x$. 126. $y = \frac{x^2}{(x+2)^2}$.

127. $y = \frac{\ln x}{x}$. 128. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$. 129. $y = \ln(x^2 - 2x + 6)$.

130. $y = e^{\frac{1}{2-x}}$.

Задачи 131-140 .

131. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна?

132. Проволокой, длина которой 1 м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

133.Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

134. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

135. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r .На какой высоте надо разместить лампу над столом, чтобы освещенность предмета, лежащего на краю стола, была наилучшей? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

136. Канал, ширина которого a м, под прямым углом впадает в другой канал шириной b м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов.

137. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V. Стоимость одного квадратного метра материала, из которого изготавливается дно бака, составляет a рублей, а стоимость одного квадратного метра материала, идущего на стенки бака, – b рублей. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материалы будут минимальными?

138. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 15 см. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

139. На странице книги печатный текст занимает площадь S. Ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого полей – b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей?

140. Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб? (Сопротивление балки на изгиб Q пропорционально произведению ширины x ее поперечного сечения и квадрата ее высоты y, т.е. $Q = kxy^2$, $k = const$).

Задачи 141-150. Вычислить приближенное значение функции с помощью дифференциала.

141. $\sqrt[3]{0{,}95^3 + 0{,}17^4 \cdot 0{,}79^2}$.

142. $\ln\left(0{,}92^2 - 0{,}18^3 \cdot 0{,}84\right)$.

143. $arctg\left(0{,}79^2 + 0{,}11^3 \cdot 0{,}92^3\right)$.

144. $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}98^3 + 0{,}12^3 \cdot 0{,}81^2}}$.

145. $\sin\left(0{,}15^3 - 0{,}21 \cdot 0{,}78^2\right)$.

146. $\dfrac{1}{0{,}97^3 \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}87^2}$.

147. $\arcsin\left(0{,}17^3 - 0{,}21 \cdot 0{,}97\right)$.

148. $\arccos\left(0{,}12^3 - 0{,}11 \cdot 0{,}92^3\right)$.

149. $\sin^2\left(0{,}12^4 + 0{,}27 \cdot 0{,}89^2\right)$.

150. $\cos^2\left(0{,}09^2 - 0{,}12 \cdot 0{,}87^2\right)$.

Задачи 151-160. Написать:

1) уравнение касательной плоскости и нормали в точке $(x_0,\ y_0,\ f(x,y))$ к поверхности S, заданной уравнением $z=f(x,y)$;

2) grad z в точке $M_0(x_0,y_0)$;

3) производную функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ по направлению вектора $\vec{a}$.

151. $z = x^2 + xy + y^2$, $M_0(1;1)$, $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

152. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$, $M_0(1;1)$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.

153. $z = arctg(xy^2)$, $M_0(2;-1)$, $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$.

154. $z = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, $M_0(1;2)$, $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

155. $z = e^{x^2+y^2}$, $M_0(1;0)$, $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

156. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $M_0(2;1)$, $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

157. $z = \ln\left(5x^2 + 4y^2\right)$, $M_0(1;1)$, $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

158. $z = \arccos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $M_0(1;2)$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

159. $z = 2^{x/y}$, $M_0(2;-1)$, $\vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$.

160. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$, $M_0(-1;2)$, $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

Задачи 161-170.Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=f(x,y)$ в указанной области. Сделать чертеж области.

161. $z = x^2y(2 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

162. $z = x + y$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

163. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

164. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

165. $z = x^2 + y^2 - xy$ в квадрате $|x| + |y| \le 1$.

166. $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

167. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в треугольнике $0 \le x \le y \le 4$.

168 $z = x - 2y - 3$ в области $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le x + y \le 1$.

169. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в квадрате $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

170. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в круге $x^2 + y^2 \le 25$.

Задачи 171-180. Экспериментально получены пять значений функции $y=f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в табл. 1.

Таблица 1

x	1	2	3	4	5
y	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$	$y5$

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $Y=ax+b$, приближенно выражающую (аппроксимирующую) функцию $y=f(x)$. Сделать чертеж, на котором в прямоугольной декартовой системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $Y=ax+b$.

Таблица 2

Задача	x	1	2	3	4	5
171	Y	5,2	3,7	3,1	1,8	1,2
172	Y	2,0	2,6	3,9	4,5	6,0
173	Y	5,4	3,9	3,3	2,0	1,4
174	Y	1,8	2,4	3,7	4,3	5,8

175	Y	5,6	4,1	3,5	2,2	1,6
176	Y	1,6	2,2	3,5	4,1	5,6
177	Y	5,8	4,3	3,7	2,4	1,8
178	Y	1,4	2,0	3,3	4,9	5,4
179	Y	6,0	4,5	3,9	2,6	2,0
180	Y	1,2	1,8	3,1	3,7	5,2

Контрольная работа №4

Неопределенный и определенный интегралы

Задачи 181-190. Найти неопределенные интегралы. В пп. 1-2 результат проверить дифференцированием.

181. 1) $\int \frac{5\cdot 2^x - 7^x}{3^x}dx;$ 2) $\int x^2 \cos 2x dx;$ 3) $\int \frac{x^5+3x^3+1}{x^2+x}dx.$

182. 1) $\int \frac{2\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx;$ 2) $\int x^5 \ln x dx;$ 3) $\int \frac{4x^4+2x^3-x-3}{2x(x^2-1)}.$

183. 1) $\int e^x \cdot \cos(1+e^x)\,dx;$ 2) $\int (x+3)\cdot e^{-2x}dx;$ 3) $\int \frac{-2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx.$

184. 1) $\int \frac{\left(2+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx;$ 2) $\int 4x^2 arcctg\, x\, dx;$ 3) $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x^2-1)(x-5)}.$

185. 1) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx;$ 2) $\int (\sin 2x - 1)x^2 dx;$ 3) $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{3x(x^2-4)}dx.$

186. 1) $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ 2) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx;$ 3) $\int \frac{3x^4+3x^5-5x^2+2}{2(x^2-x)(x+2)}.$

187. 1) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}};$ 2) $\int 5x\cdot\cos^2 x\, dx;$ 3) $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{3x(x^2+x-20)}dx.$

188. 1) $\int \frac{x^2dx}{e^{2x^3+5}};$ 2) $\int \frac{x\cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ 3) $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{4x(x^2-x-2)}dx.$

189. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot e^{\arcsin x}};$ 2) $\int \sin(\ln x)dx;$ 3) $\int \frac{-x^5+25x^3+13}{x^2+5x}dx.$

190. 1) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$; 2) $\int \ln \frac{2-x}{2+x}dx$; 3) $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x + 12}{x^3 - 2x^2 - 3x}dx$.

<u>Задачи 191-200</u>. Вычислить определенные интегралы.

191. 1) $\int\limits_{-p/2}^{-p/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$; 2) $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

192. 1) $\int\limits_{0}^{p/2} \frac{dx}{2+\cos x}$; 2) $\int\limits_{3}^{5} \frac{x^2}{\sqrt{8x-x^2-15}}dx$.

193. 1) $\int\limits_{p/4}^{p} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x\,dx$; 2) $\int\limits_{3}^{8} \frac{(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

194. 1) $\int\limits_{p/3}^{p/2} \frac{dx}{\sin x}$; 2) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

195. 1) $\int\limits_{0}^{p/2} \cos^5 x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

196. $\int\limits_{p/2}^{p} \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx$; 2) $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

197. 1) $\int\limits_{p/3}^{p/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$; 2) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

198. 1) $\int\limits_{p/4}^{p/3} tg^4 x dx$; 2) $\int\limits_{1/4}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

199. 1) $\int\limits_{0}^{p/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{2 - x^2}}$.

200. 1) $\int\limits_{p/6}^{p/4} \frac{1 + tgx}{\sin 2x} dx$; 2) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx$.

<u>Задачи 201-210</u>. Вычислить приближенное значение определенного интеграла по методу: 1)прямоугольников; 2) Симпсона, разбивая промежуток интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с точностью до трех десятичных знаков после запятой.

201. $\int\limits_{-1}^{9} \sqrt{x^3 + 2}\, dx$. 202. $\int\limits_{1}^{11} \sqrt{x^3 + 3}\, dx$. 203. $\int\limits_{2}^{12} \sqrt{x^3 + 4}\, dx$.

204. $\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 8}\, dx$. 205. $\int\limits_{0}^{10} \sqrt{x^3 + 5}\, dx$. 206. $\int\limits_{2}^{12} \sqrt{x^3 + 9}\, dx$.

207. $\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 11}\, dx$. 208. $\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}\, dx$. 209. $\int\limits_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 32}\, dx$.

210. $\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{x^2 + 36}\, dx$.

<u>Задачи 211-220</u>.

211. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

212. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

213. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x$, $x \in \left[\sqrt{3}; \sqrt{8}\right]$.

214. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$.

215. Фигура, ограниченная кривой $y = xe^x$, прямыми $y = 0$, $x = 1$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

216. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, $x \in \left[0, \pi/4\right]$.

217. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = x + 1$, $y = 0$.

218. Вычислить объем тела, отсекаемого от параболоида $x = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{4}$ плоскостью $x = 2$.

219. Вычислить длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 5$.

220. Вычислить объем тела, отсекаемого от гиперболоида $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ плоскостями $z = -2$ и $z = 3$.

Контрольная работа №5

Несобственные интегралы. Кратные интегралы

Задачи 221-230. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

221. 1) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$; 2) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$. **222.** 1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$; 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

223. 1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; 2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. **224.** 1) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 2) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-4-x^2}}$.

225. 1) $\displaystyle\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; 2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$. **226.** 1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; 2) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

227. 1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$. **228.** 1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{16x\,dx}{16x^4-1}$; 2) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}$.

229. 1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{arctg\,2x}{1+4x^2}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$. **230.** 1) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; 2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задачи 231-240. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах.

231. $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$. **232.** $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{x^3} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$.

233. $\int\limits_0^{\frac{p}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x,y)dy.$ **234.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx.$

235. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx.$ **236.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$

237. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy.$ **238.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$

239. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx.$ **240.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx.$

Задачи 241-250. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

241. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy, \quad D: y = x^2, \ x = y^2.$

242. $\iint\limits_D xy^2 dxdy, \quad D: y = x^2, \ y = 2x.$

243. $\iint\limits_D (x+y)dxdy, \quad D: y^2 = x, \ y = x.$

244. $\iint\limits_D (x+y)dxdy, \quad D: y = x^2 - 1, \ y = -x^2 + 1.$

245. $\iint\limits_D (y+1)dxdy, \quad D: y^2 = x, \ 5y = x.$

246. $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy, \quad D: y = x^2, \ y = 1.$

247. $\iint\limits_D x^2 y dxdy, \quad D: y = 2x^3, \ y = 0, \ x = 1.$

248. $\iint\limits_D x(y+5)dxdy, \quad D: y = x+5, \ x+y+5 = 0, \ x \le 0$

249. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2} dxdy, \quad D: y = x, \ xy = 1, \ y = 2.$

250. $\iint\limits_D (x+y)dxdy, \quad D: y = x^3, \ y = 8, \ y = 0, \ x = 3.$

Задачи 251-260. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями. Сделать чертеж.

251. $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$

252. $y = 1 - x^2, \quad x + y + z = 3, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0, \quad x \ge 0.$

253. $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 2 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0.$

254. $y = 2x, \quad x + y + z = 2, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0.$

255. $z = x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad y = 1, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0.$

256. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 4 - x^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$

257. $z = 10 + x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad x = 1, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$

258. $y^2 = 1 - x, \quad x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad z = 0.$

259. $z = 2 - (x^2 + y^2), \quad x + 2y = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$

260. $y^2 = x, \quad x = 3, \quad z = x, \quad z \ge 0.$

Контрольная работа №6

Дифференциальные уравнения

Задачи 261-280. Найти общее решение дифференциального уравнения.

261. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$.
262. $(1 + x^2)y' - 2xy = (11x^2)^2$.
263. $xy' = y\ln(y/x)$.
264. $xy' + y = 3$.
265. $xy' + xe^{y/x} - y = 0$.
266. $y'\cos x = (y+1)\sin x$.
267. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
268. $x^2y' - 2xy = 3$.
269. $x^2y' + y' - 2xy = 0$.
270. $xy' + y = x + 1$.
271. $(1 - x^2)y'' = xy'$.
272. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$.
273. $y'' + y' tg\, x = \sin 2x$.
274. $y'' + y'/x = x^2$.
275. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.
276. $(1 + y)y'' - 5(y')^2 = 0$.
277. $xy'' + 2y' = x^3$.
278. $y'' tg\, y = 2(y')^2$.
279. $y'' - 2y' tg\, x = \sin x$.
280. $3yy'' + (y')^2 = 0$.

Задачи 281-290. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

281. $p = 4,\ q = -12,\ f(x) = 8\sin 2x,\ y_0 = 0,\ y'_0 = 0.$

282. $p = -6,\ q = 9,\ f(x) = x^2 - x + 3,\ y_0 = \dfrac{4}{3},\ y'_0 = \dfrac{1}{27}.$

283. $p = 0,\ q = 4,\ f(x) = e^{-2x},\ y_0 = 0,\ y'_0 = 0.$

284. $p = -2,\ q = 5,\ f(x) = xe^{2x},\ y_0 = 1,\ y'_0 = 0.$

285. $p = 5,\ q = 6,\ f(x) = 12\cos 2x,\ y_0 = 1,\ y'_0 = 3.$

286. $p = -5,\ q = 6,\ f(x) = (12x - 7)e^{-x},\ y_0 = 0,\ y'_0 = 0.$

287. $p = -4,\ q = 13,\ f(x) = 26x + 5,\ y_0 = 1,\ y'_0 = 0.$

288. $p = -4,\ q = 0,\ f(x) = 6x^2 + 1,\ y_0 = 2,\ y'_0 = 3.$

289. $p = -2,\ q = 1,\ f(x) = 16e^{x},\ y_0 = 1,\ y'_0 = 2.$

290. $p = 6,\ q = 9,\ f(x) = 10e^{-3x},\ y_0 = 3,\ y'_0 = 2.$

Задачи 291-300. С помощью характеристического уравнения найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Представить данную систему и ее решение в матричной форме (табл.3).

Таблица 3

№ задачи	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
291	4	6	4	2
292	-5	-4	-2	-3
293	3	1	8	1
294	6	3	-8	-5
295	-1	5	1	3
296	3	-2	2	8
297	-4	-6	-4	-2
298	-5	-8	-3	-3
299	-1	-5	-7	-3
300	-7	5	4	-8

301. Материальная точка массой m=2 г погружается в жидкость, сила сопротивления которой пропорциональна скорости погружения с коэффициентом пропорциональности k=0,002 кг/с. Найти скорость точки через 1 с после начала погружения, если в начальный момент она была равна нулю.

302. Моторная лодка двигалась в спокойной воде со скоростью v_0=12 км/ч. Через 10 с после выключения мотора ее скорость оказалась равной v_1=6 км/ч. Найти скорость лодки через 1 мин после остановки мотора, если известно, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения .

303. Пуля, двигаясь со скоростью v_0=400 м/с, попадает в преграду и начинает углубляться в нее. Найти скорость пули через 0,001с после попадания, ес-

ли известно, что сила сопротивления преграды пропорциональна квадрату скорости пули с коэффициентом пропорциональности k=7 м$^{-1}$.

304. Материальная точка массой m=1 г начинает двигаться в среде прямолинейно под действием силы, пропорциональной времени движения, с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2\cdot 10^{-5}\,кг\cdot м/с^3$. Найти скорость точки через 3с после начала движения, если сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения с коэффициентом пропорциональности k_2=0,003 кг/с.

305. В сосуд, содержащий 100 л 10%-го по объему водного раствора соли, со скоростью q=5 л/мин начинает втекать чистая вода, а вытекать с той же скоростью уже равномерно перемешанная смесь. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса?

306. Угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности k=3. Найти уравнение этой кривой, если известно, что она проходит через точку A(2;–1).

307. Произведение углового коэффициента касательной к кривой и суммы координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. Найти уравнение такой кривой, проходящей через точку A(1;2).

308. Угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке пропорционален отношению ординаты точки касания к абсциссе с коэффициентом пропорциональности k=1/3. Найти уравнение такой кривой, проходящей через точку A(1;2).

309. Всякая касательная к кривой, проходящей через точку A(1;5), отсекает на оси ординат отрезок, равный утроенной абсциссе точки касания. Найти уравнение этой кривой.

310. Любая касательная к кривой, проходящей через точку A(2;4), отсекает на оси абсцисс отрезок, равный кубу абсциссы точки касания. Найти уравнение этой кривой.

Контрольная работа №7

Ряды

Задачи 311-320. Исследовать сходимость числового ряда.

311. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{n^3-2}$.   312. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

313. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}$.   314. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(2n)!}$.

315. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{e^n}$.   316. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

317. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$.
318. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$.

319. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.
320. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

Задачи 321-330. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала.

321. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}(x-1)^n$.
322. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(x+1)^n$.

323. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}(x-e)^n$.
324. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(n+1)^n}(x+2)^n$.

325. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}(x+3)^n$.
326. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt[n]{n}}(x+3)^n$.

327. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(x-\pi)^n$.
328. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n(n+2)}(x-4)^n$.

329. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$.
330. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$.

Задачи 331-340. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и проинтегрировав его почленно.

331. $\int_0^1 e^{-x^3/3}dx$.
332. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$.
333. $\int_0^{0,5} x\cdot arctg\,x\,dx$.

334. $\int_0^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$.
335. $\int_0^{0,5} x\ln(1-x^2)dx$.
336. $\int_0^{0,5} xe^{-x}dx$.

337. $\int_0^{0,5} arctgx^2dx$.
338. $\int_0^1 \sin x^2dx$.
339. $\int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x^2}dx$.

340. $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}dx.$

Задачи 341-350. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

341. $y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1.$

342. $y' = e^x + y^2, \quad y(0) = 0.$

343. $y' = y + y^2, \quad y(0) = 3.$

344. $y' = 2e^y - xy, \quad y(0) = 0.$

345. $y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 1.$

346. $y' = e^x + y, \quad y(0) = 4.$

347. $y' = \cos x + y^2, \quad y(0) = 1.$

348. $y' = \sin x + 0{,}5y^2, \quad y(0) = 1.$

349. $y' = 2e^y + xy, \quad y(0) = 0.$

350. $y' = x + x^2 + y^2, \quad y(0) = 5.$

Задачи 351-360. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале (a,b).

351. $f(x) = x + 1, \quad (-\pi, \pi).$

352. $f(x) = x^2 + 1, \quad (-2{,}2).$

353. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}, \quad (-\pi, \pi).$

354. $f(x) = 2x - 3, \quad (-3{,}3).$

355. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ x, 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad (-\pi, \pi).$

356. $f(x) = |1 - x|, \quad (-2{,}2).$

357. $f(x) = |x|, \quad (-\pi, \pi).$

358. $f(x) = x - 1, \quad (-1{,}1).$

359. $f(x) = x^2, \quad (0{,}2\pi).$

360. $f(x) = \begin{cases} 2, -\pi < x < 0, \\ 1, 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad (-\pi, \pi).$

Контрольная работа №8

Задачи с экономическим содержанием

Задачи 361-370. Обосновать, являются ли матрицы A и B продуктивны-ми, используя для проверки матрицы A первый критерий продуктивности (через собственные значения), для проверки матрицы B – второй критерий продуктивности (через неотрицательность матрицы $(E - B)^{-1}$).

361. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}71 \end{bmatrix}.$

362. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0{,}68 & 0{,}21 \\ 0{,}19 & 0{,}54 \end{bmatrix}.$

363. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 0{,}63 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 2{,}8 \end{bmatrix}$.

364. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 0{,}66 & 0{,}33 \\ 0{,}22 & 0{,}55 \end{bmatrix}$.

365. $A=\begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}51 & 1{,}2 \end{bmatrix}$.

366. $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}42 \\ 0{,}31 & 3{,}18 \end{bmatrix}$.

367. $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 0{,}53 & 0{,}15 \\ 0{,}21 & 0{,}65 \end{bmatrix}$.

368. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 2{,}84 & 0{,}5 \\ 0{,}43 & 0{,}17 \end{bmatrix}$

369. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 2{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}17 & 1{,}2 \end{bmatrix}$.

370. $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix} 0{,}16 & 0{,}24 \\ 0{,}38 & 0{,}18 \end{bmatrix}$.

Задачи 371-380.

371. Из Минска в Могилёв необходимо перевезти оборудование трёх типов в следующих количествах: I типа – 95 ед., II типа – 100 ед., III типа – 185 ед. В табл. 4 приведены данные о количестве оборудования, которое необходимо загрузить на каждый вид транспорта.

Таблица 4

Тип оборудования	Вид транспорта		
	T_1	T_2	T_3
I	3	2	1
II	4	1	2
III	3	5	4

Сколько единиц транспорта каждого вида потребуется для перевозки оборудования из Минска в Могилёв?

372. На приобретение оборудования выделено 20 ден.ед. Оборудование должно быть размещено на площади 42 м^2. Предприятие может заказать оборудование трёх типов: машины *А, Б* и *В*. В табл. 5 приведены данные о машинах всех типов.

Таблица 5

машины	Исходные данные о машинах		
	Цена, ден.ед.	Необходимая производственная площадь, м^2	Производительность, тыс.ед.за смену
А	3	6	7
Б	2	4	4
В	1	3	2

Сколько единиц оборудования каждого типа должно заказать предприятие при условиях полного использования выделенных средств, производственной площади и выпуска за смену 42 тыс.ед. продукции?

373. Предприятие выпускает продукцию трёх видов: *А, Б* и *В*. Количество выпускаемой продукции лимитируется ограниченностью ресурсов. Числовые данные приведены в табл. 6.

Таблица 6

	Запас ресурса	*Нормы затрат на единицу продукции*		
		А	*Б*	*В*
Сырье, кг	24	5	7	4
Материалы, кг	75	10	5	20
Оборудование, ед.	10	5	2	1

Найти план выпуска продукции каждого вида, обеспечивающий полное использование ресурсов.

374. Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки определённое количество питательных веществ B_1, B_2 и B_3. Используется пять видов пищи. Содержание питательных веществ в единице пищи, суточная норма их потребления и цена единицы пищи указаны в табл.7.

Таблица 7

Питательное	*Суточная норма*	Содержание питательных веществ в единице пищи вида $П_i$				
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
B_1	*12*	*2*	*1*	*0*	*4*	*1*
B_2	*25*	*0*	*3*	*1*	*2*	*2*
B_3	*20*	*2*	*1*	*2*	*0*	*0*
Цена единицы пищи, ден.ед		*10*	*5*	*6*	*8*	*10*

Определить количество единиц пищи каждого вида, включаемое в суточную диету стоимостью 100 ден.ед., содержащую требуемую норму питательных веществ.

375. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 – типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при разных способах раскроя, указано в табл. 8.

Таблица 8

	Способ раскроя		
заготовки	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Найти количество листов материала, раскраиваемых каждым из указанных способов, необходимое для полного выполнения задания по заготовкам.

376. На станции A_1 находится 20 т, а на станции A_2 —30 т некоторого однородного груза. Этот груз следует доставить в пункты B_1, B_2 и B_3 в количествах 10, 30 и 10 т соответственно. Стоимость перевозки 1 т груза из пункта A_1 в пункты B_1, B_2 и B_3 равна соответственно 4, 9 и 3 ден.ед., а из пункта A_2 –4, 8 и 1,0 ден.ед. Определить объёмы поставок груза со станций A_1 и A_2 в пункты B_1, B_2 и B_3 при условии полного удовлетворения потребностей в грузе и транспортных затратах в 300 ден.ед.

377. На предприятии освоено четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В табл. 9 указано, какое количество изделий можно произвести из единицы сырья каждым из способов.

Таблица 9

Изделие	*Выход из единицы сырья*			
	I	II	*III*	*IV*
А	*2*	1	*7*	*4*
Б	*6*	12	*2*	*3*

Определить, какое количество сырья следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить поставленное производственное задание: из 94 ед. сырья произвести 574 изделия А и 328 изделий Б.

378. На товарные станции А и Б прибыло по 45 комплектов мебели. Перевозка одного комплекта со станции А в магазины M_1, M_2 и M_3 обходится соответственно в 1, 3 и 5 ден.ед., а перевозка комплекта со станции Б в те же магазины — в 3, 5 и 4 ден.ед. В каждый из магазинов следует доставить одинаковое количество комплектов. Определить план доставки мебели в магазины при условиях перевозки всей мебели со станций в магазины, доставки в магазин M_2 5 комплектов мебели со станции Б и общих транспортных расходах в 270 ден.ед.

379. Для откорма свиней на ферме в ежедневный рацион каждого животного включается 6 ед. питательного вещества А и 7 ед. питательного вещества Б. При этом используются корма K_1, K_2, K_3. Данные о содержании питательных веществ в одной весовой единице корма и её стоимости приведены в табл. 10.

Таблица 10

Корм	Содержание питательного вещества, ед.		Стоимость единицы корма, ден. ед.
	А	Б	
K_1	2	1	5
K_2	1	2	1
K_3	3	1,5	3

Определить состав ежедневного рациона стоимостью 7 ден.ед., содержащего норму питательных веществ.

380. Трикотажная фабрика использует для производства продукции два вида сырья. Все необходимые данные о запасах сырья и затратах на производство единицы изделия приведены в табл. 11.

Таблица 11

Сырье	Запас сырья, кг	Затраты на единицу изделия, ден. ед.		
		Свитер	Пуловер	Костюм
Чистая шерсть Силон	160 60	0,4 0,2	0,2 0,1	0,8 0,2
Прибыль за изделие, ден.ед.		16	15	22

Найти план выпуска готовой продукции (количество единиц изделия каждого вида) при условии, что сырьё расходуется полностью, а прибыль должна составлять 6800 ден.ед.

Задачи 381–390. Вычислить эластичность: а) функции y = f(x) относительно переменной x; б) производственной функции z = f(x,y), где x – затраты живого труда; y – затраты овеществленного труда по переменным x и y в точке $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. На сколько процентов приближённо изменится объём производства z, если затраты живого труда и овеществленного труда увеличатся на 1%?

381. а) y = $2^{\sin(x^2)}$; б) z = $21{,}2x^{2,6}\cdot y^{3,8}$.

382. а) y = $tg^2 x + \ln\cos^2 x$; б) z = $3{,}2(2{,}1x^{-1,5} + 1{,}6y^{-3})^{-\frac{1}{3}}$.

383. а) y = $\cos\dfrac{1}{\log_2 x}$; б) z = $11{,}3\cdot x^{4,6}\cdot y^{1,7}$.

384. а) y = $arctg(th(x))$; б) z= $15(7{,}3x^{-0,2} + 5{,}5y^{-0,35})^{-\frac{4}{7}}$.

385. а) y = $\ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$; б) z = $13{,}3\cdot x^{2,8}\cdot y^{4,4}$.

386. а) y = $e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$; б) z = $8{,}2(2{,}7x^{-0,3} + 1{,}4y^{-2,6})^{-\frac{3}{8}}$.

387. а) y = $3^{\cos^2 x}$; б) z = $1{,}7\cdot x^{3,1}\cdot y^{7,4}$.

388. а) y = $\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$; б) z = $5{,}9(3{,}6x^{-1,8} + 0{,}8y^{-0,5})^{-\frac{6}{11}}$.

389. а) y = $arcctg 2^x$; б) z = $12{,}4\cdot x^{1,9}\cdot y^{6,5}$.

390. а) $y = 10^{\frac{x}{\log_3 x}}$;   б) $z = 2{,}6(6{,}3x^{-3{,}3} + 2{,}5y^{-5{,}1})^{-\frac{5}{9}}$.

Задачи 391-400. Найти среднее значение издержек K(x), выраженное в денежных единицах, если объём продукции x меняется от 0 до a . Указать тот объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

391. $K(x) = 3x^2 + 4x + 2$, $a = 3$.

392. $K(x) = 6x^2 + 4x + 1$, $a = 5$.

393. $K(x) = 2x^2 – x + 3$, $a = 4$.

394. $K(x) = x^2 + 2x + 4$, $a = 6$.

395. $K(x) = 4x^2 – 3x + 2$, $a = 8$.

Задачи 396-400. Определить объём продукции, произведенной рабочим за указанный промежуток времени, если его производительность труда задается функцией f(t).

396. $f(t) = \frac{3}{2t+2} + 5$, за второй и третий часы работы.

397. $f(t) = \frac{2}{4t+5} + 4$, за три первых часа работы.

398. $f(t) = \frac{4}{3t+1} + 2$, за третий, четвертый и пятый часы работы.

399. $f(t) = \frac{5}{3t+2} + 4$, со второго по шестой час работы.

400. $f(t) = \frac{3}{4t+2} + 1$, с третьего по седьмой час работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970. Ч.1,2.

3. Высшая математика/Под ред. А.И. Яблонского. – Мн.: Выш. шк., 1993.

4. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1986.

5. Жевняк Р.М. Карпук А. А. Высшая математика. Ч.1–4. – Мн.: Выш. шк., 1984-1988.

6. Шестаков А.А., Малышева И.А., Полозков Д.П. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1987.

7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1965-1980.

8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1964-1984.

9. Апатенок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Высш. шк., 1986.

10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2. – М.: Высш. шк., 1980.

11. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. – М.: Наука, 1966.

12. Методические указания к контрольным работам по высшей математике для студентов-заочников. Ч.1-3. – Мн.: МРТИ, 1984.

13. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Ч.1. – М.: Финансы и статистика, 1998.

14. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.А., Шандра И.Г. Математика в экономике. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 1999.

Св.план 2004, поз. 36

Учебное издание

Методические указания и контрольные работы
по высшей математике

для студентов специальности
“Экономика и управление предприятием”
заочной формы обучения

Составитель:
Черняк Жанна Альбертовна

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик
Компьютерная верстка И.Э. Антонович

Подписано в печать 28.04.2004.	Формат 60х84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура “Таймс”.	Печать ризографическая.	Усл.печ.л. 3,37.
Уч.-изд.л. 3,2.	Тираж 500 экз.	Заказ 45.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
Лицензия ЛП №156 от 30.12.2002.
Лицензия ЛВ №509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки, 6