Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет доуниверситетской подготовки и профессиональной ориентации
Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

В 2-х частях

Часть 1
ГЕОМЕТРИЯ

Минск 2003

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я 73
С 23

Составители:
О.Ф. Борисенко, С.Ф. Данцевич, В.А. Липницкий

С 23 **Сборник задач по математике:** В 2 ч. Ч. 1. Геометрия / Сост. О.Ф. Борисенко, С.Ф. Данцевич, В.А. Липницкий. – Мн.: БГУИР, 2003. – 39 с.

Сборник задач составлен в соответствии с программой для поступающих в вузы Республики Беларусь. Содержит систематически подобранные задачи по основным разделам курса геометрии средней школы. В сборник включен ряд задач, использовавшихся на приемных экзаменах в вузы Беларуси. Предназначен для учащихся и преподавателей средних школ, слушателей подготовительных отделений и курсов, абитуриентов.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я 73

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Треугольник. Площадь треугольника

1. В треугольнике одна сторона равна 3,2 см, а другая – 0,7 см. Найдите третью сторону, если она выражается целым числом сантиметров.

Ответ: 3 см.

2. В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите гипотенузу.

Ответ: 10.

3. Площадь прямоугольного треугольника равна 30, а тангенс одного из острых углов равен 2,4. Найдите гипотенузу треугольника.

Ответ: 13.

4. В треугольнике ABC AB = 3AC. Во сколько раз длина высоты, проведенной из вершины B, больше длины высоты, проведенной из вершины C?

Ответ: в 3 раза.

5. Существует ли треугольник, длины трех высот которого равны $h_a = 2$, $h_b = 5$, $h_c = 7$?

Ответ: нет.

6. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния от которой до сторон угла равны 4 см и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100 см^2. Найдите катеты треугольника.

Ответ: 40 см и 5 см или 10 см и 20 см.

7. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен 72 см, а разность между длинами медианы CM и высоты CK равна 7 см. Найдите длину гипотенузы.

Ответ: 32 см.

8. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Вычислите площадь этого треугольника, если известно, что AM = BM = 2 см, а CM = 1 см.

Ответ: ≈3,4 см^2.

9. Отношение величин двух углов треугольника равно 2, а разность длин противоположных им сторон равна 5 см. Вычислите площадь треугольника.

Ответ: $3{,}75\sqrt{7}$ см^2.

10. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Определите площади треугольников, на которые данный треугольник разбивается его медианой.

Ответ: 14 см^2.

11. В треугольнике ABC угол A равен 60°, AB = 4 см. Найдите длину AC в см, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: 3 см.

12. Площадь треугольника равна S. Каждая сторона треугольника разделена на части в соотношении m:n:m. Определите площадь шестиугольника, вершинами которого служат точки деления.

Ответ: $\frac{S(m^2+4mn+n^2)}{(2m+n)^2}$.

13. Сторона, биссектриса и высота треугольника, выходящие из одной и той же вершины, равны соответственно 5 см, 5 см и $2\sqrt{6}$ см. Найдите две другие стороны треугольника.

Ответ: $4\frac{8}{21}$ см и $5\frac{20}{21}$ см.

14. Дан треугольник ABC, в котором $2h_c$ = AB и ∠A = 75°. Найдите величину угла C.

Ответ: 75°.

15. В треугольник с основанием 30 см и высотой 10 см вписан равнобедренный прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию, а вершина прямого угла лежит на основании. Определите стороны вписанного треугольника.

Ответ: 12 см, $6\sqrt{2}$ см, $6\sqrt{2}$ см.

16. В треугольнике ABC угол B равен 30°, AB = 4, BC = 6. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определите площадь треугольника ABD.

Ответ: 2,4.

17. В треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Найдите AB, если BD = 18, BC = 30, AE = 20.

Ответ: 25.

18. В треугольнике ABC стороны AB = 4, BC = 6, а высота, опущенная на сторону AC, равна $\frac{3}{4}$ от суммы высот, опущенных на стороны AB и BC. Найдите длину стороны AC.

Ответ: 3,2.

19. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке O. Площади треугольников COD и AOD равны соответственно 4 см^2 и 1 см^2, а площадь треугольника AOD в 5 раз больше площади треугольника AOD. Найдите площадь четырехугольника ABCD.

Ответ: 30 см^2.

§ 2. Подобие треугольников

20. Точка на гипотенузе прямоугольного треугольника, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 1176.

21. В прямоугольном треугольнике найдите отношение меньшего катета к большему, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся как 40:41.

Ответ: 0,8.

22. Высоты AE, DE, CD треугольника ABC пересекаются в точке M. AE = 14, AM = 6, AF = 3. Вычислите AC.

Ответ: 28.

23. В треугольнике ABC сторона DK параллельна AC, $D \in AB$, $K \in BC$. Найдите DK, если AC = 18, AB = 15, AD = 10.

Ответ: 12.

24. Медианы треугольника равны 5 см, 6 см и 5 см. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: 16 см^2.

25. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна с. Проекция вершины прямого угла на гипотенузу делит ее на два отрезка, из которых меньший относится к большему как больший ко всей гипотенузе. Определите площадь треугольника.

Ответ: $0{,}5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

26. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от данного треугольника два прямоугольных треугольника. Найдите длины сторон этих треугольников.

Ответ: 3 см, 4 см и 5 см.

27. В прямоугольный треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см вписана окружность. Через центр окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислите длины средних отрезков сторон треугольника, отсекаемых проведенными прямыми.

Ответ: $\frac{3}{2}$ см, $\frac{8}{3}$ см и $\frac{25}{6}$ см.

28. В треугольнике ABC со сторонами AB = 18 см, BC = 10 см и AC = 14 см из вершины C проведены высота CD, биссектриса CE и медиана CF. Найдите отрезки, на которые они разделили сторону AB.

Ответ: AD = $11\frac{2}{3}$ см, DB = $6\frac{1}{3}$ см, EF = 1,5 см, ED = $1\frac{1}{6}$ см.

29. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 см и 4 см.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ см и $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ см.

§ 3. Окружность

30. В острый угол α, равный 60°, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус большей окружности, если радиус меньшей равен 2.

Ответ: 6.

31. Найдите радиус окружности, если хорда длиной 20 см видна из точки, принадлежащей окружности, под углом, синус которого равен 1/8.

Ответ: 80 см.

32. Одна из двух пересекающихся хорд делится на части в 48 см и 3 см, а другая пополам. Найдите длину второй хорды.

Ответ: 24 см.

33. В окружность радиусом R вписаны 6 равных окружностей радиусом 6 так, что каждая из них касается двух соседних и еще данной окружности. Найдите радиус R.

Ответ: 18.

34. Из точки А проведены к окружности касательная АВ и секущая ACD. Найдите длину хорды CD, если AB = 6, AD = 9.

Ответ: 5.

35. Две окружности радиусом R пересекаются так, что каждая проходит через центр другой. Две другие окружности того же радиуса имеют центры в точках пересечения первых двух окружностей. Найти площадь, общую для всех четырех окружностей.

Ответ: $\frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$.

36. В круге радиусом R проведены по разные стороны от центра две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в 60°, а другая – дугу в 120°. Найдите площадь части круга, заключенной между хордами.

Ответ: $0{,}5R^2(\pi + \sqrt{3})$.

37. Из точки А проведены два луча, пересекающие данную окружность: один – в точках В и С, другой – в точках D и Е. Известно, что AB = 7, BC = 7, AD = 10. Определите DE.

Ответ: 0,2.

38. Окружность каждого из двух равных кругов радиусом $\sqrt{6}$ проходит через центр другого. Найдите площадь общей части этих кругов.

Ответ: $4\pi - 3\sqrt{3}$.

39. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной 12 см, а расстояние между точками касания 14,4 см. Определите радиус окружности.

Ответ: 9 см.

40. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найдите радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно $\sqrt{3} + 1$.

Ответ: 2 и $\sqrt{2}$.

41. Внутри круга радиусом 15 см взята точка М на расстоянии 13 см от центра. Через точку М проведена хорда длиной 18 см. Найдите длины отрезков, на которые точка М делит хорду.

Ответ: 14 см и 4 см.

42. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 см и 17 см. Найдите радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

Ответ: $\frac{85}{8}$ см.

43. Периметр сектора равен 28 см, а его площадь равна 49 $см^2$. Определите длину дуги сектора.

Ответ: 14 см.

44. В равносторонний треугольник ABC со стороной a = 2 см вписан круг. Точка A является центром второго круга радиусом 1 см. Найдите площадь пересечения этих кругов.

Ответ: $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{18}$ $см^2$.

45. Две окружности равных радиусов R = 32 с центрами в точках O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найдите радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и их линии центров.

Ответ: 7.

46. Три окружности радиусами 5 см, 10 см и 15 см внешне касаются друг друга. Найдите:

а) радиус окружности, проходящей через центры окружностей;

б) радиус окружности, проходящей через точки касания данных окружностей, имеющих радиусы 14 см, 15 см, 18 см.

Ответ: а) R = 12,5 см; б) $R = 6\sqrt{7}$ см.

47. В круг радиусом R вписаны три равных круга, касающиеся друг друга и данного круга, а также три равных круга, каждый из которых касается двух вписанных кругов и данного круга, и круг, касающийся трех первых вписанных кругов. Найдите радиусы каждого из вписанных кругов.

Ответ: $r_1 = R\,(2\sqrt{3} - 3)$, $r_2 = \frac{R(2\sqrt{3}-1)}{11}$, $r_3 = R(7 - 4\sqrt{3})$.

48. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды AB = 8 и CD = 6. Найдите радиус окружности.

Ответ: 5.

§ 4. Треугольник и окружность

49. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найдите длину гипотенузы треугольника.

Ответ: 13.

50. В равнобедренном треугольнике с основанием, равным 6, синус угла при вершине равен 3/7. Около треугольника описана окружность. Найдите ее диаметр.

Ответ: 14.

51. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, находится на расстоянии $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$ от концов гипотенузы. Найдите периметр этого треугольника.

Ответ: 12.

52. Окружность вписана в прямоугольный треугольник. Точка касания делит катет на отрезки длиной 3 и 5. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 60.

53. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 4, а одна из точек касания делит сторону треугольника на отрезки длиной 6 и 8. Определите площадь треугольника.

Ответ: 84.

54. Окружность проходит через вершину C треугольника ABC, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найдите AC и BC, если AP = 3, AL = 6, LB = 8, а прямая PQ параллельна AB.

Ответ: AC = 12, BC = 16.

55. Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40. Найдите длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

Ответ: 12π.

56. Сторона правильного треугольника равна a. Определите площадь части треугольника, лежащей вне круга радиусом $a/3$, центр которого совпадает с центром треугольника.

Ответ: $\dfrac{a^2 \cdot (3\sqrt{3} - \pi)}{18}$.

57. Около круга радиусом 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определите стороны треугольника.

Ответ: $4\sqrt{3} + 6$, $4\sqrt{3} + 6$ и $6\sqrt{3} + 12$.

58. Найдите площадь треугольника, вписанного в круг радиусом 2 см, если два угла треугольника равны $\pi/3$ и $\pi/4$.

Ответ: $(\sqrt{3} + 3)$ см^2.

59. Длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника равна 40. Окружность радиусом 9 касается гипотенузы в ее середине. Найдите длину отрезка, отсекаемого этой окружностью на одном из катетов.

Ответ: $\sqrt{82}$.

60. Центры описанной около треугольника и вписанной в него окружностей расположены симметрично относительно одной из сторон треугольника. Найдите углы треугольника.

Ответ: 108°, 36°, 36°.

61. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите площадь треугольника и длину вписанной полуокружности.

Ответ: 294 см^2, 12π см.

62. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см, а один из катетов равен 10 см.

Ответ: $\frac{29}{4}$ см.

63. На основании равнобедренного треугольника, равном 8 см, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если длина высоты, опущенной на основание треугольника, равна 3 см.

Ответ: $\frac{20}{3}$ см.

64. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны соответственно 2 см и 5 см. Найдите катеты треугольника.

Ответ: 6 см и 8 см.

65. Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание этого треугольника равно 24 см, а боковая сторона 13 см.

Ответ: $285{,}61\pi$ см^2.

66. Расстояние от центра круга до хорды длиной 16 см равно 15 см. Найдите площадь треугольника, описанного около круга, если периметр треугольника равен 200 см.

Ответ: 1700 см^2.

67. Найдите площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 м и 16 м.

Ответ: 25π м^2.

68. Три окружности радиусами $R_1 = 6$ см, $R_2 = 7$ см, $R_3 = 8$ см попарно касаются друг друга. Определите площадь треугольника, вершины которого совпадают с центрами этих окружностей.

Ответ: 84 см^2.

69. В равнобедренном треугольнике основание равно 8 см, а высота, опущенная на основание, – 3 см. Найдите площадь круга, вписанного в этот треугольник.

Ответ: $\frac{16}{9}\pi$ см^2.

70. В правильный треугольник со стороной a вписаны три равные окружности, которые касаются друг друга и каждая из них двух сторон треугольника. Найти радиус окружности.

Ответ: $\frac{a}{4}(\sqrt{3}-1)$.

71. Пятнадцать бильярдных шаров, диаметр каждого из которых равен 5 см, сложены так, что касательные к ним образуют равносторонний треугольник. Определите стороны треугольника.

Ответ: $(20 + 5\sqrt{3})$ см.

72. Периметр треугольника равен 42 см, площадь его равна 84 см^2, а радиус описанной около треугольника окружности равен 8,125 см. Найдите стороны треугольника.

Ответ: 13 см, 14 см и 15 см.

§ 5. Теоремы синусов и косинусов

73. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 4 см, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3 см. Найдите основание треугольника.

Ответ: $\sqrt{10}$ см.

74. Сторона BC треугольника ABC равна 25, высота BD равна 15, радиус описанной окружности равен 32,5. Определите длину BA.

Ответ: 39.

75. Площадь треугольника ABC равна 16. Найдите квадрат стороны AB, если AC = 5, BC = 8 и угол C – тупой.

Ответ: 137.

76. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник LMN, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC и делят каждую из них в отношении 3:7. Найдите отношение площади треугольника LMN к площади треугольника ABC.

Ответ: 0,37.

§ 6. Четырехугольники. Параллелограмм

77. Определите в градусах острый угол параллелограмма, если его высоты равны 2 и 3, а периметр равен 20.

Ответ: 30°.

78. Определите сумму длин диагоналей параллелограмма со сторонами $2\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$, если больший угол между диагоналями равен большему углу параллелограмма.

Ответ: 10.

79. Докажите, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма образуют прямоугольник.

80. Дан четырехугольник ABCD, площадь которого равна 90 см^2. Его диагонали делятся точкой пересечения в отношении 2:3 и 4:5. Найдите площадь каждого из четырех треугольников, на которые диагонали разделили четырехугольник.

Ответ: $S_{\Delta ABE} = 16$ см^2, $S_{\Delta AED} = 24$ см^2, $S_{\Delta BEC} = 20$ см^2, $S_{\Delta DEC} = 30$ см^2.

81. Стороны параллелограмма равны 10 и 3. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на 3 отрезка. Найдите их длины и в ответ запишите длину наибольшего из них.

Ответ: 4.

82. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\sqrt{75}/2$ см. Найдите длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

Ответ: 10 см, 12 см, $3\sqrt{91}$.

83. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 см и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найдите длины сторон параллелограмма и его диагоналей.

Ответ: 10, 17, 21 и $\sqrt{337}$ см.

84. Параллелограмм ABCD, у которого AB = 153 см, AD = 180 см, BE = 135 см (BE – высота), разделен на три равновеликие фигуры прямыми, перпендикулярными AD. На каком расстоянии от точки A находятся точки пересечения этих перпендикуляров с AD?

Ответ: 96 см и 156 см.

§ 7. Прямоугольник и ромб

85. Дан прямоугольник. Перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол в отношении 3:1. Найдите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

Ответ: 45°.

86. Биссектриса угла между диагональю ромба и его стороной образует с другой диагональю угол 75°. Определите больший угол ромба.

Ответ: 120°.

87. Площадь ромба равна 20, а длины его диагоналей относятся как 2:1. Найдите длину его стороны.

Ответ: 5.

88. Основание AD прямоугольника ABCD в три раза больше его высоты AB. Точками M и N AD разделено на 3 равные части. Найдите (в градусах) сумму углов AMB, ANB и ADB.

Ответ: 90°.

89. Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$ см. Вычислите длины диагоналей ромба.

Ответ: $2\sqrt{3}$ см и 6 см.

90. Дан ромб ABCD, диагонали которого равны 3 см и 4 см. Из вершины тупого угла B проведены высоты BE и BF. Вычислите площадь четырехугольника BFDE.

Ответ: 4,32 см^2.

91. Вычислите площадь общей части двух ромбов, длины диагоналей первого из которых равны 4 см и 6 см, а второй получен поворотом первого на 90° вокруг его центра.

Ответ: 9,6 см^2.

92. В квадрате ABCD точки M и N – середины сторон DC и BC. Найдите $\angle$MAN.

Ответ: arccos 0,8.

93. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6 см, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

Ответ: 9 см, $9\sqrt{3}$ см и 18 см.

94. В ромбе ABCD сторона является средним пропорциональным его диагоналей. Найдите углы ромба.

Ответ: $\angle$E = 90°, $\angle$A = 30°, $\angle$ABC = 150°.

§ 8. Трапеция

95. Диагональ равнобокой трапеции делит ее среднюю линию в отношении 2:3. Найдите длину средней линии трапеции, если разность длин нижнего и верхнего оснований равна 20.

Ответ: 50.

96. Определите площадь трапеции, если площади треугольников, образованных пересечением диагоналей и прилегающих к основаниям трапеции, соответственно равны 25 и 9.

Ответ: 64.

97. Основание AB трапеции ABCD вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна 8, а длина боковой стороны BC равна 5. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 30.

98. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром 4 см имеет наибольшую площадь?

Ответ: $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ см.

99. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 см и 4 см, а длины двух других сторон – 20 см и 13 см. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 12 см.

100. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 см и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

Ответ: $8\sqrt{5}$ см и $4\sqrt{5}$ см.

101. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

Ответ: $h^2\sqrt{3}$.

102. В трапеции ABCD известны длины оснований AD = 24 см, BC = 8 см и диагоналей AC = 13 см, BD = $5\sqrt{17}$ см. Вычислите площадь трапеции.

Ответ: 80 см^2.

103. Дан квадрат со стороной 10 см. На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания этих трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник. Вычислите его площадь.

Ответ: 150 см^2.

104. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найдите длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований – 8 см.

Ответ: 2 см.

105. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 96 см^2.

106. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 см и 13 см.

Ответ: 14 см, 12,5 см, 29,4 см и 16,9 см.

107. Диагонали трапеции ABCD взаимно перпендикулярны и равны соответственно 12 см и 5 см. Найдите длину MN средней линии трапеции.

Ответ: MN = 6,5 см.

108. Диагональ равнобедренной трапеции является биссектрисой ее острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 7,5 см и 12,5 см. Вычислите длины сторон трапеции.

Ответ: 25 см, 15 см, 15 см и 15 см.

109. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 см. Определите ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

Ответ: 20 см.

110. Среди равнобедренных трапеций ABCD с острым углом 45° и суммой длин высоты и большего основания, равной a. Найдите трапецию наибольшей площади.

Ответ: трапеция наибольшей площади имеет стороны

AD = $\frac{3}{4}a$, BC = $\frac{1}{4}a$, AB = CD = $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

§ 9. Многоугольники и окружность

111. Большая диагональ ромба равна 32, а острый угол равен 60°. Найдите радиус вписанной в этот ромб окружности.

Ответ: 8.

112. Найдите квадрат диагонали равнобокой трапеции с основаниями длиной 20 и 19, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

Ответ: 320.

113. Около круга описана равнобокая трапеция с острым углом при основании 30° и средней линией длиной 20. Найдите радиус круга.

Ответ: 5.

114. Найдите площадь правильного восьмиугольника, если радиус описанной около него окружности равен $\sqrt[4]{2}$.

Ответ: 4.

115. В ромб со стороной 4 и острым углом 60° вписана окружность. Определите площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами ромба.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

116. Вся дуга окружности радиусом R разделена на четыре большие и четыре малые части, которые чередуются одна за другой. Большая часть в два раза длиннее малой. Определите площадь восьмиугольника, вершинами которого являются точки деления окружности.

Ответ: $R^2(\sqrt{3}+1)$.

117. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

118. К окружности радиусом r из точки A, удаленной от центра на расстоянии $2r$, проведена касательная AD. Радиус OD продолжен до точки B так, что $BD = 1/2r$, $BC \perp OA$; BC и AD пересекаются в точке E. Найдите площадь четырехугольника ODEC.

Ответ: $S_{\text{ODEC}} = \dfrac{23r^2\sqrt{3}}{96}$.

119. Стороны четырехугольника ABCD равны AB = 12 см, BC = 18 см, CD = 6 см, AD = 14 см, а диагональ AC = 10 см. Около каждой из его вершин проведена окружность радиусом 2 см. Вычислите площадь фигуры, ограниченной дугами проведенных окружностей и отрезками касательных, проведенных к этим окружностям.

Ответ: $S = (40\sqrt{2} + 15\sqrt{3} + 100 + 4\pi)$ см^2.

120. В некоторый угол вписана окружность радиусом R, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна a. Параллельно этой хорде проведены две касательные, в результате чего получилась трапеция. Найдите площадь этой трапеции.

Ответ: $\dfrac{8R^3}{a}$.

121. Прямая пересекает окружность радиусом R в точках A и B таких, что дуга AB содержит 45°, а прямую, перпендикулярную диаметру AM окружности и проходящую через ее центр, – в точке D. Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно диаметру AM, пересекает его в точке C. Найдите площадь трапеции OCBD.

Ответ: $0{,}25R^2(3 + \sqrt{2})$.

122. Одна из сторон пятиугольника имеет длину 30 см. Длины остальных сторон выражаются целыми числами и составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 см, причем длина меньшей из сторон не превышает 7 см. Найдите длины сторон всех пятиугольников, для которых выполняются эти условия.

Ответ: 5, 7, 9, 11, 30 см;
6, 8, 10, 12, 30 см;
7, 9, 11, 13, 30 см.

123. Площадь равнобедренного треугольника равна 1/3 площади квадрата, построенного на основании данного треугольника. Длины боковых сторон треугольника короче длины его основания на 1 см. Найдите длины сторон и высоты треугольника, проведенной к основанию.

Ответ: 5, 6 и 4 см.

124. Равносторонний шестиугольник ABCDEF состоит из двух трапеций, имеющих общее основание CF. Известно, что AC = 13 см, AE = 10 см. Найдите площадь шестиугольника.

Ответ: 120 см^2.

§ 10. Векторы на плоскости

125. Даны три точки A(2; 1), B(–3; –1), C(–4; 0), являющиеся вершинами равнобедренной трапеции ABCD. Найдите координаты точки D, если $\overline{AB} = \kappa\overline{CD}$.

Ответ: (–1, 4; –5, 2).

126. Найдите модуль проекции вектора $\vec{a}$(7; –4) на ось, параллельную вектору $\vec{в}$ (–8; 6).

Ответ: 8.

127. Дан треугольник ABC; BD – медиана, ∠DBC = 90°, BD = $\sqrt{3}/4$ AB. Найдите ∠ABD.

Ответ: 30°.

128. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC и $\overline{AO} = \vec{a}$, $\overline{AC} = \vec{в}$. Разложите векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$.

Ответ: $\overline{AB} = 3\vec{a} - \vec{в}$, $\overline{BC} = 2\vec{в} - 3\vec{a}$.

129. В треугольнике ABC точка N лежит на стороне AB и AN = 3NB; медиана AM пересекается с CN в точке O. Найдите AB, если AM = CN = 7см и угол NOM равен 60°.

Ответ: $4\sqrt{7}$ см.

130. В трапеции ABCD дано: вершина A(3; 0), середина основания AB – точка E(6; –1), середина основания CD – точка F(7; 2). Боковая сторона параллельна оси Oy. Докажите, что трапеция равнобедренная, и найдите угол при ее основании.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

131. В параллелограмме ABCD дано: M ∈ BC и BM:MC = 1:2; N ∈ DC, DN:NC = = 1:2; $\overline{AM} = \vec{a}$, $\overline{AN} = \vec{в}$. Выразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{MN}$ и $\overline{BD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$.

Ответ: $\overline{AB} = \frac{9}{8}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{в}$, $\overline{AD} = \frac{9}{8}\vec{в} - \frac{3}{8}\vec{a}$, $\overline{MN} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overline{BD} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$.

132. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите угол между боковыми сторонами этого треугольника.

Ответ: $\varphi \approx 37^0$.

133. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямыми y = 0,2x – 0,4, y = x + 2, y = 8 – x.

Ответ: $(x – 2)^2 + y^2 = 26$.

134. Основание AD трапеции ABCD вдвое длиннее основания BC и вдвое длиннее боковой стороны AB. Найдите скалярное произведение $\overline{AD}\cdot\overline{DC}$, если $\angle BAC = \alpha$ и площадь треугольника ABC равна S.

Ответ: $\overline{AD}\cdot\overline{DC} = \frac{4}{3}Stg\frac{\alpha}{2}$.

Глава 2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 11. Призма

135. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом 60°, угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен 60°. Найдите объем призмы, если меньшая диагональ ромба равна 6.

Ответ: 324.

136. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 120. Найдите боковую поверхность призмы.

Ответ: 360.

137. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 22 и образует с боковой гранью угол, квадрат синуса которого равен 1/11. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: 520.

138. Найдите объем наклонной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной, равной a, если одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна $в$.

Ответ: $\frac{ав\sqrt{3(4a^2 - в^2)}}{4}$.

139. Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определите объем шестиугольной призмы, если боковая поверхность четырехугольной призмы равна 30 см^2.

Ответ: $18\sqrt{3}$ см^3.

140. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания, а ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определите боковую поверхность призмы.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)}{3}$.

141. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Через гипотенузу нижнего основа-

ния и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Определите объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

Ответ: $\frac{c^3}{32}$.

142. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция ABCD, AB = CD = 13 см, BC = 11 см, AD = 21 см. Площадь ее диагонального сечения равна 180 см^2. Вычислите полную поверхность призмы.

Ответ: 906 см^2.

143. В трехгранном угле два плоских угла равны по 60°, а третий равен 90°. Найдите угол наклона ребра, противолежащего углу 90°, к плоскости этого угла.

Ответ: 45°.

144. Проекцией прямоугольника ABCD на плоскость γ является квадрат A_1BCD_1. Вычислите угол между плоскостью γ и плоскостью, в которой лежит прямоугольник, если AB:BC = 2:1.

Ответ: 60°.

145. В трехгранном угле два плоских угла равны по 45°, а третий равен 60°. На ребре, противолежащем углу 60°, взята точка на расстоянии $3\sqrt{3}$ см от вершины. Найдите расстояние от этой точки до плоскости угла.

Ответ: 3 см.

146. Квадраты ABCD и FLCD расположены так, что проекция стороны FL на плоскость квадрата ABCD проходит через центр этого квадрата. Вычислите угол между плоскостями квадратов.

Ответ: 60°.

147. Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция с боковой стороной 3 см, большим основанием 8 см и острым углом 60°; высота призмы равна диагонали ее основания. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: 133 см^2.

148. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная l, составляет угол β с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

Ответ: $\frac{l^3 \sin^2 \beta}{3}\sqrt{3-4\sin^2 \beta}$.

149. Катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника лежат в различных гранях прямого двугранного угла. Вершина прямого угла треугольника удалена от ребра прямого угла на расстояние m, а вершина острого угла – на n. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $\frac{1}{4}(2m^2 + n^2\sqrt{4m^4 + n^4})$.

150. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Большая диагональ призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Определите объем призмы.

Ответ: $\frac{1}{4}d^3 \sin 2\beta \cos\beta tg\frac{\alpha}{2}$.

151. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину d, составляет с боковым ребром призмы угол α. Определите объем призмы.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{6}d^3 \sin\alpha \sin 2\alpha$.

152. На плоскости α дан угол A. Точка M удалена от каждой стороны угла на 7 см, а от его вершины – на 13 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости α, если величина угла A равна 60°.

Ответ: 3см.

153. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Диагональ большей боковой грани и диагональ другой боковой грани, исходящие из одной вершины, образуют угол α. Найдите объем призмы.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha}$.

§ 12. Параллелепипед

154. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет углы α и β с двумя смежными боковыми гранями. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $l^3 \sin\alpha \sin\beta\sqrt{\cos 2\alpha}$.

155. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм со сторонами 4 см и 8 см и углом 30°. Диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: 64 см^3.

156. Длины ребер параллелепипеда равны $2\sqrt{2}$, 4 и 3. Ребра, длины которых равны $2\sqrt{2}$ и 4, взаимно перпендикулярны, а ребро длиной 3 образует с каждым из них угол 60°. Вычислите объем параллелепипеда.

Ответ: 24.

157. Найдите расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36 см^2.

Ответ: 3 см.

158. Через вершины A, C и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол 60°. Стороны основания равны 3 см и 4 см. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $28{,}8\sqrt{3}$ см^3.

159. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 дм, а высота равна 12 дм. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб площадью 24 дм^2 и с диагональю, равной 8 дм. Найдите боковую поверхность и объем параллелепипеда.

Ответ: 260 дм^2, 312 дм^3.

160. Диагональ прямоугольного параллелепипеда рана 13 см, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ см и $3\sqrt{13}$ см. Определите объем параллелепипеда.

Ответ: 144 см^2.

161. Через середины каждых трех ребер куба, выходящих из одной вершины, проведены сечения. Найдите объем полученного четырнадцатигранника, если ребро куба равно a.

Ответ: $\frac{5}{6}a^3$.

162. Основание прямого параллелепипеда – ромб со стороной a, угол между плоскостями двух боковых граней равен α, угол между плоскостями двух других боковых граней равен φ, большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $2a^3 \sin\varphi \sin\frac{\varphi}{2} tg\beta$.

163. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью – угол β. Высота параллелепипеда равна h. Определите стороны основания.

Ответ: $\frac{h\sin\beta}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

164. Основание прямого параллелепипеда – ромб со стороной a; угол между плоскостями двух боковых граней параллелепипеда равен α, диагональ боковой грани составляет с плоскостью другой боковой грани угол β. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $\frac{a^3\sin\alpha}{\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}$.

165. Основание прямого параллелепипеда – ромб с острым углом φ и меньшей диагональю d. Найдите объем параллелепипеда, если большая диагональ его составляет с плоскостью боковой грани угол α.

Ответ: $\frac{d^3 ctg^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\alpha}\sqrt{\sin(\frac{\varphi}{2}-\alpha)\sin(\frac{\varphi}{2}-\alpha)}$.

166. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет угол α с плоскостью боковой грани и угол β с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда, если его высота равна h.

Ответ: $\frac{h^3\sin\alpha}{\sin^2\beta}\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$.

167. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет углы α и β с двумя смежными гранями. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $l^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

168. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите сечение через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1. Вычислите площадь сечения, если ребро куба равно a.

Ответ: $\dfrac{35a^2\sqrt{23}}{192}$.

169. Определите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных ребер куба параллельно диагонали куба, пересекающей эти ребра, если ребро куба равно a.

Ответ: $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

170. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площади диагональных сечений равны S и Q ($S < Q$), меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

Ответ: $Q + 2\sqrt{S^2 + Q^2}$.

§ 13. Пирамида

171. В основании пирамиды SABC лежит равнобедренный треугольник (AB = BC) с боковой стороной a и углом ABC, равным α. Боковое ребро SA образует с плоскостью ABC также угол α. Определите объем пирамиды, если ее вершина проектируется в точку пересечения высот основания.

Ответ: $\dfrac{1}{3}a^3 \sin a^3 \sin\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

172. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $10\sqrt[4]{3}$, угол при вершине боковой грани равен 60°. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Ответ: 300.

173. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды, равное 12, составляет с высотой пирамиды угол в 30°. Найдите объем этой пирамиды.

Ответ: 324.

174. Стороны основания правильной треугольной пирамиды равны 6, двугранный угол при основании равен 45°. Определите объем пирамиды.

Ответ: 225.

175. Все боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите сторону основания пирамиды, если боковая поверхность ее равна $24\sqrt{3}$, а $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: 8.

176. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным a, и двугранным углом при боковом ребре, равным β.

Ответ: $2a^3(1-ctg^2\frac{\beta}{2})ctg\frac{\beta}{2}$.

177. Основание четырехугольной пирамиды – прямоугольник с диагональю, равной 6, и острым углом 30° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 9.

178. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого угол между равными сторонами равен α, а противолежащая ему сторона равна a. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом β. Найдите полную поверхность пирамиды.

Ответ: $a^2 ctg\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1+\cos\beta}{4\cos\beta}\right)$.

179. Найдите объем пирамиды SABC, если AC = 15, SA = BC = 8, AB = SB = = SC = 17.

Ответ: $80\sqrt{3}$.

180. Ребро правильного тетраэдра SABC равно a. Через середины сторон AB и BC проведена плоскость, параллельная BS. Определите площадь сечения.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

181. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 и $4\sqrt{3}$, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.

Ответ: 128.

182. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{c^3\sqrt{3}}{48}$.

183. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами a и $в$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{a^2 в\sqrt{3}}{12}$.

184. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна h, а плоские углы при вершине – прямые.

Ответ: $\frac{h^3\sqrt{3}}{2}$.

185. Основание четырехугольной пирамиды – прямоугольник с диагональю, равной *в*, и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{в^3\sqrt{3}}{24}$.

186. Центр верхнего основания куба с ребром, равным a, соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислите полную поверхность полученной пирамиды.

Ответ: $2a^2$.

187. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.

Ответ: $1{,}5h^2\sqrt{3}$.

188. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45°. Среднее по величине боковое ребро равно l. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

Ответ: $\frac{l^3\sqrt{2}}{12}$; $0{,}5l^2(2+\sqrt{2})$.

189. В правильном тетраэдре SABC построено сечение его плоскостью, проходящей через ребро AC и точку K, принадлежащую ребру SB, причем BK:KS = 2:1. Найдите объем отсеченной пирамиды KABC, если ребро тетраэдра равно a.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

190. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в три раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$.

191. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

Ответ: $\frac{d^3\sqrt{2}}{3}$.

192. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 м и 8 м, а одна из диагоналей равна 6 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 4 м. Определите полную поверхность пирамиды.

Ответ: $8(11+\sqrt{34})$ м^2.

193. Основанием пирамиды служит параллелограмм ABCD, имеющий площадь m^2 и такой, что $BD \perp AD$; двугранные углы при ребрах AD и BC равны 45°,

а при ребрах AB и CD равны 60°. Найдите боковую поверхность и объем пирамиды.

Ответ: $\frac{m^2(2+\sqrt{2})}{2}$; $\frac{m^3\sqrt[4]{2}}{6}$.

194. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Определите полную поверхность пирамиды.

Ответ: $0{,}5a^2(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

195. Через медиану BE основания ABC пирамиды ABCD и середину F ребра DC проведена плоскость. Найдите объем фигуры ADBFE, если объем пирамиды ABCD равен 40 см^3.

Ответ: 30 см^3.

196. В четырехугольной пирамиде MABCD основанием служит квадрат ABCD со стороной a. Боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания, а боковое ребро MA составляет с плоскостью основания угол α. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD параллельно ребру MA.

Ответ: $\frac{a^2}{2\cos\alpha}$.

197. В правильной четырехугольной пирамиде длина стороны основания равна b, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен φ. Через диагональ основания проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\frac{b^2}{2}\sin\varphi$.

198. Основанием треугольной пирамиды MABC служит треугольник ABC со стороной a. Боковое ребро MA перпендикулярно плоскости основания. Грань MBC образует с плоскостью основания угол β. Через центр основания проведена плоскость, параллельная грани MBC. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{9\cos\beta}$.

199. В правильной треугольной пирамиде MABC сторона основания равна a, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Через сторону AB основания проведена плоскость, перпендикулярная ребру MC. Найдите площадь полученного сечения.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sin\alpha$.

200. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а угол между боковыми гранями равен α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\frac{\sin\alpha/2}{\sqrt{\cos(\pi-\alpha)}}$.

201. В некоторой неправильной пирамиде все внутренние двугранные углы при основании равны α. Площадь основания равна S, а периметр основания $2p$. Найдите объем и полную поверхность этой пирамиды.

Ответ: $\frac{2S\cos^2\alpha/2}{\cos\alpha}$; $\frac{1}{3}\frac{S^2}{p}tg\alpha$.

202. Объем правильной треугольной пирамиды равен V. Через середину бокового ребра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру и перпендикулярная к плоскости основания. Найдите объем отсеченной пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{18}V$.

203. Найдите объем пирамиды, если в основании ее лежит прямоугольный треугольник с площадью Q и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, прилежащий к этому углу, перпендикулярна к плоскости основания, две другие грани наклонены к плоскости основания под углом β.

Ответ: $\frac{1}{3}Q\sqrt{2Q\cdot tg\alpha}\cdot tg(45^0-\frac{\alpha}{2})tg\beta$.

204. Основанием пирамиды служит прямоугольник с площадью Q, две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{Q^3 tg\alpha tg\beta}$.

205. Боковые ребра четырехугольной пирамиды равны между собой; плоские углы при вершине равны α, β, α, β. Высота пирамиды равна h. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: $2h^2 tg\frac{\alpha+\beta}{2}$.

206. Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого равны 12, 10, 10. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найдите объем пирамиды, если вершина пирамиды проектируется на ее основание.

Ответ: 48.

207. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, сторона основания равна a. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{a^3}{24}\sqrt{3tg^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

208. Основание пирамиды – равнобедренная трапеция, параллельные стороны которой равны a и $в$ ($в < a$). Все двугранные углы при основании равны α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{12}aв(a+в)tg\alpha$.

209. В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра симметрии основания до бокового ребра равно d, двугранный угол при боковом ребре равен α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{2d^3 tg\dfrac{2\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{3\sqrt{-\cos\alpha}}$.

210. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между плоскостями двух боковых граней с общим ребром равен α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}a^3\cos\dfrac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$.

211. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол при основании равен α.

Ответ: $\dfrac{1}{6}S\sqrt{S\cos\alpha}\sin\alpha$.

212. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен V. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Определите полную поверхность пирамиды.

Ответ: $\dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\sqrt[3]{36V^2 ctg\alpha}$.

213. Определите объем треугольной пирамиды, если в основании у нее равносторонний треугольник, площадь которого равна S, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°.

Ответ: $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{S^6}{27}}$.

214. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна m, двугранный угол при основании равен α. Найдите полную поверхность пирамиды.

Ответ: $4\sqrt{3}m^2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

215. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

Ответ: $\dfrac{a^3}{24}$; $\dfrac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4}$.

216. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами a и $в$. Каждое ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{1}{12}ав\sqrt{a^2+в^2}tg\varphi$.

217. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{24}c^3 \sin 2\alpha tg\beta$.

218. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует со стороной основания уголα. Найдите угол между боковым ребром и высотой пирамиды и допустимые значения α.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{3}$; $(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2})$.

219. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 6 см, а угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания равен 60°.

Ответ: $72\sqrt{3}$ см^3.

220. Найдите полную поверхность правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно b и образует с плоскостью угол α.

Ответ: $2в^2\cos^2\alpha + \sqrt{2}b^2\cos\alpha\sqrt{3-\cos^2\alpha}$.

221. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен 60°, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен 2.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

222. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и имеют длины $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ и $\sqrt{126}$ см. Найдите объем и площадь основания пирамиды.

Ответ: $21\sqrt{55}$ см^3; 84 см^2.

223. Определите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длины сторон оснований 14 см и 10 см.

Ответ: 872 см^3.

224. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 1 см, а высота 3 см. Через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно её основаниям проведена плоскость, делящая пирамиду на две части. Найдите объем каждой из них.

Ответ: $\frac{152}{27}$ см^3; $\frac{37}{27}$ см^3.

225. Основания усеченной пирамиды – равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны m и n ($m > n$). Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а третья составляет с ним угол π. Найдите объем усеченной пирамиды.

Ответ: $\frac{m^3-n^3}{24}tg\alpha$ и $\frac{\sqrt{2}(m^3-n^3)}{24}tg\alpha$.

§ 14. Цилиндр и конус

226. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120° и удалена от оси на 5 см. Диагональ в получившемся сечении равна 20 см. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 1000π см^3.

227. Угол при вершине осевого сечения прямого конуса равен 120°. Образующая конуса равна 6. Найдите объем конуса.

Ответ: 27π.

228. Площадь основания конуса равна 225π. Косинус угла наклона образующей к плоскости основания равен $\pi/10$. Найдите боковую поверхность конуса.

Ответ: 2250.

229. Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины конуса его пересекает плоскость, параллельная основанию. Чему равен объем большего конуса, если объем меньшего 24 см^3?

Ответ: 1375 см^3.

230. Конус рассечен плоскостью, проходящей через его вершину. Найдите отношение объемов получившихся частей конуса, если известно, что хорда, которая получается при пересечении секущей плоскости и круга основания, равна его радиусу.

Ответ: $\dfrac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$.

231. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при основании равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину, противолежащую основанию, параллельно биссектрисе угла α. Найдите поверхность тела вращения.

Ответ: $\dfrac{\pi a^2(\sin\frac{3}{2}\alpha+\sin\frac{\alpha}{2})}{1+2\cos\alpha}$.

232. Найдите площадь поверхности конуса, если площадь осевого сечения равна $2/\pi$, а угол развертки боковой поверхности равен 216°.

Ответ: 4.

233. Равнобедренный треугольник с основанием b и углом при основании α вращается около внешней оси, которая находится в плоскости треугольника, параллельна основанию и отстает от него на расстояние, равное половине высоты треугольника. Найдите объем фигуры вращения.

Ответ: $\dfrac{5}{24}\pi b^3 tg^2\alpha$.

234. Тупоугольный треугольник, острые углы которого α и β, меньшая высота равна h, вращается около стороны, противолежащей углу β. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

Ответ: $\dfrac{2\pi h^2 \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cdot\sin^2\beta}$.

235. Равнобедренная трапеция с основаниями 2 см и 3 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Вычислите площадь поверхности и объем полученной фигуры вращения.

Ответ: $4\pi\sqrt{3}$ см^2; 2π см^3.

236. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90°. Определите объем конуса.

Ответ: $\dfrac{\pi R^2\sqrt{15}}{3}$.

237. Найдите площадь полной поверхности конуса, если его боковую поверхность можно развернуть в круговой сектор с радиусом 1 и с прямым центральным кругом.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{16}$.

238. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и составляет угол 60° с плоскостью его основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ: $18\pi(1+2\sqrt{3})$ см^2.

239. Хорда окружности основания конуса равна 6 см и стягивает дугу 90°; плоскость, проходящая через эту хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью основания конуса угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Ответ: $9\pi\sqrt{10}$ см^2.

240. Хорда основания цилиндра стягивает дугу окружности, которой соответствует центральный угол α. Площадь боковой поверхности цилиндра равна Q. Найдите площадь сечения, проведенного через данную хорду параллельно оси цилиндра.

Ответ: $\dfrac{Q}{\pi}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

241. Равнобедренная трапеция, меньшее основание и боковые стороны которой равны a, острый угол α, вращается вокруг оси, которая лежит в плоскости трапеции и проходит через вершину острого угла перпендикулярно к основанию. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

Ответ: $\pi a^2(\cos^2\alpha+5\cos\alpha+2)$.

242. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра образует угол α с основанием развертки. Длина диагонали равна d. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ: $\dfrac{d^2}{2\pi}\cos\alpha(\cos\alpha + 2\pi\sin\alpha)$.

243. Диагональ прямоугольника, равная d, образует с его стороной угол φ. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, полученного при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей эту сторону.

Ответ: $2\sqrt{2}\pi d^2 \sin\varphi \sin(45^0 + \varphi)$.

244. Хорда длиной a, лежащая в основании конуса, удалена от центра на расстояние m; плоскость, проходящая через хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем конуса.

Ответ: $\dfrac{1}{12}\pi m(a^2 + 4m^2)tg\varphi$.

245. Треугольник со сторонами a и $в$ и острым углом между ними вращается вокруг оси, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через вершину с углом α и образует со сторонами a и $в$ равные углы, не являясь биссектрисой угла α. Определите объем фигуры вращения.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\pi aв(a + в)\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

246. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом β. В основание конуса вписан треугольник, у которого сторона, равная a, лежит против угла α. Найдите полную поверхность конуса.

Ответ: $\dfrac{\pi a^2 \cos^2\dfrac{\beta}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$.

§ 15. Сфера и шар

247. Через конец радиуса шара под углом 60° к этому радиусу проведена секущая шар плоскость. Во сколько раз площадь поверхности шара больше площади получившегося сечения?

Ответ: 16.

248. В прямой цилиндр вписан шар. Во сколько раз объем цилиндра больше объема шара?

Ответ: 1,5.

249. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен $\dfrac{32\pi}{3}$.

Ответ: 75,36.

250. В шар вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Определите полную поверхность конуса, если площадь поверхности шара равна Q.

Ответ: $Q\cos\alpha\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)$.

251. Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны 4 и 5. Определите полную поверхность этого параллелепипеда.

Ответ: 60.

252. В шар радиусом $\sqrt{3}$ вписана правильная треугольная пирамида, высота которой больше радиуса шара. Вычислите объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной вокруг ее основания, равен 6.

Ответ: 162.

253. Шар радиусом R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания по углом β. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{4R^2\cos^3\dfrac{\beta}{2}tg\beta}{3\sin\alpha}$.

254. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и острым углом α, прилежащим к этому катету. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Ответ: $\dfrac{a}{2\cos\alpha\sin 2\beta}$.

255. Два параллельных сечения шара имеют радиусы 9 см и 12 см, меньшее из них удалено от центра шара на 12 см. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

Ответ: 3 см или 21 см.

256. Два параллельных сечения шара имеют радиусы 8 см и 15 см. Радиус шара равен 17 см. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

Ответ: 7 см или 23 см.

257. Стороны треугольника $a = в = 10$ см, $c = 12$ см касаются сферы радиусом 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

Ответ: 4 см.

258. Даны шар и цилиндр с квадратным осевым сечением. Высота цилиндра равна диаметру шара. Во сколько раз объем цилиндра больше объема шара?

Ответ: 1,5.

259. Через точку касания двух внешне касающихся шаров проведена плоскость так, что площади полученных сечений равны 144π и 81π. Разность между площадями поверхностей этих шаров равна 700π. Определите радиус меньшего шара.

Ответ: 1,5.

§ 16. Комбинации геометрических тел. Сечения

260. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно $в$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Ответ: $\frac{\sqrt{12a^2+9в^2}}{6}$.

261. Вычислите площадь поверхности шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{6}$.

262. В шар радиусом R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Определите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{21R^3}{16}$.

263. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиусом r так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.

Ответ: $r\sqrt{3}$.

264. В конус с радиусом основания R и углом α между образующей и плоскостью основания вписана прямая треугольная призма так, что одно из ее оснований лежит на основании конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Найдите объем призмы, если все ее ребра имеют одинаковые длины.

Ответ: $\frac{9}{32}\cdot\frac{R^3\sin^3\alpha}{\sin^3(60^0+\alpha)}$.

265. В шар радиусом R вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $\pi R^3\sin 2\alpha\cos\alpha$.

266. Центр грани куба с ребром a соединен с серединами сторон противоположной грани, которые также соединены последовательно. Вычислите площадь поверхности образовавшейся пирамиды.

Ответ: $2a^2$.

267. Шар вписан в прямую призму, основанием которой является равнобедренный треугольник с площадью Q и углом α при основании. Найдите объем и площадь поверхности шара.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi\sqrt{(Qctg\alpha)^3}tg^3\frac{\alpha}{2}$; $4\pi Qtg^2\frac{\alpha}{2}ctg\alpha$.

268. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Определите площадь поверхности шара, если известно, что сторона основания пирамиды равна a, а плоский угол при вершине пирамиды α.

Ответ: $\pi a^2 tg(45^0 - \frac{\alpha}{2})$.

269. Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиусом R. Найдите объем пирамиды, если угол между ее высотой и боковым ребром равен α.

Ответ: $2\sqrt{3}R^3 \sin^2\alpha \cos^4\alpha$.

270. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и острым углом α. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем конуса.

Ответ: $\frac{1}{24}\pi a^3 \sin^3\alpha \cdot tg\varphi$.

271. Определите полную поверхность конуса, если радиус вписанного в него шара равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

Ответ: $\dfrac{2\pi R^2 ctg^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

272. Найдите объем усеченного конуса, описанного около шара радиусом R, если образующая равна a.

Ответ: $\frac{2}{3}\pi R(a^2 - R^2)$.

273. Вершина основания правильной треугольной пирамиды удалена от противоположной боковой грани на расстояние b. Апофема пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α. Определите полную поверхность вписанного в пирамиду конуса.

Ответ: $\dfrac{b^2\pi}{18\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$.

274. В правильный тетраэдр вписаны четыре равных шара, каждый из которых касается трех других и трех граней тетраэдра. Вычислите объем тетраэдра, если радиус каждого из указанных шаров равен R.

Ответ: $\frac{2R^3}{3}(19\sqrt{2} + 18\sqrt{3})$.

275. В правильную треугольную пирамиду вписан шар радиусом R. Радиус окружности, проведенной через точки касания шара с боковыми гранями пирамиды, равен $\sqrt{7}/4R$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{49}{3}R^3\sqrt{3}$.

276. В прямом круговом конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно цен-

тра основания конуса. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. Найдите угол между образующей конуса и основанием, при котором объем конуса наименьший.

Ответ: $2arctg\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$.

277. В правильную четырехугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к плоскости основания по углом φ, вписан цилиндр. Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность второго основания цилиндра имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью пирамиды. Радиус основания цилиндра и его высота равны r. Вычислите объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{4}{3}r^3(1+ctg\varphi)^3 tg\varphi$.

278. В правильной четырехугольной пирамиде через вершину нижнего основания проведите сечение перпендикулярно противоположному боковому ребру. Найдите площадь построенного сечения, если боковое ребро пирамиды рано a и образует с основанием угол α.

Ответ: $-2a^2\cos 2\alpha \cos\alpha ctg\alpha$.

279. Дан правильный тетраэдр с ребром a. Постройте сечение так, чтобы в сечении получился квадрат. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\dfrac{1}{4}a^2$.

§ 17. Векторы в пространстве

280. Длины диагоналей AC и BD ромба равны 15 см и 8 см. Первая диагональ направлена по оси Ox, вторая – по оси Oy. Составьте уравнения сторон ромба и найдите расстояние от начала координат до стороны ромба.

Ответ: 8x – 15y + 60 = 0 (AB); 8x – 15y – 60 = 0 (DC);
8x + 15y – 60 = 0 (BC); 8x + 15y + 60 = 0 (AD); $\dfrac{60}{17}$ см.

281. Вектор $\overline{OA}$ составляет с осями Ox, Oy, Oz углы соответственно равные $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/4$; точка B имеет координаты (–2; –2; –2$\sqrt{2}$). Найдите угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

Ответ: 180°.

282. Найдите единичный вектор, коллинеарный вектору, направленному по биссектрисе угла BAC треугольника ABC, если заданы его вершины: A(1; 1; 1), B(3; 0; 1), C(0; 3; 1).

Ответ: $(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0)$.

283. Даны векторы $\vec{a}(6;-8;5\sqrt{2})$ и $\vec{b}(2;-4;\sqrt{2})$. Найдите угол, образуемый вектором $\vec{a}-\vec{b}$ с осью Oz.

Ответ: 45°.

284. В пирамиде SABC все грани – правильные треугольники; точка M – центр треугольника ABC, а точка P делит ребро SC пополам. Найдите разложение вектора $\overline{MP}$ по векторам $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ и $\overline{AS}$.

Ответ: $\overline{MP} = \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AS}.$

285. Дан вектор $\vec{a}(1; -2; 5)$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, лежащего в плоскости xOy и перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если $\left|\vec{b}\right| = 2\sqrt{5}$.

Ответ: (4; 2; 0) и (–4; –2; 0).

286. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD длина каждого ребра равна *a*. Точка $M \in SC$ и SM:MC = 2:1. Найдите угол между векторами $\overline{DC}$ и $\overline{AM}$.

Ответ: $\arccos\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

287. Найдите объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $\left|\overline{OA}\right| = 5$, $\left|\overline{OB}\right| = 2$, $\left|\overline{OC}\right| = 6$, $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = 0$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC} = 0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC} = 8$.

Ответ: $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ куб. ед.

288. Даны три точки A(–1; 2; 3), B(3; 3; –1) и C(1; 0; 1). Вычислите расстояние от точки C до середины отрезка AB.

Ответ: 2,5.

289. Найдите угол между векторами $-\vec{a}$ и $-0{,}5\vec{b}$, если $\vec{a}(3;2;1)$, $\vec{b}(1/3;1;-3)$.

Ответ: 90°.

290. Треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на непересекающую его плоскость. Известно: $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, M – середина B_1C. Разложите вектор $\overline{AM}$ по векторам $\overline{AA_1} = \vec{p}$, $\overline{AB} = \vec{q}$, $\overline{AC} = \vec{r}$.

Ответ: $\overline{AM} = \frac{b}{2a}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}.$

291. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань ABCD – квадрат со стороной *a*; ребро AA_1 также равно *a* и образует с ребрами AB и AD углы, равные α. Найдите длину диагонали BD_1 и угол φ между прямыми BD_1 и AC.

Ответ: $a\sqrt{3}, \cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\cos\alpha\right|.$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вариант задания по математике на вступительных экзаменах в БГУИР в 2002 году

1. Сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, сплавлен со 100 г чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось на 20%. Сколько граммов серебра было в сплаве?

Ответ: 20.

2. При каких значениях k уравнение $x^2 + 2(k+1)x + k + 7 = 0$ имеет хотя бы один положительный корень? В ответ записать наибольшее значение k.

Ответ: –3.

3. Определить, при каком значении x числа $a_1 = \lg 2; a_2 = \lg(3^x - 3); a_3 = \lg(3^x + 9)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: 2.

4. Решить неравенство $\left|\frac{x+6}{x+4}\right| \le 1$. В ответ записать наибольшее решение.

Ответ: –5.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + 6\frac{x-y}{x+y} = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$. В ответ записать произведение целых решений x.

Ответ: –4.

6. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 + 8x + 12} = x^2 + 4x - 6$. В ответ записать сумму корней.

Ответ: –4.

7. Решить уравнение $1 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{8} = 0$. В ответ записать решение x на промежутке $3 < x < 10$.

Ответ: 6.

8. Упростить выражение $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos(2\alpha - 2\pi) ctg(\alpha - 5\pi/4)}$.

Ответ: –1.

9. Решить уравнение $3 \cdot 5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 0{,}2$.

Ответ: 1.

10. Решить неравенство $\log_4 \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x+1) \ge 0{,}5$. В ответ записать наибольшее решение.

Ответ: –0,5

11. Пусть точка M с абсциссой x принадлежит графику $y = 5x + 1$. Задайте функцию $f(x)$, выражающую расстояние от этой точки до прямой $y = -2$, и решите уравнение $f(x) = 4$. В ответ запишите сумму корней этого уравнения.

Ответ: –1,2.

12. Найти минимальное значение выражения
$A = \sqrt{x^2 + y^2 - 5x + y + 6{,}5} + \sqrt{x^2 + y^2 + 3x - 5y + 8{,}5}.$

Ответ: 5.

13. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены к гипотенузе медиана и высота. Найти острый угол между ними, если один из углов треугольника равен 40°.

Ответ: 10.

14. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани ее перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45°. Среднее по величине боковое ребро равно $3\sqrt{2}.$ Найти объем пирамиды.

Ответ: 9.

Св. план 2003, поз. 123

Учебное издание

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

В 2-х частях

Часть 1
Геометрия

Составители:
Борисенко Олег Федорович,
Данцевич Светлана Федоровна,
Липницкий Валерий Антонович

Редактор Н.А. Бебель
Корректор Е.Н. Батурчик
Компьютерная верстка Н.Г. Осипович

Подписано в печать 18.12.2003. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 2,44.
Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 100 экз. Заказ 270.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Лицензия ЛП № 156 от 30.12.2002.
Лицензия ЛВ № 509 от 05.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки, 6.