Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

Сборник
задач по высшей математике для студентов радиотехнических специальностей

В 10-ти частях

Часть 5

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ
(с решениями и комментариями)

Минск 2004

УДК 517 (076)
ББК 22.1 я 73
С 23

Р е ц е н з е н т:
зав. кафедрой прикладной математики и экономической кибернетики
Белорусского государственного университета, доктор
физико-математических наук, профессор И.В. Белько

Авторы:
А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник, Н.А. Мендиета,
Г.И. Амелькина

С 23 Сборник задач по высшей математике для студентов радиотехнических специальностей. В 10 ч. Ч. 5: Функции многих переменных (с решениями и комментариями)/ А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник и др.-Мн.: БГУИР, 2004.- 64 с.: ил.
ISBN 985-444-653-0 (ч. 5)

В пятой части сборника, посвященной функциям многих переменных (ФМП), собраны задачи исключительно практического характера. Приведены варианты самостоятельной работы по ФМП, по 14 задач с ответами в каждом варианте.

Часть 1: Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия/А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. — Мн.: БГУИР, 2002. —112 с.: ил.

Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия/А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. — 2-е изд.— Мн.:БГУИР, 2003. —112 с.:ил.

Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия/А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. — 3-е изд.— Мн.:БГУИР, 2004. —112 с.:ил.

Часть 2: Сборник задач по высшей математике: В 10 ч. Ч.2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями)/ А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник. — Мн.: БГУИР, 2004. —154 с.: ил.

ISBN 985-444-653-0 (ч. 5)
ISBN 985-444-727-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕДЕНИЕ

Пятая часть «Сборника задач по высшей математике для студентов радиотехнических специальностей» включает в себя задачи и упражнения по разделам: введение в анализ ФМП, дифференциальное исчисление ФМП. Приводятся 15 вариантов самостоятельной работы по перечисленным разделам.

Знак Δ означает начало решения задачи, знак ▲ – окончание решения. Задачи повышенной сложности отмечены знаком (*).

Изложенные материалы предназначены для проведения практических занятий и для самостоятельной работы студентов по перечисленным выше разделам курса высшей математики.

1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть D – некоторое множество точек $M = (x,y)$ плоскости. Правило f, ставящее в соответствие точке $(x,y)\in D$ определённое число z, называется *функцией двух переменных*:

$$z = f(x,y),\ \text{или } z = f(M),\ M = (x,y).$$

Множество D при этом называют *областью определения функции* f: $D(f)$.

Множество $E(f)=\{z\in R|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ называется *областью значений функции* f.

Функцию двух переменных можно изобразить графически. Совокупность точек $P=(x,y,f(x,y))$ образует график G_f функции $z=f(x,y)$, являющийся некоторой поверхностью в пространстве R^3.

1. Выразить объем конуса z как функцию его образующей x и высоты y.

Отв. $z = \dfrac{\pi}{3}(x^2 y - y^3)$.

2.* Выразить площадь S треугольника как функцию его трех сторон x,y,z.

Отв. $S = \dfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.

3. Найти значение функции в заданных точках:

а) $z = \left(\dfrac{arctg(x+y)}{arctg(x-y)}\right)^2, x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. Отв. $\dfrac{9}{16}$.

б) $z = e^{\sin(x+y)}, x = \dfrac{\pi}{2}, y = \dfrac{\pi}{2}$. Отв.1.

в) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}, x = 2, y = 2; x = 1, y = 2; x = 2, y = 1$. Отв. $\{16;2;2\}$.

4. Дана сложная функция $z = u^v$, где $u = x + y, v = x - y$. Найти значение функции при:

а) $x = 0, y = 1$; б) $x = 1, y = 1$; в) $x = 2, y = 3$; г) $x = 0, y = 0$; д) $x = -1, y = -1$.

Отв. а) 1; б) 1; в) 1/5; г) не определена; д) 1.

5.* Функция $z = f(x,y)$, удовлетворяющая тождественно соотношению $f(mx,my) = m^k f(x,y)$ при любом m, называется *однородной функцией к-го поряд-*

ка. Показать, что однородная функция *к*-го порядка может быть представлена в виде $z = x^k f(y/x)$.

5а. Исследовать методом сечений график функции $z = x^2 + y^2$. Что представляют собой сечения плоскостями $x = const$, $y = const$, $z = const$?

Δ Проекции сечений поверхности z плоскостями $x = c$ на плоскость YZ представляют собой параболы $z = y^2 + c$ (рис. 1.1, *а*). Проекции сечений поверхности z плоскостями $y = c$ на плоскость XZ представляют собой параболы $z = x^2 + c$ (рис. 1.1, *б*). Проекции сечений поверхности z плоскостями $z = c$ на плоскость XY являются концентрическими окружностями $x^2 + y^2 = c$, $c \geq 0$ (рис. 1.1, *в*). ▲

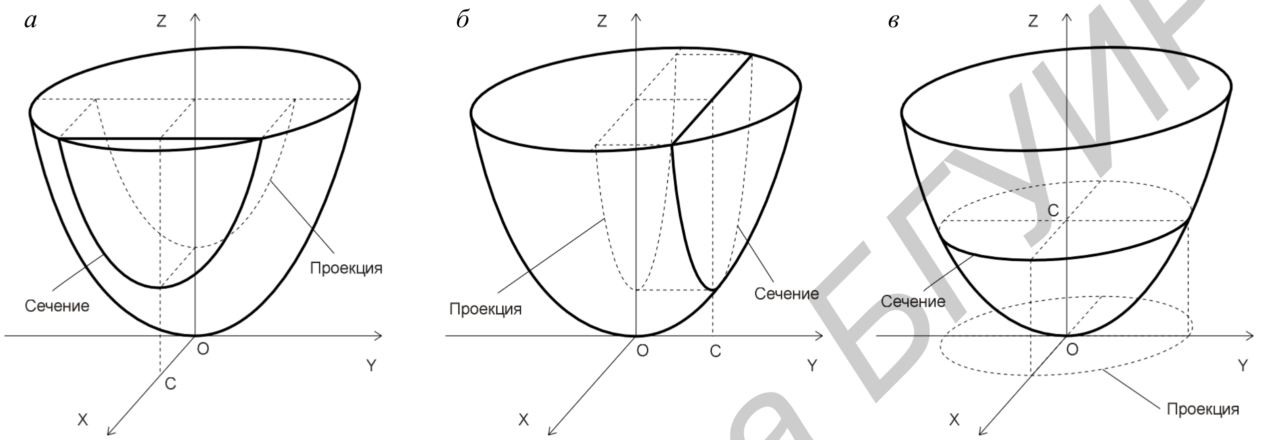

Рис. 1.1

6. Исследовать методом сечений график функции $z = (½)(x^2 - y^2)$. Что представляют собой сечения плоскостями: *а*) $x = const$; *б*) $y = const$; *в*) $z = const$?

Отв. *а*) парабола; *б*) парабола;
в) $const \neq 0$ – гипербола, $const = 0$ – пара прямых.

7. Исследовать методом сечений график функции $z = xy$. Что представляют собой сечения плоскостями: *а*) $x = const$; *б*) $y = const$; *в*) $z = const$?

Отв. *а*) прямая; *б*) прямая;
в) $const \neq 0$ – гипербола, $const = 0$ – пара прямых.

8. Область ограничена параллелограммом со сторонами $y = 0$, $y = 2$, $y = \left(1/2\right)x$, $y = \left(1/2\right)x - 1$; граница параллелограмма исключается. Задать эту область неравенствами. Отв. $0 < y < 2$, $-1 < y - \left(1/2\right)x < 0$.

9. Областью служит фигура, ограниченная параболами $y = x^2$ и $x = y^2$, границы включаются. Задать эту область неравенствами. Отв. $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

10. Найти область определения функций:

$$а)\ z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; \quad б)\ z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right); \quad в)\ z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}.$$

Изобразить ее на плоскости.

Отв. *а*) $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$; *б*) $y^2 > 4x - 8$; *в*) $x + y \geq 0$; $x - y \geq 0$.

11. Найти область определения функции $z = \arcsin\dfrac{y^2 - 1}{x^2}$.

Δ Так как $|\sin\alpha| \le 1$, а $\dfrac{y^2-1}{x^2}$ – значение синуса $\sin z$, то имеем неравенства $\left|\dfrac{y^2-1}{x^2}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{y^2-1}{x^2} \le 1$, т.е. $x^2+y^2 \ge 1$, $y^2-x^2 \le 1$, $x \ne 0$. ▲

12. Найти область определения функции:

а) $z = \arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4} + \sqrt{x^2+y^2-1}$. Отв. $1 \le x^2+y^2 \le 4$ – кольцо.

б) $z = \sqrt{\sin\pi\left(x^2+y^2\right)}$. Отв. $2n \le x^2+y^2 \le 2n+1$, n – целое.

в) $z = \ln\left(x\ln(y-x)\right)$. Отв. при $x > 0 \Rightarrow y > x+1$; при $x < 0 \Rightarrow x < y < x+1$.

г) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z+1}}$. Отв. $x^2+y^2+1 > z$.

д) $u = \dfrac{z}{x^2-y^2}$. Отв. $x \ne \pm y$.

е) $u = \dfrac{1}{\sqrt{1-x-y-z}}$. Отв. $x+y+z < 1$.

В пунктах *г – е* указать расположение области.

2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется множество точек (x,y) плоскости XY, удовлетворяющих равенству $f(x,y) = C$, где C – постоянная, т.е. линия уровня есть кривая, во всех точках которой функция f принимает одно и то же постоянное значение C.

Соответственно для функции $u = f(x,y,z)$ поверхность уровня задается равенством $f(x,y,z) = C$, $C = const$.

13. Построить линии уровня функции:

а) $z = x^2 - 4x - y$. Отв. $(x-2)^2 = y + 4 + c$.

б) $z = 2y - x^2$. Отв. $x^2 = 2y - c$.

в) $z = \dfrac{y+1}{x}$. Отв. $y = cx - 1$.

г) $z = x^2 - y^2$. Отв. $x^2 - y^2 = c$.

д) $z = \arcsin(xy)$. Отв. $xy = \sin c$.

14.* Функция $z = f(x,y)$ задана следующим образом: в точке $P = (x,y)$ ее значение равно углу, под которым виден из этой точки данный в плоскости XY отрезок AB. Найти линию уровня функции $f(x,y)$.

Отв. Окружности, проходящие через точки A и B.

15. Найти линии уровня функции z, заданной неявно уравнением $z + x\ln z + y = 0$. Отв. Прямые линии $y = ax + b$, где $a = \ln b$.

16. Найти поверхности уровня функции и определить их тип.

а) $u = 9x^2 + 4y^2 + z^2$. Отв. Эллипсоиды $\dfrac{x^2}{c/9} + \dfrac{y^2}{c/4} + \dfrac{z^2}{c} = 1$, $c > 0$.

б) $u = x^2 - y^2 + z^2$. Отв. $x^2 - y^2 + z^2 = c$.

в) $u = x + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$. Отв. $x + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = c$.

г) $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$. Отв. $x^2 + y^2 = cz^2$.

17. Найти поверхности уровня функции:

а) $u = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Отв. Сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\dfrac{c-1}{c+1}\right)^2$, где $c = e^u$.

б) $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$. Отв. Параболоиды вращения $x^2 + y^2 = cz$.

в) $u = 5^{2x+3y-z}$. Отв. Плоскости $2x + 3y - z = c$.

г) $u = \operatorname{tg}(x^2 + y^2 - 2z^2)$. Отв. $x^2 + y^2 - 2z^2 = c$ – гиперболоиды вращения при $c \neq 0$, конус – при $c = 0$.

3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

Число A называется *пределом функции* $z = f(x,y)$ в точке M_0 (по Гейне), если для любой последовательности (M_n), сходящейся к M_0, $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность $(f(M_n))$ значений функции сходится к A.

Если же для некоторых двух последовательностей (M'_n) и (M''_n), сходящихся к M_0, пределы последовательностей $(f(M'_n))$ и $(f(M''_n))$ не существуют или имеют разные значения, то это означает, что в точке M_0 функция f предела не имеет.

Обозначение двойного предела: $A = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Так как x стремится к x_0 независимо от стремления y к y_0, то стремление точки $M = (x,y)$ к точке $M_0 = (x_0,y_0)$ можно производить по сторонам прямоугольника, параллельным координатным осям.

При этом имеем дело уже с повторными пределами:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} A(y),\quad \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} B(x).$$

Не следует думать, что повторные пределы необходимо равны.

Непрерывность функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0 = (x_0,y_0)$ устанавливается из равенства: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Точка, в которой функция не определена или определена, но не является непрерывной в ней, называется *точкой разрыва функции*.

18. Найти предел:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\alpha}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{x}$; *б)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to\alpha}}\left(1+x^2y^2\right)^{\frac{2y}{x^2}}$.

Отв. *а)* e^{α}; *б)* $e^{2\alpha^3}$.

19. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Δ Воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми.

Так как $1-\cos\alpha\approx\dfrac{\alpha^2}{2}$ при $\alpha\to 0$, то имеем

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\frac{\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{1}{2}. \quad ▲$$

20. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; *б)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ y\to 0}}\dfrac{1-\sqrt{xy+1}}{x^2y}$; *г)* $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y+4}-2}{7y}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$; *е)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Отв. *а)* 2; *б)* 1/2; *в)* –1/2 *a*; *г)* 9/28; *д)* 0; *е)* 1.

21. Показать, что функция $u=\dfrac{x+y}{x-y}$ при $x\to 0, y\to 0$ может стремиться к любому пределу в зависимости от того, как стремятся к нулю *x* и *y*. Привести примеры таких изменений *x* и *y*, чтобы выполнились условия:

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u=1$;

б) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u=2$.

Отв. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} u=\dfrac{1+k}{1-k}$ вдоль прямой $y=kx$;

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u=1$ при $k=0$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u=2$ при $k=1/3$.

22. Найти точки разрыва функции:

а) $z=\dfrac{1}{x-y}$; *б)* $z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$. Как ведет себя функция в окрестности точки разрыва? Отв. *а)* прямая $y=x$; *б)* точка (0,0).

23. Найти точки разрыва функции:

а) $u=\dfrac{1}{x+y-z+2}$; *б)* $u=\dfrac{z}{x^2-y^2}$;

в) $u=\dfrac{1}{x^2-y^2+z^2}$; *г)* $u=\dfrac{1}{z^2-x^2-y^2}$.

Определить тип поверхности, в точках которой функция имеет разрыв.

Отв. *а*) плоскость $x + y - z + 2 = 0$; *б*) плоскости $x = \pm y$; *в*) конус $x^2 + z^2 = y^2$; *г*) конус $x^2 + y^2 = z^2$.

24. Найти предел функции или показать, что он не существует:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x+y}{x+2y}$; *б)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$; *г)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+y^2}$.

Отв. *а), б), г)* не существует; *в)* 2.

25. Исследовать на непрерывность функцию:

а) $z=\dfrac{x+y-1}{x^2+y^2}$. Отв. Непрерывна для всех (x,y), кроме точки (0,0).

б) $z=\sin\dfrac{1}{x-y}$. Отв. Непрерывна на всей плоскости, за исключением прямой $y = x$.

в) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$. Отв. Непрерывна для всех (x,y,z), кроме точек сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

г) $u=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$. Отв. Непрерывна внутри круга $x^2 + y^2 < 1$.

д) $z=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$. Отв. Непрерывна во всей плоскости, кроме точки (0,0).

е) $z=\sin\dfrac{1}{xy}$. Отв. Непрерывна во всей плоскости, кроме точек осей координат.

ж) $u=\dfrac{1}{xyz}$. Отв. Непрерывна во всех точках пространства, кроме точек, принадлежащих координатным плоскостям.

з) $u=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$. Отв. Непрерывна на всей плоскости, за исключением прямых $x = m\pi$, $y = n\pi$, $m,n = 0, \pm1, \pm2\ldots$.

4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Частными производными функции $z = f(x,y)$ по переменным x и y соответственно называются пределы:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\equiv\frac{\partial z}{\partial x}\equiv z'_x\equiv f'_x(x,y),\quad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\equiv\frac{\partial z}{\partial y}\equiv z'_y\equiv f'_y(x,y),$$

где $\Delta_x z = f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$, $\Delta_y z = f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$ – частные приращения функции f по переменным x и y соответственно.

АНАЛОГИЧНО ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ ЛЮБОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.

26. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ для функции:

а) $u = e^{\frac{x}{y}} - e^{-\frac{y}{z}}$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{z} e^{-\frac{y}{z}}; \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} e^{-\frac{y}{z}}$.

б) $u = x^{\frac{y}{z}}$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^{\frac{y}{z}-1} \right) \frac{y}{z}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x; \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$.

в) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}};$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}.$$

г) $u = \ln \sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 - y^2 + z^2}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 - y^2 + z^2};$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{x^2 - y^2 + z^2}.$$

д) $u = \left(\frac{x}{y} \right)^z$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{y^z} x^{z-1}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^z z}{y^{z+1}}; \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln\left(\frac{x}{y} \right)$.

е) $u = (xy)^z$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = z x^{z-1} y^z; \frac{\partial u}{\partial y} = z x^z y^{z-1}; \frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy)$.

ж) $u = \ln\left(z + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(z + \sqrt{x^2 + y^2} \right)};$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(z + \sqrt{x^2 + y^2} \right)}; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{z + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

з) $u = x e^{y e^z}$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{y e^z}; \frac{\partial u}{\partial y} = x e^z e^{y e^z}; \frac{\partial u}{\partial z} = x y e^z e^{y e^z}$.

и) $u = (\sin x)^{yz}$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = yz (\sin x)^{yz-1} \cos x; \frac{\partial u}{\partial y} = z (\sin x)^{yz} \ln \sin x;$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y (\sin x)^{yz} \ln \sin x.$$

к) $u = \operatorname{arctg}(x - y)^z$. Отв. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1 + (x-y)^{2z}}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1 + (x-y)^{2z}};$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1 + (x-y)^{2z}}.$$

27. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функций:

а) $z = \ln(x + \ln y)$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x + \ln y}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{y(x + \ln y)}$.

б) $z = \ln tg\dfrac{x}{y}$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{y\sin(2x/y)}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^2\sin(2x/y)}$.

в) $z = 3^{-\frac{y}{x}}$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

г) $z = arctg\sqrt{x^y}$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}$.

д) $z = \ln\sin\dfrac{x+2}{\sqrt{y}}$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}ctg\dfrac{x+2}{\sqrt{y}}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x+2}{2y\sqrt{y}}ctg\dfrac{x+2}{\sqrt{y}}$.

е) $z = \arccos\dfrac{1}{x-2y}$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{(x-2y)^2\sqrt{1-(x-2y)^2}}$;

$$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2}{(x-2y)^2\sqrt{1-(x-2y)^2}}.$$

ж) $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{x}$.

з) $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2$;

$$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2).$$

и) $z = x^y$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y\ln x$.

к) $z = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

л) $z = xy\ln(x+y)$ Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\ln(x+y) + \dfrac{xy}{x+y}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = x\ln(x+y) + \dfrac{xy}{x+y}$.

м) $z = (1+xy)^y$ Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1}$;

$$\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y\ln(1+xy).$$

Дифференциал функции $z = f(x, y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остаётся постоянной, называется *частным дифференциалом*, т.е.

$$d_x z = f_x'(x, y)dx;\ d_y z = f_y'(x, y)dy.$$

Это справедливо и для функции трёх переменных.

28. Найти частные дифференциалы данных функций по каждой из независимых переменных:

$$а)\ z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4; \quad б)\ u = \ln(z + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Δ Имеем по определению:

$$а)\ d_x z = (y^3 - 6xy^2)dx; \quad d_y z = (3xy^2 - 6x^2y + 8y^3)dy;$$

$$б)\ d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx = \frac{x}{\left(z + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{x^2 + y^2}}dx;$$

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{y}{\left(z + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{x^2 + y^2}}dy;$$

$$d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}dz = \frac{1}{z + \sqrt{x^2 + y^2}}dz. \quad ▲$$

Главная часть полного приращения $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ функции $z = f(x, y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных, называется *полным дифференциалом функции* и обозначается dz.

Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = d_x z + d_y z.$$

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений значений функций, так как $\Delta z \approx dz$, т.е.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

29. Найти полные дифференциалы функций:

$$а)\ z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2); \quad б)\ u = x^{\frac{y}{z}}.$$

Δ По определению имеем:

$$а)\ dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2};$$

$$б)\ du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx + \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x dy - \frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x dz. \quad ▲$$

30. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

Δ Рассмотрим функцию двух переменных $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Положим $x=4{,}05;\ y=2{,}93;\ x_0=4,\ y_0=3$. Тогда имеем:

$$\Delta x = x - x_0 = 4{,}05-4=0{,}05;\ \Delta y = y-y_0=2{,}93-3=-0{,}07\ .$$

Находим

$$z(x_0,y_0)=\sqrt{4^2+3^2}=5;\ \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=4\\y=3}}=\frac{4}{5};$$

$$\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=4\\y=3}}=\frac{3}{5}.$$

Тогда приближенно

$$z(x,y)=z(x_0,y_0)+\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z(x_{0\circ},y_0)}{\partial y}\Delta y=$$

$$=5+\frac{4}{5}0{,}05-\frac{3}{5}0{,}07=4{,}998.\ \blacktriangle$$

31. Найти: а) частные дифференциалы данных функций по каждой из независимых переменных; б) полные дифференциалы:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Отв. $d_x z=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}};d_y z=\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

б) $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Отв. $d_x z=\frac{y(y^2-x^2)dx}{\left(x^2+y^2\right)^2};d_y z=\frac{x(x^2-y^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$.

в) $u=(xy)^z$. Отв. $d_x u=yz(xy)^{z-1}dx;d_y u=xz(xy)^{z-1}dy;d_z u=(xy)^z\ln(xy)dz$.

г) $u=(xy+\frac{x}{y})^z$. Отв. $d_x u=\frac{z(y^2+1)}{y}(xy+\frac{x}{y})^{z-1}dx;$

$$d_y u=\frac{xz(y^2-1)}{y^2}(xy+\frac{x}{y})^{z-1}dy;\ d_z u=(xy+\frac{x}{y})^z\ln(xy+\frac{x}{y})dz.$$

Отв. а), б): $dz=d_x z+d_y z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$;

Отв. в), г): $dz=d_x u+d_y u+d_z u=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$.

32. С помощью дифференциала функции двух переменных вычислить приближенно:

а) $\sqrt{5e^{0{,}02}+(2{,}03)^2}$. Отв. $3{,}037$.

б) $(2{,}01)^{3{,}03}$. Отв. $8{,}29$.

в) $\sin 28^{\circ}\cos 61^{\circ}$; (при вычислении градусы следует перевести в радианы). Отв. $0{,}227$.

г) $\operatorname{arctg}(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1)$. Отв. $0{,}75$.

д) $\ln((0{,}09)^3+(0{,}99)^3)$. Отв. $-0{,}03$.

е) $\sqrt[3]{(1{,}02)^2+(0{,}05)^2}$. Отв. $1{,}013$.

ж) $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$. Отв. 1.

5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция $z=f(u,v)$, где $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$, называется *сложной функцией переменных* x и y. Для нахождения частных производных сложных функций используются следующие формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

В случае, когда $u=\varphi(x), v=\psi(x)$, вторая из формул исчезает, а первая преобразуется к виду

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Если же $u=x, v=y=\psi(x)$, то имеем:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Это выражение называется *полной производной*.

33. Для функции $u=\ln(e^x+e^y)$ вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, найти $\frac{du}{dx}$, если $y=x^3$.

Δ По определению имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y};\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^x+e^y}+\frac{e^y3x^2}{e^x+e^y}=$$

$$=\frac{e^x}{e^x+e^{x^3}}+\frac{3x^2e^{x^3}}{e^x+e^{x^3}}=\frac{e^x+3x^2e^{x^3}}{e^x+e^{x^3}}.\quad ▲$$

34. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=x^2+y^2+xy; x=\sin t; y=e^t$.

Δ Согласно цепочному правилу имеем:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(2x+y)\cos t+(2y+x)e^t=(2\sin t+e^t)\cos t+$$

$$+(2e^t+\sin t)e^t=\sin 2t+2e^{2t}+e^t(\cos t+\sin t).\quad ▲$$

35. Найти $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v},dz$, если $z=arctg\frac{x}{y}, x=u+v, y=u-v$.

Δ Имеем по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{y}{y^2+x^2}\cdot 1-\frac{x}{y^2+x^2}\cdot 1=$$

$$=\frac{(u-v)-(u+v)}{(u-v)^2+(u+v)^2}=-\frac{v}{2\left(u^2+v^2\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{y}{y^2+x^2}\cdot 1-\frac{x}{y^2+x^2}\cdot(-1)=$$

$$=\frac{\left(u-v\right)+\left(u+v\right)}{(u-v)^2+(u+v)^2}=\frac{u}{u^2+v^2};$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{-v}{u^2+v^2}du+\frac{u}{u^2+v^2}dv=\frac{udv-vdu}{u^2+v^2}. \blacktriangle$$

36. Для функции $z=arctg(xy)$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, вычислить $\frac{dz}{dx}$, если $y=e^x$.

Отв. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+(xy)^2},\frac{dz}{dx}=\frac{e^x\left(x+1\right)}{1+\left(xe^x\right)^2}$.

37. Для функции $z=\arcsin(\frac{x}{y})$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, вычислить $\frac{dz}{dx}$, если $y=\sqrt{x^2+1}$.

Отв.

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$.

38. Найти $\frac{dz}{dt}$ или $\frac{du}{dt}$, если:

а) $z=\arcsin\left(x-y\right),\ x=3t,\ y=4t^3$. Отв. $\frac{dz}{dt}=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-\left(3t-4t^3\right)^2}}$.

б) $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=c$. Отв. 0.

в) $z=tg\left(3t+2x^2-y\right),\ x=\frac{1}{t},\ y=\sqrt{t}$.

Отв. $\frac{dz}{dt}=\left(3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t+\frac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$.

г) $z=x^2-y^2,\ x=\sin t,\ y=\cos t$. Отв. $\frac{dz}{dt}=2\sin 2t$.

д) $z=x^2+y^2,\ x=\sin t,\ y=\cos t$. Отв. 0.

е) $z=\ln\left(xy\right),\ x=e^t,\ y=e^{-t}$. Отв. 0.

39. Для функции $z=arctg\left(x^2y\right)$найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, вычислить $\frac{dz}{dx}$, если $y=e^{2x}$.

Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2xy}{1+x^4y^2}, \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2x(1+x)e^{2x}}{1+x^4e^{4x}}$.

40. Вычислить $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, если:

а) $z=x^2y-xy^2$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$.

Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{3}{2}u^3\sin 2v(\cos v-\sin v)$; $\dfrac{\partial z}{\partial v}=u^3(\sin v+\cos v)\left(1-\left(3/2\right)\sin 2v\right)$.

б) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, $x=u\sin v$, $y=u\cos v$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$; $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{\cos v\sqrt{\cos 2v}}$.

в) $z=x^2\ln y$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v$.

Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=2\dfrac{u}{v^2}\ln(3u-2v)+\dfrac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial v}=-\dfrac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\dfrac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$.

41. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, dz$, если:

а) $z=uv$, $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$. Отв. $dz=e^{2x}(\sin(2y)dx+\cos(2y)dy)$.

б) $z=u^2v-uv^2$, $u=x+2y$, $v=x-2y$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=8xy$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=4\left(x^2-12y^2\right)$.

в) $z=uv$, $u=\dfrac{1}{2}\ln xy$, $v=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}$.

Отв. $dz=\dfrac{1}{4}\left(\left(\ln\dfrac{x}{y}+\ln xy\right)\dfrac{dx}{x}+\left(\ln\dfrac{x}{y}-\ln xy\right)\dfrac{dy}{y}\right)$.

42. Показать, что функция $z=arctg\dfrac{x}{y}$, где $x=u+v$, $y=u-v$, удовлетворяет соотношению $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$.

6. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Если уравнение $F(x,y)=0$ задает некоторую функцию $y(x)$ в *неявном виде* и $F'_y(x,y)\neq 0$, то $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Если же уравнение $F(x,y,z)=0$ задает функцию двух переменных $z(x,y)$ в неявном виде и $F'_z(x,y,z)\neq 0$, то справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

43. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от функции y, заданной неявно: $xy - \ln y = a$.

Δ <u>Первое решение.</u> Дифференцируем данное равенство по x, помня, что $y = y(x)$ есть функция x. Имеем:

$$y + xy' - \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow y + y'\left(x - \frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow y'\left(\frac{xy-1}{y}\right) = -y.$$

Отсюда находим

$$y' = -\frac{y^2}{xy-1} \text{ или } y' = \frac{y^2}{1-xy}.$$

<u>Второе решение.</u> Из равенства имеем $xy - \ln y - a = 0$. Пусть $F(x, y) = xy - \ln y - a$. Находим

$$F'_x(xy) = y, \ \ F'_y(xy) = x - \frac{1}{y}.$$

Тогда по определению

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{y}{x - \dfrac{1}{y}} = \frac{y^2}{1-xy}. \ ▲$$

44. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функции z, заданной неявно: $x\cos y +$

$+ y\cos z + z\cos x = 1$.

Δ Перепишем заданное равенство в виде

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1 = 0.$$

Положим

$$F(x, y, z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1.$$

Находим

$$F'_x = \cos y - z\sin x, \ F'_y = \cos z - x\sin y, \ F'_z = \cos x - y\sin z.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\cos y - z\sin x}{\cos x - y\sin z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\cos z - x\sin y}{\cos x - y\sin z}. \ ▲$$

49. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a} - \dfrac{y}{a} = 0$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$.

б) $ye^x + e^y = 0$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-1}$.

в) $1 + xy = \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right)$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$.

г) $y^x = x^y$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} \cdot \dfrac{\ln x - 1}{\ln y - 1}$.

д) $xe^y + ye^x = e^{xy}$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{yx}}$.

е) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = a\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, a \neq 0$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + ay}{ax - y}$.

ж) $e^{x+y} = x^3y^2 + 8$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2y^2 - e^{x+y}}{e^{x+y} - 2x^3y}$.

з) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$.

и) $\mathrm{tg}\, y = xy$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos^2 y}{1 - x\cos^2 y}$.

к) $\sqrt{x^2 + y^2} = c\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{cy + x\sqrt{x^2 + y^2}}{cx - y\sqrt{x^2 + y^2}}$.

л) $x^3y - y^3x = a$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2y - y^3}{3xy^2 - x^3}$.

м) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\left(y^2 - 2x^2\right)}{y\left(2y^2 - x^2\right)}$.

н) $yx^2 = e^y$. Отв. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x(y-1)}$.

50. Для неявно заданной функции равенством $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ найти $\dfrac{dy}{dx}$ при: *а)* $x = 6$, $y = 2$; *б)* $x = 6$, $y = 8$. Дать геометрическое толкование полученным результатам. Отв. а) $\dfrac{4}{3}$; б) $-\dfrac{4}{3}$.

51. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ при $x = y = a$ для неявно заданной функции равенством $x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5$. Отв. -1.

52.* Доказать, что из равенства $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ следует соотношение

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

53. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, dz от функций, заданных неявно:

а) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2 - x}{z + 1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{z + 1}$.

б) $x^3 + 3xyz = a^3$. Отв. $dz = -\dfrac{z}{xy + z^2}\left(ydx + xdy\right)$.

в) $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2-yz}{xy-z^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6y^2-3xz-2}{3\left(xy-z^2\right)}$.

*г)** $x^3yz-x^2y^2+2z^4=0$. Отв. $dz=\dfrac{-x}{x^3y+8z^3}\left(y(3xz-2y)dx+x(xz-2y)dy\right)$.

д) $e^z-xyz=0$. Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x(z-1)}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y(z-1)}$.

е) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. Отв. $dz=-\dfrac{c^2}{z}\left(\dfrac{xdx}{a^2}+\dfrac{ydy}{b^2}\right)$.

ж) $\dfrac{xyz}{x+y+z}=2$. Отв. $dz=-\dfrac{z}{x+y}\left(\dfrac{y+z}{x}dx+\dfrac{x+z}{y}dy\right)$.

з) $x+y+z=e^z$. Отв. $dz=-\dfrac{dx+dy}{1-e^z}$.

и) $z\ln(x+z)-\dfrac{xy}{z}=0$. Отв. $dz=\dfrac{z\left(\left(y(x+z)-z^2\right)dx+x(x+z)dy\right)}{z^3+2xy(x+z)}$.

к) $yz=\arcsin xz$. Отв. $dz=\dfrac{z\left(-dx+\sqrt{1-(xz)^2}\,dy\right)}{x-y\sqrt{1-(xz)^2}}$.

54. Функция z задана параметрически в виде $x=u+v$, $y=u-v$, $z=u\cdot v$. Выразить z как явную функцию от x и y.

Отв. $z=\dfrac{x^2-y^2}{4}$.

55. Функция z задана параметрически в виде $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$. Выразить z как явную функцию от x и y.

Отв. $z=\dfrac{3xy-x^3}{2}$.

7. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частными производными второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называются выражения, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{xy}(x,y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{yx}(x,y).$$

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Запись $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}$ означает, что функция z продифференцирована k раз по переменной x и $n-k$ раз по переменной y.

Значения смешанных производных $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

56. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ от функции $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$.

Δ По определению имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 5y^3, \ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - 15xy^2 + 5y^4.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} = 6x, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z'_y}{\partial x} = 2y - 15y^2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z'_y}{\partial y} = 2x - 30xy + 20y^3.$$

ЗАМЕТИМ, ЧТО

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y - 15y^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \ ▲$$

Полный дифференциал второго порядка $d^2 z = d(dz)$ функции $z = f(x, y)$ выражается формулой

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

или символически:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z.$$

Формула дифференциала *n*-го порядка:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z,$$

где находящийся в правой части двучлен нужно раскрыть по формуле бинома Ньютона и приписать в числителях каждого слагаемого *z*.

57. Найти дифференциал второго порядка от функции $z = xy^2 - x^2 y$.

Δ По определению

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$d^2 z = d(dz) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2-2xy,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2y-2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2xy-x^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x.$$

Таким образом, имеем:

$$d^2z=-2ydx^2-4(y+x)dxdy+2xdy^2. \ \blacktriangle$$

58. Показать, что функция $u=x^3-3xy^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Δ Последовательно находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x.$$

Отсюда имеем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6\mathrm{x}-6\mathrm{x}=0$, т.е. равенство действительно выполняется. ▲

59. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ от функций:

а) $z=e^{xe^y}$. Отв. $z''_{xx}=e^{xe^y+2y}$; $z''_{xy}=(1+xe^y)e^{xe^y+y}$; $z''_{yy}=x(1+xe^y)e^{xe^y+y}$.

б) $z=\ln(x^2+y)$. Отв. $z''_{xx}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$; $z''_{xy}=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$; $z''_{yy}=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$.

в) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. Отв. $z''_{xx}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $z''_{xy}=0$; $z''_{yy}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$.

г) $z=\sin^2(ax+by)$. Отв. $z''_{xx}=2a^2\cos 2(ax+by)$; $z''_{xy}=2ab\cos 2(ax+by)$;
$z''_{yy}=2b^2\cos 2(ax+by)$.

д) $z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$. Отв. $z''_{xx}=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z''_{xy}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z''_{yy}=\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

е) $z=\frac{\cos y^2}{x}$. Отв. $z''_{xx}=\frac{2\cos y^2}{x^3}$; $z''_{xy}=\frac{2y\sin y^2}{x^2}$; $z''_{yy}=-\frac{2\sin y^2+4y^2\cos y^2}{x}$.

*ж)** $z=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Отв. $z''_{xx}=\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$; $z''_{xy}=\frac{(y^2-x^2)\operatorname{sign}x}{(x^2+y^2)^2}$;
$z''_{yy}=-\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$.

з) $z=\frac{x^2+y^2}{xy}$. Отв. $z''_{xx}=\frac{2y}{x^3}$; $z''_{xy}=-\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$; $z''_{yy}=\frac{2x}{y^3}$.

и) $z=\ln(x^2+y^2)$. Отв. $z''_{xx}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $z''_{xy}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$; $z''_{yy}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

к) $z=(x+y)e^{xy}$. Отв. $z''_{xx}=ye^{xy}\left(y^2+xy+2\right);z''_{xy}=(x+y)(xy+2)e^{xy}$;

$z''_{yy}=xe^{xy}\left(x^2+xy+2\right)$.

60. Найти дифференциал второго порядка от данных функций:

а) $z=\dfrac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$. Отв. $d^2z=\dfrac{\left(3x^2-y^2\right)dx^2+8xydxdy+\left(3y^2-x^2\right)dy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

б) $z=\ln(x-y)$. Отв. $d^2z=-\dfrac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$.

в) $z=x\sin^2 y$. Отв. $d^2z=2\sin 2ydxdy+2x\cos 2ydy^2$.

г) $z=e^{xy}$. Отв. $d^2z=e^{xy}\left((ydx+xdy)^2+2dxdy\right)$.

д) $z=\sin(x+y)$. Отв. $d^2z=-\sin(x+y)(dx+dy)^2$.

61. Показать, что функция z удовлетворяет данному уравнению:

а) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ – уравнению $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

б) $z=y\cos\left(x^2-y^2\right)$ – уравнению $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

в) $z=4e^{-2y}+(2x+4y-3)e^{-y}-x-1$ – уравнению $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial y}+x+z=0$.

г) $u=e^{x+at}+\sin(x-at)$ – уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

д) $u=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ – уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{3}{x+y+z}$.

д) $u=(x-y)(y-z)(z-x)$ – уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

8. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Так как второй дифференциал функции $z=f(x,y)$ представляет собой квадратичную форму $Q(dx,dy)$ относительно переменных *dx* и *dy*, то его можно представить в виде

$$d^2z=Q(dx,dy)=(dx,dy)\cdot H\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix},$$

где $H=\begin{bmatrix}z''_{xx} & z''_{xy}\\ z''_{yx} & z''_{yy}\end{bmatrix}$ – матрица квадратичной формы, которая называется *матрицей Гессе.*

Аналогично для функции трех переменных $u=f(x,y,z)$:

$$d^2u = Q(dx, dy, dz) = (dx, dy, dz) \cdot H \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix},$$

где матрица Гессе $H = \begin{bmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{bmatrix}.$

62. Вычислить матрицу Гессе для функции $z = x^3y - x^2 - y + 5$.

Δ Находим величины

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - 2x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy - 2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда матрица Гессе имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy - 2 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{bmatrix}. \ ▲$$

Формула Тейлора функции $z = f(x, y)$ *в дифференциальной форме* с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\Delta f(M_0) = df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(M_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!}d^{m-1} f(M_0) + \frac{1}{m!}d^m f(x_0 + \text{и}\Delta x, y_0 + \text{и}\Delta y),$$

где $\Delta f(M_0) = \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(M) - f(M_0), 0 < \theta < 1.$

63. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ по степеням $\Delta x, \Delta y$ до членов второго порядка, если $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$. Рассмотреть разложение в окрестности точки (1,0).

Δ Имеем формулу

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y) H \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \ldots .$$

НАХОДИМ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1.$$

Тогда получим равенство

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = x^3 + 2y^3 - xy + (3x^2 - y)\Delta x + (6y^2 - x)\Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)\begin{bmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 12y \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \ldots .$$

При $x = 1$, $y = 0$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-1,\ f(1{,}0)=1.$$

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ПРИМЕТ ВИД

$$f(1+\Delta x, \Delta y)=1+3\Delta x-\Delta y+\frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}+\ldots=$$

$$=1+3\Delta x-\Delta y+3\Delta x^2-\Delta x\Delta y+\ldots\ .\ \blacktriangle$$

64. Написать матрицу Гессе для функций:

а) $z=x^2+2xy+by+x^3y$. Отв. $H=\begin{bmatrix} 2+6xy & 2+3x^2 \\ 2+3x^2 & 0 \end{bmatrix}$.

б) $z=\sin(x+y)$. Отв. $H=\begin{bmatrix} -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{bmatrix}$.

в) $z=e^{x-2y}$. Отв. $H=\begin{bmatrix} e^{x-2y} & -2e^{x-2y} \\ -2e^{x-2y} & 4e^{x-2y} \end{bmatrix}$.

65. Разложить функцию $z=\sin x \sin y$ по степеням $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(y-\frac{\pi}{4}\right)$ до членов второго порядка.

Отв. $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-$

$$-\frac{1}{4}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)+\ldots\ .$$

66.* Функцию $z=x^y$ разложить по степеням $(x-1)$ и $(y-1)$, найдя члены до третьего порядка включительно. Использовать результат для вычисления без таблиц числа $z_1=(1{,}1)^{1{,}02}$.

Отв. $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\ldots;\ z_1=1{,}102$.

9. ГРАДИЕНТ, КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ, НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Градиентом дифференцируемой функции $u=f(x,y,z)$ в точке M называется вектор ($\operatorname{grad} u(M)$), имеющий координаты

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x},\ \frac{\partial u(M)}{\partial y},\ \frac{\partial u(M)}{\partial z},\ \text{т.е. } \operatorname{grad} u(M)=\frac{\partial u(M)}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial u(M)}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial u(M)}{\partial z}\cdot\vec{k}.$$

67. Найти градиент функции в точке:

а) $z=xy^3-3x^2y+5y^2-4$, $M=(1,\ -1)$;

б) $u=\ln(x+z)+xy$, $M=(0{,}2,\ 1)$.

Δ *а)* По определению

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(y^3 - 6xy, 3xy^2 - 3x^2 + 10y\right).$$

При $x = 1$, $y = -1$ имеем:

$$\operatorname{grad} z = (-1 + 6, \quad 3 - 3 - 10) = (5, \quad -10).$$

б) По определению

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{x+z} + y, \quad x, \quad \frac{1}{x+z}\right).$$

При $x = 0$, $y = 2$, z = 1 получаем

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{0+1} + 2, \quad 0, \quad \frac{1}{0+1}\right) = (3, \quad 0, \quad 1). \quad \blacktriangle$$

68. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = \frac{yz^2}{x^2}$,

$$v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3 \text{ в точке } M = \left(\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Δ Находим $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{grad} v$ в точке M:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(-2\frac{yz^2}{x^3}, \quad \frac{z^2}{x^2}, \quad \frac{2yz}{x^2}\right),$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(-2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 2}, \quad 2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\frac{3x^2}{2}, \quad 18y^2, \quad 9\sqrt{6}z^2\right),$$

$$\operatorname{grad} v(M) = \left(\frac{3}{2} \cdot 2, \quad 18 \cdot \frac{1}{2}, \quad 9\sqrt{6} \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(3, \quad 9, \quad 3\sqrt{6}\right).$$

Находим теперь косинус угла α между градиентами:

$$\cos\alpha = \frac{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} u| \cdot |\operatorname{grad} v|} = \frac{-\frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 3\sqrt{6}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 9^2 + \left(3\sqrt{6}\right)^2}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{18} \cdot 12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т.е. } \alpha = 45^\circ. \quad \blacktriangle$$

Для поверхности S, задаваемой равенством $F(x, y, z) = 0$, *уравнение касательной плоскости*, проведенной в точке $N_0 \in S$, имеет вид

$$F'_x(N_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(N_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(N_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

где $\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)\Big|_{N_0} = \operatorname{grad} u(N_0)$.

Нормалью к поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $N_0(x_0, y_0)$ называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку N_0. Направляющим вектором нормали является вектор $\vec{n} = \left(-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}; -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1\right)$. Значит, уравнение касательной плоскости: $-\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + (z - z_0) = 0$, а канонические уравнения нормали к поверхности имеют вид

$$\frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то $\vec{n} = \left(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0)\right) = \operatorname{grad} F(M_0)$ и, следовательно, нормаль к поверхности имеет вид $\frac{x - x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M_0)}$.

69. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ в точке $M = (1, 1, 1)$.

Δ Находим градиент функции $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 1$ в точке $M = (1,1,1)$:

$$\operatorname{grad} F = (2x, -4y, 4z) \Rightarrow \operatorname{grad} F(M) = (2, -4, 4).$$

Уравнение касательной плоскости

$$2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 1) = 0 \Rightarrow x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

Уравнение нормали запишется в виде

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{-4} = \frac{z - 1}{4} \Rightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 1}{2}. \quad ▲$$

Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то производная функции *u* по направлению $\vec{l}$ имеет вид

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma,$$

где α, β, γ – углы, образованные направлением $\vec{l}$ с осями *X*, *Y*, *Z* соответственно.

Использовав градиент функции, запишем производную по направлению в виде: $\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \left(\operatorname{grad} u(M), \vec{l^0}\right)$, или $\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\left(\operatorname{grad} u(M), \vec{l}\right)}{|\vec{l}|}$, где $\vec{l^o}$ – орт направления $\vec{l}$.

70. Найти производную функции $z = x^2 + xy + y^2$ в точке $M = (1,1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (2, -1)$.

Δ Находим

$$\operatorname{grad} z = (2x + y, 2y + x) \Rightarrow \operatorname{grad} z(M) = (3,3).$$

Тогда производная функции z в точке M по направлению вектора $\vec{a}$ равна

$$z'_a(M) = \frac{(\operatorname{grad} z(M), \bar{a})}{|\bar{a}|} = \frac{3\cdot 2 - 3\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}. \quad \blacktriangle$$

71. Найти градиент функции:

а) $z = e^{\frac{x}{y}}$. Отв. $\operatorname{grad} z = \left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}, \quad -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)$.

б) $z = \frac{\cos y^2}{x}$. Отв. $\operatorname{grad} z = \left(-\frac{\cos y^2}{x^2}, \quad -\frac{2y}{x}\sin y^2\right)$.

в) $z = \ln(x + \ln y)$. Отв. $\operatorname{grad} z = \left(\frac{1}{x + \ln y}, \quad \frac{1}{y(x + \ln y)}\right)$.

г) $u = 2z^2 + 5xy^2 - 7x$. Отв. $\operatorname{grad} u = (5y^2 - 7, \quad 10xy, \quad 4z)$.

д) $u = (xy)^z$. Отв. $\operatorname{grad} u = \left(yz(xy)^{z-1}, \quad xz(xy)^{z-1}, \quad (xy)^z \cdot \ln(xy)\right)$.

е) $u = \frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y}$. Отв. $\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{y}, \quad \frac{x}{z^2} - \frac{1}{z}\right)$.

72. Вычислить градиент функции в точке *M*:

а) $z = 3x^2y - xy^2$, M = (– 1, 1). Отв. (– 7, 5).

б) $z = xe^{-xy}$, M = (0, – 2). Отв. (1, 0).

в) $z = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{x}}$, M = (1, 1). Отв. (0, 0).

г) $u = 3x^3z - 2xy + 5$, M = (2, 3, 0). Отв. (– 6, – 4, 81).

д) $u = \ln(yz) + \sqrt{x}$, M = ($\frac{1}{4}$, – 1, – 1). Отв. (1, – 1, – 1).

е) $u = \frac{xyz}{x+3}$, M = (– 2, 3, – 2). Отв. (– 6, 4, – 6).

73. Найти угол между градиентами скалярных полей *u* и *v* в точке *M*:

а) $u = x^2yz^3$, $v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$, M = (2, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$). Отв. 90°.

б) $u = \frac{z^3}{xy^2}$, $v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, M = ($\frac{1}{3}$, 2, $\sqrt{\frac{3}{2}}$). Отв. 135°.

в) $u = \frac{z}{x^3y^2}$, $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, M = (1, 2, $\frac{1}{\sqrt{6}}$). Отв. 0°.

г) $u = \frac{x^2}{yz^2}$, $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, M = ($\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$). Отв. 135°.

д) $u = \frac{z^2}{xy^2}$, $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, M = ($\frac{1}{3}$, 2, $\sqrt{\frac{2}{3}}$). Отв. 135°.

е) $u=\dfrac{xz^2}{y}$, $v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$, М = $(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}, 1)$. Отв. 0°.

ж) $u=\dfrac{yz^2}{x}$, $v=\dfrac{\sqrt{6}}{2x}-\dfrac{\sqrt{6}}{2y}+\dfrac{2}{3z}$, $M=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$. Отв. 90°.

з) $u=\dfrac{xy^2}{z^2}$, $v=3\sqrt{2}x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}z^2$, $M=(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{2}{3}})$. Отв. 45°.

и) $u=\dfrac{x^3y^2}{z}$, $v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}z}$, $M=(1, 2, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$. Отв. 180°.

к) $u=\dfrac{1}{x^2yz}$, $v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}z}$, $M=(2, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$. Отв. 45°.

74. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M:

а) $x(y+z)(xy-z)+8=0$, $M=(2, 1, 3)$.

Отв. $2x+7y-5z+4=0$; $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{-5}$.

б) $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8=0$, $M=(2, 2, 1)$. Отв. $x+y-4z=0$; $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

в) $x^2+y^2-z^2+1=0$, $M=(2, 2, 3)$.

Отв. $2x+2y-3z+1=0$; $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$.

г) $y-z+\ln\dfrac{x}{z}=0$, $M=(1, 1, 1)$. Отв. $x+y-2z=0$; $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

д) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-z=0$, $M=(1, 1, \dfrac{\pi}{4})$. Отв. $x-y+2z-\dfrac{\pi}{2}=0$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$.

е) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{8}=0$, $M=(4, 3, 4)$.

Отв. $3x+4y-6z=0$; $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{-6}$.

ж) $x^2-6x+9y^2+z^2-4z-4=0$, $M=(3, 0, -4)$.

Отв. $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+4}{1}$; $z+4=0$.

з) $2x^2-y^2+z^2-1=0$, $M=(0, -3, 4)$.

Отв. $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-4}{4}$; $3y+4z-7=0$.

и) $7x^2-4y^2+4z^2-7=0$, $M=(1, 1, 1)$.

Отв. $7x-4y+4z-7=0$; $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-1}{4}$.

к) $x^2yz+2x^2z-3xyz+2=0$, $M=(1, 0, -1)$.

Отв. $2x-y-z-3=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

75. Найти производную функции в точке M по направлению вектора $\vec{a}$:

а) $z=2x^2+3xy+y^2$, $M=(2, 1)$, $\vec{a}=(1, 3)$. Отв. $\frac{35}{\sqrt{10}}$.

б) $z=\ln\left(x^2+3y^2\right)$, $M=(1, 1)$, $\vec{a}=(1, 1)$. Отв. $\sqrt{2}$.

в) $z=\operatorname{arctg}\left(xy^2\right)$, $M=(2, -1)$, $\vec{a}=(5, 4)$. Отв. $-\frac{11}{5\sqrt{41}}$.

г) $z=\arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $M=(1, 2)$, $\vec{a}=(2, 1)$. Отв. $\frac{7}{2\sqrt{15}}$.

д) $z=e^{x^2+y^2}$, $M=(1, 0)$, $\vec{a}=(1, -2)$. Отв. $\frac{2e}{\sqrt{5}}$.

е) $u=3xyz$, $M=(1, 0, -1)$, $\vec{a}=(2, 2, 1)$. Отв. -2.

ж) $u=xy+yz+zx$, $M=(2, 0, 5)$, $\vec{a}=(1, 2, 2)$. Отв. $\frac{23}{3}$.

з) $u=\ln(x+y)-z^2$, $M=(0, 1, -1)$, $\vec{a}=(-2, 1, -2)$. Отв. $-\frac{5}{3}$.

и) $u=e^x+xy^2+z$, $M=(0, 1, 3)$, $\vec{a}=(0, 4, 3)$. Отв. $\frac{3}{5}$.

к) $u=\ln x+yz$, $M=(1, 2, -1)$, $\vec{a}=(4, 0, -3)$. Отв. $-\frac{2}{5}$.

10. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $z=f(x,y)$, если для всех точек $M(x,y)$, отличных от $M_0(x_0,y_0)$ и принадлежащих достаточно малой его окрестности, выполняется неравенство

$$f(M_0)\ge f(M)\left(f(M_0)\le f(M)\right).$$

Максимум и минимум функции называется ее *экстремумом*.

Если точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума функции $f(x,y)$, то $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$ или хотя бы одна из этих производных не существует (*необходимые условия существования экстремума*).

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными*.

Чтобы стационарная точка M_0 была точкой экстремума, должны выполняться *достаточные условия экстремума* дважды непрерывно дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$:

1) $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(M_0)=\vec{0}$;

2) матрица Гессе

$$H(M_0)=\begin{bmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{bmatrix}$$

положительно определена. Тогда в точке M_0 функция имеет локальный минимум. Если же отрицательно определена, то в этой точке функция имеет локальный максимум. Если же $H(M_0)$ знаконеопределена, то в точке M_0 локальный экстремум отсутствует.

Аналогично и для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$.

76. Найти стационарные точки функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Δ Имеем

$$\mathbf{grad}z(M_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим четыре стационарные точки:

$$(0,\ \ 0),\ \ \left(-\frac{5}{3},\ \ 0\right),\ \ (-1,\ \ -2),\ \ (-1,\ \ 2).\ \ ▲$$

77. Найти стационарные точки функции $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

Δ Приравниваем частные производные по всем переменным к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x - y - z = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - x = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2 - x = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему первого порядка с тремя неизвестными, находим стационарную точку $M_0 = (2,1,7)$. ▲

78. Исследовать на экстремум функцию:

а) $z = (x-2)^2 + 2y^2$; *б*) $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$; *в*) $z = xy$.

Δ *а*) 1. Находим стационарные точки функции:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2(x-2) = 0 & \Rightarrow x = 2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y = 0 & \Rightarrow y = 0. \end{cases}\right\} \Rightarrow (2, 0) = M_0.$$

2. В точке M_0 составляем матрицу Гессе. Имеем:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 2,\ \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 4,\ \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = 0,$$

т.е. матрица Гессе $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = H(M_0)$.

3. Определяем знакоопределенность матрицы *H*. Так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$, $|H| = 8 > 0$, то матрица *H* положительно определена. Следовательно, в точке (2, 0) функция $z = (x-2)^2 + 2y^2$ имеет минимум, причем $\min z = 0$.

б) 1. Находим стационарные точки функции:

$$\left.\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4 - 2x = 0 & \Rightarrow x = 2; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -4 - 2y = 0 & \Rightarrow y = -2. \end{cases}\right\} \Rightarrow (2, -2) = M_0.$$

2. В точке (2, – 2) составляем матрицу Гессе. Имеем:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = -2, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = -2, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = 0,$$

т.е. матрица Гессе имеет вид $H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = H(M_0)$.

3. Определяем знакоопределенность матрицы *H*. Так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 < 0$, $|H| > 0$, то матрица *H* по критерию Сильвестра отрицательно определена. Следовательно, в точке (2, – 2) функция $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$ имеет максимум и $\max z = 8$.

в) 1. Находим стационарные точки функции:

$$\left.\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (0, 0) = M_0.$$

2. В точке M_0 составляем матрицу Гессе. Имеем:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 0, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 0, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = 1.$$

Значит, матрица Гессе имеет вид $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = H(M_0)$.

3. Исследуем матрицу Гессе на знакоопределенность. Имеем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $|H| = -1 < 0$. Так как $|H| < 0$, то в стационарной точке M_0 экстремума нет. ▲

79. Исследовать на экстремум функцию $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$ из примера 77.

Δ Стационарной точкой функции u является точка $M_0 = (2,1,7)$. В этой точке составим матрицу Гессе. Имеем :

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 4,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 2,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{M_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = -1,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{M_0} = -1,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|_{M_0} = 0.$$

Тогда

$$H(M_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверяем матрицу H на знакоопределенность по критерию Сильвестра:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 > 0,\ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0,\ |H| = -2 < 0.$$

Согласно критерию Сильвестра матрица H знаконеопределена, т.е. в точке (2, 1, 7) функция u не имеет экстремума. ▲

80. Найти стационарные точки функций:

а) $z = x^3 y^2 (12 - x - y)$. Отв. (0, 0); (0, 8); (12, 0); (0, 12); (9, 0); (6, 4).

б) $z = xy(3 - x - y)$. Отв. (0, 0); (0, 3); (3, 0); (1, 1).

в) $z = e^{2x}(x + y^2)$. Отв. $(-\frac{1}{2}, 0)$.

г) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$. Отв. (0, 0).

д) $z = (4x - x^2)(2y - y^2)$. Отв. (0, 0); (4, 0); (2, 1); (0, 2); (4, 2).

е) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$. Отв. (– 1, – 2, 3).

ж) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$. Отв. (6, 4, 10).

81. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $z = x^4 + 4xy - 2y^2$. Отв. Нет экстремума.

б) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$. Отв. $z_{\min}$ в точках $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

в) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. Отв. $z_{\min} = -1$ в точке $(1,0)$.

г) $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y};\ x > 0, y > 0$. Отв. $z_{\min} = 3\sqrt[3]{3}$ в точке

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

д) $z = e^{-x^2-y^2}\left(2x^2 + y^2\right)$. Отв. $z_{\min} = 0$ в точке $(0,0)$; $z_{\max} = \frac{2}{e}$ в точках $(\pm 1{,}0)$.

е) $z = \left(x^2 - 2y^2\right)e^{x-y}$. Отв. $z_{\max} = 8e^{-2}$ в точке $(-4,-2)$.

ж) $z = 1 - \left(x^2 + y^2\right)^{3/8}$. Отв. $z_{\max} = 1$ в точке $(0,0)$.

з) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$. Отв. $z_{\min} = -14$ в точке $(-1,-2{,}3)$.

и) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$. Отв. Нет экстремума.

Для функции, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, стационарные точки функции определяются системой

$$F'_x(x, y, z) = 0;\ F'_y(x, y, z) = 0;\ F(x, y, z) = 0.$$

Вопрос же о характере экстремума неявно заданной функции в стационарной точке решается с помощью достаточных условий.

82. Функция z задана неявно равенством $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - -2yz - 72 = 0$. Найти ее стационарные точки. Отв. (1, 1); (– 1, – 1).

83. Убедиться, что при $x = 5, y = 6$ функция $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + +20$ имеет минимум.

11. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области *D* с границей *Г* и дифференцируема во всех ее внутренних точках.

Тогда существуют точки M_1 и M_2, в которых функция f принимает наибольшее и наименьшее значения (*глобальный экстремум*), т.е.

$$f(M_1) = \max_{M\in D} f(M),\ f(M_2) = \min_{M\in D} f(M).$$

Точки M_1 и M_2 следует искать среди стационарных точек функции *f* внутри области *D* или среди точек, принадлежащих границе *Г*.

Экстремум функции $z = f(x, y)$, найденный при условии $\varphi(x, y) = 0$, называется условным.

Если из уравнения $\varphi(x, y) = 0$ найти $y = y(x)$ и подставить в функцию $z = f(x, y)$, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z = f(x, y(x))$.

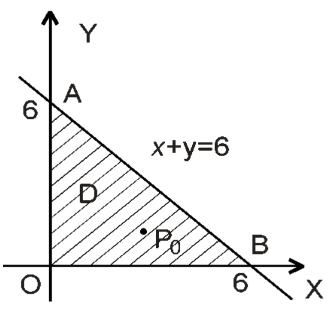

Рис. 11.1

84. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ в треугольнике OAB, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$ (рис. 11.1).

Δ Область *D*, ограниченная треугольником, изображена на рис. 11.1.

Найдем стационарные точки функции, лежащие внутри треугольника $(x > 0, y > 0)$:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y) = 0, \\ z'_y &= 2x^2 - x^3 - 3xy^2 = x^2(2 - x - 2y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решив систему, находим единственную стационарную точку $P_0\left(1, \dfrac{1}{2}\right) \in D$.

Вычисляем значение функции в этой точке: $z(P_0) = \dfrac{1}{4}$.

Исследуем поведение функции на границе области *D*. На сторонах треугольника $x = 0$ и $y = 0$ значения функции *z* тоже равны 0. Найдем наименьшее и наибольшее значения функции *z* на стороне *AB*: $x + y = 6$. На ней

$$y = 6 - x,\ x \in [0,6], \text{ и } z = z(x) = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x).$$

Функция, заданная на [*a*, *b*], принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах отрезка, или в стационарных точках, принадлежащих отрезку [0, 6].

Имеем $z(0) = z(6) = 0$. Найдем стационарные точки:

$z'(x) = -48x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 4 \in (0,6)$ ($x = 0$ – граничная точка отрезка [0, 6]).

В точке $x_0 = 4$ значение $z(4) = 16(-4)(6 - 4) = -128$. Таким образом, глобальный экстремум функции *z* в данной области *D* надо искать среди следующих значений: $z = \dfrac{1}{4}$, $z = 0$, $z = -128$. Наибольшее значение функция принимает в точке P_0, и оно равно $1/4$, а наименьшее значение, равное –128, принимает на границе в точке (4, 2). ▲

85. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Отв. $z_{\max} = 17$ в точке (1, 2); $z_{\min} = -3$ в точке (1, 0).

86. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

Отв. $z_{\max} = 3/e$ в точках (0, ±1); $z_{\min} = 0$ в точке (0, 0).

87. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Отв. $z_{\max} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$; $z_{\min} = 0$ в точке (0, 0).

88. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(3 - x - y)$ в треугольнике $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$.

Отв. $z_{\max} = 1$ в точке (1, 1); $z_{\min} = 0$ в точках границы.

89. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 1 + x + 2y$ в треугольнике $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

Отв. $z_{\max} = 3$ в точке (0, 1); $z_{\min} = 1$ в точке (0, 0).

90. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

Отв. $z_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ в точках $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; $z_{\min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ в точках $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

91. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^x(x + y^2)$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

Отв. $z_{\max} = e$ в точке (1, 0); $z_{\min} = -\frac{1}{e}$ в точке (-1, 0).

92. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

Отв. $z_{\max} = 13$ в точке (2, -1); $z_{\min} = -1$ в точках (1, 1) и (0, -1).

93. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x + y$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

Отв. $z_{\max} = \sqrt{2}$ в точке $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; $z_{\min} = -\sqrt{2}$ в точке $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

94. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

Отв. $z_{\max} = -1$ в точке (0, 0); $z_{\min} = -19$ в точке (0, 3).

12. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

95. Представить положительное число *a* в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была минимальной.

Отв. Все множители равны между собой.

96. На плоскости *XY* найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до трех прямых $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ была бы наименьшей.

Отв. $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$.

97. Через точку (*a*, *b*, *c*) провести плоскость так, чтобы объем тетраэдра, отсекаемого ею от координатного трехгранника, был наименьшим.

Отв. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$.

98. Даны три точки $A = (0, 0, 12)$, $B = (0, 0, 4)$ и $C = (8, 0, 8)$. На плоскости XY найти такую точку D, чтобы сфера, проходящая через точки A, B, C и D, имела наименьший радиус. Отв. $((3, \sqrt{39}, 0),(3, -\sqrt{39}, 0))$.

99. Из всех треугольников данного периметра $2l$ найти тот, который имеет наибольшую площадь. Отв. Равносторонний.

100. Определить размеры прямоугольного бассейна объемом 4000 м^3, так чтобы на облицовку его поверхности потребовалось наименьшее количество материала. Отв. Длина 20, ширина 20, высота 10.

101. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих диагональ l, найти тот, объем которого наибольший. Отв. Куб, сторона $a = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$.

102. В полушар радиусом R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема. Отв. Его измерения $a = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}, \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

103. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$. Отв. $\dfrac{9}{4\sqrt{2}}$.

104. Найти точки эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, наиболее и наименее удаленные от начала координат. Отв. $(\pm a, 0)$, $(\pm 0, b)$.

105. На плоскости $3x - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до точки $A = (1, 1, 1)$ и $B = (2, 3, 4)$ минимальная.

Отв. $(\dfrac{21}{13}, 2, \dfrac{63}{26})$.

13. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Задача отыскания экстремума функции $u = f(x, y)$ двух переменных x и y при связи $F(x, y) = 0$ сводится к следующему:

1. Составляем вспомогательную *функцию Лагранжа*

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$, где $\lambda -$ *множитель Лагранжа*,

и осуществляем поиск стационарной точки $(x_0, y_0; \lambda_0)$ функции Лагранжа из системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} L'_x(x, y; \lambda) &= f'_x(x, y) + \lambda \cdot F'_x(x, y) = 0, \\ L'_y(x, y; \lambda) &= f'_y(x, y) + \lambda \cdot F'_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda(x, y; \lambda) &= F(x, y) = 0. \end{aligned}\right\}$$

2. Достаточными условиями экстремума функции для дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(x, y)$ и $F(x, y)$ в окрестности стационарной точки $(x_0, y_0; \lambda_0)$ являются следующие.

Если в стационарной точке $(x_0, y_0; \lambda_0)$ число

$$Q=\left(F'_y,-F'_x\right)\begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F'_y \\ -F'_x \end{bmatrix}$$

меньше нуля, то функция $u=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) имеет условный максимум, а при $Q>0$ – минимум.

106. Исследовать на экстремум функцию $z=xy$ при условии, что x и y принадлежат окружности $x^2+y^2=18$.

Δ 1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda F\left(x^2+y^2-18\right).$$

2. Находим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= y+2\lambda\cdot x=0, \\ L'_y &= x+2\lambda\cdot y=0, \\ L'_\lambda &= x^2+y^2-18=0. \end{aligned}\right\}$$

Первые два уравнения представим в виде

$$x=-2\lambda\cdot y,$$
$$y=-2\lambda\cdot x.$$

Разделив почленно первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{x}\Rightarrow y^2=x^2\Rightarrow y=\pm x.$$

Подставив полученное y в третье уравнение, будем иметь

$$2x^2=18\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3, y=\pm 3, \lambda=\pm\frac{1}{2}.$$

Таким образом, точками возможного локального условного экстремума функции $u=xy$ при условии $x^2+y^2=18$ являются точки

$$M_1=(3,\ 3;\ -\frac{1}{2}),\ M_2=(3,\ -3;\ \frac{1}{2}),\ M_3=(-3,\ 3;\ \frac{1}{2}),\ M_4=(-3,\ -3;\ -\frac{1}{2}),$$

т.е. на плоскости XY точки

$$M'_1=(3{,}3),\ M'_2=(3{,}-3),\ M'_3=(-3{,}3),\ M'_4=(-3{,}-3).$$

3. Проверяем каждую точку на оптимальность, т.е составляем квадратичную форму

$$Q(M)=\left(F'_y(M),-F'_x(M)\right)\begin{bmatrix} L''_{xx}(M) & L''_{xy}(M) \\ L''_{yx}(M) & L''_{yy}(M) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} F'_y(M) \\ -F'_x(M) \end{pmatrix}$$

и определяем её знак. Здесь $F(x,y)=x^2+y^2-18=0-$ линия связи переменных x и y.

Вычислим значение Q в точке $M'_1=(3{,}3)$. Имеем:

$$\left(F'_y,-F'_x\right)_{|M'_1}=(2y,-2x)_{\substack{|x=3\\|y=3}}=(6,-6);$$

$$\begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{yy} \end{bmatrix}_{|M'_1}=\begin{bmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{bmatrix}_{M'_1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$Q(M_1')=(6,-6)\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -6\end{pmatrix}=(6,-6)\begin{pmatrix}-12\\ 12\end{pmatrix}=-144<0.$$

Это означает, что в точке (3, 3) целевая функция $z=xy$ при ограничении $x^2+y^2=18$ имеет локальный максимум, равный $z_{\max}=3\cdot 3=9$.

Аналогично найдем, что $Q(M_2')=Q(M_3')=144>0$, $Q(M_4')=-144<0$, т.е. в точках M_1' и M_3' функция $z=xy$ имеет условный локальный минимум, а в точке M_4' – максимум. ▲

107. Найти точку $M=(x,y,z)$, ближайшую к началу координат и лежащую на прямой, являющейся линией пересечения двух плоскостей $x+2y+3z=10$ и $x-y+2z=1$.

Δ По условию задачи требуется найти минимум квадрата расстояния $d^2=|OM|^2=x^2+y^2+z^2$ от начала координат до точки $M=(x,y,z)$, лежащей на прямой , т.е. требуется минимизировать функцию

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

при условии, что x,y,z подчинены ограничениям

$$F_1=x+2y+3z-10=0,\ F_2=x-y+2z-1=0.$$

1. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+2y+3z-10)+\lambda_2(x-y+2z-1).$$

2. Находим стационарные точки функции Лагранжа, т.е. решаем систему уравнений:

$$\begin{cases}L_x'=2x+\lambda_1+\lambda_2=0,\\ L_y'=2y+2\lambda_1-\lambda_2=0,\\ L_z'=2z+3\lambda_1+2\lambda_2=0,\\ L_{\lambda_1}'=x+2y+3z-10=0,\\ L_{\lambda_2}'=x-y+2z-1=0.\end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что

$$x=\frac{19}{59},\ y=\frac{146}{59},\ z=\frac{93}{59},\ \lambda_1=-\frac{110}{59},\ \lambda_2=\frac{72}{59}.$$

Убедимся теперь в том, что точка $M=\left(\frac{19}{59},\frac{146}{59},\frac{93}{59}\right)$, расположенная на линии пересечения плоскостей $x+2y+3z-10=0$ и $x-y+2z-1=0$, наименее удалена от начала координат, для чего проверим выполнение достаточных условий экстремума. Для этого вычислим число Q, равное

$$Q=\left(\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|,-\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}\right|,\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|\right)\begin{bmatrix}L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz}\\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz}\\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|\\ -\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}\right|\\ \left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|\end{pmatrix}.$$

Тогда если $Q > 0$, то в соответствующей точке функция имеет локальный условный минимум, а если $Q < 0$, то максимум.

Вычисляем якобианы

$$\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|=\begin{vmatrix}(F_1')_y & (F_1')_z\\ (F_2')_y & (F_2')_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7;$$

$$\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}\right|=\begin{vmatrix}(F_1')_x & (F_1')_z\\ (F_2')_x & (F_2')_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;$$

$$\left|\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}(F_1')_x & (F_1')_y\\ (F_2')_x & (F_2')_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

Находим матрицу Гессе в точке M

$$H(M)=\begin{bmatrix}L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz}\\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz}\\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

и вычисляем число Q:

$$Q=(7,-1,-3)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ -1\\ -3\end{pmatrix}=(14,-2,-9)\begin{pmatrix}7\\ -1\\ -3\end{pmatrix}=127>0.$$

В соответствии с достаточными условиями экстремума точка $M=\left(\frac{19}{59},\frac{146}{59},\frac{93}{59}\right)$ ближе других точек заданной прямой расположена к началу координат. ▲

108. Найти экстремум функции $u=x-2y+2z=F(x,y,z)$ в точках сферы $x^2+y^2+z^2=9$.

Δ 1. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,z;\lambda)=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right).$$

2. Находим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Из первых двух уравнений имеем $-\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = -2x$, а из первого и третьего уравнений получаем $\frac{1}{2} = \frac{x}{z} \Rightarrow z = 2x$.

Отсюда и из четвертого уравнения будем иметь $x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 9$, т.е. $x = \pm 1$. Тогда $y = \mp 2$, $z = \pm 2$, $\lambda = \mp\frac{1}{2}$. Итак, имеем две стационарные точки (1, –2, 2), (–1, 2, –2).

3. С помощью достаточного условия проверяем стационарные точки на оптимальность. Для этого составляем матрицу *Q*, равную:

$$Q = \begin{bmatrix} -F'_z & 0 & F'_x \\ 0 & -F'_z & -F'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F'_z & 0 \\ 0 & -F'_z \\ F'_x & -F'_y \end{bmatrix}.$$

Если в стационарной точке функции *L* матрица *Q* положительно определена, то в этой точке целевая функция *u* имеет минимум; если же *Q* отрицательно определена – максимум. Находим

$L''_{xx} = 2\lambda$, $L''_{xy} = 0$, $L''_{xz} = 0$, $L''_{yy} = 2\lambda$, $L''_{yz} = 0$, $L''_{zz} = 2\lambda$, $F'_x = 1$, $F'_y = -2$, $F'_z = 2$,

т.е. матрица Гессе *H* имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}.$$

Матрица *Q* в точке (1, –2, 2) при $\lambda = -\frac{1}{2}$ равна:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Так как $a_{11} = -5 < 0$, $|Q| = 36 > 0$, то матрица *Q* отрицательно определена. Значит, в точке (1, –2, 2) целевая функция имеет максимум, равный $u_{\max} = 5$.

Аналогично для точки (–1, 2, –2) и $\lambda = \dfrac{1}{2}$ получаем

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Так как $a_{11} = 5 > 0$, $|Q| = 36 > 0$, то матрица Q положительно определена. Таким образом, целевая функция u имеет в точке (–1, 2, –2) минимум, равный $u_{\min} = -5$. ▲

109. Определить условные экстремумы функций:

а) $z = x^3 + y^3$ при $x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0$. Отв. $z_{\min} = 2$ в точке (1, 1).

б) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}$. Отв. $z_{\min} = -1$ в точке (–2, –2); $z_{\max} = 1$ в точке (2, 2).

в) $u = xyz$ при $x + y + z = 5, xy + xz + yz = 8$. Отв. $u_{\min} = 4$, $u_{\max} = \dfrac{112}{27}$.

г) $u = x + y + z$ при $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$. Отв. $u_{\min} = 9$ в точке (3, 3, 3).

д) $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 6, x > 0, y > 0, z > 0$. Отв. $u_{\max} = 1$ в точке (1, 1, 1).

е) $z = e^{xy}$ при $x + y = 1$. Отв. $z_{\max} = e^{\frac{1}{4}}$ в точке $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$.

ж) $u = x^2y^2z^4$ при $2x + 3y + 4z = 0$. Отв. $u_{\min} = 0$ в точке (0, 0, 0).

з) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$. Отв. $z_{\min} = -5$ в точке (–1, –2); $z_{\max} = 5$ в точке (1, 2).

и) $z = x^2 + y^2$ при $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$. Отв. $z_{\min} = \dfrac{36}{13}$ в точке $(\dfrac{18}{13}, \dfrac{12}{13})$.

к) $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

Отв. $z_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$ в точке $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$; $z_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$ в точке $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

Отв. $z_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$ в точке $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$; $z_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$ в точке $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

14. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА «ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

Задача 1

Найти область определения функции $f(x, y)$, задать ее аналитически (с помощью неравенств или уравнений) и изобразить графически:

В.1. $f(x, y)=\dfrac{\ln(y+2x+1)}{1-y^2}+\sqrt{x-2y}$.

В.2. $f(x, y)=\dfrac{\ln(x-2y)}{\sin(e^{-|x|}-1)}+\sqrt{x-3y}$.

В.3. $f(x, y)=\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{e^{x/y}-1}+\sqrt{4x^2+4y^2-1}$.

В.4. $f(x, y)=\dfrac{\sqrt{y^2+x+1}}{\cos e^{-|x|}}+\ln\sqrt{y^2+x^2-1}$.

В.5. $f(x, y)=\dfrac{\sqrt{x-3y^2}}{\arcsin(x^2+4y^2)}+\cos\dfrac{y^2+4}{x}$.

В.6. $f(x, y)=\sqrt{x^2+4y^2-1}\cdot\arccos(x^2+y^2)+e^{\sqrt{x}}$.

В.7. $f(x, y)=\sqrt{\dfrac{x^2-y-2}{y^2-x+2}}+\ln(x-y)$.

В.8. $f(x, y)=\dfrac{\ln(x^2-y)}{\sqrt{-x-y^2}}+\sin\dfrac{e^x}{y^2-1/4}$.

В.9. $f(x, y)=\dfrac{\sqrt{xy-1}}{x-y^2}+e^{\sqrt{x+1}}$.

В.10. $f(x, y)=\cos\sqrt{x^2+2x+y^2-2y}+\dfrac{1}{12x}e^{\sqrt{x-y}}$.

В.11. $f(x, y)=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+y^2}}{\sqrt{2y-y^2-x^2}}+\dfrac{1}{17}\sin\sqrt{xy^2}$.

В.12. $f(x, y)=\sqrt{4-y^2}+\dfrac{e^{5x+6y^2}+1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

В.13. $f(x, y)=\dfrac{\cos(x+\sqrt{y})}{\ln(x^2+y^2)}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-y}}$.

В.14. $f(x,y)=\sqrt{e^{2x}-1}+\dfrac{\arcsin(y^2-x)}{x^2+y^2+1}$.

В.15. $f(x,y)=\dfrac{1}{6}\ln(4x-x^2-y^2)+\sqrt{y^2-x}$.

Ответы к задаче 1

В.1. $D:\quad x>-0{,}4;\qquad -2x-1<y\le\dfrac{1}{2}x,\quad y\ne\pm1.$

В.2. $D:\quad \left[\begin{array}{l} x>0,\quad y\le\dfrac{1}{3}x, \\ x<0,\quad y<\dfrac{1}{2}x. \end{array}\right.$

В.3. $D:\quad -1\le x\le1,\quad x\ne0.$

$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{1-x^2}\le y\le-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2},\ y\ne0, \\ \sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},\ y\ne0. \end{array}\right.$$

В.4. $D:\quad x\in R,$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y\le-\sqrt{-x-1}, \\ y\ge\sqrt{-x-1}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y<-\sqrt{1-x^2}, \\ y>\sqrt{1-x^2}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

В.5. $D:\quad 0<x\le1,$

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\le y\le\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{\dfrac{x}{3}}\le y\le\sqrt{\dfrac{x}{3}}. \end{array}\right.$$

В.6. $D:\quad 0\le x\le1,$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}. \end{array}\right.$$

В.7. $D:$

$$\left[\begin{array}{l} x \le -1, \quad y < x; \\ -1 < x < 2, \; y \le x^2 - 2; \\ x \ge 2, \begin{cases} y < x, \\ \left[\begin{array}{l} y > \sqrt{x-2}, \\ y < -\sqrt{x-2}. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

B.8. D:

$$\left[\begin{array}{l} x \le -1, \quad \begin{cases} y > -\sqrt{-x}, \\ y < \sqrt{-x}, \\ y \ne \pm 1/2. \end{cases} \\ -1 < x < 0, \quad \begin{cases} y < x^2, \\ y > -\sqrt{-x}, \\ y \ne \pm 1/2. \end{cases} \end{array}\right.$$

B.9. D:

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0, \quad y \le \dfrac{1}{x}. \\ x > 0, \quad \begin{cases} y \ge \dfrac{1}{x}, \\ y \ne \sqrt{x}. \end{cases} \end{array}\right.$$

B.10.

D: $x \in R, \quad x \ne 0,$

$y \le x.$

B.11. D: $0 \le x < 1,$

$-\sqrt{1-x^2} + 1 < y < \sqrt{1-x^2} + 1.$

B.12. D:

$x \in R, x \ne \pm 1,$

$y \in [-2; 2].$

B.13. D:

$$x > 0, \quad \begin{cases} 0 < y < 2x, \\ y \ne \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

В.14. D:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ \sqrt{x-1} \le y \le \sqrt{x+1}, \\ -\sqrt{x+1} \le y \le -\sqrt{x-1}. \end{cases}$$

В.15. D: $0 < x < 3$,

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} \le y < \sqrt{4-(x-2)^2}, \\ -\sqrt{4-(x-2)^2} < y \le -\sqrt{x}. \end{array} \right.$$

Задача 2

Исследовать методом сечений и построить поверхности:

В.1. а) $z = \dfrac{4}{1+x^2+y^2}$; б) $x-3 = \dfrac{(z-2)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{2}$.

В.2. а) $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $\dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$.

В.3. а) $z = \dfrac{1}{4-x^2-y^2}$; б) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y+2)^2 = \dfrac{(z+1)^2}{9}$.

В.4. а) $z = \ln(x^2+y^2)$; б) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(z-1)^2}{2} = \dfrac{y^2}{9}$.

В.5. а) $z = \dfrac{1}{\ln(4+x^2+y^2)}$; б) $\dfrac{(y+2)^2}{9} + z^2 = (x-3)^2 + 1$.

В.6. а) $z = \sin\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \le \pi^2$; б) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{(z+2)^2}{9} = -1$.

В.7. а) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$; б) $(x-1)^2 + (z+2)^2 = (y-1)^2$.

В.8. а) $z = \ln(4x^2+y^2)$; б) $\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{(y-3)^2}{25} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

В.9. а) $z = -\dfrac{2}{4+x^2+y^2}$; б) $\dfrac{(x-4)^2}{9} - \dfrac{(y+2)^2}{25} - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

В.10. а) $z = 2^{1+\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = z-3$.

В.11. а) $z = \arcsin\sqrt{x^2 + y^2}$; б) $(z-3)^2 - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 4$.

В.12. а) $z = \arccos\sqrt{x^2 + y^2}$; б) $(y-3)^2 + 4(z-1)^2 = 1 - y^2$.

В.13. а) $z = arctg\sqrt{x^2 + y^2}$; б) $x^2 = 4(y-1)^2 + 9(z-1)^2$.

В.14. а) $z = \left| \ln(x^2 + y^2) \right|$; б) $(y-3)^2 = (x+2)^2 + 4z^2$.

В.15. а) $z = \sqrt{2\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2}$; б) $\dfrac{(x-1)^2}{4} = 4(z-1)$.

Ответы к задаче 2 (п.б)

В.1. Гиперболический параболоид.
В.2. Гиперболический цилиндр.
В.3. Конус.
В.4. Конус.
В.5. Однополостный гиперболоид.
В.6. Двуполостный гиперболоид.
В.7. Конус.
В.8. Однополостный гиперболоид.
В.9. Двуполостный гиперболоид.
В.10. Эллиптический параболоид.
В.11. Гиперболический цилиндр.
В.12. Эллипсоид.
В.13. Конус.
В.14. Конус.
В.15. Параболический цилиндр.

Задача 3

Вычислить частные производные первого порядка от следующих функций:

В.1. $z = \dfrac{x}{y^2}\ln y$. В.2. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

В.3. $z = x\sin(x + y)$. В.4. $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

В.5. $z = \sin^2(3x + y)$. В.6. $z = \ln(e^x + e^{3y})$.

В.7. $z = \arcsin\dfrac{x+2}{y+1}$. В.8. $z = arctg\dfrac{4y+2}{3x+1}$.

В.9. $z = tg\dfrac{x^2}{y}$. В.10. $z = x^y$.

В.11. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$. В.12. $z=y^{\ln x}$.

В.13. $z=\dfrac{1}{x}\cos y^2$. В.14. $z=e^{xe^y}$. В.15. $z=\ln(e^{3x}+e^{2y})$.

Ответы к задаче 3

В.1. $z'_x=\dfrac{\ln y}{y^2},\quad z'_y=\dfrac{x}{y^3}\left(\ln\dfrac{1}{y^2}+1\right)$.

В.2. $z'_x=\dfrac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\quad z'_y=\dfrac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

В.3. $z'_x=\sin(x+y)+x\cos(x+y),\quad z'_y=x\cos(x+y)$.

В.4. $z'_x=\dfrac{-2x\sin x^2}{y},\quad z'_y=-\dfrac{\cos x^2}{y^2}$.

В.5. $z'_x=3\sin 2(3x+y),\quad z'_y=\sin 2(3x+y)$.

В.6. $z'_x=\dfrac{e^x}{e^x+e^{3y}},\quad z'_y=\dfrac{3e^{3y}}{e^x+e^{3y}}$.

В.7. $z'_x=\dfrac{1}{(y+1)\sqrt{1-\left(\dfrac{x+2}{y+1}\right)^2}},\quad z'_y=\dfrac{-(x+2)}{(y+1)^2\sqrt{1-\left(\dfrac{x+2}{y+1}\right)^2}}$.

В.8. $z'_x=\dfrac{-3(4y+2)}{(3x+1)^2+(4y+2)^2},\quad z'_y=\dfrac{4(3x+1)}{(3x+1)^2+(4y+2)^2}$.

В.9. $z'_x=\dfrac{2x}{y\cos^2\frac{x^2}{y}},\quad z'_y=\dfrac{-x^2}{y^2\cos^2\frac{x^2}{y}}$.

В.10. $z'_x=yx^{y-1},\quad z'_y=x^y\ln x$.

В.11. $z'_x=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2},\quad z'_y=\dfrac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$.

В.12. $z'_x=\dfrac{1}{x}y^{\ln x},\quad z'_y=y^{\ln x/e}\ \ln x$.

В.13. $z'_x=-\dfrac{\cos y^2}{x^2},\quad z'_y=\dfrac{-2y\sin y^2}{x}$.

В.14. $z'_x=e^{xe^y+y},\quad z'_y=xe^{xe^y+y}$.

В.15. $z'_x = \dfrac{3e^{3x}}{e^{3x} + e^{2y}}, \quad z'_y = \dfrac{2e^{2y}}{e^{3x} + e^{2y}}$.

Задача 4

Найти полный дифференциал функции $z = f(x, y)$:

В.1. $z = xarctg\dfrac{x}{y}$.

В.2. $z = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + yx^3}{y}}$.

В.3. $z = ye^{x/y}$.

В.4. $z = x\ln\cos(x\sqrt{y})$.

В.5. $z = \dfrac{xarctgy}{1 + x^2}$.

В.6. $z = 2^x\left(arctg\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)$.

В.7. $z = y^2\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

В.8. $z = y\arccos(x\sqrt{y})$.

В.9. $z = \sqrt{\dfrac{xy^3 + x}{y^2}}$.

В.10. $z = 3^{y/x}\cos^2 y$.

В.11. $z = y\arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

В.12. $z = \ln\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

В.13. $z = \sin + ye^{x/y}$.

В.14. $z = \sqrt{y}2^{x/y}$.

В.15. $z = \sqrt{\cos y}e^{x/y}$.

Ответы к задаче 4

В.1. $dz = \left(arctg\dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)dx - \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}dy$.

В.2. $dz = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{y}}dx - \dfrac{x}{3y^2\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^2}}dy$.

В.3. $dz = e^{x/y}dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy$.

В.4. $dz = \left[\ln\cos(x\sqrt{y}) - x\sqrt{y}tg(x\sqrt{y})\right]dx - \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}tg(x\sqrt{y})dy$.

В.5. $dz = \dfrac{(1 - x^2)arctgy}{(1 + x^2)^2}dx + \dfrac{x}{(1 + x^2)(1 + y^2)}dy$.

B.6. $dz = 2^x\left((\ln 2)arctg\dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{y+x^2}\right)dx - \dfrac{x2^{x-1}}{\sqrt{y}(y+x^2)}dy$.

B.7. $dz = -y\sin\dfrac{x}{y}dx + \left(2y\cos\dfrac{x}{y} + x\sin\dfrac{x}{y}\right)dy$.

B.8. $dz = \dfrac{-\sqrt{y^3}}{\sqrt{1-x^2y}}dx + \left(\arccos(x\sqrt{y}) - \dfrac{x\sqrt{y}}{2\sqrt{1-x^2y}}\right)dy$.

B.9. $dz = \dfrac{y^3+1}{2y^2\sqrt{xy+\dfrac{x}{y^2}}}dx + \dfrac{x(y^3-2)}{2y^3\sqrt{xy+\dfrac{x}{y^2}}}dy$.

B.10. $dz = \dfrac{-\ln 3\cdot 3^{y/x}y\cos^2 y}{x^2}dx - 3^{y/x}\sin 2y dy$.

B.11. $dz = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}}dx + \left(\arcsin\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}}\right)dy$.

B.12. $dz = -\dfrac{1}{y}tg\dfrac{x}{y}dx + \dfrac{x}{y^2}tg\dfrac{x}{y}dy$.

B.13. $dz = \left(\cos x + e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy$.

B.14. $dz = \dfrac{\ln 2}{\sqrt{y}}2^{x/y}dx + \dfrac{2^{x/y}(y - x\ln 4)}{2\sqrt{y^3}}dy$.

B.15. $dz = \sqrt{\cos y}e^{x/y}\dfrac{1}{y}dx - \sqrt{\cos y}e^{x/y}\left(\dfrac{1}{2}tgy + \dfrac{x}{y^2}\right)dy$.

Задача 5

Вычислить приближенно:

B.1. $\sqrt[3]{0{,}95^3 + 0{,}17^4\cdot 0{,}79^2}$.

B.2. $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}98^3 + 0{,}12^3\cdot 0{,}81^2}}$.

B.3. $\ln\left(0{,}97^3 - 0{,}21^2\cdot 0{,}92^3\right)$.

B.4. $arctg(0{,}79^2 + 0{,}11^3\cdot 0{,}92^3)$.

B.5. $\sin(0{,}05^2 + 0{,}17\cdot 0{,}87^3)$.

B.6. $\dfrac{1}{0{,}97^3\cdot 0{,}12^2\cdot 0{,}87^2}$.

B.7. $\sin 0{,}15^3 - 0{,}21\cdot 0{,}78^2$.

B.8. $arctg(0{,}88^3 - 0{,}12^2\cdot 0{,}94^3)$.

В.9. $\sqrt{0{,}95^2 - 0{,}17^3 \cdot 0{,}79^2}$. В.10. $\arccos(0{,}12^3 - 0{,}11 \cdot 0{,}92^3)$.

В.11. $\sin^2(0{,}12^3 - 0{,}7 \cdot 0{,}89^2)$. В.12. $\sin^2(0{,}15^3 - 0{,}21 \cdot 0{,}78)$.

В.13. $\sqrt{0{,}98^2 - 0{,}12^3 \cdot 0{,}87}$. В.14. $\ln(0{,}84^5 + 0{,}11^3 \cdot 0{,}93)$.

В.15. $\cos^2(0{,}09^2 - 0{,}12 \cdot 0{,}87^2)$.

Ответы к задаче 5

В.1.	0,95	В.2.	1,03	В.3.	–0,09	В.4.	0,55
В.5.	0,17	В.6.	93,42	В.7.	–0,13	В.8.	0,60
В.9.	0,95	В.10.	1,66	В.11.	0,24	В.12.	0,00
В.13.	0,98	В.14.	–0,80	В.15.	1,00.		

Задача 6

Написать формулу для вычисления $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если :

В.1. $z = f(u, v, w)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x)$, $w = \eta(x, y)$.

В.2. $z = f(u, v, w, x)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, $w = \eta(y)$.

В.3. $z = f(u, v, w)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(y)$, $w = \eta(x, y)$.

В.4. $z = f(u, v, x, y)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

В.5. $z = f(u, t, x, y)$, $u = \varphi(x, y, t)$.

В.6. $z = f(u, v, t, x)$, $u = \varphi(x, t)$, $v = \psi(y, t)$.

В.7. $z = f(u, v, t, x)$, $u = \varphi(y, t)$, $v = \psi(x)$.

В.8. $z = f(u, v, t, y)$, $u = \varphi(y, x)$, $v = \psi(x, y)$.

В.9. $z = f(u, v, t, y)$, $u = \varphi(y, t, x)$, $v = \psi(x, t)$.

В.10. $z = f(u, v, t, y)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(t, y)$.

В.11. $z = f(u, t, y)$, $u = \varphi(x, y, t)$.

В.12. $z = f(u, t, x)$, $u = \varphi(x, t)$.

В.13. $z = f(u, v, x, y)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(y)$.

В.14. $z = f(u, v, w, y)$, $u = \varphi(y, t)$, $v = \psi(x, t)$, $w = \eta(x)$.

В.15. $z = f(u, v, w, t)$, $u = \varphi(x, t)$, $v = \psi(x, t)$.

Ответы к задаче 6

В.1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{d\psi}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x}$.

В.2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

В.3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x}$. В.4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

В.5. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

В.6. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

В.7. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{d\psi}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

В.8. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$.

В.9. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$.

В.10. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{d\varphi}{dx}$.

В.11. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$.

В.12. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

В.13. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

В.14. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{d\eta}{dx}$.

В.15. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x}$.

Задача 7

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если :

В.1. $z = \dfrac{u}{v-1}$, $\quad u = \sqrt{x \sin y}, \quad v = ch(x-y)$.

В.2. $z = ctgu^2 + 2v$, $\quad u = x^{y+1}, \quad v = \dfrac{x}{y-3}$.

В.3. $z = \sin(u + \sqrt{u-v})$, $\quad u = \cos\dfrac{x}{y}, \quad v = \ln(x + y^2)$.

В.4. $z = (11u + \sqrt{uv})\, v^5$, $\quad u = y^{x-2}, \quad v = \ln\dfrac{1}{x}$.

В.5. $z = \ln(uv + \cos^2 u)$, $\quad u = \sqrt{xy}, \quad v = \cos\dfrac{1}{x-y}$.

В.6. $z = tg\ln\left(u + \dfrac{6}{v}u\right)$, $\quad u = x^2 y, \quad v = \ln\dfrac{x}{y}$.

В.7. $z = \arccos\sqrt{2 - uv}$, $\quad u = 7^{xy}, \quad v = \sin\dfrac{1}{y}$.

В.8. $z = uv^2 + \sin\dfrac{v}{u}$, $\quad u = \dfrac{y}{\cos^2 x}, \quad v = \dfrac{y-2}{x}$.

В.9. $z = \dfrac{v}{u} + \sqrt{u - 6v}$, $\quad u = sh\sqrt{xy}, \quad v = 6x - \dfrac{2}{y}$.

В.10. $z = \ln\sin\sqrt{u\cos v}$, $\quad u = 6x, \quad v = \dfrac{y+3}{x-1}$.

В.11. $z = u^{v+1} + v\ln u$, $\quad u = x + 3y, \quad v = \sin\dfrac{x}{y}$.

В.12. $z = \arcsin(u - v) + 6u, \quad u = \dfrac{1 + x}{\sin^2 y}, \quad v = 2^{y+1}.$

В.13. $z = arctg(u^2 + v), \quad u = 6^{x-y}, \quad v = \ln\dfrac{1}{x-2}.$

В.14. $z = \sqrt{1 + u^2 + u\,v}, \quad u = sh\dfrac{x}{y}, \quad v = \dfrac{xy}{x+y}.$

В.15. $z = \cos\sqrt{u^2 + v}, \quad u = x^{y+2}, \quad v = y^5 - 10.$

Ответы к задаче 7

В.1. $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v-1}\cdot\frac{\sin y}{2\sqrt{x\sin y}} - \frac{u}{(v-1)^2}sh(x-y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{v-1}\cdot\frac{x\cos y}{2\sqrt{x\sin y}} + \frac{u}{(v-1)^2}sh(x-y).$$

В.2. $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2u}{\sin^2 u^2}\cdot(y+1)x^y + \frac{2}{y-3};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2u}{\sin^2 u^2}x^{y+1}\ln x - \frac{2x}{(y-3)^2}.$$

В.3. $$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(u + \sqrt{u-v})\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{u-v}}\right)\frac{-\sin\frac{x}{y}}{y} + \cos(u+\sqrt{u-v})\left(\frac{-1}{2\sqrt{u-v}}\right)\frac{1}{x+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(u + \sqrt{u-v})\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{u-v}}\right)\frac{x\sin\frac{x}{y}}{y^2} + \cos(u+\sqrt{u-v})\left(\frac{-1}{\sqrt{u-v}}\right)\frac{y}{x+y^2}.$$

В.4. $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(11 + \frac{v}{2\sqrt{u\,v}}\right)v^5(\ln y)y^{x-2} - \frac{1}{x}v^4\left(\frac{u\,v}{2\sqrt{u\,v}} + 5\,(11u + \sqrt{u\,v})\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(11 + \frac{v}{2\sqrt{u\,v}}\right)v^5(x-2)y^{x-3}.$$

В.5. $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v - \sin 2u}{uv + \cos^2 u}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xy}} + \frac{u}{uv + \cos^2 u}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x-y}}{(x-y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v - \sin 2u}{uv + \cos^2 u}\cdot\frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{u}{uv + \cos^2 u}\cdot\frac{-\sin\frac{1}{x-y}}{(x-y)^2}.$$

В.6. $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\left(\cos^2\ln\left(u + \frac{6}{v}u\right)\right)\left(u + \frac{6u}{v}\right)}\cdot\left(2xy\left(1 + \frac{6}{v}\right) - \frac{6u}{xv^2}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\left(\cos^2 \ln\left(u+\frac{6}{v}u\right)\right)\left(u+\frac{6u}{v}\right)}\cdot\left(\left(1+\frac{6}{v}\right)x^2+\frac{6u}{yv^2}\right).$$

B.7. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v\cdot y\cdot 7^{xy}\cdot\ln 7}{2\sqrt{u\cdot v-1}\cdot\sqrt{2-u\cdot v}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{uv-1}\cdot\sqrt{2-uv}}\cdot\left(vx\cdot 7^{xy}\cdot\ln 7-\frac{u\cdot\cos\frac{1}{y}}{y^2}\right).$$

B.8. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(v^2-\frac{v\cdot\cos\frac{v}{u}}{u^2}\right)\cdot\frac{y\cdot\sin 2x}{\cos^4 x}+\left(2uv+\frac{\cos\left(\frac{v}{u}\right)}{u}\right)\cdot\frac{2-y}{x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(v^2-\frac{v\cdot\cos\frac{v}{u}}{u^2}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\left(2uv+\frac{\cos\frac{v}{u}}{u}\right)\cdot\frac{1}{x}.$$

B.9. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{v}{u^2}+\frac{1}{2\sqrt{u-6v}}\right)\cdot\frac{y\cdot ch\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}+\left(\frac{1}{u}-\frac{3}{\sqrt{u-6v}}\right)\cdot 6;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(-\frac{v}{u^2}+\frac{1}{2\sqrt{u-6v}}\right)\cdot\frac{x\cdot ch\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}+\left(\frac{1}{u}-\frac{3}{\sqrt{u-6v}}\right)\cdot\frac{2}{y^2}.$$

B.10. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(ctg\sqrt{u\cos v}\right)\cdot\sqrt{\frac{\cos v}{u}}\cdot(6-utgv);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{utgv\cdot\sin v}\cdot ctg\sqrt{u\cos v}}{2(1-x)}.$$

B.11. $$\frac{\partial z}{\partial x}=(v+1)u^v+\frac{v}{u}+\ln u\left(u^{v+1}+1\right)\frac{\cos\frac{x}{y}}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left((v+1)u^v+\frac{v}{u}\right)3-\ln u\left(u^{v+1}+1\right)\frac{x\cos\frac{x}{y}}{y^2}.$$

B.12. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-(u-v)^2}}+6\right)\frac{1}{\sin^2 y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-(u-v)^2}}+6\right)\frac{-(1+x)\sin 2y}{\sin^4 y}-\frac{1}{\sqrt{1-(u-v)^2}}\cdot 2^{y+1}\cdot\ln 2.$$

B.13. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(u^2+v)^2}\cdot\left(2u\cdot 6^{x-y}\cdot\ln 6+x-2\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2u\cdot 6^{x-y}\ln 6}{1+(u^2+v)^2}.$$

B.14. $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{1+u^2+uv}}\cdot\left(\frac{(2u+v)\cdot ch\frac{x}{y}}{y}+\frac{uy^2}{(x+y)^2}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{1+u^2+uv}}\cdot\left(\frac{-x(2u+v)\cdot ch\frac{x}{y}}{y^2}+\frac{ux^2}{(x+y)^2}\right).$$

В.15. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\sin\sqrt{u^2+v}\cdot u(y+2)x^{y+1}}{\sqrt{u^2+v}}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\sin\sqrt{u^2+v}\cdot}{2\sqrt{u^2+v}}\left(2ux^{y+2}\cdot\ln x+5y^4\right).$$

Задача 8

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к данной поверхности в указанной точке А.

В.1. $4x^3+y^3-z^2+3xyz=0,\quad A(1,0,2)$.

В.2. $x^y+y^z-3xyz=2,\quad A(1,2,0)$.

В.3. $3z^2=4e^{x+y}-3xy^2z^3+2,\quad A(1,-1,1)$.

В.4. $x^2yz^3+4y^2=e^z+15,\quad A(1,2,0)$.

В.5. $4z^2=x^2y^3+\cos(x+y^2)+14,\quad A(-1,1,2)$.

В.6. $4yz^3-\frac{z}{x^2-y}=2z^2,\quad A(2,3,1)$.

В.7. $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4xz^3+1=0,\quad A(1,1,1)$.

В.8. $\sqrt{x^2+y^3+z^2}+x-y+z^2=0,\quad A(-1,2,0)$.

В.9. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z-4,\quad A(2,3,6)$.

В.10. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=xyz,\quad A(1,4,1)$.

В.11. $arctgzx+\frac{y}{z}=xy+\frac{\pi}{4},\quad A(3,2,\frac{1}{3})$.

В.12. $x^3+4y^2=tg(y^2+z),\quad A(1,0,\frac{\pi}{4})$.

В.13. $z^2=x\ln(1+x+y+z^2)+2z,\quad A(-1,-3,2)$.

В.14. $5y^3-xyz^2=e^z+x^2,\quad A(-2,1,0)$.

В.15. $\sin^2(x^2+y^2+z^2)=xy^2+yz^2+1,\quad A(0,\sqrt{\frac{\pi}{4}},0)$.

Ответы к задаче 8

В.1. $12(x-1)+6y-4(z-2)=0$; $\quad\frac{x-1}{12}=\frac{y}{6}=\frac{z-2}{-4}$.

В.2. $2(x-1)+(\ln 2-6)z=0$; $\quad\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{\ln 2-6}$.

В.3. $-1(x-1)-10(y+1)+15(z-1)=0$; $\quad\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{-10}=\frac{z-1}{15}$.

В.4. $16(y-2)-z=0$; $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{16}=\frac{z}{-1}$.

В.5. $2(x+1)-3(y-1)+16(z-2)=0$; $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{16}$.

В.6. $4(x-2)+4(y-1)=0$; $\frac{x-2}{4}=\frac{x-3}{0}=\frac{y-1}{4}$.

В.7. $12(x-1)-8(y-1)-8(z-1)=0$; $\frac{x-1}{12}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-1}{-8}$.

В.8. $\frac{2}{3}(x+1)+(x-2)=0$; $\frac{x+1}{2/3}=\frac{x-2}{1}=\frac{z}{0}$.

В.9. $-\frac{5}{7}(x-2)-\frac{4}{7}(y-3)-\frac{1}{7}(z-6)=0$; $\frac{x-2}{-5/7}=\frac{y-3}{-4/7}=\frac{z-6}{-1/7}$.

В.10. $-\frac{7}{2}(x-1)-\frac{3}{4}(y-4)-\frac{7}{2}(z-1)=0$; $\frac{x-1}{-7/2}=\frac{y-4}{-3/4}=\frac{z-1}{-7/2}$.

В.11. $-\frac{11}{6}(x-3)-\frac{33}{2}(z-1/3)=0$; $\frac{x-3}{-11/6}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1/3}{-33/2}$.

В.12. $3(x-1)-2(z-\pi/4)=0$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z-\pi/4}{-2}$.

В.13. $(x+1)+(y+3)+6(z-2)=0$; $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{6}$.

В.14. $4(x+2)+15(y-1)-z=0$; $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{15}=\frac{z}{-1}$.

В.15. $-\frac{\pi}{2}x=0$; $\frac{x}{-\pi/2}=\frac{y-\sqrt{\pi/2}}{0}=\frac{z}{0}$.

Задача 9

Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $z=f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$.

В.1. $z=x^3-y^3+2xy^2+3x^2y+2x^2-y-3,\quad M_0(1,2)$.

В.2. $z=x^3-3xy^2-x^2y+y^2-x+1,\quad M_0(2,1)$.

В.3. $z=y^3+3xy^2+x^2y+x^2+x-2,\quad M_0(1,2)$.

В.4. $z=2x^3+y^3-x^2y-x^2-y^2+2y+3,\quad M_0(-1,2)$.

В.5. $z=x^3+y^3+xy^2-2y^2+2x+y,\quad M_0(2,-1)$.

В.6. $z=x^3-y^3+x^2y+2x^2+3y^2+3,\quad M_0(-1,-1)$.

В.7. $z=-x^3-3xy^2+x^2y+2y^2+y-3,\quad M_0(-1,-2)$.

В.8. $z=-y^3+3xy^2+3x^2y+x^2+x-3,\quad M_0(-2,1)$.

В.9. $z=x^3+y^3+2xy^2-2x^2y+x^2-y^2+x+y-2,\quad M_0(0,1)$.

В.10. $z=x^3+2xy^2-x^2y+x^2+2x-y+5,\quad M_0(1,0)$.

В.11. $z = 3x^3 - y^3 + 3xy^2 - x^2y + 3y^2 - x - 3, \quad M_0(-2,-2)$.

В.12. $z = -3y^3 - 3x^2y - x^2 + 3y^2 - 2x + y - 5, \quad M_0(1,1)$.

В.13. $z = 2x^3 + y^3 + 2xy^2 - x^2 + y^2 - y, \quad M_0(0,-1)$.

В.14. $z = -x^3 - 2y^3 + xy^2 - 2y^2 - 2y + 2, \quad M_0(3,-1)$.

В.15. $z = 2x^3 - y^3 + xy^2 - x^2y + 2x^2 - 3y - 2, \quad M_0(1,-3)$.

Ответы к задаче 9

В.1. $$z(x,y) = 4 + 27(x-1) - 2(y-2) + \\ + \frac{1}{2!}\left(22(x-1)^2 + 28\cdot(x-1)(y-2) - 8(y-2)^2\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(6(x-1)^3 + 18(x-1)^2(y-2) + 12(x-1)(y-2)^2 - 6(y-2)^3\right).$$

В.2. $$z(x,y) = -2 + (4(x-2) - 14(y-1)) + \\ + \frac{1}{2!}\left(10(x-2)^2 - 20(x-2)(y-1) - 10(y-1)^2\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(6(x-2)^3 - 6(x-2)^2(y-1) - 18(x-2)(y-1)^2\right).$$

В.3. $$z(x,y) = 22 + (19(x-1) + 25(y-2)) + \\ + \frac{1}{2!}\left(6(x-1)^2 + 28(x-1)(y-2) + 18(y-2)^2\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(6(y-2)^3 + 6(x-1)^2(y-2) + 18(x-1)(y-2)^2\right).$$

В.4. $$z(x,y) = 6 + (12(x+1) + 9(y-2)) + \\ + \frac{1}{2!}\left(18(x+1)^2 + 4(x+1)(y-2) + 10(y-2)^2\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(12(x+1)^3 - 6(x+1)^2(y-2) + 6(y-2)^3\right).$$

В.5. $$z(x,y) = 10 + 15(x-2) + 4(y+1) + \\ + \frac{1}{2!}\left(12(x-2)^2 - 4(x-2)(y+1) - 6(y+1)^2\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(6(x-2)^3 + 6(x-2)(y+1)^2 + 6(y+1)^3\right).$$

В.6. $$z(x,y) = 7 + (x+1) - 8(y+1) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(-4(x+1)^2-4(x+1)(y+1)+12(y+1)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(6(x+1)^3+6(x+1)^2(y+1)-6(y+1)^3\right).$$

В.7. $$z(x,y)=14+(-11(x+1)-18(y+2))+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(2(x+1)^2+20(x+1)(y+2)+10(y+2)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(-6(x+1)^3+6(x+1)^2(y+2)-18(x+1)(y+2)^2\right).$$

В.8. $$z(x,y)=4+(-12(x+2)-3(y-1))+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(8(x+2)^2-12(x+2)(y-1)-18(y-1)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(18(x+2)^2(y-1)+18(x+2)(y-1)^2-6(y-1)^3\right).$$

В.9. $$z(x,y)=-1+(3x+2(y-1))+\frac{1}{2!}\left(-2x^2+8x(y-1)+4(y-1)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(6x^3-12x^2(y-1)+12x(y-1)^2+6(y-1)^3\right).$$

В.10. $$z(x,y)=9+(7(x-1)-2y)+\frac{1}{2!}\left(8(x-1)^2-4(x-1)y+4y^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(6(x-1)^3-6(x-1)^2y+12(x-1)y^2\right).$$

В.11. $$z(x,y)=-21+(39(x+2)-4(y+2))+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(-32(x+2)^2-16(x+2)(y+2)+6(y+2)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(18(x+2)^3-6(x+2)^2(y+2)+18(x+2)(y+2)^2-6(y+2)^3\right).$$

В.12. $$z(x,y)=-10+(-10(x-1)-5(y-1))+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(-8(x-1)^2-12(x-1)(y-1)-12(y-1)^2\right)+\frac{1}{3!}\left(3(x-1)^2(y-1)-18(y-1)^3\right).$$

В.13. $$z(x,y)=1+2x+\frac{1}{2!}\left(-2x^2-8x(y+1)-4(y+1)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(12x^3+12x(y+1)^2+6(y+1)^3\right).$$

В.14. $$z(x,y)=-36+\left(-26(x-3)-10(y+1)\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(-18(x-3)^2-4(x-3)(y+1)+14(y+1)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(-6(x-3)^3+6(x-3)(y+1)^2-12(y+1)^3\right).$$

В.15. $$z(x,y)=50+\left(25(x-1)-37(y+3)\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(22(x-1)^2-16(x-1)(y+3)+20(y+3)^2\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(12(x-1)^3-6(x-1)^2(y+3)+6(x-1)(y+3)^2-6(y+3)^3\right).$$

Задача 10

Исследовать по определению на экстремум функцию $z=z(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$:

В.1. $z=(x+3)^6-(y+1)^2$, $M_0(-3,-1)$.

В.2. $z=1-(x-2)^4-(y-3)^4$, $M_0(2,3)$.

В.3. $z=(y+2)^4+(\cos x-1)^4$, $M_0(0,-2)$.

В.4. $z=1+(2^x-1)^4-y^4$, $M_0(0,0)$.

В.5. $z=(x+1)^4+y^4$, $M_0(-1,0)$.

В.6. $z=x^4-\ln^4 y$, $M_0(0,1)$.

В.7. $z=arctg^4 x+y^4-3$, $M_0(0,0)$.

В.8. $z=-(\cos x-1)^4+(y-2)^4-1$, $M_0(0,2)$.

В.9. $z=1-(e^x-1)^4-(y-2)^4$, $M_0(0,2)$.

В.10. $z=(\cos x-1)^4+(y-4)^4$, $M_0(0,4)$.

В.11. $z=tg^4 x-(y-2)^4$, $M_0(0,2)$.

В.12. $z=(x-2)^4+(y-3)^4$, $M_0(2,3)$.

В.13. $z=1-\sin^4 x-(y-3)^4$, $M_0(0,3)$.

В.14. $z=(e^x-e)^4+y^2$, $M_0(1,0)$.

В.15. $z=\sin^4 y-(x-1)^4$, $M_0(1,0)$.

Ответы к задаче 10

В.1. Точка локального максимума.

В.2. Точка локального максимума.
В.3. Точка локального минимума.
В.4. Не является точкой локального экстремума.
В.5. Точка локального минимума.
В.6. Не является точкой локального экстремума.
В.7. Точка локального минимума.
В.8. Не является точкой локального экстремума.
В.9. Точка локального максимума.
В.10. Точка локального минимума.
В.11. Не является точкой локального экстремума.
В.12. Точка локального минимума.
В.13. Точка локального максимума.
В.14. Точка локального минимума.
В.15. Не является точкой локального экстремума.

Задача 11

Найти экстремумы функций:

В.1. $z(x,y) = 2y^3 + x^2 + 6xy + 18y^2 + 18x + 54y + 54$.

В.2. $z(x,y) = 3y^3 - 2x^2 - 12xy + 27y^2 - 36x + 81y - 15$.

В.3. $z(x,y) = -2y^3 - x^2 - 6xy - 18y^2 - 12x - 36y + 9$.

В.4. $z(x,y) = -3x^3 + 81x^2 - 12xy - 2y^2 - 93x + 32y + 4$.

В.5. $z(x,y) = -y^3 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 + 3y + 2$.

В.6. $z(x,y) = -2x^3 + 6x^2 - 6xy - y^2 + 8y - 1$.

В.7. $z(x,y) = -2y^3 + x^2 + 6xy + 12y^2 - 14x - 30y - 3$.

В.8. $z(x,y) = y^3 - 3x^2 - 6xy + 6y^2 - 6x + 18y + 17$.

В.9. $z(x,y) = 6y^3 + x^2 + 6xy - 18y^2 - 8x + 12y + 1$.

В.10. $z(x,y) = 3y^3 - x^2 - 6xy - 2x - 6y + 1$.

В.11. $z(x,y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 + 12x + 12y + 5$.

В.12. $z(x,y) = y^3 + 2x^2 + 12xy + 6y^2 + 16x - 12y - 8$.

В.13. $z(x,y) = -3x^3 + 9x^2 - 6xy - y^2 - 15x + 4y - 11$.

В.14. $z(x,y) = -y^3 + 2x^2 + 12xy + 4x + 12y + 2$.

В.15. $z(x,y) = 3y^3 + x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x - 3y - 5$.

Ответы к задаче 11

В.1. (-9, 0) – точка локального минимума.
В.2. (12, -7) – точка локального максимума.

В.3. (-6, 0) – точка локального максимума.
В.4. (21, -55) – точка локального максимума.
В.5. (-1, 1) – точка локального максимума.
В.6. (4, -8) – точка локального максимума.
В.7. (10, -1) – точка локального минимума.
В.8. (3, -4) – точка локального максимума.
В.9. (-2, 2) – точка локального минимума.
В.10. (5, -2) – точка локального максимума.
В.11. (-1, 3) – точка локального максимума.
В.12. (-34, 10) – точка локального минимума.
В.13. (3, -7) – точка локального максимума.
В.14. (35, -12) – точка локального минимума.
В.15. (-4, 1) – точка локального минимума.

Задача 12

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в треугольнике с вершинами в точках A, B, C.

В.1. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$; $A(0,0)$; $B(0,2)$; $C(4,0)$.

В.2. $z = 7 - 4x^2 y(2 + x + y)$; $A(-3,0)$; $B(0,-3)$; $C(0,0)$.

В.3. $z = -2x^2 + y^2 - 4xy + 6y + 14$; $A(0,-6)$; $B(3,0)$; $C(0,0)$.

В.4. $z = x^2 + y^2 + 6x - 4y + 2$; $A(-2,1)$; $B(1,1)$; $C(1,4)$.

В.5. $z = 2x^2 - xy + y^2 - 2x - 3y + 2$; $A(0,5)$; $B(5,0)$; $C(0,0)$.

В.6. $z = 2x^2 - xy + y^2 + 2x + 3y + 2$; $A(0,-5)$; $B(0,0)$; $C(-5,0)$.

В.7. $z = x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1$; $A(-3,0)$; $B(0,3)$; $C(0,0)$.

В.8. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy + 6x + 3$; $A(0,0)$; $B(-4,0)$; $C(0,-2)$.

В.9. $z = 1 - x^3 - y^3 - 3xy$; $A(0,0)$; $B(0,-3)$; $C(-3,0)$.

В.10. $z = x^2 + 2y^2 + xy - 3x + 2y$; $A(5,0)$; $B(0,-5)$; $C(0,0)$.

В.11. $z = -2y^2 + x^2 + 4xy + 4y - 4x - 2$; $A(0,-6)$; $B(3,0)$; $C(0,0)$.

В.12. $z = x^2 - 2y^2 - 4xy + 6x$; $A(0,0)$; $B(0,2)$; $C(-4,0)$.

В.13. $z = -2x^2 + y^2 + 4xy - 6y + 16$; $A(0,6)$; $B(3,0)$; $C(0,0)$.

В.14. $z = x^2 + y^2 - 6x - 4y - 5$; $A(0,3)$; $B(3,0)$; $C(0,0)$.

В.15. $z = -x^3 + y^3 + 3xy + 2$; $A(0,0)$; $B(-3,0)$; $C(0,3)$.

Ответы к задаче 12

В.1. $\max z = z(0,0) = -1$; $\min z = z(3,0) = -10$.

В.2. $\max z = z(-1,-1/2) = 8$; $\min z = z(-2,-1) = -9$.
В.3. $\max z = z(1,-4) = 20$; $\min z = z(3,0) = -4$.
В.4. $\max z = z(1,4) = 9$; $\min z = z(-2,1) = -9$.
В.5. $\max z = z(5,0) = 42$; $\min z = z(1,2) = -2$.
В.6. $\max z = z(-5,0) = 42$; $\min z = z(-1,-2) = -2$.
В.7. $\max z = z(0,0) = 1$; $\min z = z(-2,1) = -10$.
В.8. $\max z = z(0,0) = 3$; $\min z = z(-3,0) = -6$.
В.9. $\max z = z(0,-3) = z(-3,0) = 28$; $\min z = z(-1,-1) = 0$.
В.10. $\max z = z(0,-5) = 40$; $\min z = z(2,-1) = -4$.
В.11. $\max z = z(0,0) = -2$; $\min z = z(0,-6) = -98$.
В.12. $\max z = z(0,0) = 0$; $\min z = z(-3,0) = -9$.
В.13. $\max z = z(1,4) = 22$; $\min z = z(3,0) = -2$.
В.14. $\max z = z(0,0) = -5$; $\min z = z(2,1) = -16$.
В.15. $\max z = z(0,3) = z(-3,0) = 29$; $\min z = z(-1,1) = 1$.

Задача 13

На заданной плоскости найти точку, сумма квадратов расстояний которой до точек A и B наименьшая.

В.1. $3x - 2z = 0$; $A(-2,1,3)$; $B(3,-1,5)$.
В.2. $2y + 3z = 0$; $A(-3,5,2)$; $B(1,1,-2)$.
В.3. $3y + 2z = 0$; $A(-3,-5,-2)$; $B(1,1,2)$.
В.4. $2x - 3z = 0$; $A(2,-3,1)$; $B(6,3,1)$.
В.5. $3x - 2y = 0$; $A(2,1,3)$; $B(8,1,-1)$.
В.6. $2y + 3z = 0$; $A(1,-2,-3)$; $B(1,-4,3)$.
В.7. $3x + 2y = 0$; $A(-2,1,-3)$; $B(-8,1,1)$.
В.8. $3y + 2z = 0$; $A(1,0,-3)$; $B(1,4,3)$.
В.9. $2x - 3z = 0$; $A(-1,20,2)$; $B(-7,6,-4)$.
В.10. $3y + 2z = 0$; $A(2,-6,3)$; $B(4,2,-3)$.
В.11. $x + 3y = 0$; $A(1,-4,2)$; $B(-6,9,0)$.
В.12. $x + 3y = 0$; $A(2,2,4)$; $B(-8,0,6)$.
В.13. $3y + 2z = 0$; $A(11,0,-5)$; $B(3,-2,-8)$.
В.14. $3x - 2y = 0$; $A(0,2,5)$; $B(7,2,1)$.
В.15. $3x + 2y = 0$; $A(0,2,-5)$; $B(-7,2,-1)$.

Ответы к задаче 13

В.1. $M = (1,0,3/2)$. В.2. $M = \frac{1}{13}(-13,-18,27)$.

В.3. $M = \frac{1}{13}(-13,-8,12)$. В.4. $M = \frac{1}{13}(28,0,42)$.

В.5. $M = \frac{1}{9}(27,9,2)$. В.6. $M = \frac{1}{13}(13,-27,18)$.

В.7. $M = (-2,3,-1)$. В.8. $M = \frac{1}{13}(13,8,-12)$.

В.9. $M = \frac{1}{13}(-28,169,-42)$. В.10. $M = \frac{1}{13}(39,-8,12)$.

В.11. $M = (-3,1,1)$. В.12. $M = (-3,1,10)$.

В.13. $M = \frac{1}{26}(182,70,-105)$. В.14. $M = (2,3,3)$. В.15. $M = (-2,3,-3)$.

Задача 14

Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и заданной прямой:

В.1. $3x + 4y + 3 = 0$. В.2. $4x - 3y - 7 = 0$.

В.3. $3x - 4y - 5 = 0$. В.4. $\sqrt{3}x + y + 5 = 0$.

В.5. $\sqrt{5}x - 2y - 7 = 0$.

На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найти точку M_0, сумма квадратов расстояний от которой до заданных точек M_1 и M_2 была бы наименьшей:

В.6. $M_1(1,4,7)$ и $M_2(2,-2,8)$.

В.7. $M_1(4,14,-6)$ и $M_2(9,25,-20)$.

В.8. $M_1(-6,4,17)$ и $M_2(-2,-4,15)$.

В.9. $M_1(-2,13,-2)$ и $M_2(20,14,-7)$.

В.10. $M_1(2,3,16)$ и $M_2(10,3,5)$.

В.11. Найти параллелограмм данного периметра P, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

В.12. В полушар радиусом R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

В.13. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым сечением, поверхность которой равна S, имеет наибольшую вместимость?

В.14. Из всех треугольников данного периметра P найти тот, который имеет наибольшую площадь.

В.15. Найти прямоугольный параллелепипед данной поверхности S, имеющей наибольший объем.

Ответы к задаче 14

В.1. $\approx 0{,}5$. В.2. $\approx 0{,}9$. В.3. $\approx 0{,}9$. В.4. $\approx 2{,}1$. В.5. $\approx 2{,}1$.

В.6. $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right)$. В.7. $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

В.8. $M_0\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}, 0, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$. В.9. $M_0\left(\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

В.10. $M_0\left(\frac{4}{\sqrt{69}}, \frac{2}{\sqrt{69}}, \frac{7}{\sqrt{69}}\right)$.

В.11. Прямоугольник со сторонами $P/3$ и $P/6$.

В.12. Наибольший объем у куба с ребром $R/\sqrt{3}$.

В.13. Наибольшую вместимость имеет ванна с размерами $2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$; $2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

В.14. Наибольшую площадь имеет треугольник с длинами сторон $P/3$, $P/3$, $P/3$.

В.15. Наибольший объем имеет куб с ребром длиной $\sqrt{S/6}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 780 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
3. Индивидуальные домашние задания по высшей математике для студентов 1-го курса радиотехнических специальностей. Ч.III. – Мн.: МРТИ, 1990. – 58 с.
4. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление. – Мн.: Выш.шк., 1993. – 412 с.
5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. – СПб., 1994. – 496 с.

Св.план 2003, резерв

Учебное издание

Карпук Андрей Андреевич,
Жевняк Ростислав Михайлович,
Цегельник Владимир Владимирович и др.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
для студентов радиотехнических специальностей

В 10-ти частях

Часть 5

Функции многих переменных
(с решениями и комментариями)

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать 22.10.2004.		Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.	Печать ризографическая.	Усл.печ.л. 3,84.
Уч.-изд.л. 4,0.	Тираж 500 экз.	Заказ 82.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6