Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 3-х частях

Часть 3

Минск 2003

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73
С 23

Составители:
В.А. Липницкий, В.В. Цегельник, Н.И. Кобринец,
Т.С. Степанова

Сборник прикладных задач по высшей математике. В 3 ч. Ч. 3 /
С 23 Сост. В.А. Липницкий, В.В. Цегельник, Н.И. Кобринец, Т.С. Степанова. – Мн.: БГУИР, 2003. – 54 с.

Сборник составлен в соответствии с программой по высшей математике во втузах и содержит задачи по теории рядов, дифференциальным уравнениям, функциям комплексной переменной, кратным интегралам, теории поля, теории вероятностей.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73

Часть 1: Прикладные задачи по курсу высшей математики для студентов технических вузов. В 3 ч. Ч. 1 / Сост. В.А. Липницкий, В.А. Ранцевич, П.А. Самсонов и др. – Мн.: БГУИР, 1996. – 54 с.

Часть 2: Сборник прикладных задач по высшей математике для студентов вузов. В 3 ч. Ч. 2 / Сост. В.А. Липницкий, И.Н. Лущакова, Ж.А. Черняк. – Мн.: БГУИР, 1996. – 71 с.

Содержание

Введение

Третья часть сборника содержит задачи по следующим разделам высшей математики: ряды, дифференциальные уравнения, функции комплексной переменной, кратные интегралы, теория поля, теория вероятностей. Сюда включены задачи повышенной сложности, нестандартные задачи, многие из которых взяты с математических олимпиад различных уровней. Некоторые задачи снабжены указателем – отметкой о применении на той или иной олимпиаде. Например:

РТИ–80 – математическая олимпиада студентов Минского радиотехнического института (БГУИР) 1980 года;

РБ–93 – студенческая математическая олимпиада Республики Беларусь среди втузов 1993 года;

БПИ–86 – студенческая математическая олимпиада БПИ (или БГПА, или БНТУ) 1986 года.

1. РЯДЫ

1.1. (РТИ–80, БГУ–85) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами сходится. Доказать, что сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

1.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Будет ли сходиться ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^3$?

1.3. Привести пример ряда, сходящегося к данному числу $a \in R$.

1.4. (РТИ–81) Сходится ли числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$?

1.5. Последовательность $\{a_n\}$ состоит из различных натуральных чисел. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$?

1.6. (Украина–88) Доказать, что если в гармоническом ряде вычеркнуть слагаемые, в знаменателе которых содержится цифра 3, то получится ряд сходящийся, сумма которого меньше 25.

1.7. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, у которого $a_1 = a_2 = 1$ и для $n > 2$ $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

2.1. (БПИ–84) Доказать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

2.2. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n})$.

3.1. (РБ–86) Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$.

3.2. (БПИ–86, РТИ–87) Найти сумму всех дробей вида $\frac{1}{n^m}$; $n, m = 2, 3, \ldots$

4. Исследовать на сходимость числовые ряды:

4.1. (РБ–88) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{10}}{2^{\sqrt[3]{n}}}$. 4.2. (РБ–89) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

4.3. (БГПА–90). $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=1}^{n-1}\left(\dfrac{p}{n}\right)^{n}\right)$.

4.4. (БГПА–85) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-co\frac{\pi}{n}\right)\ln n$. 4.5. (РТИ–78) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2(\sin\frac{1}{n})}$.

4.6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. 4.7. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.

4.8. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$. 4.9. (РБ–94) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-3}{10^{\ln n}}$.

5. Найти область сходимости и сумму ряда:

5.1. (БГПА–87) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$. 5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

6.1. (РТИ–80) Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

6.2. (РТИ–88) Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{(4k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

7. (РТИ–82) Сколько первых слагаемых ряда $\sum\dfrac{1}{n^4}$ нужно взять, чтобы получить его сумму с точностью до 0,01?

8. Разложить по степеням x функцию:

8.1. (РТИ–81) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})}$.

8.2. (РТИ–83) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x+x^2)(1+x^3)}$.

9.1. (РТИ–90) Найти сумму первых ста коэффициентов разложения по степеням x функции $\dfrac{1}{1-x+x^2}$.

9.2. (РТИ–91) Найти коэффициент a_{10} в разложении в ряд Маклорена функции $y=\ln(1+x-2x^2)$.

10. Найти сумму ряда:

10.1. (БПИ–83, РТИ–89) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. 10.2. (РТИ–90) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}$.

10.3. (РТИ–84) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\dots$. 10.4. (РБ–90) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+4}$.

10.5. (РБ–85) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$. 10.6. (БГПА–92) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

10.7. (РБ–84; 94) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

11. При каких x сходится ряд:

11.1. (БГПА–88) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$. 11.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$.

11.3. $\sin x+\sin(\sin x)+\sin(\sin(\sin x))+\dots$.

12. Найти сумму тригонометрического ряда:

12.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 12.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

12.3. (РТИ–84) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n!}$.

13.1. (РБ–90) Вычислить $\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{x}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right)dx$.

14.1. (РБ–88) С помощью разложения в ряд по степеням x найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} xy''+y'+xy=0, \\ y(0)=a;\, y'(0)=0,\ где\ a\neq 0. \end{cases}$$

Определить область существования полученного решения.

Ответы, указания и решения к разд. 1

1.1. Для достаточно больших n $0 \le a_n < \frac{1}{n}$ (в противном случае ряд $\sum a_n$ был бы расходящимся). Тогда $\sqrt{a_n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Но тогда $\dfrac{\sqrt{a_n}}{n} < \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится. Значит, по признаку сравнения будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$.

1.2. а) Не всегда; б) не всегда. Пример: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_1 = 0$, $a_{3k-1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$, $a_{3k} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$, $a_{3k+1} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{k}}$.

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{n \cdot (n+1)}$. 1.4. Нет. 1.5. Нет.

2.1. $S_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 1 = \dfrac{3}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\to} -1$.

3.1. $1/4$.

3.2. $S = \left(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \ldots \right) + \left(\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots \right) + \ldots =$

$$= \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots\right) + \ldots = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

4.1. Сходится. 4.2. Сходится. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{4} < 1$.

4.4. Сходится. 4.5. Расходится.

4.6. Сходится, так как $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \dfrac{1}{n^{\ln \ln n}}$. 4.7. Сходится.

4.8. Расходится. 4.9. Сходится, поскольку $10^{\ln n} = n^{\ln 10} > n^2$.

5.1. $\dfrac{x - 2x^3}{(1-x)^2}$. 5.2. $\dfrac{x(3-x)}{(1-x)^3}$.

6.1. $Sh\, x$.

6.2. Убедиться, что ряд для $\dfrac{\sin x+\cos x+e^x}{2}$ совпадает с заданным.

8.1. $f(x)=\dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})}=\dfrac{1-x}{1-x^{32}}=$

$=(1-x)(1+x^{32}+x^{64}+\ldots)=1-x+x^{32}-x^{33}+x^{64}-x^{65}+\ldots$.

9.1. 2. 9.2. –102,5.

10.1. 1,5. Убедиться, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, $|x|<1$.

10.3. Воспользоваться методом Абеля: если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

11.1. Ряд нигде не сходится. Если бы ряд сходился в какой-то точке x, то тогда по необходимому условию сходимости $\cos nx\underset{n\to\infty}{\to}0$, в частности $\cos 2nx\underset{n\to\infty}{\to}0$. Тогда $\dfrac{1-\cos 2nx}{2}\underset{n\to\infty}{\to}\dfrac{1}{2}$, но, с другой стороны, $\dfrac{1-\cos 2nx}{2}=\sin^2 nx=1-\cos^2 nx\underset{n\to\infty}{\to}1$. Противоречие.

11.2. При $x=k\pi,\ k\in Z$.

11.3. При $x=0$. Пусть $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Найдем n, при котором $y=\sin(\ldots\sin x)>\dfrac{1}{n}$. Покажем, что тогда $\sin(\sin(\ldots\sin x)>\dfrac{1}{n+1}$. Это будет означать, что в точке x исходный ряд убывает медленнее гармонического и, следовательно, расходится.

$\sin y=y-\dfrac{y^3}{6}+\ldots\ge y-\dfrac{y^3}{6}=f(y)$. $f'(y)=1-\dfrac{y^2}{2}$ монотонно возрастает на $\left(\dfrac{1}{n},1\right)$. Значит, минимальное значение функции $f(y)$ на $\left[\dfrac{1}{n},1\right]$ равно $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{6n^3}>\dfrac{1}{n+1}$, что легко проверяется.

12.1. $\dfrac{\pi-x}{2}$, $0<x<2\pi$.

12.2. $-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$, $0<x<2\pi$. Учесть, что исходный ряд есть $\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. (РБ–87) Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{2x}{x^2-y^3}$.

1.2. (РТИ–86) Решить дифференциальное уравнение $y'=\dfrac{1}{2x+y^2}$, $y(0)=1$.

1.3. (РТИ–91) Решить дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}.$$

2.1. (БПИ–84) Найти интегральную кривую уравнения

$$xy'+y+2xy=1,\quad y(1)=1.$$

2.2. (РТИ–82) Найти интегральные кривые уравнения

$$y'^2-(x+y)y'-xy=0.$$

2.3. (РТИ–82) Найти интегральные кривые уравнения

$$(2x+1)y''+4xy'-4y=0.$$

2.4. (РТИ–88) Найти интегральные кривые уравнения

$$y=xy'+x^2y''.$$

2.5. (НПИ–90) Найти интегральные кривые уравнения

$$x\,y\,y''+xy'^2-yy'=0.$$

2.6. (РБ–88) Найти интегральные кривые уравнения

$$(1+y'^2)y'''-3y'(y'')^2=0.$$

3. (РТИ–79) Проверить, что кривая $x^2+y^2=1$ является интегральной для уравнения $(xy-y^2+x+1)dx+(xy-x^2+y+1)dy=0$.

4. (РТИ–79) Доказать, что решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y'=x^3+y-y^2$, проходящее через точку (0,1), имеет локальный мини при $x=0$.

5. (РТИ–81) Найти дифференциальное уравнение 1-го порядка, решением которого является функция $y = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$. С какими начальными условиями? Доказать, что $y(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси.

6. (РТИ–81) Доказать, что все решения дифференциального уравнения $y' = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ ограничены на всей числовой оси.

7. (РТИ–81) Могут ли функции $y = x$ и $y = \sin x$ быть решениями дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y)$, $n = 1, 2$, где $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на плоскости?

8. (РБ–91) Найти все такие решения дифференциального уравнения $xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$, которые стремятся к конечному пределу при $x \to \infty$, и найти этот предел.

9. (РБ–90) Пусть $a(x)$ непрерывна на $[0, +\infty[$, причем $a(x) \geq c > 0$ для всех $x \in [0, +\infty[$. Доказать, что из ограниченности на $[0, +\infty[$ функции $f(x)$ следует ограниченность на том же интервале любого решения дифференциального уравнения $y' + a(x)y = f(x)$.

10. (РТИ–90) Доказать, что интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = e^{x^2 y^2}$, $y(0) = 0$ не проходит через точку $M\,(3; 2)$.

11. (РБ–89) Доказать, что всякое решение $y(x)$ уравнения $y' = f(x) - a(x)y^3$ ограничено на $[0, +\infty[$, если функции $f(x)$ и $a(x)$ непрерывны на $[0, +\infty[$ и удовлетворяют условиям: $f(x)$ ограничена на $[0, +\infty[$; $a(x) \geq c > 0\ \forall\ x \in [0, +\infty[$.

12.1. (РБ–84) Может ли функция $y = 1 - \cos x$ быть на интервале $]-a, a[$ решением уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, где $p(x), q(x)$ – непрерывные на этом интервале функции?

12.2. (РБ–84) То же для функции $y = \sin^2 x$.

12.3. (БПИ–89) То же для функции $y = x^2 \sin x$.

12.4. (РТИ–91) То же для функции $y = \cos^2 3x$.

13. Доказать, что любое решение дифференциального уравнения $\dfrac{d^2x}{dt^2} + f(x)\dfrac{dx}{dt} + x = 0$, где $f(x) > 0$, при $t \to -\infty$ стремится к нулю.

14. (БПИ–88) Найти все четные и нечетные решения дифференциального уравнения $y'' + \sin y' + y = 0$.

15. (РТИ–78) Доказать, что решение уравнения $y'' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ есть четная всюду положительная функция.

16. (РБ–87) Доказать, что при $q(x) < 0$ решение дифференциального уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ не может иметь положительных максимумов.

17. (БПИ–87) Найти геометрическое место точек перегиба графиков решений дифференциального уравнения $y' = x - e^y$.

18.1. (РБ–92; 94). Найти частное решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y(x) + \int_0^1 y(t)dt, \text{ если } y(0) = 1.$$

18.2. (БПИ–80) Решить уравнение $\int_0^1 \varphi(\alpha x)d\alpha = n\varphi(x)$.

18.3. (РБ–93) Найти все решения дифференциального уравнения

$$2(y + yy') + 3\int_0^x ty'(t)y''(t)dt = xy' + 3xy'^2 + \frac{x}{4}.$$

18.4. (РБ–86) Найти все дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$y(x) + \int_0^x \sin t \cdot y(t)dt - \int_0^x d\tau \int_0^\tau \cos t \cdot y(t)dt = 2.$$

19. (РБ–79) Сколько существует решений уравнения $y^{(n)} = x + y^2$, удовлетворяющих условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$. Рассмотреть отдельно случаи $n = 1, 2, 3, \ldots$.

20.1. (РТИ–80) Найти периодическое решение дифференциального уравнения $y' + y = f(x)$, где $f(x)$ – периодическая, с периодом Т = 2, функция, $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$.

20.2. (РБ–85) Решить дифференциальное уравнение $y'' - y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 2n\pi \le x < 2n\pi + \pi, \\ 1, & \pi + 2n\pi \le x < 2n\pi + \pi. \end{cases}$$

21.1. (РБ–79) Известно, что решение системы $\frac{dx}{dt} = Ax,\ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$,

$A = (a_{ij}),\quad a_{ij} - const,\quad i, j = 1, 2$ удовлетворяет условиям

$$\begin{pmatrix} x_1(2) & x_1(3) & x_1(4) \\ x_2(2) & x_2(3) & x_2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти $x(t)$.

21.2. (РТИ, РБ–79) В системе $\dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 + 2x_2 + b$, $\dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + c$ выбрать постоянные так, что любое решение $(x_1(t), x_2(t))$ системы на фазовой плоскости при увеличении времени t попадает в сколь угодно малую окрестность точки (1; 2) и будет в ней вечно оставаться.

21.3. (РТИ–82) При каких a система $x_t' = ax + 6y + \cos 2t$, $y_t' = -4x + 4y + \sin t$ имеет периодическое решение?

22.1. (БПИ–88) Определить вид кривой, радиус кривизны которой пропорционален длине нормали, в случае коэффициента пропорциональности $k = 1, -1, 2$.

22.2. (РБ–87) Найти кривую l на плоскости R_2, проходящую через точку $A(2;0)$ и такую, что в каждой точке $M \in l$ вектор нормали $\vec{n}$ к кривой делит угол $0MM_x$ пополам. Здесь 0 – начало координат, M_x – проекция точки M на ось ox.

23.1. (РТИ–84) Корабль движется по прямой (которую можно взять за ось ox) с постоянной скоростью v_1. Его преследует другой корабль с постоянной скоростью v_2, в начальный момент находящийся на расстоянии a по перпендикуляру к оси ox. Преследующий корабль постоянно держит курс на преследуемый. Найти уравнение линии движения преследующего корабля.

23.2. (РБ–82) Аналог «волк–заяц», если $v_2 = 2v_1$, $a = 100$ м. Найти траекторию и время погони.

24. (БПИ–83) Найти закон изменения температуры Т охлаждающегося тела массой m и теплоемкостью c. Когда окружающая среда имела температуру t_0, температура T была равна T_1.

25.1. (РТИ–78) Воздух, наполняющий сосуд вместимостью 5 л, содержит 20% кислорода. Сосуд имеет 2 трубки. Через одну из них в сосуд начинают впускать кислород, через другую – вытекает наружу столько же воздуха, сколько притекает в сосуд кислорода. Какое количество кислорода будет содержаться в сосуде после того, как через него протечет 10 л газа?

25.2. (БПИ–85) В помещении цеха объемом 21600 м^3 начальная концентрация углекислоты составляла 0,12%. Вентиляционная система цеха подает свежий воздух в объеме 3000 м^3/мин с концентрацией углекислоты 0,04%. Предполагая, что в любой момент времени концентрация углекислоты равномерна по объему цеха, найти концентрацию углекислоты через 10 мин после включения вентиляционной системы.

25.3. (РБ–79) В резервуаре объемом 100 л находится рассол, содержащий 10 кг растворенной соли. В резервуар втекает вода со скоростью 3 л/мин, а смесь с такой же скоростью перекачивается во второй резервуар также емкостью 100 л, первоначально заполненный водой, из которого избыток жидкости выливается. Сколько соли будет содержать второй резервуар по прошествии часа? Каково максимальное количество соли во втором резервуаре? Когда это максимальное количество соли достигается? (Концентрация соли в каждом из резервуаров поддерживается равномерной посредством перемешивания).

25.4. (РТИ–83) 2 кг соли растворяется в 30 л воды. Через 5 мин 2 кг соли растворяется полностью. Через какое время растворится 99% первоначального количества соли? (Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией насыщенного раствора, которая равна 1 кг на 3 л, и концентрацией раствора в данный момент).

26. (РТИ–86) Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной 20 см и вылетает со скоростью 100 м/с. Сила сопротивления стены сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату скорости. Найти время прохождения пули через стену.

27. (БПИ–80) Капля с начальной массой $M_г$, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет m г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли. Найти зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего с начала движения капли, если в начальной момент времени скорость капли равна нулю. Коэффициент пропорциональности $k \neq m$.

28. (РТИ–85) Материальная точка массой 2 кг без начальной скорости медленно погружается в жидкость. Сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости погружения. Найти скорость точки через 1 с после погружения, если коэффициент пропорциональности $k = 0{,}002$ кг/с.

29. (РБ–85) На тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v_1, действуют сила тяжести и сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости. Коэффициент пропорциональности $k \cdot m$, где k – постоянная, m – масса тела. С какой скоростью тело возвратится в исходную точку?

30.1. (РТИ–78) Цепь длиной $l = 4$ м соскальзывает с гладкого горизонтального стола. В начальный момент движения со стола свисал конец цепи длиной $a = 0{,}5$ м. Пренебрегая трением, найти время соскальзывания цепи со стола.

30.2. (РТИ–88) Тяжелая однородная цепь переброшена через гвоздь так, что с одной стороны свисает часть ее длиной 8 м, а с другой – часть длиной 10 м. За какое время T цепь соскользнет с гвоздя?

31. (РТИ–93) Горизонтальная трубка вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Внутри трубки без трения скользит шар. Найти закон движения шара, если в начальный момент он находился на оси вращения и имел скорость v_0 (вдоль оси трубки).

32. (БПИ–92) Длинные сани с грузом, едущие по льду, попадают на участок, посыпанный песком, и, не пройдя и половины своей длины, останавливаются. После этого им резким толчком сообщают первоначальную скорость. Найти отношение путей и времен торможения.

33. (БГПА–93) Из точки А, лежащей на верхнем конце вертикального диаметра некоторой окружности, по желобам, установленным вдоль различных хорд этой окружности, одновременно начинают скользить грузы. Как это время зависит от угла наклона хорды к вертикали?

Ответы, указания и решения к разд. 2

1.1. Указание. $x'_y - \frac{x}{2} = \frac{-y^3 \cdot x^{-1}}{2}$ – уравнение Бернулли.

1.2. Указание. $x'_y = 2x + y^2$ – линейное уравнение.

1.3. Указание. См. 1.2.

2.1. $y = \frac{1+e^{-2(x-1)}}{2x}$.

2.2. Указание. Представить уравнение в виде $(y'-x)(y'-y)=0$.

2.3. Указание. Понизить порядок уравнения, используя частное решение $y = x$.

2.4. Решение. $x^2y'' + xy' - y = 0$ – однородное уравнение Эйлера. Полагая $y = x^\lambda$, имеем:

$$x^\lambda[\lambda(\lambda-1)+\lambda-1]=0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow y = c_1 x + c_1 \cdot \tfrac{1}{x}.$$

2.5. Указание. Уравнение можно представить в виде $(x\,y\,y')' - 2yy' = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \quad x\,y\,y' - y^2 = C$. Последнее уравнение есть уравнение Бернулли.

2.6. Указание. Запишем уравнение в виде $\frac{y'''}{y''} - \frac{3}{2}\cdot\frac{2(y'y'')}{1+y'^2} = 0$. Получим, что $\ln y'' - \frac{3}{2}\ln(1+y'^2) = \ln C$, откуда $y'' = C(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$. Последнее уравнение подстановкой $y' = p, \quad p = p(y)$ допускает понижение порядка.

3. Решение. Так как $x^2 = 1 - y^2$, то уравнение можно записать в виде

$$(xy + x^2 + x)dx + (xy + y^2 + y)dy = 0. \qquad (1)$$

Дифференцируя обе части равенства $x^2 + y^2 = 1$ и подставляя $dy = -\frac{x}{y}dx$ в (1), получим тождество.

4. <u>Указание</u>. Пусть $y=\varphi(x)$ – решение данного уравнения, проходящее через точку (0, 1). Показать, что $\varphi'(0)=\varphi''(0), \varphi^{IV}(0)>0$.

5. <u>Решение</u>. Вычислим производную от функции y:

$y'=2xe^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt+1$. Подставляя $e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt=y$ в выражение для y', получим искомое дифференциальное уравнение: $y'=2xy+1$.

8. <u>Решение</u>. Общее решение данного линейного уравнения имеет вид $y=xe^{x^2}\left(C+\int\limits_0^x e^{-t^2}dt\right)$. Так как $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, то $y=xe^{x^2}\left(C_1+\int\limits_{+\infty}^x e^{-t^2}dt\right)$, где C_1 – произвольная постоянная. Если $C_1\neq 0$, то $y\to\infty,\ x\to\infty$. Поэтому необходимо, чтобы $C_1=0$. Используя правило Лопиталя, находим, что $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{x^2}\int\limits_{+\infty}^x e^{-t^2}dt=-\dfrac{1}{2}$. Таким образом, искомое решение $y=xe^{x^2}\int\limits_{+\infty}^x e^{-t^2}dt$.

12.1. <u>Решение</u>. Из теоремы существования следует единственность решения $y\equiv 0$ данного линейного уравнения. Следовательно, функция $1-\cos x$ не может быть решением.

15. <u>Указание</u>. Показать, что если $y_1=\varphi(x)$ – решение уравнения, то $y_2=\varphi(-x)$ также является решением.

16. <u>Решение</u>. Пусть решение $y=\varphi(x)$ в точке x_0 имеет положительный максимум. Это означает, что $\varphi(x_0)>0, \varphi'(x_0)=0, \varphi''(x_0)<0$ (случай $\varphi''(x_0)=0$ невозможен, так как $\varphi(x_0)>0$). Но это невозможно, так как $\varphi''(x_0)+q(x_0)\varphi(x_0)<0$ в силу условия $q(x)<0$.

17. <u>Ответ</u>. $1-e^y(x-e^y)=0$.

18.1. <u>Решение</u>. Пусть $y=y(x)$ – искомое решение. Обозначим $\int\limits_0^1 y(t)dt=a$. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=y+a$, откуда $y+a=C\cdot e^x$. Так как $y(0)=1$, то $C=a+1$. С другой стороны, из равенства $y=-a+C\cdot e^x$ следует, что $a=\int\limits_0^1 y(t)dt=-a+C(e-1)$, откуда $2a=C(e-1)$. Из системы

$a+1=C, \quad 2a=C(e-1)$ находим $a=\dfrac{e-1}{3-e}, \quad C=\dfrac{2}{3-e}$. Следовательно, $y=\dfrac{1-e}{3-e}+\dfrac{2}{3-e}e^{x}$.

18.2. Решение. Так как $\int\limits_0^1 \varphi(\alpha x)d\alpha = |\alpha x = z| = \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x \varphi(z)dz$, то исходное уравнение принимает вид $\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x \varphi(z)dz = n\varphi(x)$. Дифференцируя обе части полученного уравнения по *x,* имеем $-\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x \varphi(z)dz+\dfrac{\varphi(x)}{x}=n\varphi'(x)$ или $n\varphi'(x)=\dfrac{1-n}{x}\cdot\varphi(x)$. Разделяя переменные в последнем уравнении и интегрируя, получаем, что $n\varphi = C\cdot x^{\frac{1-n}{x}}$, где С – произвольная постоянная. Эта функция, как легко проверить, удовлетворяет данному дифференциальному уравнению.

18.3. Решение. Дифференцируя дважды уравнение

$$2(y+yy')+3\int\limits_0^x ty'(t)y''(t)dt = xy'+3xy'^2+\frac{x}{4}, \tag{1}$$

получим последовательно

$$2(y+yy')+3(xy'y'') = y'+xy''+3y'^2+6xy'y''+\frac{1}{4}, \tag{2}$$

$$y'''(2y-x)=0. \tag{3}$$

Из (3) сразу следует, что $y=C_1x^2+C_2x+C_3$ и $y=\dfrac{x}{2}$.

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями, которые получаются, если в (1) и (2) положить $x=0$:

а) $y(0)\,[y'(0)+1]=0$;

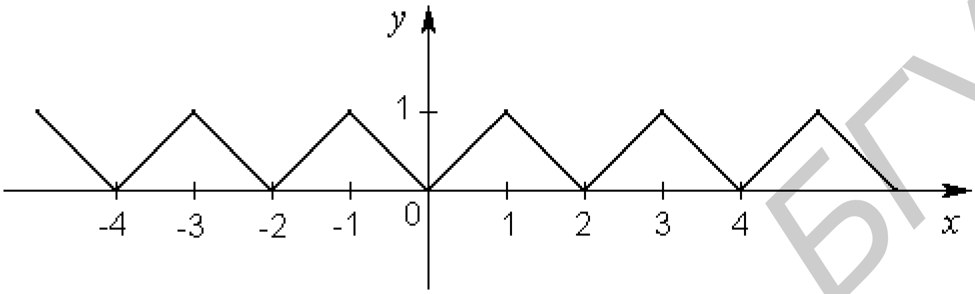
б) $y'(0)-[y'(0)]^2+2y(0)y''(0)=\dfrac{1}{4}$.

Для случая «а» необходимо, чтобы $y=C_1x^2+C_2x$ или $y=C_1x^2-x+C_3$. Для решения $y=C_1x^2+C_2x$ условие «б» означает, что $C=\dfrac{1}{2}$. Решение $y=C_1x^2-x+C_3$ удовлетворяет условию «б», если

$C_1C_3 = \dfrac{9}{16}$. Таким образом, решениями уравнения (1) являются функции $y = \dfrac{x}{2}$, $y = C_1x^2 + \dfrac{x}{2}$, $y = Cx^2 - x + \dfrac{9}{16C}$, где $C_1, C\ (C \neq 0)$ – произвольные постоянные.

18.4. Указание. Продифференцировать дважды уравнение.

20.1. Решение. Общее решение данного уравнения имеет вид $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где $\bar{y} = C \cdot e^{-x}$ – общее решение однородного уравнения $y' + y = 0$, а $\tilde{y}$ – частное решение исходного уравнения. Построим $\tilde{y}$, используя принцип суперпозиции. Функцию $f(x)$ разложим в ряд Фурье.



Поскольку $f(x)$ – четная, то коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам: $a_k = \dfrac{2}{1}\int\limits_0^1 f(x)\cos kx dx\ (k = 0, 1, 2, ...), b_k = 0\ (k = 1, 2, ...)$.

Имеем $a_0 = 2\int\limits_0^1 x dx = 1$, $a_k = 2\int\limits_0^1 x\cos k\,x dx = \begin{cases} 0, & k = 2n,\ n = 0, 1, 2, ...; \\ -{}^{4}\!/_{(\pi k)^2}, & k = 2n+1,\ n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$

Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}. \qquad (1)$$

Поскольку $f(-1) = f(1)$, а функция $f(x)$ непрерывна на $[-1,1]$, то ряд Фурье (1) сходится равномерно на всей числовой оси к $f(x)$.

Рассмотрим уравнение

$$z' + z = -\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}(n = 0,1,2,...), \qquad (2)$$

где $z = y - \dfrac{1}{2}$.

Будем искать частное решение этого уравнения в виде

$$\tilde{z}_n = a_n \cdot \cos(2n+1)\pi x + b_n \cdot \sin(2n+1)\pi x. \qquad (3)$$

Выражение (3) подставляем в (2):

$$-(2n+1)\pi\cdot a_n\cdot\sin(2n+1)\pi x+(2n+1)\pi\cdot b_n\cdot\cos(2n+1)\pi+$$
$$+a_n\cdot\cos(2n+1)\pi x+b_n\cdot\sin(2n+1)\pi x=-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2},$$

откуда $b_n-(2n+1)\pi a_n=0,\;\;(2n+1)\pi\cdot b_n+a_n=-\dfrac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$. Поэтому

$$\tilde{z}_n=-\frac{4}{\pi(2n+1)}\left\{\frac{\cos(2n+1)\pi x}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\cdot\pi^2]}+\frac{\sin(2n+1)\pi x}{1+(2n+1)^2\pi^2}\right\}(n=0,1,2,\ldots).$$

Согласно суперпозиции, если ряд

$$\tilde{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{z}_n=-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{4\cos(2n+1)\pi x}{\pi^2(2n+1)^2[1+(2n+1)^2\pi^2]}+\frac{4\sin(2n+1)\pi x}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\pi^2]}\right\}\tag{4}$$

сходится и допускает почленное дифференцирование, то функция $\tilde{z}$ является частным решением уравнения (2). Докажем законность почленного дифференцирования ряда (4). Составим ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{z}'_n=-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{4\cos(2n+1)\pi x}{1+(2n+1)^2\pi^2}-\frac{4\sin(2n+1)\pi x}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\pi^2]}\right\}\tag{5}$$

Поскольку

$$|z_n|\le 4\left\{\frac{1}{\pi^2(2n+1)^2[1+(2n+1)^2\pi^2]}+\frac{1}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\pi^2]}\right\}\;\forall x\in R,$$

$$|z'_n|\le 4\left\{\frac{1}{1+(2n+1)^2\pi^2}+\frac{1}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\pi^2]}\right\}\;\forall x\in R,$$

а числовые ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2[1+(2n+1)^2\pi^2]}+\frac{4}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\pi^2]}\right\},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{4}{1+(2n+1)^2\pi^2}+\frac{4}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\pi^2]}\right\}$$

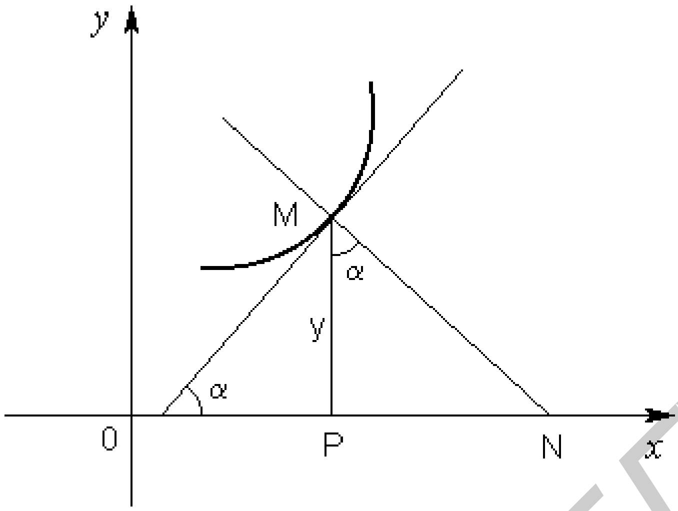
сходятся, то по признаку Вейерштрасса ряды (4), (5) сходятся равномерно на всей числовой оси. Следовательно, ряд (4) допускает почленное дифференцирование. Поэтому исходное уравнение имеет общее решение

$$y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{4\cos(2n+1)\pi x}{\pi^2(2n+1)^2[1+(2n+1)^2\pi^2]}+\frac{4\sin(2n+1)\pi x}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\pi^2]}\right\}.$$

Функция y будет периодической, если $C=0$, следовательно, искомое периодическое решение имеет вид

$$y=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{4\cos(2n+1)\pi x}{\pi^2(2n+1)^2[1+(2n+1)^2\pi^2]}+\frac{4\sin(2n+1)\pi x}{\pi(2n+1)[1+(2n+1)^2\pi^2]}\right\}.$$

22.1.<u>Указание</u>. Воспользоваться формулой радиуса кривизны

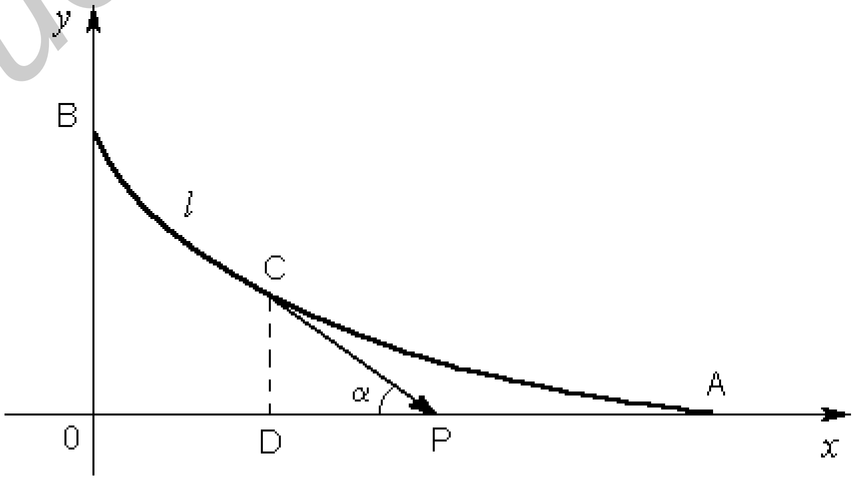


$R=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ и длины отрезка нормали

$MN=\sqrt{(MP)^2+(PN)^2}=\sqrt{y^2+y^2y'^2}=|y|\sqrt{1+y'^2}$. Дифференциальное уравнение искомой кривой $1+y'^2=k\cdot yy''$ подстановкой $y'=p(y)$, $y''=pp'$ приводится к виду $1+p^2=kyp'p\Rightarrow\dfrac{dy}{y}=k\cdot\dfrac{pdp}{1+p^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ln(y)=\dfrac{k}{2}\ln(1+y'^2)+\ln(C)$. Далее рассмотреть отдельно случаи $k=1,-1,2$.

23.1. <u>Решение</u>. Пусть l – кривая в плоскости xoy, по которой движется преследующий корабль.



Пусть в момент времени t преследующий корабль находится в точке $C\,(x, y)$ кривой l, по которой он движется, а преследуемый корабль находится в точке P оси ox. Составим дифференциальное уравнение движения преследующего корабля. Так как $tg\alpha = -y'$ и $tg\alpha = \dfrac{CD}{DP} = \dfrac{y}{v_1 t - x}$, то $y' = \dfrac{y}{x - v_1 t}$ или

$$yx' - x = -v_1 t, \tag{1}$$

где $x' = \dfrac{dx}{dy}$. Дифференцируя обе части (1) по y, получим

$$yx'' = -v_1 \frac{dt}{dy}. \tag{2}$$

С другой стороны, $v_2 = \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{-\sqrt{1+x'^2}\,dy}{dt}$ ($dl = -\sqrt{1+x'^2}\,dy$, так как $dl > 0, \quad dy < 0$), откуда

$$\frac{dt}{dy} = -\frac{1}{v_2}\sqrt{1+x'^2}. \tag{3}$$

ПРИРАВНИВАЯ (2) И (3), ПОЛУЧАЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $yx'' = \dfrac{v_1}{v_2}\sqrt{1+x'^2}$ ИЛИ $y\dfrac{dx'}{dy} = k\sqrt{1+x'^2}$,

(4)

где $k = \dfrac{v_1}{v_2}$. Разделяя переменные и интегрируя, находим, что $\ln\left(x' + \sqrt{1+x'^2}\right) = k\ln y + \ln C, \quad y > 0$. Определим величину C, используя начальные условия: $t = 0, \quad x' = 0, \quad y = OB = a$. Таким образом, $C = -k\ln a$. Тогда

$$x' + \sqrt{1+x'^2} = \left(\frac{y}{a}\right)^k. \tag{5}$$

Записав (5) в виде $\dfrac{1}{x' + \sqrt{1+x'^2}} = \left(\dfrac{a}{y}\right)^k$, получим, что

$$x' - \sqrt{1+x'^2} = -\left(\frac{a}{y}\right)^k. \tag{6}$$

Сложив (5) и (6) и разделив результат на 2, получим $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{y}{a}\right)^k - \left(\dfrac{a}{y}\right)^k\right]$

или $dx = \dfrac{1}{2} = \left[\left(\dfrac{y}{a}\right)^k - \left(\dfrac{a}{y}\right)^k\right]dy$. Интегрируя, находим

$x = \dfrac{a}{2}\left[\dfrac{1}{k+1}\cdot\left(\dfrac{y}{a}\right)^{k+1} - \dfrac{1}{1-k}\cdot\left(\dfrac{y}{a}\right)^{1-k}\right] + C_1$. Для нахождения частного решения используем начальное условие: при $x = 0$ $\quad y = a$. Таким образом,

$C_1 = \dfrac{ak}{1-k^2}$ и мы получаем уравнение линии движения преследующего корабля $x = \dfrac{a}{2}\left[\dfrac{1}{k+1}\cdot\left(\dfrac{y}{a}\right)^{k+1} - \dfrac{1}{1-k}\cdot\left(\dfrac{y}{a}\right)^{1-k}\right] + \dfrac{ak}{1-k^2}$.

24. <u>Решение</u>. Количество теплоты, полученное окружающей средой от тела, определяется соотношением $dQ = k(T - t_0)dt$, где Т – температура тела в момент времени t, t_0 – температура окружающей среды. С другой стороны, количество теплоты, отданное телом, находим из равенства $dQ = -cm\,dT$, где c – удельная теплоемкость тела, m – масса тела. Рассматривая вместе полученные соотношения приходим к уравнению $\dfrac{dT}{T - t_0} = -\dfrac{k}{cm}\cdot dt$, интегрируя которое, получаем $T = t_0 + He^{-\frac{t}{cm}}$, где H – произвольная постоянная. Учитывая начальное условие $T(0) = T_1$, находим, что $H = T_1 - t_0$. Следовательно, $T = t_0 + (T_1 - T_0)e^{-\frac{k}{cm}\cdot t}$.

25.1. <u>Решение</u>. Пусть в момент, когда через сосуд прошло x л газа, в нем содержится a %, т.е. $a/20$ л кислорода. Пусть через сосуд пройдет еще dx л газа. Это означает, что в сосуд входит dx л кислорода и выходит $\dfrac{a}{100}dx$ л кислорода. Тогда в сосуде будет $\dfrac{a}{20} + (dx - \dfrac{a}{100}dx) = \dfrac{5a + (100 - a)dx}{100}$ л кислорода. Этот объем кислорода составит $\dfrac{[5a + (100 - a)dx]}{5}$% всего объема газа. Таким образом, процент кислорода увеличивается на величину $da = \dfrac{(100 - a)dx}{5}$. Имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $da = \dfrac{(100 - a)dx}{5}$, интегрируя которое, получаем общее решение

$a = 100 - C \cdot e^{-\frac{x}{5}}$, где C – произвольная постоянная. Начальное условие: при $x = 0,\ a = 20$. Отсюда С = 80 и $a = 100 - 80 \cdot e^{-\frac{x}{5}}$. При $x = 10$, $a = 100 - 80 \cdot e^{-2} \approx 89\%$.

25.2. Решение. Обозначим содержание углекислоты в воздухе в момент времени t через x (%). Пусть a – количество поступающего воздуха (м^3/мин), V – объем помещения (м^3). Составим за промежуток времени dt мин, протекший от момента t, баланс углекислоты, находящейся в помещении. За это время вентиляторы доставили 0,0004 $a\ dt$ м^3 углекислоты, а ушло из помещения 0,01 х a м^3 углекислоты. Следовательно, всего за dt мин количество углекислоты в воздухе уменьшилось на $dq = (0{,}01x - 0{,}0004)a\ dt$ м^3. Обозначив через dx процентное уменьшение содержания углекислоты в воздухе, можно подсчитать это же количество углекислоты другим путем, по формуле $dq = -V \cdot 0{,}01dx$ м^3 (знак минус берем потому, что $dx < 0$). Приравнивая оба выражения, для dq получаем дифференциальное уравнение $(0{,}01x - 0{,}0004)a\ dt = -V \cdot 0{,}01dx$. Разделяя переменные, находим $\dfrac{dx}{x - 0{,}04} = -\dfrac{a}{V}\,dt$, откуда $x - 0{,}04 = C \cdot e^{-\frac{a}{V}t}$. Так как в момент $t = 0$, $x = 0{,}12$, то $C = 0{,}08$ и $x = 0{,}04 + 0{,}08 \cdot e^{-\frac{a}{V}t}$. Полагая $t = 10$, $a = 3000$, $V = 21600$, получим $x = 0{,}04 + 0{,}08 \cdot e^{-\frac{25}{18}} \approx 6\%$.

25.3. Ответ. 2,97 кг; максимальное количество соли 3,68 кг, $t_{\max} = 33\frac{1}{3}$ мин.

26. Решение. Согласно второму закону Ньютона, дифференциальное уравнение движения пули имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \tag{1}$$

(знак «минус» взят потому, что сила сопротивления стены направлена в сторону, противоположную направлению скорости). Разделяя в (1) переменные и интегрируя, получим $-\dfrac{1}{v} = k_1 t - C$ или $\dfrac{1}{v} = k_1 t + C$, где $k_1 = \dfrac{k}{m}$, C – произвольная постоянная.

Из начального условия $v = v_0$ при $t = 0$ находим, что $C = 1/v_0$, поэтому

$$\frac{1}{v} = k_1 t + \frac{1}{v_0}. \tag{2}$$

Если положить в (2) $v = v_1$, то $t = T$ и, следовательно, искомое время T определяется из уравнения $1/v_1 = k_1 T + 1/v_0$, откуда

$$T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right). \qquad (3)$$

В выражении для T участвует неизвестная величина k_1. Для ее определения перепишем уравнение (2) следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + k_1 v_0 t}, \qquad (4)$$

где скорость v заменена через dx/dt.

Из (4) интегрированием находим, что $x = k_1^{-1} \cdot \ln(1 + k_1 v_0 t) + C_1$. При $t = 0$ имеем $x = 0$ (пуля входит в стену), и потому $C_1 = 0$; при $t = T$ имеем $x = h$ (пуля выходит из стены и потому $h = k_1^{-1} \cdot \ln(1 + k_1 v_0 T)$). Используя (3), находим, что $1 + k_1 v_0 T = v_0 / v_1$ или $k_1^{-1} = h/\ln(v_0 / v_1)$.

Подставив найденное значение k_1^{-1} в выражение (3), получаем, что

$$T = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v_1}}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Если провести числовые выкладки, полагая $v_0 = 400$ м/с, $v_1 = 100$ м/с, $h = 0{,}2$ м, то получим $T \approx 0{,}001$ с.

27. <u>Решение</u>. Дифференциальное уравнение движения капли имеет вид $m_1(t)\dfrac{dv}{dt} = m_1(t)g - kv$, где m_1 – масса капли, v – скорость капли в момент времени t, g – ускорение силы тяжести. Для решения задачи надо принять во внимание тот факт, что m_1 – переменная величина, зависящая от времени t. Ввиду равномерного испарения капли ее масса в момент времени t равна $m_1(t) = M - m \cdot t$. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение $(M - mt)\dfrac{dv}{dt} = (M - mt)g - kv$ или $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{M - mt}v = g$. Решая это линейное уравнение, находим $v(t) = C \cdot (M - mt)^{\frac{k}{m}} + \dfrac{g(M - mt)}{k - m}$. Используя началь-

ное условие $v(0)=0$, находим $C=\dfrac{gM^{1-\frac{k}{m}}}{m-k}$. Следовательно, скорость движения капли $v=\dfrac{g(M-mt)}{m-k}\left[\left(1-\dfrac{m}{M}t\right)^{\frac{k}{m}-1}-1\right]$.

28. <u>Решение</u>. Пусть $v(t)$ – скорость точки в момент времени t. На точку действует 2 противоположно направленные силы: сила тяжести и сила сопротивления. Используя второй закон Ньютона, получаем дифференциальное уравнение $m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv$ или $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{k}{m}\cdot v=g$.

Решая данное линейное уравнение, находим $v(t)=\dfrac{mg}{k}+C\cdot e^{-\frac{k}{m}t}$. Так как точка погружается без начальной скорости $(v(0)=0)$, то $C=-\dfrac{mg}{k}$ и $v(t)=\dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, откуда $v\approx 9{,}8$ (м/с).

29. <u>Решение</u>. В момент времени t (при подъеме или падении) тело находится под действием двух сил: тяжести и сопротивления среды. При движении тела вверх равнодействующая этих сил равна $-mg-kv^2$. При падении тела равнодействующая сил равна $mg-kv^2$.

1) При движении тела вверх уравнение движения имеет вид $m\dfrac{dv}{dt}=-mg-kv^2$. Если путь, считая от начала отсчета, равен s, то $v=\dfrac{ds}{dt}$. Тогда $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}=v\cdot\dfrac{dv}{ds}$ и уравнение движения принимает вид $mv\cdot\dfrac{dv}{dt}=-mg-kv^2$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем $-\dfrac{m}{2k}\ln(mg+kv^2)+C=s$. Константу C определяем, принимая во внимание тот факт, что при $s=0,\quad v=v_0$. Следовательно, $c=\dfrac{m}{2k}\ln(mg+kv_0{}^2)\Rightarrow$

$$\Rightarrow s=\frac{m}{2k}\ln\left(\frac{mg+kv_0{}^2}{mg+kv^2}\right)=\frac{a}{2}\ln\left(\frac{g+av_0{}^2}{g+av^2}\right),$$ где $a=\dfrac{m}{k}$. В наивысшей точке подъема $s=h,\quad v=0$, поэтому $h=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{g+av_0{}^2}{g}$.

2) При падении тела уравнение движения принимает вид

$m\cdot\bar{v}\cdot\dfrac{d\bar{v}}{d\tau}=mg-k\bar{v}^2$, где $\bar{v}$ – скорость тела, τ – путь. Разделяя переменные и интегрируя, получаем $-\dfrac{a}{2}\ln\left|g-a\bar{v}^2\right|+H=\tau$. Константу Н определяем из условия: $\bar{v}=0$ при $\tau=0$. Следовательно, $H=\dfrac{a}{2}\ln g$ и $\tau=\dfrac{a}{2}\ln\left|\dfrac{g}{g-a\bar{v}^2}\right|$.

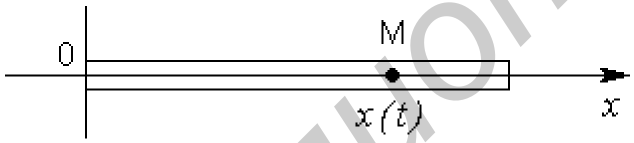
Полагая в последнем равенстве $\tau=h=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{g+av_0{}^2}{g}$, находим

$\bar{v}=v_0\sqrt{\dfrac{g}{g+av_0{}^2}}$.

30.1. <u>Решение</u>. В любой момент времени на цепь действует сила F, равная силе тяжести свесившейся со стола к этому времени части цепи длиной x. Пусть сила тяжести всей цепи P, тогда имеем пропорцию $\dfrac{F}{p}=\dfrac{x}{e}$, откуда $F=\dfrac{mg}{e}\cdot x$. На основании второго закона Ньютона $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F$. Таким образом, имеем дифференциальное уравнение движения цепи $\dfrac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0$, $k^2=\dfrac{g}{e}=\dfrac{5}{2}$. Общее решение данного линейного однородного уравнения имеет вид $x=C_1e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}$. Используя начальные условия $x(0)=0{,}5,\quad x'(0)=v(0)=0$, находим, что $C_1=C_2=0{,}25$. Таким образом, $x=0{,}25\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}\right)$. Из последнего соотношения (принимая во внимание тот факт, что при $t > 0$ $e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t} > e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}$) нетрудно найти $t = \sqrt{\frac{5}{2}}\ln(2x + \sqrt{4x^2 - 1})$. При $x = l = 4$ искомое время $t \approx 2$ с.

30.2. <u>Решение</u>. В любой момент на цепь действует сила F, равная разности сил тяжести P_1 и P_2 двух концов цепи. Пусть в момент t больший конец имеет длину x, тогда меньший будет иметь длину $l - x$. При этом $P_1 = \rho \cdot x \cdot g_1$, $P_2 = \rho \cdot (l - x) \cdot g$, где ρ – плотность цепи, g – ускорение свободного падения. На основании второго закона Ньютона $\rho \cdot l\ddot{x} = P_1 - P_2 = \rho g x - \rho g(l - x)$ или $\ddot{x} - \frac{g}{9}x = -g$. Общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $x = C_1 e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t} + 9$. Начальные условия: $x(0) = 10, \quad x'(0) = 0$. Поэтому $x = \frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t} + 9$. Из последнего соотношения находим $t = \frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left|x - 9 + \sqrt{(x-9)^2 - 1}\right|$. При $x = 18$ $t = \frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9 + \sqrt{80}) \approx 3$(с).

31. <u>Решение</u>. Направим ось координат ох по оси трубки, выбрав точку О за начало. Обозначим через x(t) координату шара (точка М) в момент времени t. Так как по условию шар движется по трубке без трения, то на него действует только центробежная



сила $F_ц = m\omega^2 x$. Поэтому в силу второго закона Ньютона $m\ddot{x} = m\omega^2 x$ или $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$. Общее решение данного уравнения имеет вид $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$. Используя начальные условия $x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$, находим, что $C_1 e = -C_2 = {}^{v_0}\!\big/_{\omega}$. Таким образом, $x = \left({}^{v_0}\!\big/_{\omega}\right) sh\, \omega t$.

3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Пусть $p(z)$ и $q(z)$ – многочлены ненулевой степени с комплексными коэффициентами. Доказать, что если для любого комплексного w многочлен $p(w)=0$ тогда и только тогда, когда $q(w)=0$, и $p(w)=1$ тогда и только тогда, когда $q(w)=1$, то многочлены $p(z)$ и $q(z)$ равны.

2. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и $\operatorname{Re} f(z) = F(\operatorname{Im} f(z))$, где функция $F(t)$ строго монотонна и непрерывно дифференцируема на всей действительной оси. Доказать, что $f(z) \equiv const$.

3. Пусть функция $f(z)=u+iv$ и функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в области $D \subset C$. Доказать, что якобиан преобразования от переменных (x, y) к переменным (u, v) вычисляется по формуле

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2 .$$

4. Найти зависимость между следующими функциями:

4.1. $Arc\cos z$ и $Ln\,z$. 4.2. $Arc\sin z$ и $Ln\,z$. 4.3. $Arctg\,z$ и $Ln\,z$.

5. Вычислить следующие пределы:

5.1. $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln\left|f(re^{i\varphi})\right|}{r}$, где $f(z) = (shz-\alpha_1)(shz-\alpha_2), \alpha_1\alpha_2 \in R$.

5.2. $\overline{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}} \dfrac{\ln\left|f(\lambda z)\right|}{\lambda}$, где $f(z)=\cos z$.

5.3. $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln\left|f(x+iy)\right|}{y}$, если $f(z) = e^{-2iz^2}$.

6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos^3 nx}{2^n}$.

7. Пусть $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{5} \dfrac{1}{n^z}$. Доказать, что $\varphi(1+it) \neq 0$ для любого действительного t.

8. Разложить в ряд Фурье функции

8.1. $\ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$. 8.2. $\ln\left|tg\frac{\varphi}{2}\right|$.

9. Доказать формулы:

9.1. $\pi ctg\pi z = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z}{z^2-n^2}$. (1)

9.2. $\pi cth\pi z = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z}{z^2 + n^2}$ (2)

9.3. $\dfrac{\pi}{\sin \pi z} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{z - n}$ (3)

9.4. $\dfrac{\pi}{\cos \pi z} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{z - n - \frac{1}{2}}$ (4)

10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z(z+1)...(z+n)}{n!}$.

11. Доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и $f(0) = 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(z^k)$ сходится при $|z| < 1$ и представляет аналитическую функцию.

12. Найти на границе круга $|z| \le 1$ особые точки функции, заданной внутри круга рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^3}$.

13. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в круге $|z| < 1$.

1) Доказать, что равенство $\lim\limits_{|z| \to 1-0} |f(z)| = +\infty$ невозможно.

2) Доказать, что для функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 5^k z^{(2k)!}$ выполняется равенство

$$\overline{\lim_{r \to 1-0}} \inf_{|z|=r} |f(z)| = +\infty. \tag{5}$$

14. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ – целая функция и $M_f(r) \le e^{Ar^m}$ для всех $r \ge 0$ (где $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$). Доказать, что $|c_n| \le \left(\dfrac{Aem}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$ для всех достаточно больших n.

15. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ – целая функция и $|c_n| \le \left(\dfrac{Aem}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$ для всех $n \ge n_0$. Доказать, что $\max\limits_{|z|=r} |f(z)| = M_f(r) \le e^{(A+\varepsilon)r^m}$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших r.

16. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число. Найти все целые функции f и g такие, что

$$f^n + g^n \equiv 1. \tag{6}$$

17. Может ли функция $\dfrac{1}{z^4}$ быть равномерно приближена многочленами на окружности $|z| = 1$ со сколь угодно большой точностью.

18. Доказать, что интеграл $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2} dz$, взятый по границе полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, равен сумме вычетов подынтегральной функции в этой полуплоскости и найти его значение.

19. Найти образ области $D = \left\{\operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < 1,\ z \notin \left[\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right]\right\}$ при отображении функцией $w = ch\,\pi z$.

Ответы, указания и решения к разд. 3

1. Решение. Рассмотрим полином $r(z) = \big(p(z) - q(z)\big) \cdot p'(z)$. Пусть (без ограничения общности) $\deg p(z) = n \geq \deg q(z)$. Тогда $\deg r(z) \leq 2n - 1$. Если α – корень $p(z)$ кратности k, то $p(\alpha) - q(\alpha) = 0$ и α является корнем $p'(z)$ кратности $k-1$. Таким образом, α – корень $r(z)$ кратности $\geq k$. Аналогично, если α – корень $p(z) - 1$ кратности k, то α – корень $r(z)$ кратности $\geq k$. В результате сумма кратностей корней $r(z)$ не менее, чем $2n$, т.е. $r(z) \equiv 0$ и $r(z) \equiv q(z)$.

2. Указание. Воспользоваться условиями Коши–Римана и теоремой о дифференцировании сложной функции.

3. Указание. Воспользоваться формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

4. Решение.

4.1. Если $z = \cos w$, то по определению $w = Arc\cos z$. Но $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, следовательно, $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$.

Отсюда $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (знак «+», так как $\sqrt{u}$ – двузначная функция). Прологарифмировав последнее равенство, получим

$w = Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1})$.

4.2. $Arc\sin z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2})$.

4.3. $Arctgz = -\frac{i}{2} Ln \frac{i - z}{i + z}$.

5. Решение.

5.1. $\left| f(re^{i\varphi}) \right| = \left| shz - \alpha_1 \right| \cdot \left| shz - \alpha_2 \right|$.

Найдем

$$\left| shz - \alpha \right| = \left| shx\cos y + ichx\sin y - \alpha \right| = \sqrt{(shx\cos y - \alpha)^2 + (chx\sin y)^2} =$$
$$= \sqrt{ch^2 x - 2\alpha\ shx\cos y - \cos^2 y + \alpha^2}.$$

Тогда $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln\left| f(re^{i\varphi}) \right|}{r} = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{1}{2r} \cdot \left[\ln\left| ch^2 x - 2\alpha_1 shx\cos y - \cos^2 y + {\alpha_1}^2 \right| + \right.$

$$\left. + \ln\left| ch^2 x - 2\alpha_2 shx\cos y - \cos^2 y + {\alpha_2}^2 \right| \right] =$$

$$= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{2r} \left[2\ln\left| ch^2 x \right| + \ln\left| 1 - 2\alpha_1 \cos y \cdot \frac{shx}{ch^2 x} + \frac{{\alpha_1}^2 - \cos^2 y}{ch^2 x}^2 \right| + \right.$$

$$\left. + \ln\left| 1 - 2\alpha_2 \cos y \frac{shx}{ch^2 x} + \frac{{\alpha_2}^2 - \cos^2 y}{ch^2 x} \right| \right] = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\left| ch^2 x \right|}{r} =$$

$$= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{2\ln\left| ch(r\cos\varphi) \right|}{r} = 2\lim_{r\to\infty} \frac{\left| sh(r\cos\varphi) \right|}{ch(r\cos\varphi)} \cdot \left| \cos\varphi \right| = 2\left| \cos\varphi \right|.$$

5.2. $\left| \operatorname{Im} z \right|$. 5.3. $4x$.

6. Решение. $\cos^3 nx = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3nx)$, ряд сходится абсолютно, поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^3 nx}{2^n} = \frac{1}{4}\left(3\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{2^n} \right)$.

Пусть $z = \cos x + i\sin x$. Тогда $\left| z \right| = 1$, $z^n = \cos nx + i\sin nx$, $z^{3n} = \cos 3nx + i\sin 3nx$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\operatorname{Re}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\operatorname{Re}\frac{2(z-\bar{z})}{(2-z)(2-\bar{z})}=\frac{2(2-\operatorname{Re}z)}{5-4\operatorname{Re}z}=$$

$$=\frac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}.$$

Аналогично, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 3nx}{2^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{2^n}=\operatorname{Re}\frac{1}{1-\frac{z^3}{2}}=\frac{2(2-\cos 3x)}{5-4\cos 3x}$.

Отсюда получаем $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^3 nx}{2^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{6-3\cos x}{5-4\cos x}+\frac{2-\cos 3x}{5-4\cos 3x}\right)$.

7. <u>Доказательство</u>. Рассмотрим сначала функцию $\displaystyle\varphi_4(z)=\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n^z}$ и покажем, что $\varphi_4(1+it)\neq 0$ для любого действительного t. Имеем

$$\operatorname{Re}\varphi_4(1+it)=\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{1}{n}\right)^{1+it}=\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n}\cdot e^{it\ln\frac{1}{n}}=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n}\big(\cos(t\ln n)-i\sin(t\ln n)\big)\right]=\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n}\cos(t\ln n)\geq$$

$$\geq\left|\textit{Пусть}\quad x=t\ln 2\right|\geq 1+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cos x+$$

$$+\frac{1}{4}(2\cos^2 x-1)=\left|\textit{Пусть}\ u=\cos x\right|=\frac{5}{12}+\frac{1}{2}(u+u^2)\geq$$

$$\geq\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\min_{|u|\leq 1}(u+u^2)=\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{24}.$$

В итоге $\operatorname{Re}\varphi_4(1+it)\geq\frac{7}{24}$. Следовательно, $\varphi_4(1+it)\neq 0$ при $t\in R$. Из проведенных выше вычислений ясно, что $\varphi(z)\equiv\varphi_5(z)$ и $\operatorname{Re}\varphi_5(1+it)\geq\operatorname{Re}\varphi_4(1+it)-\frac{1}{5}\geq\frac{7}{24}-\frac{1}{5}=\frac{11}{120}$.

Таким образом, $\varphi(1+it)\neq 0$ при $t\in R$.

8. <u>Решение</u>.

8.1. Запишем комплексную форму ряда Фурье: $\displaystyle f(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\varphi}$.

Введем новую переменную $z=e^{i\varphi}$. Тогда ряд Фурье для $f(\varphi)$ можно искать как ряд Лорана на окружности $|z|=1$:

$$f(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\varphi}=\left|z=e^{i\varphi}\right|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n .$$

$$f(\varphi)=\ln\left|\sin\tfrac{\varphi}{2}\right|=\ln\left|\frac{e^{\frac{i\varphi}{2}}-e^{-\frac{i\varphi}{2}}}{2i}\right|=\ln\frac{\left|e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right|\left|e^{i\varphi}-1\right|}{2}=\ln\frac{\left|e^{i\varphi}-1\right|}{2}=$$

$$=\operatorname{Re}\ln\frac{1-e^{i\varphi}}{2}=\left|z=e^{i\varphi}\right|=\operatorname{Re}\big(\ln(1-z)-\ln 2\big)=\operatorname{Re}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}-\ln 2\right)=$$

$$=-\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}{n}+\ln 2\right)=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}.$$

8.2. $\ln\left|tg\,\dfrac{\varphi}{2}\right|=-2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)\varphi}{2k+1}$.

9. Доказательство. Выполним вспомогательные построения. Разложим функцию $f(x)=\cos zx$ (z – параметр) на отрезке $[-\pi,\pi]$ в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx .$$

Получим $b_n=0,\quad a_0=\dfrac{2\sin\pi z}{\pi z},\quad a_n=\dfrac{(-1)^n}{\pi}\cdot\dfrac{2z\sin\pi z}{z^2-n^2},\quad n\in N$.

Следовательно,

$$\cos zx=\frac{\sin\pi z}{\pi z}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z\cdot\sin\pi z}{z^2-n^2}\cos nx,\quad x\in[\pi,\pi]. \qquad (*)$$

9.1. В формуле (*) положим $x=\pi$, тогда

$$\cos\pi z=\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z\sin\pi z}{z^2-n^2}\cdot(-1)^n=\frac{\sin\pi z}{\pi}\left[\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\right],$$

откуда следует формула (3.1):

$$\pi\,tg\,\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

9.2. Так как $ctg(iz)=-ictgz$, то из формулы (3.1) получим (3.2).

9.3. В формуле (*) положим $x=0$, тогда

$1 = \dfrac{\sin\pi z}{\pi z} + \dfrac{\sin\pi z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \cdot 2z}{z^2 - n^2}$. Следовательно,

$$\frac{\pi}{\sin\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 2z}{z^2-n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z-n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n} =$$

$= \dfrac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z-n} + \sum_{k=-1}^{-\infty}\dfrac{(-1)^{-k}}{z-k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{z-n}$. Формула (3.3) доказана.

9.4. Так как $\cos\pi\alpha = \sin\left(\pi\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, то из формулы (3.3) получим (3.4).

10. <u>Решение</u>. Так как

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z(z+1)...(z+n)}{n!} = z(z+1)\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(z+2)...(z+n)}{n!}\right]$, то ряд сходится при $z = 0$ и $z = -1$. Далее, используя признак Раабе, получим

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{z_n}{z_{n+1}}\right| - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{|z+n+1|} - 1\right) = -\operatorname{Re} z,$$

следовательно, ряд сходится при $\operatorname{Re} z < -1$.

При $\operatorname{Re} z = -1$ ряд расходится (по признаку Гаусса) всюду, кроме точки $z = -1$.

Ответ : $z = 0$, $z = -1$, $\operatorname{Re} z < -1$.

11. <u>Доказательство</u>. Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(z^k)$ сходится равномерно на любом круге $|z| \le R$, где $0 < R < 1$. Из этого будет следовать утверждение задачи, поскольку все функции $f_k(z) = f(z^k)$ аналитичны в круге $|z| < 1$.

Так как $f(0) = 0$, то $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$. Тогда функция $\dfrac{f(z)}{z}$ является аналитической в круге $|z| < 1$ и, следовательно, $\sup\left\{\dfrac{|f(z)|}{|z|} \;\middle|\; |z| \le \dfrac{1}{2}\right\} = c < \infty$, т.е. $|f(z)| \le c \cdot |z|$ при $|z| \le \dfrac{1}{2}$.

Выберем $n_0 \in N$ настолько большое, что $R^{n_0} \le \dfrac{1}{2}$. Тогда при $|z| \le R, \quad n \ge n_0$ имеем

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} f(z^k)\right| \le \sum_{k=n}^{\infty}\left|f(z^k)\right| \le \sum_{k=n}^{\infty} c\cdot\left|z^k\right| = \frac{c\left|z^n\right|}{1-|z|} \le \frac{c\cdot R^n}{1-R} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Итак, для данного ряда мы построим сходящуюся мажоранту. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(z^k)$ сходится равномерно (и абсолютно) в круге $|z|\le R$ и представляет аналитическую функцию.

12. <u>Решение</u>. Обозначим при $|z|\le 1$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}; \qquad f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=zf'(z);$$

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)=zf_1'(z)$$

(берется ветвь логарифма, соответствующая значению $\ln 1=0$).

Точка $z=1$ является особой точкой функции f. Действительно, если бы ее можно было продолжить на некоторую окрестность U этой точки, то тогда функция f_1 продолжается в U следующим образом: $f_1(z)=zf'(z)$, а функция $f_2(z)=zf_1'(z)$ определяет продолжение f_2 на U. Но функция $f_2(z)=-\ln(1-z)$ не может быть продолжена в U, так как единица является ее особой точкой.

Покажем теперь, что все точки окружности $|z|\le 1$, отличные от точки $z=1$, являются регулярными точками $f(z)$. Более того, f можно продолжить в множество V, образованное вырезом из C луча действительной оси $[1,\infty)$. Это следует из того, что на V определена ветвь функции $-\ln(1-z)$, а функции

$$\tilde f_1(z)=\int_0^z \frac{-\ln(1-u)}{u}\,du,$$

$$\tilde f_2(z)=\int_0^z \frac{\tilde f_1(u)}{u}\,du,$$

где интегрирование ведется по любой жордановой кривой, соединяющей 0 и z и лежащей внутри V (например по отрезку $[0,z]$), являются продолжением функций f_1 и f соответственно на V.

Итак, единственной особой точкой функции f на окружности $|z|=1$ является точка $z=1$.

13. <u>Решение</u>.

1) Допустим, что равенство $\lim\limits_{|z|\to 1-0}|f(z)| = +\infty$ выполнено для некоторой аналитической в круге $|z|<1$ функции *f*. Тогда существует число $r_0 < 1$ такое, что $|f(z)| < 0$ при $r_0 < |z| < 1$, т.е. все нули *f* заключены в замкнутом круге $|z| \le r_0$. Так как f аналитична в этом круге, то этих нулей имеется конечное число. Пусть $z_1, ..., z_k$ – все нули *f* в круге $|z| \le r_0$, а следовательно, и в круге $|z| < 1$, причем каждый нуль выписан столько раз, какова его кратность. Тогда функция $g(z) = \dfrac{(z-z_1)...(z-z_k)}{f(z)}$ является аналитической в круге $|z|<1$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{|z|\to 1-0}|g(z)| = 0$. В силу принципа максимума отсюда следует, что $g \equiv 0$ в круге $|z|<1$, но это невозможно, так как $g(z) \ne 0$ в любой точке z, отличной от $z_1, ..., z_k$.

2) Оценим $|f(z)|$ для $z = 2^{-\frac{1}{(2n)!}}$.

Разобъем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 5^k z^{(2k!)}$ на три части:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} 5^k z^{(2k)!}\right| < \sum_{k=0}^{n-1} 5^k < \frac{5^n}{4};$$

$$\left|5^n z^{(2n)!}\right| = \frac{5^n}{2};$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} 5^k z^{(zk)!}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} 5^k \left|z^{(2k)!}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} 5^k \left|z^{(2n)!(2n+1)2k}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} 5^k \left|z^{(2n)!6k}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} 5^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6k} = \frac{5}{59}\cdot\left(\frac{5}{64}\right)^n < \frac{5^n}{10}.$$

Следовательно,

$$|f(z)| \ge \left|5^n z^{(2n)!}\right| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} 5^k z^{(2k)!}\right| - \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} 5^k z^{(2k)!}\right| >$$

$$> \frac{5^n}{2} - \frac{5^n}{4} - \frac{5^n}{10} > \frac{5^n}{10}.$$

Полагая $r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(2n)!}}$, мы получаем $\inf\limits_{|z|=r_n} |f(z)| > \frac{5^n}{10}$, и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{|z|=r_n} |f(z)| = \infty$, откуда следует (3.5).

14. Доказательство. В неравенствах Коши $|c_n| \le \frac{M_f(r)}{r^n}$ возьмем такое r, чтобы оценка была наилучшей. Для этого найдем минимум правой части $g(r) = \frac{e^{Ar^m}}{r^n}$ по r.

В результате получим, что $g_{\min}(r) = g\left(\left(\frac{n}{Am}\right)^{\frac{1}{m}}\right) = \left(\frac{Ame}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$.

Следовательно, $|c_n| \le \left(\frac{Ame}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$ для всех достаточно больших n.

15. Доказательство.

$$M_f(r) \le \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Aem}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot r^n + P_n(r),$$

где $P_n(r)$ – полином, добавленный, чтобы компенсировать конечное число членов, для которых $n < n_0$.

Имеем, $|P_n(r)| < e^{\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)r^n}$, а заменяя $\frac{n}{m}$ ближайшим целым k, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Aemr^m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \le C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Ae}{k} r^m\right)^k,$$ где C – некоторая константа.

По формуле Стирлинга $\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sim k!$, а $\sqrt{2\pi k} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2A}\right)^k$ для достаточно больших k, поэтому оценка продолжается так:

$$C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)r^m\right]^k}{k!} < e^{(A+\varepsilon)r^m}.$$

16. Решение.

1) Пусть $n = 2$. Тогда перепишем тождество (3.6) в виде

$$(f+ig)(f-ig)\equiv 1.$$

Обозначим $h_1 = f+ig,\quad h_2 = f-ig,\quad h_3 = h_1' h_2 = \dfrac{h_1'}{h_1}$ (в силу (3.6)). Функции h_1, h_2, h_3 являются целыми; значит, целой функцией будет и интеграл от функции h_3:

$$i\varphi(z) = \ln h_1(0) + \int_0^z h_3(v)dv$$

(в качестве $\ln h_1(0)$ берется произвольное число из $Ln\ h_1(0)$).

Заметим, что $\left(e^{i\varphi(z)}\right)' = e^{i\varphi(z)}\cdot i\varphi'(z) = e^{i\varphi(z)}\cdot\dfrac{h_1'(z)}{h_1(z)}$, $\left(\dfrac{e^{i\varphi(z)}}{h_1(z)}\right)' = 0$, откуда следует, что $\dfrac{e^{i\varphi(z)}}{h_1(z)} = const$, а так как $e^{i\varphi(0)} = h_1(0)$, мы получаем, что $e^{i\varphi(z)} \equiv h_1(z)$. Тогда $h_2(z) \equiv e^{-i\varphi(z)}$,

$$f(z) = \frac{e^{i\varphi(z)} + e^{-i\varphi(z)}}{2} = \cos\varphi(z),$$

$$g(z) = \frac{e^{i\varphi(z)} - e^{-i\varphi(z)}}{2i} = \sin\varphi(z).$$

Таким образом, если целые функции f и g удовлетворяют тождеству $f^2+g^2\equiv 1$, то существует целая функция $\varphi(z)$такая, что $f(z)=\cos\varphi(z)$, $g(z)=\sin\varphi(z)$ при всех целых $z\in C$. Обратно, любая целая функция $\varphi(z)$ определяет функции $f(z)=\cos\varphi(z)$ и $g(z)=\sin\varphi(z)$, удовлетворяющие данному тождеству.

2) Пусть $n\geq 3$. Покажем, что в этом случае f и g – константы.

Если это не так, то $g\not\equiv 0$, $\dfrac{f}{g}$ – мероморфная в C функция, не принимающая по крайней мере *n* значений – $\sqrt[n]{-1}$. Но по теореме Пикара любая мероморфная в C функция, отличная от постоянной, принимает все комплексные значения из $\overline{C}$, за исключением, быть может, двух. Следовательно, $\dfrac{f}{g}\equiv c = const$. Значит, $1\equiv f^n + g^n = (c^n+1)g^n$, т.е. $g\equiv const$ и $f\equiv const$.

17. Решение. Покажем, что если $P(z)$ – произвольный многочлен, то

$$\left\| P(z) - \frac{1}{z^4} \right\|_C = \max_{|z|=1} \left\{ \left| P(z) - \frac{1}{z^4} \right| \right\} \geq 1.$$

А это будет означать, что функция $\frac{1}{z^4}$ не может быть равномерно приближена многочленами на окружности $|z| = 1$ со сколь угодно большой точностью.

По формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} P(z) \cdot z^3 dz = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 1,$$

и, следовательно,

$$1 = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} (P(z) - \tfrac{1}{z^4}) \cdot z^3 dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \left| P(z) - \tfrac{1}{z^4} \right| \cdot |dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |dz| \cdot \left\| P(z) - \tfrac{1}{z^4} \right\|_C = \left\| P(z) - \tfrac{1}{z^4} \right\|_C.$$

18. <u>Указание</u>. Применить теорему о вычетах к интегралу, взятому по границе полукруга $\operatorname{Im} z > 0, \quad |z| < R$, а затем перейти к пределу при $R \to \infty$.

<u>Ответ</u>: $-\frac{2\pi}{e}$.

19. <u>Ответ</u>: $\operatorname{Im} w > 0, \quad w \notin \left[0, sh\frac{\pi}{2}\right]$.

4. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1.1. (РТИ–80) Вычислить $\iint_D x^2 y dx dy$, где D ограничена линиями $y = x^3$, $y = 4x^3$, $y = 3x$, $y = 5x$, $x > 0$.

1.2. (РТИ–86) Вычислить $\iint_D (x^2 - y^2) e^{x^2 + y^2} dx dy$, где D ограничена линиями: $x = y, \quad y = -x, \quad x + y = 1, \quad x - y = 1$.

1.3. (БПИ–85) Вычислить $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{y^2} dy$.

1.4. Вычислить $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, где D ограничена линиями: $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y = \ell x$, $y = mx$, $0 < a < b$; $0 < \ell < m$; $x > 0$.

2.1. Доказать неравенство $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e^{\sqrt{x^4+y^4}} dxdy > 1 + \frac{\sqrt{2}}{9}$.

2.2. (БПИ–80) Что больше: $\int\limits_0^1 x^x dx$ или $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy} dxdy$?

3.1. Найти площадь поверхности вращения куба с ребром a вокруг одной из диагоналей куба.

3.2. Найти площадь части поверхности сферы

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. (РТИ–79) Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2(1+\sin 2\varphi\cdot\cos\alpha)} \cdot rdr$.

5.1. (РТИ–83) Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\, dxdydz$, где

$V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

5.2. (РТИ–91) Вычислить $\iiint\limits_V \ln(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$, где V – шар радиусом R с центром в начале координат.

5.3. (РТИ–80) Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2} = R^{3/2}$.

6.1. (РТИ–91) Векторное поле образовано силой $F = k/r$, направление которой составляет угол $\pi/2$ с направлением радиуса-вектора точки приложения. Найти работу поля при перемещении точки массы m по дуге окружности $x^2 + y^2 = a^2$ из точки $(a, 0)$ в точку $(0, a)$, $(x \ge 0,\quad y \ge 0)$.

6.2. (РТИ–90) Найти $\overline{F}$, если $div\,\overline{F} = 2x - y$; $rot\,\overline{F} = -z\,\bar{i}$.

Ответы, указания и решения к разд. 4

1.1. $\dfrac{31}{720}\left(625\sqrt{5}-81\sqrt{3}\right)$.

1.2. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{e}-1\right)^2$. Замена переменных – поворот системы координат на угол $\alpha=-45^\circ$: $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u+\dfrac{1}{\sqrt{2}}v;\quad y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}u+\dfrac{1}{\sqrt{2}}v$ приводит к интегралу $\iint\limits_{D'}2uve^{u^2+v^2}\,dudv$, где D' – квадрат: $0\le x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2};\quad 0\le y\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.3. $\dfrac{1}{2}(e-1)$. Поменять порядок интегрирования.

1.4. Замена переменных $y=\xi x^3$, $y=\eta x$ или $x=\eta^{1/2}\cdot\xi^{1/2},\quad y=\eta^{3/2}\cdot\xi^{-1/2}$ с якобианом $J=-\dfrac{1}{2}\xi^{-2}\cdot\eta$ приводит к интегралу $I=\int\limits_a^b d\xi\int\limits_\ell^m\left(\xi^{-1/2}\cdot\eta^{1/2}\right)^2\cdot\left(\xi^{-1/2}\cdot\eta^{3/2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\xi^{-2}\eta d\eta=$

$$=\frac{2}{45}\cdot\frac{\sqrt{b^5}-\sqrt{a^5}}{\sqrt{a^5b^5}}\left(\sqrt{m^9}-\sqrt{\ell^9}\right).$$

2.2. $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1(xy)^{xy}dx$. Сделаем замену во внутреннем интеграле: $xy=z$, $dx=\dfrac{1}{y}dz$. Получим: $I=\int\limits_0^1\dfrac{dy}{y}\int\limits_0^y z^z dz=\int\limits_0^1 F(y)\dfrac{dy}{y}$, где $F(y)=\int\limits_0^y z^z dz$. Полученный интеграл возьмем по частям, полагая $u=F(y),\quad dv=\dfrac{dy}{y}$. Тогда

$$I=\ln y\cdot\int\limits_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1}-\int\limits_0^1\ln y\cdot y^y dy=-\int\limits_0^1\ln y\cdot y^y dy.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy - \int_0^1 x^x\,dx = -\int_0^1 y^y(\ln y + 1)dy = -\int_0^1 d(y^y) = -(y^y)\Big|_0^1 = -1 + 1 = 0.$$

3.1. $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{3}}$.

5.2. $\dfrac{4}{3}\pi R^3\left(\ln R^2 - \dfrac{2}{3}\right)$.

5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. В ящике лежат красные и черные носки. Если из ящика вытягиваются два носка, то вероятность того, что оба красные, равна $\frac{1}{2}$.

а) Каково минимально возможное число носков в ящике?

б) Каково минимально возможное число носков в ящике, если число черных носков четное?

2. Чтобы подбодрить сына, делающего успехи в игре в теннис, отец обещает ему приз, если он выиграет подряд по крайней мере две теннисные партии против своего отца и клубного чемпиона по одной из схем: отец – чемпион – отец или чемпион – отец – чемпион по выбору сына. Чемпион играет лучше отца. Какую схему следует выбрать сыну?

3. Сколько в среднем раз надо бросать кость до появления шестерки?

4. Часто приходится слышать, что некто при игре в бридж получил на руки 13 пик. Какова вероятность, при условии, что карты хорошо перетасованы, получить 13 карт одной масти ? (Каждый из четырех игроков в бридж получает 13 карт из колоды в 52 карты).

5. Три узника A, B и C одинаково хорошего поведения ходатайствовали об освобождении на поруки. Администрация решила освободить двух из трех, что стало известно узникам, которые, однако, не знают, кто именно эти двое. У заключенного A в охране есть друг, который знает, кого отпустят на свободу, но A считает неэтичным осведомиться у охранника, будет ли он, A, освобожден. Все же A хочет спросить об имени одного узника, отличного от самого A, который будет отпущен на свободу. Прежде чем спрашивать, он оценивает вероятность своего освобождения как $\frac{2}{3}$. A думает, что если охранник скажет «B бу-

дет освобожден», то его шансы уменьшатся до $\frac{1}{2}$, так как в этом случае будут освобождены либо А и В, либо В и С. Найдите ошибку в расчетах А.

6. Восемь юношей и семь девушек независимо приобрели по одному билету в одном и том же театральном ряду, насчитывающем 15 мест. Какое среднее число смежных мест занимают в этом ряду пары?

7. В теннисном турнире участвуют 8 игроков. Номер, вытаскиваемый игроком наудачу, определяет его положение на турнирной лестнице.

Предположим, что лучший игрок всегда побеждает второго по мастерству, а тот, в свою очередь, побеждает всех остальных. Проигрывающий в финале занимает второе место. Какова вероятность того, что это место займет второй игрок?

8. Какова вероятность выпадения равно 50 гербов при бросании 100 монет?

9. С. Пенайс предложил Ньютону следующую задачу: какое из событий более вероятно – а) появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании 6 костей, б) появление хотя бы двух шестерок при подбрасывании 12 костей или в) появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей?

10. А, В и С сходятся для трехсторонней дуэли. Известно, что для А вероятность попасть в цель равна 0,3, для С – 0,5, а В стреляет без промаха. Дуэлянты могут стрелять в любого противника по выбору. Первым стреляет А, затем В, дальше С и т.д. в циклическом порядке (раненый выбывает из дуэли), пока лишь один человек не останется невредимым. Какой должна быть стратегия А?

11. Две урны содержат красные и черные шары. Урна А содержит 2 красных и 1 черный шар, урна В – 101 красный и 100 черных шаров. Наудачу выбирается одна из урн, и вы получаете награду, если правильно называете урну после вытаскивания из нее двух шаров. После вытаскивания первого шара и определения его цвета вы решаете, вернуть ли в урну шар перед вторым вытаскиванием. Какой должна быть ваша стратегия?

12. Если хорда выбирается наудачу в заданом круге, то какова вероятность того, что ее длина больше радиуса круга?

13. Дуэли в Городе осторожности редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибывает на место встречи между 5 и 6 часами утра и, прождав соперника 5 минут, удаляется. В случае же прибытия последнего в эти пять минут дуэль состоится. Какая часть дуэлей действительно заканчивается поединком?

14. Чеканщик кладет m фальшивых монет в ящик, содержащий всего n монет. Король, подозревая чеканщика, извлекает случайным образом по одной монете из каждого из n ящиков и проверяет их.

а) Какова вероятность того, что в выборке из n монет ровно r фальшивых?

б) Исследовать поведение этой вероятности при возрастании n и фиксированных r и m.

15. Из хорошо перетасованной колоды в 52 карты, содержащей четыре туза, извлекаются сверху карты до появления первого туза. На каком месте в среднем появляется первый туз?

16. Если стержень помечается случайным образом на две части, то:

а) какова средняя длина меньшего куска?

б) какова среднее отношение длины короткого куска к длине длинного куска ?

17. Какова вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2bx + c = 0$ вещественны?

18. Поток транспорта через пешеходный переход таков, что вероятность проезда машины в течение любой заданной секунды постоянна и равна p; известно также, что нет связи между проездом машин в разное время. Предположим, что пешеход может перейти улицу, если ни одна машина не будет проезжать в течение следующих трех секунд. Найти вероятность того, что он должен ждать ровно $k = 0, 1, 2, 3, 4$ с.

19. Двое бросают симметричную монету n раз. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов.

20. Для последовательностей испытания Бернулли с вероятностью успеха p найти вероятность того, что a успехов произойдут прежде, чем b неудач. (Эта задача имеет значение для классической теории игр в связи с вопросом о том, как делить ставку, когда игра прервана в момент, когда одному игроку не хватает до победы a очков, а второму – b).

Ответы, указания и решения к разд. 5

1. Решение. Пусть в ящике r красных и b черных носков. Вероятность того, что оба носка красные, равняется $\frac{1}{2}$, или $\frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{r+b-1} = \frac{1}{2}$. Заметим, что

$\frac{r}{r+b} > \frac{r-1}{r+b-1}$ при $b > 0$.

Отсюда следует

$$\left(\frac{r}{r+b}\right)^2 > \frac{1}{2} > \left(\frac{r-1}{r+b-1}\right)^2,$$

$$\frac{r}{r+b} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{r-1}{r+b-1}.$$

Из первого равенства имеем

$$r > \frac{1}{\sqrt{2}}(r+b), \text{ или } r > (\sqrt{2}+1)b.$$

Из второго неравенства находим $(\sqrt{2}+1)b > r-1$, так что $(\sqrt{2}+1)b+1 > r > (\sqrt{2}+1)b$. Для $b=1$ получаем $2{,}414 < r > 3{,}414$, так что можно взять $r=3$. При $r=3$, $b=1$ имеем p (два красных носка) $= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$. Таким образом, минимальное число носков есть 4.

Аналогично, для каждого четного значения b находим подходящее значение r и определяем условную вероятность. При $b=6$ и $r=15$ p (два красных носка) $= \frac{15}{21}\cdot\frac{14}{20} = \frac{1}{2}$. Таким образом, если b четное, минимальное число носков равно 21.

2. <u>Решение</u>. Пусть p_1 есть вероятность того, что сын выиграет у отца, а p_2 – вероятность того, что он выиграет у чемпиона. Тогда вероятность выигрыша по схеме: отец – чемпион – отец равна

$$p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 (1-p_1) + (1-p_1) p_2 p_1 = p_1 p_2 (2-p_1).$$

Вероятность выигрыша по схеме: чемпион – отец – чемпион равна

$$p_2 p_1 p_2 + p_2 p_1 (1-p_2) + (1-p_2) p_1 p_2 = p_1 p_2 (2-p_2).$$

Так как $p_1 > p_2$ и $2-p_1 < 2-p_2$, сыну нужно выбрать вариант чемпион – отец – чемпион.

3. <u>Решение</u>. Среднее число испытаний до первого успеха равно

$$m = 2pq + 3pq^2 + 4pq^3 + \ldots$$

Тогда $qm = pq + 2pq^2 + 3pq^3 + \ldots$

Вычитая второе выражение из первого, находим

$$m - qm = p + pq + pq^2 + \ldots = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

$$m(1-q) = 1, \quad mp = 1 \text{ и } m = \frac{1}{p}.$$

В нашем случае $p = \frac{1}{6}$. Так что $m = 6$.

<u>4. Решение</u>. Для получения 13 карт одной масти нужно, вытащив сначала любую из 52 карт, извлечь затем все карты той же масти (которых всего 13 штук). Число способов получения масти равно $52\cdot 12\cdot 11\ldots\cdot 1 = 52\cdot 12!$ Общее же число равно $52.51.50....40 = \frac{52!}{39!}$. Искомая вероятность равна $\frac{52\cdot 12!\cdot 39!}{52!} \approx 1{,}6\cdot 10^{-11}$. Эта вероятность ничтожна мала.

5. Эта вероятность равна $\frac{2}{3}$. Узник неправильно построил пространство элементарных событий. Нужно учитывать ответ охранника.

6. Решение. Если первые два места в ряду заняты лицами разных полов, то у нас уже имеется искомая пара. Вероятность этого события равна

$$\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}+\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14}=\frac{8}{15}.$$

Более того, $\frac{8}{15}$ есть и среднее число пар на первых двух местах, так как

$$\frac{8}{15}\cdot 1+\frac{7}{15}\cdot 0=\frac{8}{15}.$$

Такое же рассуждение применимо к каждой паре смежных мест. Для определения среднего числа пар эту величину надо умножить на число смежных мест, равное 14, что дает $\frac{112}{15}$.

7. Решение. Второй по мастерству игрок может занять второе место лишь в том случае, когда он находится в половине турнирной лестницы, не занимаемой лучшим игроком.

Если в турнире участвуют 2^n игроков, то в половине турнирной лестницы, не занимаемой лучшим игроком, 2^{n-1} начальных ступеней, а всего имеется 2^n-1 начальных ступеней. Таким образом, в турнире с 2^n игроками второй по мастерству может с вероятностью $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$ занять второе место. При $2^n=8$ искомая вероятность равна $\frac{4}{7}$.

8. $P=C_{100}^{50}\cdot p^{50}\cdot q^{50}\approx 0{,}08$.

9. Решение. Так как при бросании 6 костей в среднем появляется одна шестерка, при бросании 12 костей это среднее число равно двум и при бросании 18 костей – трем, то часто считают, что вероятности указанных событий равны. Иногда полагают, что эта вероятность равна $\frac{1}{2}$.

Для значительного числа костей распределение появления шестерок приближенно симметрично относительно среднего и вероятность появления этого среднего мала. Эти условия не выполняются при небольшом числе бросаний.

Вероятность появления x шестерок при n бросаниях равна $C_n{}^x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}$, $x = 0, 1, ..., n$. Вероятность появления хотя бы одной шестерки при шести бросаниях равна $1 - C_6^{\circ} \left(\frac{1}{6}\right)^{\circ} \left(\frac{5}{6}\right)^{\circ} \approx 0{,}665$. При бросании $6n$ костей вероятность появления не менее n шестерок равняется

$$1 - \sum_{x=0}^{n-1} C_{6n}^x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}.$$

Ньютону пришлось самому вычислять эти вероятности.

Следующая таблица дает вероятности получения числа шестерок, не меньшего, чем математическое ожидание числа их появления в $6n$ бросаниях.

$6n$	6	12	18	24	30	600	900
n	1	2	3	4	5	100	150
p	0,665	0,619	0,597	0,584	0,576	0,517	0,514

Итак, Пенайсу следовало предпочитать пари с шестью бросаниями пари с большим числом бросаний.

10. Решение. А стрелять в С не имеет смысла. Если же А выстрелит в В и промахнется, то В выведет из строя более опасного С первым и А может стрелять В с вероятностью попадания 0,3. Если же А попадет в В, то С и А будут перестреливаться до первого попадания. Шансы выигрыша А равны

$$0{,}5 \cdot 0{,}3 + (0{,}5)^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + (0{,}5)^3 \cdot (0{,}7)^2 \cdot 0{,}3 + ... = \frac{3}{13} < \frac{3}{10}.$$

Таким образом, А должен стрелять в воздух, а затем стараться попасть в В.

11. Указание. Если первый вытянутый шар – красный, то неважно, из какой урны он вынут, так как теперь в этой урне будет поровну красных и черных шаров и второй шар не даст оснований для решения. Поэтому, если сначала вытянут красный шар, следует вернуть его в урну перед вторым извлечением. Если же вынут черный шар, то лучше не возвращать его в урну.

При такой стратегии вероятность правильного решения приближенно равна 0,64. Если вытягивать оба шара без возвращения, то вероятность угадать приблизительно равна $\frac{5}{8}$, а при возвращении $\frac{21{,}5}{36}$.

12. Указание. Пока выражение «наудачу» не уточнено, задача не имеет определенного ответа.

Пусть радиус круга равен 2.

а) Допустим, что расстояние хорды от центра круга равномерно распределено между 0 и 2. Тогда искомая вероятность равна $\sqrt{3}/2$.

б) Пусть середина хорды равномерно распределена во внутренности круга. В этом случае вероятность равна $0{,}75$.

в) Допустим, что хорда определяется двумя точками на окружности исходного круга. Тогда искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$.

13. <u>Указание</u>. Использовать геометрическое определение вероятности. Шансы на поединок равны $\frac{23}{144}$.

14. <u>Решение</u>. Каждая из проверяемых монет фальшива с вероятностью $\frac{m}{n}$. Искомая вероятность отвечает биномиальному распределению. $p = C_n{}^2\left(\frac{m}{n}\right)^2\left(1-\frac{m}{n}\right)^2$. Исследуем поведение этой вероятности при возрастании n и фиксированных r и m.

$p = \frac{1}{r!}\,\frac{n(n-1)...(n-z+1)}{n^2}\cdot m^r\left(1-\frac{m}{n}\right)^n\left(1-\frac{m,}{n}\right)^{-r}$ с ростом n $\frac{n(n-1)...(n-z+1)}{n^2}$ стремится к 1, $\left(1-\frac{m}{n}\right)^n$ стремится к e^{-m} и $\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-r}$ стремится к 1. Поэтому при больших n $p \approx \frac{e^{-m}m^2}{r!}$.

15. <u>Решение</u>. Естественно считать, что принцип симметрии сохраняется и для дискретных распределений. Четыре туза делят колоду на пять частей, каждая из которых содержит от 0 до 48 карт. Согласно принципу симметрии средняя длина каждой части равна $\frac{48}{5}=9{,}6$. Последующей картой должен быть туз, который является, таким образом, в среднем 10,6 картой.

16. <u>Решение</u>.

а) Случайность разлома стержня означает равномерную распределенность точки деления. Таким образом, вероятность того, что точка разлома находится в левой или правой половине стержня, одинакова. Если эта точка находится в левой половине, то левый кусок и является меньшим, его средняя длина равна половине от этой половины, что составляет четвертую часть длины стержня. Эти рассуждения остаются в силе, когда точка деления на правой половине, так что ответ таков: одна четверть длины стержня.

б) Можно считать, что точка перелома лежит в правой половине стержня. Тогда $\frac{1-x}{x}$ является отношением короткого куска к длинному при условии, что сам стержень имеет единичную длину. Так как величина x равномерно распределена на отрезке $\left[\frac{1}{2};1\right]$, то среднее отношение равно $2\int\limits_{1/2}^{1}\frac{1-x}{x}dx =$ $= 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386$.

17. <u>Решение</u>. Для того чтобы вопрос задачи имел смысл, предположим, что точка (b,c) равномерно распределена на квадрате с центром в начале координат и стороной 2B. Решим задачу при фиксированном B, а затем устремим B к бесконечности.

Для того чтобы уравнение имело вещественные корни, необходимо и достаточно, чтобы $b^2 - c \ge 0$. Если построить параболу $b^2 = c$, то нетрудно подсчитать, что отношение площади области, в которой квадратный трехчлен имеет комплексные корни, к площади всего квадрата равно $\frac{1}{3\sqrt{B}}$. С ростом B $\frac{1}{3\sqrt{B}}$ стремится к нулю, так что вероятность того, что корни вещественные, стремится к 1.

Следует отметить, что эта задача отличается от такой же задачи, связанной с уравнением $ax^2 + 2bx + c = 0$. Если a, b и c независимы и распределены равномерно в некотором кубе, то $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ уже зависимы и распределены неравномерно.

18. q^3 при $k = 0$; pq^3 при $k = 1, 2, 3$ и $pq^3 - pq^6$ при $k = 4$.

19. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 \cdot 2^{-2n} = C_{2n}^n \cdot 2^{-2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ для больших n.

20. $\sum\limits_{k=a}^{a+b-1} C_{a+b-1}^k \cdot p^k q^{a+b-1-k}$. Этот результат можно записать также в виде $p^a \sum\limits_{k=0}^{b-1}\left(C_{a+k-1}^k\right)q^k$, где k-е слагаемое равно вероятности того, что наступит a-й успех.

Св. план 2003, поз. 47

Учебное издание

СБОРНИК ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 3-х частях

Часть 3

Составители:
Липницкий Валерий Антонович,
Цегельник Владимир Владимирович,
Кобринец Николай Иванович,
Степанова Татьяна Сергеевна

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик
Компьютерная верстка И.Э. Антонович

Подписано в печать 04.06.2003.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Печать ризографическая.	Гарнитура «Таймс».	Усл. печ. л. 3,37.
Уч.-изд. л. 1,9.	Тираж 100 экз.	Заказ 151.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Лицензия ЛП № 156 от 30.12.2002
Лицензия ЛВ № 509 от 03.08.2001
220013, Минск, П. Бровки, 6.