Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
Кафедра высшей математики

Ж.А. Черняк, Т.С. Степанова

Руководство к выполнению контрольных работ по высшей математике

Для студентов
экономических специальностей БГУИР
заочной формы обучения

Минск 2002

УДК 517 (075)
ББК 22.1 я 73
Ч 49

Черняк ЖА.

Ч49 Руководство к выполнению контрольных работ по высшей математике для студентов экономических специальностей БГУИР заочной формы обучения/ Ж.А. Черняк, Т.С. Степанова - Мн.: БГУИР, 2002. - 82 с.

Настоящая работа содержит некоторые теоретические сведения, а также подробные решения типовых задач каждой из 10-ти контрольных работ, приведенных в учебном пособии «Методические указания и контрольные работы по высшей математике для студентов специальности "Экономика и управление предприятием" заочной формы обучения».

УДК 517 (075)
ББК 22.1 я 73

Содержание

Введение

Настоящее пособие адресовано студентам-экономистам заочной формы обучения, которые осваивают высшую математику в значительной степени самостоятельно. Пособие состоит из 10 разделов, пронумерованных и озаглавленных в соответствии с номерами и темами контрольных работ, которые приведены в «Методических указаниях и контрольных работах по высшей математике для студентов специальности “Экономика и управление предприятием” заочной формы обучения». Сост. Ж.А. Черняк – Мн.: БГУИР, 2000.

Цели данного пособия:

- помочь студенту в выборе учебной литературы;
- сконцентрировать внимание на тех математических понятиях и методах, которые являются основными в рамках данного раздела;
- привести подробные демонстрационные решения базовых задач каждого раздела, максимально приближенных к задачам, предлагаемым в контрольной работе для самостоятельного решения.

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо изучить соответствующие разделы курса высшей математики (они указаны в начале каждой главы нашего пособия), обращая особое внимание на приведенные в списке важнейшие понятия и методы. После этого нужно разобраться в решениях демонстрационных задач из блока обучающих задач с решениями, а лишь затем приступать к решению задач из своего варианта контрольного задания.

Если студент испытывает затруднения при освоении теоретического материала или при решении задач, он может получить консультацию на кафедре высшей математики или в учебно-консультационных пунктах.

Контрольная работа №1

Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

Литература: [1], гл.1, §1-3, гл. 2,3, §1-3; [2], гл.1, §1-3;
[5], ч. I, §1.1-1.5; [7], гл.4,7,9; [9], гл.3.

Целью выполнения контрольной работы №1 является овладение основными математическими понятиями, приемами и методами, перечисленными в приведенном ниже списке.

Основные понятия: векторы; базис пространства; прямая; плоскость; плоские кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола).

Основные приемы и методы:

- действия над векторами; скалярное, векторное, смешанное произведения векторов;
- способы построения уравнений прямой на плоскости и в пространстве;
- способы составления уравнений плоскости;
- методы определения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Блок обучающих задач с решениями

Задача 1.1. Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 7\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k}$ и $\bar{d} = -\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$. Требуется:

1) вычислить скалярное произведение векторов $2\bar{b}$ и $-\bar{c}$;
2) найти модуль векторного произведения векторов $3\bar{a}$ и $4\bar{b}$;
3) проверить коллинеарность и ортогональность векторов $2\bar{c}$ и $\bar{a}$;
4) убедиться, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис;
5) найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

Решение: 1) Вычислим скалярное произведение векторов $2\bar{b}$ и $-\bar{c}$.

Найдем векторы $2\bar{b} = 2\bar{i} + 4\bar{k}$ и $-\bar{c} = -7\bar{i} - 6\bar{j} + \bar{k}$.

Согласно формуле

$(\bar{l}, \bar{m}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, где $\bar{l}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{m}(x_2, y_2, z_2)$,

скалярное произведение векторов $2\bar{b}$ и $-\bar{c}$ будет равно

$$(2\bar{b}, -\bar{c}) = 2 \cdot (-7) + 0 \cdot (-6) + 4 \cdot 1 = -10.$$

2) Найдем модуль векторного произведения векторов $3\bar{a} = (9, -6, 12)$ и $4\bar{b} = (4, 0, 8)$.

Обозначим $\bar{c}_1 = 3\bar{a} \times 4\bar{b}$.

Прежде всего, найдем координаты вектора $\bar{c}_1$:

$$\overline{c}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 9 & -6 & 12 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} -6 & 12 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -48\overline{i} - 24\overline{j} + 24\overline{k}.$$

Тогда длина вектора $\left|\overline{c_1}\right| = \sqrt{(-48)^2 + (-24)^2 + (24)^2} = 24\sqrt{6}$.

3) Проверим коллинеарность и ортогональность векторов $2\overline{c}$ и $\overline{a}$.

Два вектора $\overline{l}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{m}(x_2, y_2, z_2)$ будут коллинеарными, если их координаты пропорциональны, т.е. $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$. Векторы $\overline{l}$ и $\overline{m}$ будут ортогональны, если их скалярное произведение $\overline{l} \cdot \overline{m}$ равно нулю, т.е. $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Проверим, выполняются ли эти условия для векторов $2\overline{c} = 14\overline{i} + 12\overline{j} - 2\overline{k}$ и $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$.

Очевидно, что векторы $2\overline{c}$ и $\overline{a}$ неколлинеарны, т.е. $\overline{a} \,\|\, 2\overline{c}$, т.к. $\dfrac{14}{3} \neq \dfrac{12}{-2} \neq \dfrac{-2}{4}$.

Проверяем условие ортогональности: $14 \cdot 3 + 12 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 = 10 \neq 0$, следовательно, $\overline{a}$ и $2\overline{c}$ неортогональны, т.е. $\overline{a} \not\perp 2\overline{c}$.

4) Убедимся, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис. Для этого вычислим определитель третьего порядка Δ, строками которого являются координаты векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$. Если он не равен нулю, то тройка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ является базисом.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 16 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 16 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot (11 - 2 \cdot 16) = -42,$$

$\Delta = -42 \neq 0$, следовательно, векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис пространства $\boldsymbol{R}^3$.

5) Найдем координаты вектора $\overline{d}$ в базисе $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Обозначим искомые координаты через α, β и γ, т.е.

$$\overline{d} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c}\ .$$

Тогда $-\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k} = \alpha \cdot (3\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}) + \beta \cdot (\overline{i} + 2\overline{k}) + \gamma \cdot (7\overline{i} + 6\overline{j} - \overline{k})$.

Отсюда, собирая коэффициенты при ортах $\overline{i}, \overline{j}$ и $\overline{k}$, получаем систему трех уравнений для определения чисел α, β и γ:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 7\gamma = -1 \\ -2\alpha + 0\cdot\beta + 6\gamma = 3 \\ 4\alpha + 2\beta - \gamma = 1 \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера $\alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta}$, $\beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta}$, $\gamma = \dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta}$,

где Δ - определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -42$,

$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ - определитель, полученный из Δ заменой в нем первого столбца на столбец коэффициентов вектора $\overline{d}$ в базисе $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$,

$\Delta_\alpha = -1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 63$.

Аналогично составляем и вычисляем определители

$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -147$ и $\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Тогда $\alpha = \dfrac{63}{-42} = -\dfrac{3}{2}$, $\beta = \dfrac{-147}{-42} = \dfrac{7}{2}$, $\gamma = \dfrac{0}{-42} = 0$.

Итак, в базисе $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ вектор $\overline{d} = -\dfrac{3}{2}\overline{a} + \dfrac{7}{2}\overline{b}$.

<u>Ответ:</u> 1) $(2\overline{b}, -\overline{c}) = -10$; 2) $\left|3\overline{a} \times 4\overline{b}\right| = 24\sqrt{6}$; 3) векторы $2\overline{c}$ и $\overline{a}$ не являются ни коллинеарными, ни ортогональными; 4) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис; 5) $\overline{d} = -\dfrac{3}{2}\overline{a} + \dfrac{7}{2}\overline{b}$ в базисе $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

<u>Задача 1.2.</u> Даны вершины $A(2,\ -3)$, $B(-4,\ 1)$, $C(12,\ 5)$ треугольника ABC.

Требуется найти:

1) уравнение стороны AB;
2) уравнение высоты CH и длину этой высоты;
3) уравнение медианы AM;

4) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;
5) уравнение прямой, параллельной стороне *AB* и проходящей через вершину *C*;
6) внутренний угол при вершине *A* и внешний угол при вершине *C*.

<u>Решение:</u> 1) Найдем уравнение стороны *AB*.

Воспользуемся выражением $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$ для уравнения прямой на плоскости, проходящей через 2 заданные точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$. Тогда уравнение стороны *AB* имеет вид $\dfrac{x-2}{-4-2}=\dfrac{y-(-3)}{1-(-3)}$ или $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$.

2) Найдем уравнение высоты *CH* и длину *CH*.

Уравнение высоты СН будем составлять в виде $y-y_0=k(x-x_0)$, где (x_0,y_0)- координаты точки прямой (возьмем точку $C(12{,}5)$), *k* – угловой коэффициент прямой *CH*.

Так как *CH* – высота, то прямая *CH* перпендикулярна прямой *AB* и, следовательно, угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением $k_1\cdot k=-1$.

Угловой коэффициент прямой *AB* $k_1=-\dfrac{2}{3}$, $\Rightarrow k=\dfrac{3}{2}$. Тогда уравнение прямой *CH* имеет вид: $y=\dfrac{3}{2}(x-12)+5$ или $y=\dfrac{3}{2}x-13$.

Найдем координаты точки *H* – это точка пересечения прямых *AB* и *CH*:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}, \\ y=\dfrac{3}{2}x-13. \end{cases}$$

Отсюда $-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{3}=\dfrac{3}{2}x-13,\ \Rightarrow\ x=5\dfrac{3}{13},\ y=-5\dfrac{2}{13}$.

$H\left(5\dfrac{3}{13},-5\dfrac{2}{13}\right)$.

Тогда $\underline{|CH|}=\sqrt{\left(5\dfrac{3}{13}-12\right)^2+\left(-5\dfrac{2}{13}-5\right)^2}=\dfrac{4}{13}\sqrt{1573}$.

3) Найдем уравнение медианы *AM*.

ТОЧКА M – СЕРЕДИНА ОТРЕЗКА BC, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, $M\left(\dfrac{-4+12}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right)=(4{,}3)$. ТОГДА УРАВНЕНИЕ AM ИМЕЕТ ВИД: $\dfrac{x-2}{4-2}=\dfrac{y-(-3)}{3-(-3)}$ ИЛИ $y=3x-9$.

4) Найдем точку N пересечения медианы AM и высоты CH:

$$\begin{cases} y=3x-9, \\ y=\dfrac{3}{2}x-13. \end{cases}$$

Отсюда $3x-9=\frac{3}{2}x-13$. Тогда $x=-2\frac{2}{3}$, $y=-17$, $N\left(-2\frac{2}{3},\ -17\right)$.

5) Составим уравнение прямой, параллельной стороне AB и проходящей через вершину C.

Направляющим вектором для искомой прямой является вектор $\overline{AB}(-6,\ 4)$.

Тогда ее уравнение имеет вид $\dfrac{x-12}{-6}=\dfrac{y-5}{4}$ или $y=-\frac{2}{3}x+13$.

Здесь мы воспользовались формулой $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$, где $M_0(x_0, y_0)$ – точка, принадлежащая прямой, $\overline{a}(l, m)$ – направляющий вектор прямой.

6) Найдем внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

Внутренний угол при вершине A определим как угол между векторами $\overline{AB}(-6,\ 4)$ и $\overline{AC}(10,\ 8)$.

$$\cos\angle BAC=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{-6\cdot 10+4\cdot 8}{\sqrt{(-6)^2+4^2}\cdot\sqrt{10^2+8^2}}=-\frac{28}{4\sqrt{13\cdot 41}}=-\frac{7}{\sqrt{533}}.$$

Внешний угол при вершине C будем рассматривать как угол между векторами $\overline{AC}(10,\ 8)$ и $\overline{CB}(-16,\ -4)$.

$$\cos\angle C_{внеш.}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{CB}}{\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{CB}\right|}=\frac{10\cdot(-16)+8\cdot(-4)}{\sqrt{10^2+8^2}\cdot\sqrt{(-16)^2+(-4)^2}}=$$

$$=-\frac{192}{8\sqrt{41\cdot 17}}=-\frac{24}{\sqrt{697}}.$$

Ответ : 1) $AB:\quad y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$; 2) $CH:\quad y=\dfrac{2}{3}x-13$,

$|CH| = \frac{4}{13}\sqrt{1573}$; 3) $AM: \quad y = 3x - 9$; 4) $N\left(-2\frac{2}{3},\ -17\right)$;

5) $y = -\frac{2}{3}x + 13$; 6) $\cos\angle BAC = -\frac{7}{\sqrt{533}}$; 7) $\cos\angle C_{внеш.} = -\frac{24}{\sqrt{697}}$.

<u>Задача 1.3</u>. Составить каноническое уравнение : 1) эллипса, 2) гиперболы, 3) параболы по их известным из условий 1-3 параметрам (условия приведены ниже). Через a и b обозначены большая и малая полуоси эллипса или гиперболы, через F – фокус кривой, ε – эксцентриситет, 2c – фокусное расстояние; $y = \pm kx$ - уравнение асимптот гиперболы; D – директриса кривой; A, B – точки, лежащие на кривой.

1) $A(0,\ -3),\ \varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$; 2) $k = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ 2c = 12$; 3) $D: \quad y = -3$.

<u>Решение.</u> 1) Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

Его эксценриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Используя данные задачи, составляем систему для определения чисел a^2 и b^2:

$$\begin{cases} \frac{0^2}{a^2} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1, \\ \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9, \\ \frac{a^2 - 9}{a^2} = \frac{7}{16}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9, \\ a^2 = 16. \end{cases}$$

Итак, искомое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$. Параметры a, b и c связаны условием $c^2 = a^2 + b^2$. Асимптоты гиперболы: $y = \pm kx$, где $k = \frac{b}{a}$.

По условию $k = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $2c = 12$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 6^2, \\ \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{4}{5}a^2 = 36, \\ b^2 = \frac{4}{5}a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 20, \\ b^2 = 16. \end{cases}$$

Записываем искомое уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

3) Каноническое уравнение параболы, директриса которой задается уравнением $y=const$, имеет вид

$$x^2=2py.$$

При этом уравнение директрисы D: $y=-\dfrac{p}{2}$; координаты фокуса $F(0,\frac{p}{2})$. По условию директриса D: $y=-3$. Следовательно, $p=6$. Тогда искомое уравнение параболы $x^2=12y$.

Ответ: 1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{16}=1$; 3) $x^2=12y$.

Задача 1.4. Даны четыре точки $A_1(0,\ -1,\ 1)$, $A_2(3,\ 5,\ 1)$, $A_3(1,\ -3,\ -1)$, $A_4(1,\ 4,\ -2)$. Требуется найти:

1) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

2) уравнение прямой, проходящей через точку A_4, перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$;

3) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;

4) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

5) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Решение.

1) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Подставим в это равенство координаты точек A_1, A_2, A_3, получим

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-1 \\ 3-0 & 5+1 & 1-1 \\ 1-0 & -3+1 & -1-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}-(y+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+$$

$+(z-1)\cdot\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -12x+6(y+1)-12(z-1)=0 \quad \Leftrightarrow$

$2x-(y+1)+2(z-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-y+2z-3=0$ – это уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

2) Уравнение прямой L, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$, запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

где (x_0, y_0, z_0) - произвольная точка прямой, $\overline{a}(l,m,n)$ - направляющий вектор прямой, $t \in \boldsymbol{R}$.

Плоскость $A_1A_2A_3$: $2x-y+2z-3=0$. Тогда вектор нормали плоскости $A_1A_2A_3$: $\overline{n}(2,-1,2)$. Вектор $\overline{n}$ перпендикулярен плоскости $A_1A_2A_3$, а значит, будет являться направляющим вектором прямой *L*. Тогда прямая *L*:

$$\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 4-t, \\ z = -2+2t. \end{cases}.$$

3) Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Тогда расстояние от точки $A_4(1,\ 4,\ -2)$ до плоскости $A_1A_2A_3$,будет равно

$$d = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 4 + 2\cdot(-2) - 3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

4) Если $\overline{a}(l,m,n)$ - направляющий вектор прямой, а $\overline{n}(A,B,C)$ - вектор нормали плоскости, то синус угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{n}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{n}|} = \frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\ .$$

Вектор $\overline{A_1A_4}$ будет являться направляющим вектором прямой A_1A_4. Его координаты $\overline{A_1A_4} = (1,\ 5,\ -3)$.

Вектор нормали плоскости $A_1A_2A_3$ $\bar{n}(2,\ -1,\ 2)$. Тогда

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot 1 - 1\cdot 5 - 3\cdot 2}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+25+9}} = -\frac{3}{\sqrt{35}}\ .$$

5) Вектор нормали к плоскости Oxy $\bar{n}_1(0,\ 0,\ 1)$, а к плоскости $A_1A_2A_3$ $\bar{n}(2,\ -1,\ 2)$. Длины этих векторов $|\bar{n}_1| = 1,\ |\bar{n}| = 3$. Тогда косинус угла ψ между плоскостями Oxy и $A_1A_2A_3$ равен

$$\cos\psi = \frac{\bar{n}\cdot\bar{n}_1}{|\bar{n}|\cdot|\bar{n}_1|} = \frac{0\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 2}{3\cdot 1} = \frac{2}{3}\ .$$

<u>Ответ:</u> 1) $2x - y + 2z - 3 = 0$; 2) $x = 1 + 2t,\quad y = 4 - t,\quad z = -2 + 2t$;

3) $d = 3$; 4) $\sin\varphi = -\dfrac{3}{\sqrt{35}}$; 5) $\cos\psi = \dfrac{2}{3}$.

Контрольная работа № 2

Элементы линейной алгебры

<u>Литература:</u> [1], гл.V, §1-5, гл. VI; [5], ч.1, § 1.6, 1.10, §1.15 - 1.19; [9], гл.2; [10], ч.1; [13], гл.1, § 1.3 – 1.4, гл.2, § 2.1 – 2.5.

В процессе подготовки и выполнения контрольной работы №2 студенту необходимо освоить указанные ниже математические понятия и овладеть перечисленными далее основными методами (приемами).

<u>Основные понятия:</u> матрицы и действия над ними, обратная матрица, определитель матрицы; система линейных уравнений (однородная и неоднородная, совместная и несовместная); собственные значения и собственные векторы матрицы; квадратичная форма и ее канонический вид; кривые второго порядка.

<u>Основные методы и приемы:</u>

- методы Гаусса, Крамера, обратной матрицы для решения систем линейных уравнений;

- метод нахождения обратной матрицы;
- методы вычисления определителей;
- метод нахождения собственных значений и собственных векторов;
- метод приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Блок обучающих задач с решениями

Задача 2.1. Даны две матрицы A и B. Требуется найти: 1) $3A^2 - 2B^T$; 2) A^{-1}; 3) $\left|B \cdot A^{-1} + \frac{1}{7}E\right|$, где E – единичная матрица третьего порядка.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1) Находим матрицу $A^2 = A \cdot A$, элементы α_{ij} которой вычисляем по правилам:

$\alpha_{ij} = a_{i1} \cdot a_{1j} + a_{i2} \cdot a_{2j} + a_{i3} \cdot a_{3j}$, где $i, j \in \{1,2,3\}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 7 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 10 & 23 & 12 \\ 14 & 28 & 21 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу $3A^2$, умножая каждый элемент матрицы A^2 на 3.

$$3A^2 = \begin{bmatrix} 21 & 42 & 0 \\ 30 & 69 & 36 \\ 42 & 84 & 63 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу B^T - транспонированную матрице B, для этого каждую из строк матрицы B запишем в виде столбца с соответствующим номером.

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Умножим каждый элемент матрицы B^T на 2 и вычтем полученную матрицу $2B^T$ из матрицы $3A^2$:

$$3A^2 - 2B^T = \begin{bmatrix} 21 & 42 & 0 \\ 30 & 69 & 36 \\ 42 & 84 & 63 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 48 & -2 \\ 30 & 68 & 30 \\ 40 & 70 & 59 \end{bmatrix}.$$

2) Для данной матрицы A обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$. При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$ где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента $a_{ij},\ i, j \in \{1,2,3\}$.

Находим

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(3-14) + 2 \cdot (14-9) = 11 + 10 = 21 \neq 0.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -11 & 14 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/21 & 2/3 & -2/7 \\ 4/21 & -1/3 & 2/7 \\ 5/21 & 1/3 & -1/7 \end{bmatrix}.$$

3) Находим произведение матриц $B \cdot A^{-1}$:

$$B\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&1\\-3&1&7\\1&3&2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{21}\begin{bmatrix}-11&14&-6\\4&-7&6\\5&7&-3\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}3\cdot(-11)+0\cdot4+1\cdot5 & 3\cdot14+0\cdot(-7)+1\cdot7\\(-3)\cdot(-11)+1\cdot4+7\cdot5 & (-3)\cdot14+1\cdot(-7)+7\cdot7\\1\cdot(-11)+3\cdot4+2\cdot5 & 1\cdot14+3\cdot(-7)+2\cdot7\end{matrix}\times$$

$$\times\begin{matrix}3\cdot(-6)+0\cdot6+1\cdot(-3)\\(-3)\cdot(-6)+1\cdot6+7\cdot(-3)\\1\cdot(-6)+3\cdot6+2\cdot(-3)\end{bmatrix}=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}-28&49&-21\\72&0&3\\11&7&6\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-28/21&7/3&-1\\24/7&0&1/7\\11/21&1/3&2/7\end{bmatrix}.$$

Находим матрицу $B\cdot A^{-1}+\dfrac{1}{7}E$:

$$B\cdot A^{-1}+\frac{1}{7}E=\begin{bmatrix}-28/21&7/3&-1\\24/7&0&1/7\\11/21&1/3&2/7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/7&0&0\\0&1/7&0\\0&0&1/7\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-25/21&7/3&-1\\24/7&1/7&1/7\\11/21&1/3&3/7\end{bmatrix}.$$

Вычисляем определитель $\left|B\cdot A^{-1}+\dfrac{1}{7}E\right|=\begin{vmatrix}-25/21&7/3&-1\\24/7&1/7&1/7\\11/21&1/3&3/7\end{vmatrix}=$

$$=\left(-\frac{25}{21}\right)\cdot\frac{2}{147}-\frac{7}{3}\cdot\frac{205}{147}-1\cdot\frac{157}{147}=-\frac{13392}{3087}\approx-4{,}338.$$

<u>Задача 2.2.</u> Проверить, совместна ли система уравнений, и в случае совместности решить ее: 1) по формулам Крамера; 2) методом Гаусса; 3) с помощью обратной матрицы (матричным методом):

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

__Решение__: Совместность системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. Для этого вычислим определитель основной матрицы А данной системы.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Поскольку $|A| \neq 0$, строки (столбцы) матрицы А линейно независимы и, значит, ее ранг равен 3. Ранг расширенной матрицы системы

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right]$$

тоже равен 3, так как у нее 3 строки (а среди них не может быть более трех линейно независимых), с другой стороны, матрицы $\widetilde{A}$ имеет ненулевой минор третьего порядка $|A| = -16$.

По теореме Кронекера-Капелли равенство рангов матриц A и $\widetilde{A}$ означает совместность данной системы.

1) Решим систему по формулам Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где $\Delta = |A|$, Δ_i- определитель, который получен из Δ путем замены в нем *i*-го столбца столбцом свободных членов системы.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32.$$

$$x_1 = \frac{64}{-16} = -4; \quad x_2 = \frac{-16}{-16} = 1; \quad x_3 = \frac{32}{-16} = -2.$$

2) Решим систему методом Гаусса. Составим расширенную матрицу системы $\widetilde{A}$. С помощью элементарных преобразований строк матрицы $\widetilde{A}$ (что равносильно выполнению соответствующих операций над уравнениями системы) будем последовательно обнулять координаты при x_1 во 2-й и 3-й строках матрицы А (т.е. второй и третий элементы первого столбца). Для этого 1-ю строку умножим на 2 и вычтем из 2-й строки, затем 1-ю строку умножим на 3 и вычтем из 3-й строки.

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right].$$

Из последней строки получаем $-16x_2 = -16 \Rightarrow x_2 = 1$; из предпоследней строки $x_3 = -2$; из первой строки (с учетом найденных x_2, x_3) $x_1 = -4$.

3) Запишем систему в матричном виде.

Пусть $\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\overline{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$. Тогда система имеет вид $A\overline{x} = \overline{B}$. Так как $|A| \neq 0$, то матрица А имеет обратную матрицу A^{-1}, умножая на которую слева обе части матричного уравнения, получаем $\overline{x} = A^{-1} \cdot \overline{B}$.

Находим $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16} \cdot \begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}.$$

Искомый столбец неизвестных $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

откуда: $x_1 = -4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2$.

<u>Ответ</u>: $x_1 = 4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2$.

<u>Задача 2.3</u>. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

<u>Решение</u>. Составляем и решаем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow.$$

$(3-\lambda)\big((5-\lambda)(3-\lambda)-1\big) + \big((-1)(3-\lambda)-(-1)\big) + \big((-1)\cdot(-1)-(5-\lambda)\big) = 0 \Leftrightarrow$
$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0 \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 6$ - собственные значения матрицы А.

Находим собственный вектор $\overline{V}_1$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 3$. Для этого составляем и решаем систему однородных линейных уравнений

$(A - 3E) \cdot \overline{V}_1 = 0$ или

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решим эту систему методом Гаусса.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Отсюда $x_2 = x_3 = a$; $x_1 = 2x_2 - x_3 = a$, т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = a$, где a - любое число, не равное 0. Таким образом, собственный вектор матрицы А, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 3$, имеет вид $\overline{V_1} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, где $a \neq 0$.

Аналогично находим собственный вектор $\overline{V_2}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 2$.

$(A - 2E) \cdot \overline{V_2} = \overline{0} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда $x_2 = 0$; $x_1 = -x_3 = в$, где $в$ - любое число $\neq 0$. Тогда

$$\overline{V_2} = \begin{bmatrix} в \\ 0 \\ -в \end{bmatrix} = в \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ где } в \neq 0.$$

Находим собственный вектор $\overline{V_3}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 6$.

$(A - 6E) \cdot \overline{V_3} = \overline{0} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$ Отсюда $x_2 = -2x_3 = 2c$; $x_1 = -x_2 - x_3 = -c$, где $c \neq 0$. Тогда $\overline{V_3} = \begin{bmatrix} -c \\ 2c \\ -c \end{bmatrix} = (-c) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, где $c \neq 0$.

<u>Ответ</u> : собственные значения матрицы A $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$; собственные векторы матрицы A имеют вид : $\overline{V}_1 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overline{V}_2 = в\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overline{V}_3 = c\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, где $a, в, c \in R$, $a, в, c \neq 0$.

<u>Задача 2.4.</u> Используя теорию квадратичных форм, привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить эту кривую:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

<u>Решение</u>. Матрица квадратичной формы

$$5x^2 + 4xy + 8y^2$$

этого уравнения имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$$

Находим собственный вектор $\overline{V}_1$, соответствующий $\lambda_1 = 4$.

$$(A - 4E) \cdot \overline{V}_1 = \overline{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда $x_1 = -2x_2 = 2a$, тогда $x_1 = 2a$, $x_2 = -a$, где $a \neq 0$. Таким образом, $\overline{V}_1 = \begin{bmatrix} 2a \\ -a \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Нормируем вектор $\overline{V}_1$, т.е. делим его на $\left|\overline{V}_1\right|$. Тогда нормированный собственный вектор $\bar{e}_1 = \dfrac{\overline{V}_1}{\left|\overline{V}_1\right|}$ принимает вид:

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}.$$

Находим собственный вектор $\overline{V}_2$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 9$.

$$(A - 9E)\overline{V}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Отсюда $x_2 = 2x_1 = 2\textit{в}$, тогда $x_1 = \textit{в},\ \ x_2 = 2\textit{в},\ \ \textit{в} \neq 0$.

$$\overline{V}_2 = \begin{bmatrix} \textit{в} \\ 2\textit{в} \end{bmatrix} = \textit{в}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Нормированный собственный вектор $\bar{e}_2 = \dfrac{\overline{V}_2}{\left|\overline{V}_2\right|}$ имеет вид

$$\bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{j}.$$

Векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ ортогональны, т.к. $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$. Используем ортонормированные собственные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ для построения матрицы Т поворота осей координат:

$$T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Базисными векторами новой системы координат $X'OY'$ являются векторы

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\bar{i} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}, \\ \bar{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\bar{i} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\bar{j}. \end{cases}$$

Переход от старых координат $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ к новым координатам $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ производится по формулам: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, т.е.

$$\begin{cases} x = \left(2\big/\sqrt{5}\right)x' + \left(1\big/\sqrt{5}\right)y', \\ y = \left(-1\big/\sqrt{5}\right)x' + \left(2\big/\sqrt{5}\right)y'. \end{cases}$$

Подставим эти выражения в уравнение кривой:

$$5\left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 4\left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 8\left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 -$$

$$-32\left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 56\left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = 0.$$

После преобразования получаем :

$$4x'^2 + 9y'^2 - \tfrac{8}{\sqrt{5}}x' - \tfrac{144}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\left(x'^2 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}x'\right) + 9\left(y'^2 - \tfrac{16}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = 0.$$

Выражение в скобках дополняем до полных квадратов:

$$4\left(x'^2 - 2\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{5}\right) + 9\left(y'^2 - 2\cdot\tfrac{8}{\sqrt{5}}y' + \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{64}{5}\right) + 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\left(x' - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 9\left(y' - \tfrac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{576}{5} + 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\left(x' - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y' - \tfrac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x' - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{9} + \frac{\left(y' - \tfrac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} = 1.$$

Пусть $\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \dfrac{8}{\sqrt{5}} \end{cases}$, что геометрически означает параллельный перенос осей координат в точку $O'\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}};\tfrac{8}{\sqrt{5}}\right)$, тогда мы получаем каноническое уравнение эллипса $\dfrac{(x'')^2}{9} + \dfrac{(y'')^2}{4} = 1$ с полуосями $a = 3,\ b = 2$.

Контрольная работа № 3

Введение в математический анализ

<u>Литература:</u> [2], гл.1, §1-8; [4], § 5.3;
[5], §2.1 – 2.6; [12], ч.1; [14], гл.1, § 1.4 – 1.11.

Целью выполнения контрольной работы №3 является овладение основными математическими понятиями, приемами и методами, перечисленными ниже.

<u>Основные понятия:</u> комплексные числа (формы представления, геометрическая интерпретация); предел функции в точке и в ∞; непрерывность функции.

<u>Основные приемы и методы:</u>

- операции над комплексными числами;
- построение графиков элементарных функций путем преобразования графиков основных элементарных функций;
- методы вычисления пределов функций;
- исследование непрерывности элементарных функций.

<u>Блок обучающих задач с решениями</u>

<u>Задача 3.1</u>. 1) Выполнить действия над комплексными числами. Результат записать в показательной форме.

$z = (i^{80} - i^{23})^8 \cdot (-1 + i\sqrt{3})^{-6}$.

2) Найти все корни уравнения:

а) $z^3 + 1 = -i$; б) $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$.

<u>Решение</u>. 1) Так как $i = \sqrt{-1}$, то $i^2 = -1$, тогда $i^4 = (i^2)^2 = 1$;

$i^{80} = (i^4)^{20} = 1$; $i^{23} = i^{20} \cdot i^2 \cdot i = (i^4)^5 \cdot (-1) \cdot i = -i$. В итоге

$i^{80} - i^{23} = 1 - (-i) = 1 + i$.

Запишем число $z_1 = 1 + i$ в показательной форме:

$z_1 = r \cdot e^{i\varphi}$, где $r = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ - модуль z_1,

φ - аргумент z_1, т.е. $\varphi = arctg 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

$z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}$.

По формуле Муавра $z_1{}^8 = r^8 \cdot e^{8\varphi i}$, т.е.

$$(i^{80} - i^{23})^8 = \left(\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i} \right)^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot e^{8 \cdot \frac{\pi}{4} i} = 2^4 \cdot e^{2\pi i}.$$

Запишем число $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ в показательной форме: $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Так как число z_2 расположено во 2-й четверти плоскости $(a = -1 < 0,\ \ b = \sqrt{3} > 0)$, то его аргумент φ определяется по правилу: $\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi$, т.е. $\varphi = arctg(-\sqrt{3}) + \pi \Leftrightarrow \ \ \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Тогда показательная форма числа z_2 имеет вид:

$$z_2 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

По формуле Муавра $z_2{}^6 = \left(2e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^6 = 2^6 \cdot e^{6\cdot\frac{2}{3}\pi i} = 2^6 \cdot e^{4\pi i}$.

Исходное число $z = \dfrac{z_1{}^8}{z_2{}^6} = \dfrac{2^4 e^{2\pi i}}{2^6 e^{4\pi i}} = \dfrac{1}{4}e^{-2\pi i} = \dfrac{e^{oi}}{4} = \dfrac{1}{4}$.

<u>Ответ</u> : $z = \dfrac{e^{oi}}{4} = \dfrac{1}{4}$.

2) Решим уравнения.

а) $z^3 + 1 = -i \Leftrightarrow z^3 = -1 - i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-1-i}$.

Для нахождения корней 3-й степени числа $z_1 = -1 - i$ воспользуемся формулой:

$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{3}}$, где $k \in \{0,1,2\}$;

$r = |z_1|,\ \ \varphi = \arg z_1$.

Находим $|z_1|$ и $\arg z_1$:

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$;

$\arg z_1 = arctg\dfrac{b}{a} - \pi$, т.к. z_1 находится в 3-й четверти плоскости.

$$\arg z_1 = arctg\frac{(-1)}{(-1)} - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi.$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

Тогда $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}i}$, $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$.

$k = 0$: $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $\qquad k = 1$: $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{12}i}$;

$k = 2: \ \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{\frac{13\pi}{12} i}$.

<u>Ответ</u>: $z \in \left\{ \sqrt[6]{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4} i}; \quad \sqrt[6]{2} \cdot e^{5\frac{\pi}{12} i}; \quad \sqrt[6]{2} \cdot e^{\frac{13\pi}{12} i} \right\}$

б) $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$ - биквадратное уравнение.

$$\begin{cases} z^2 = t, \\ t^2 + 9t + 20 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z^2 = t \\ \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = -5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -4 \\ z^2 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} z = \pm\sqrt{-4} \\ z = \pm\sqrt{-5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\ 2 \cdot \sqrt{-1} \\ z = \pm\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\ 2i \\ z = \pm\sqrt{5} i \end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>: $z \in \{2i; -2i; \sqrt{5}i; -\sqrt{5}i\}$.

<u>Задача 3.2.</u> Построить график функции $y = F(x)$ путем преобразования графика $f(x)$, если $F(x) = \left|\log_2(2x+1)\right|, \quad f(x) = \log_2 x$.

<u>Решение.</u>

$$F(x) = \left|\log_2(2x+1)\right| = \left|\log_2 2(x+\tfrac{1}{2})\right| = \left|\log_2 2 + \log_2(x+\tfrac{1}{2})\right| =$$

$$= \left|1 + \log_2(x+\tfrac{1}{2})\right|.$$

Чтобы из графика $f(x) = \log_2 x$ получить график заданной функции $F(x)$, необходимо:

1) сделать параллельный перенос графика $f(x) = \log_2 x$ вдоль оси Ox влево на $\frac{1}{2}$;

2) полученный график параллельно сместить вдоль оси Oy на 1 вверх.;

3) зеркально отразить участок графика, лежащий ниже оси Ox, симметрично этой оси.

Задача 3.3. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2x^2-5x^4-7}{3x^4+3x+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{11x^2-3}{2x^3-4x+9}$;

4) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\sqrt{22+x}-4}{x^3+216}$; 5) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi^2-x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4-x}$;

7) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 5x+tg3x}{2\arcsin x-arctg4x}$.

Решение.

1) $$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{2(x+3)(x-\frac{1}{2})}{3(x+3)(x+\frac{1}{3})}=\lim_{x\to -3}\frac{2(x-\frac{1}{2})}{3(x+\frac{1}{3})}=\frac{7}{8}.$$

2) $$\lim_{x\to 8}\frac{2x^2-5x^4-7}{3x^4+3x+8}=\lim_{x\to 8}\frac{\frac{2}{x^2}-5-\frac{7}{x^4}}{3+\frac{3}{x^3}+\frac{8}{x^4}}=-\frac{5}{3}.$$

3) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{11x^2-3}{2x^3-4x+9}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{11}{x}-\frac{3}{x^3}}{2-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

4) $$\lim_{x\to -6}\frac{\sqrt{22+x}-4}{x^3+216}=\lim_{x\to -6}\frac{\sqrt{22+x}-4}{x^3+216}\cdot\frac{\sqrt{22+x}+4}{\sqrt{22+x}+4}=$$

$$=\lim_{x\to -6}\frac{22+x-16}{(x+6)(x^2-6x+36)(\sqrt{22+x}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to -6}\frac{x+6}{(x+6)(x^2-6x+36)(\sqrt{22+x}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to -6}\frac{1}{(x^2-6x+36)(\sqrt{22+x}+4)}=\frac{1}{108\cdot 8}=\frac{1}{864}.$$

5) $$\lim_{x\to \pi}\frac{1-\sin(x/2)}{\pi^2-x^2}=\left|\begin{matrix}\text{Замена}\\ \pi-x=t\\ t\to 0\\ x=\pi-t\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\frac{\pi-t}{2}}{\pi^2-(\pi-t)^2}=$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)}{(\pi-\pi+t)(\pi+\pi-t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t/2)}{t\cdot(2\pi-t)} = \lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2(t/4)}{t(2\pi-t)} =$$

$$= 2\cdot 1\cdot \lim_{t\to 0}\frac{t/16}{2\pi-t} = 2\cdot 0 = 0.$$

6) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{2x-3}{2x+1}-1\right)\right)^{4-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3-2x-1}{2x+1}\right)^{4-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right)^{\frac{-4}{2x+1}\cdot(4-x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-4)\frac{4-x}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-16}{2x+1}} = e^2.$$

7) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{\lim\limits_{x\to-\infty}(1+7x)} = 2^{-\infty} = 0.$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cdot\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(x/2)}{x\cdot\sin x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cdot\frac{(x/2)^2}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2/4}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = -2\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

9) $$\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 5x+tg3x}{2\arcsin x-arctg4x} = \frac{\lim}{x\to 0}\frac{6\frac{\sin 5x}{x}+\frac{tg3x}{x}}{2\frac{\arcsin x}{x}-\frac{artg4x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6\cdot\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5+\left(\frac{tg3x}{3x}\right)\cdot 3}{2\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)-\left(\frac{arctg4x}{4x}\right)\cdot 4} = \frac{30\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}+3\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}}{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}-4\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg4x}{4x}} = \frac{30+3}{2-4} = -\frac{33}{2}.$$

<u>Задача 3.4.</u> Исследовать функцию *f(x)* на непрерывность и построить ее график.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^3, & x\le 0, \\ (x-1)^2, & 0<x\le\pi, \\ 2\cos x, & x>\pi. \end{cases}$$

Решение. Функция *f(x)* непрерывна на интервалах $(-\infty,0)\cup(0,\pi)\cup(\pi,+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Исследуем непрерывность функции в точках $x_1=0$ и $x_2=\pi$.

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(1-x^3)=1;$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}(1-x)^2=1;$$

$$f(0)=1-x^3\big|_{x=0}=1,$$

таким образом $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, т.е. $f(x)$ непрерывна в точке $x_1=0$.

Для точки $x_2=\pi$ находим

$$\lim_{x\to \pi-0} f(x)=\lim_{x\to \pi-0}(x-1)^2=(\pi-1)^2,$$

$$\lim_{x\to \pi+0} f(x)=\lim_{x\to \pi+0} 2\cos x=-2,$$

$$f(\pi)=(x-1)^2\big|_{x=\pi}=(\pi-1)^2.$$

В точке $x_2=\pi$ $f(x)$ имеет разрыв первого рода. График данной функции изображен на чертеже.

Контрольная работа № 4

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Литература: [2], гл.1-4; [3], гл. 9, 10;
[4], гл. 3; [5], ч.1, § 3.1-3.7; [11], гл.3,4; [14], гл. 2 §2.1 – 2.14, 2.18

В процессе подготовки и выполнения контрольной работы № 4 студенту необходимо овладеть основными математическими понятиями, приемами и методами, перечисленными ниже .

Основные понятия: производная функции; таблица основных производных; правила дифференцирования; производная высшего порядка;

формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа.

Основные приемы и методы:

- дифференцирование явной, неявной функции и функции, заданной параметрически;
- нахождение наименьшего и наибольшего значения непрерывной на отрезке функции;
- полное исследование функции и построение графика.

БЛОК ОБУЧАЮЩИХ ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 4.1. Вычислить производные: 1) – 3) $\dfrac{dy}{dx}$; 4) $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$; 5) $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ в данной точке x_0; 6) n-го порядка для данной функции $y(x)$.

1) $y=\sqrt[3]{(x-4)^5}+\dfrac{13}{(3x^2-7x+1)^2}$; 2) $y=7^{-\cos x}\cdot arctg^4 3x$;

3) $y=\left(\log_2(6x+5)\right)^{\arcsin 2x}$; 4) $x^3y-y^2=6x$;

5) $y=\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{4}\cos^2 x; x_0=\pi/4$; 6) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$.

Решение. 1) $y=\sqrt[3]{(x-4)^5}+\dfrac{13}{(3x^2-7x+1)^2}\Leftrightarrow$

$$y=(x-4)^{5/4}+13\cdot(3x^2-7x+1)^{-2}\Rightarrow$$

$$y'=\frac{5}{4}(x-4)^{1/4}+13\cdot(-2)\cdot(3x^2-7x+1)^{-3}\cdot(6x-7)=$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt[4]{x-4}-\frac{26(6x-7)}{(3x^2-7x+1)^3}.$$

2) $y=7^{-\cos x}\cdot arcctg^4 3x$.

$$y'=(7^{-\cos x})'\cdot arcctg^4 3x+7^{-\cos x}\cdot(arcctg^4 3x)'=$$

$$=-7^{-\cos x}\cdot\ln 7\cdot\sin x\cdot arcctg^4 3x+7^{-\cos x}\cdot 4arcctg^3 3x\cdot\left(-\frac{1}{1+9x^2}\right)\cdot 3=$$

$$=7^{-\cos x}\cdot arcctg^3 3x\cdot\left(\ln 7\cdot\sin x\cdot arcctg 3x-\frac{12}{1+9x^2}\right).$$

3) $y=\left(\log_2(6x+5)\right)^{\arcsin 2x}$.

Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \ln \arcsin 2x \cdot \log_2(6x+5).$$

Вычислим производные по x от обеих частей равенства:

$$\frac{y'}{y} = (\ln \arcsin 2x)' \log_2(6x+5) + \ln \arcsin 2x \cdot (\log_2(6x+5))',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\arcsin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2\log_2(6x+5) + \ln \arcsin 2x \cdot \frac{6}{(6x+5)\ln 2}.$$

Отсюда выразим y':

$$y' = \left(\log_2(6x+5)\right)^{\arcsin 2x} \left(\frac{2\log_2(6x+5)}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x} + \frac{6\ln \arcsin 2x}{\ln 2(6x+5)} \right).$$

4) $x^3 y - y^2 = 6x$.

Почленно дифференцируем это равенство по x с учетом того, что $y = y(x)$:

(*) $3x^2 \cdot y + x^3 y' - 2yy' = 6$, откуда

$$y' = \frac{6 - 3x^2 y}{x^3 - 2y}.$$

Повторно продифференцируем по x равенство (*):

$6xy + 3x^2 y' + 3x^2 y' + x^3 y'' - 2(y')^2 - 2yy'' = 0$, откуда

$y'' = \dfrac{2(y')^2 - 6x^2 y' - 6xy}{x^3 - 2y}$ или, учитывая вид y', получаем

$$y'' = 2\frac{(6-3x^2y)^2}{(x^3-2y)^3} - 6x^2 \cdot \frac{6-3x^2y}{(x^3-2y)^2} - \frac{6xy}{x^3-2y}.$$

5) $y = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{1}{4}\cos^2 x, \quad x_0 = \pi/4$.

$$y' = \frac{2x}{8} + \frac{1}{4} \cdot 2\cos x \cdot \sin x = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$y'' = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2\cos 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$y''' = \frac{1}{2} \cdot 2(-\sin 2x) = -\sin 2x, \qquad y'''\left(\pi/4\right) = -\sin \pi/2 = -1.$$

6) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}} \iff y = x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$.

Последовательно дифференцируя y, получаем:

$$y' = \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}};$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}};$$

…………………………………………………………

$$y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)x^{-\frac{2n+1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)x^{-\frac{2n-1}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}x^{-\frac{2n+1}{2}} + \frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}} + \frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n-3)!!}{2n}\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^n(2n-3)!!}{2^n}x^{-\frac{2n+1}{2}}(2n-1-x).$$

<u>Задача 4.2.</u> Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, вычислить значение $\sqrt[3]{29}$ с точностью 0,001.

<u>Решение.</u> Данное число запишем в виде

$$\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}.$$

Воспользуемся биномиальным разложением:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n.$$

Отсюда получаем приближенное равенство

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

погрешность которого

$R_n = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot(1+\theta x)^{m-n-1}$, где $0<\theta<1$, может быть сделана сколь угодно малой при $|x|<1$ и достаточно большом n.

Полагая $x = \dfrac{2}{27}$ и $m = \dfrac{1}{3}$, получим

$$\sqrt[3]{29} = 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2}{81}\cdot\frac{2}{81} + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} - \frac{2^5\cdot 5}{81^4} + \ldots + R_n\right).$$

Оценивая последовательно $3\cdot\left|R_n\right|$ при $n=1,2,\ldots$ находим, что

$$3\cdot\left|R_1\right|<3\cdot\frac{2\cdot 2}{81}<0{,}002, \qquad 3\cdot\left|R_2\right|<3\cdot\frac{2^3\cdot 5}{81^3}<0{,}0003.$$

Следовательно, заданная точность вычислений 0,001 может быть обеспечена, если взять 3 члена биномиального разложения, предшествующие остаточному члену R_2, т.е.

$$\sqrt[3]{29}\approx 3(1+0{,}024-0{,}0006)=3{,}072.$$

Задача 4.3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2\sin x+\cos 2x$ на отрезке $[0,\pi/2]$.

Решение. По теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция достигает наибольшего и наименьшего значений либо в критических точках (точки, в которых производная либо равна нулю, либо не существует), лежащих на данном отрезке, либо на концах этого отрезка. Находим критические точки функции:

$$y'=2\cos x-2\sin 2x,$$

$$y'(x)=0 \iff 2\cos x-4\sin x\cos x=0 \iff \cos x(1-2\sin x)=0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\end{array}\right. n\in Z.$$

К критическим точкам, лежащим на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$, относятся только

$x_1=\dfrac{\pi}{2}$ и $x_2=\dfrac{\pi}{6}$. Вычисляем значения $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\pi=1$;

$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{3}=1{,}5$. Добавляем к ним значение

$y(0)=2\sin 0+\cos 0=1$. Среди значений $\{1;1{,}5\}$ выбираем наибольшее $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1{,}5$ и наименьшее $y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Задача 4.4. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$ и построить ее график.

Решение. Для полного исследования функции и построения ее графика можно придерживаться следующей схемы:

1) найти область определения функции;

2) проверить четность, нечетность, периодичность функции;

3) найти точки разрыва функции и определить их тип; найти вертикальные асимптоты (если есть точки разрыва II типа);

4) выяснить, обладает ли график функции наклонными (горизонтальными) асимптотами;

5) исследовать функцию на монотонность и экстремумы;

6) определить интервалы выпуклости и точки перегиба;

7) найти точки пересечения графика с осями;

8) построить график функции.

Перейдем к исследованию данной функции.

1) Область определения $D(y) = (-\infty;4) \cup (4;+\infty)$.

2) Свойствами четности, нечетности, периодичности не обладает.

3) $x = 4 \notin D(y)$, значит, это точка разрыва. Для определения типа разрыва вычисляем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 4-0} y(x) = \lim_{x\to 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = \frac{(4+3)^2}{4-0-4} = \frac{49}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 4+0} y(x) = \lim_{x\to 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = \frac{(4+3)^2}{4+0-4} = \frac{49}{+0} = +\infty.$$

Односторонние пределы бесконечны, следовательно, $x = 4$ - точка разрыва II типа, а прямая $x = 4$ - вертикальная асимптота графика.

4) Выясним, обладает ли график наклонными (горизонтальными) асимптотами вида $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(y(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+3)^2}{x-4} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{10x+9}{x-4} = 10.$$

Таким образом, найдена наклонная асимптота
$y = x + 10$.

5) Исследуем монотонность и экстремумы функции

$$y' = \frac{(x-4)\cdot 2(x+3) - (x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2}.$$

$$y'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 11 \end{array}\right..$$

Схема показывает, что $y(x)$ возрастает, если $x \in (-\infty;-3) \cup (11;+\infty)$. Если $x \in (-3;4) \cup (4;11)$ $y(x)$ убывает. Точка $x=-3$ является точкой локального максимума : $y(-3)=0$. Точка $x=11$ является точкой локального минимума: $y(11)=28$.

6) Для исследования выпуклости находим $y''(x)$:

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - (x+3)(x-11)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2-8x+16-x^2+8x+33)}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

Если $x \in (-\infty;4)$ $y''<0$, значит, $y(x)$ выпукла вверх; если $x \in (4;+\infty)$ $y''>0$, что означает, что $y(x)$ выпукла вниз. Так как $y'' \neq 0$, то точек перегиба нет.

7) Точки пересечения графика с осями координат:

$(0;-\frac{9}{4})$ и $(-3;0)$.

8) Построим график функции:

Задача 4.5. Канал, ширина которого 27м, под прямым углом впадает в другой канал шириной 64м. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?

Решение.

Из геометрических соображений следует, что минимально возможная (по всем $\alpha \in (0;\frac{\pi}{2})$) длина отрезка AB и обеспечивает наибольшую длину сплавляемого бревна. Выразим длину AB, как функцию угла α .

$$AC = \frac{64}{\cos\alpha}; \qquad CB = \frac{27}{\sin\alpha},$$

$$AB = AC + CB \Leftrightarrow AB = \frac{64}{\cos\alpha} + \frac{27}{\sin\alpha}.$$

Введем в рассмотрение функцию $f(\alpha) = \frac{64}{\cos\alpha} + \frac{27}{\sin\alpha}$ и будем искать ее минимальное значение при $\alpha \in (0; \pi/2)$.

$$f'(\alpha) = 64 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - 27 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

$$\begin{cases} f'(\alpha) = 0 \\ \alpha \in (0; \pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{64\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{27\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0 \\ \alpha \in (0; \pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 64\sin^3\alpha = 27\cos^3\alpha \\ \alpha \in (0; \pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg^3\alpha = \frac{27}{64} \\ \alpha \in (0; \pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} tg\alpha = \frac{3}{4} \\ \alpha \in (0; \pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_0 = arctg\frac{3}{4}.$$

Для определения характера экстремума в точке α_0 вычислим $f''(\alpha_0)$ и определим знак этого числа.

$$f''(\alpha) = 64 \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)' - 27 \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)' = -64 \cdot \frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha} + 27 \cdot \frac{1+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Выразим $f''(\alpha_0)$ через $tg\alpha_0 = \frac{3}{4}$.

$$f''(\alpha) = -\frac{64}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + tg^2\alpha\right) + \frac{27}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + ctg^2\alpha\right) =$$

$$= -\frac{64}{\cos\alpha}\left(2tg^2\alpha + 1\right) + \frac{27}{\sin\alpha}\left(2ctg^2\alpha + 1\right) \Rightarrow$$

$$f''(\alpha_0) = -\frac{64}{\cos\alpha_0} \cdot \frac{17}{8} + \frac{27}{\sin\alpha_0} \cdot \frac{41}{9} = -\frac{136}{\cos\alpha_0} + \frac{123}{\sin\alpha_0}.$$

С учетом того, что $tg\alpha_0 = \frac{3}{4}$, получаем, что $\sin\alpha_0 = \frac{3}{4}\cos\alpha_0$, а значит,

$$f''(\alpha_0) = -\frac{136}{\cos\alpha_0} + \frac{164}{\cos\alpha_0} = \frac{28}{\cos\alpha_0} > 0$$, т.е. α_0 - точка минимума.

Найдем теперь $f(\alpha_0)$- максимально возможную длину сплавляемого бревна.

$$f(\alpha_0) = \frac{64}{\cos\alpha_0} + \frac{27}{\sin\alpha_0}, \text{ если } tg\alpha_0 = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\alpha_0}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_0}} = \dfrac{3}{4} \\ \alpha \in (0;\pi/2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin^2\alpha_0}{1-\sin^2\alpha_0} = \dfrac{9}{16} \\ \alpha \in (0;\pi/2) \end{cases} \begin{cases} \sin\alpha_0 = \dfrac{3}{5} \\ \cos\alpha_0 = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

$$f(\alpha_0) = \frac{64}{4/5} + \frac{27}{3/5} = 125.$$

Ответ: наибольшая длина бревна 125 м.

Контрольная работа № 5

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Литература: [2], гл.8; [3], гл. 11; [5], ч.2, гл. 6; [11], гл.7.

При выполнении контрольной работы №5 студент должен овладеть основными математическими понятиями, приемами и методами, перечисленными ниже.

Основные понятия: функция нескольких переменных; частные производные первого и более высоких порядков; дифференциал; градиент; производная по направлению вектора; касательная плоскость и нормаль к поверхности; экстремумы функции нескольких переменных.

Основные приемы и методы:

- правило нахождения частных производных;
- использование дифференциала для приближенного вычисления значения функции;
- схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных в ограниченной замкнутой области;
- метод наименьших квадратов построения эмпирических формул.

Блок обучающих задач с решениями

Задача 5.1. Найти область определения функции

$z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}+\ln\cos x$ и изобразить эту область.

Решение. Функция z определена в тех точках $(x, y)\in \boldsymbol{R}^2$, для которых $1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}\geq 0$ и $\cos x>0$, т.е.

$$\begin{cases} 1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}\geq 0, \\ \cos > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1 \\ -\dfrac{p}{2}+2pn<x<\dfrac{p}{2}+2pn, \qquad n\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Изобразим эту область. Первое неравенство системы определяет на плоскости Oxy внутреннюю часть эллипса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ вместе с границей (эллипсом). Второе неравенство – бесконечное множество вертикальных полос (без ограничивающих их прямых) ширины π. Пересечение этих множеств и дает область определения D заданной функции:

Задача 5.2. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция $u=f(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение. Найдем частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Для этого сначала вычислим частные производные первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

При отыскании $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ дифференцируем функцию u, считая что y является константой, т.е. постоянной величиной. Сначала воспользовавшись свойствами логарифма, упростим функцию $u(x, y)$. Получим

$$u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_x^/=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)_x^/=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Вычислим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, т.е. дифференцируем $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{x^2+y^2}$ по переменной x; при этом y считается константой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_x^/=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Аналогично находим $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Здесь уже переменная x будет считаться константой.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)_y^/=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y^/=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Теперь подставим найденные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в заданное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=0 \text{ - верно.}$$

Ответ: функция $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ удовлетворяет указанному уравнению.

Задача 5.3. Вычислить приближенное значение функции с помощью дифференциала:

$1{,}003 \cdot (1{,}998)^2 \cdot (3{,}005)^3$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию $f(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^3$.

Для нахождения приближенного значения функции f в точке $(1{,}003;\ 1{,}998;\ 3{,}005)$ воспользуемся формулой

$$f(x_1, y_1, z_1) \approx f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0),$$

где дифференциал функции $f: df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot dz$;

$dx = x_1 - x_0$, $dy = y_1 - y_0$, $dz = z_1 - z_0$; f'_x, f'_y, f'_z - частные производные первого порядка, вычисленные в точке (x_0, y_0, z_0); (x_0, y_0, z_0) - точка, достаточно близкая к точке (x_1, y_1, z_1), в которой значение функции f вычисляется легко.

Тогда формулу для приближенного вычисления можно переписать в следующем виде:

$$f(x_1, y_1, z_1) \approx f(x_0, y_0, z_0) + f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x_1 - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0) \times$$
$$\times (y_1 - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z_1 - z_0).$$

Обозначим $x_1 = 1{,}003$, $y_1 = 1{,}998$, $z_1 = 3{,}005$;

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 3.$$

Вычислим значения всех величин, входящих в формулу:

$f(x_0, y_0, z_0) = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 108$;

$f'_x = y^2 \cdot z^3$, $f'_x(1,\ 2,\ 3) = 2^2 \cdot 3^3 = 108$;

$f'_y = 2xyz^3$, $f'_y(1,\ 2,\ 3) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 108$;

$f'_z = 3 \cdot xy^2 \cdot z^2$, $f'_z(1,\ 2,\ 3) = 3 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 108$.

Тогда

$$f(1{,}003;\ 1{,}998;\ 3{,}005) \approx 108 + 108 \cdot 0{,}003 + 108 \cdot (-0{,}002) + 108 \cdot 0{,}005 =$$
$$= 108{,}648.$$

Ответ: $1{,}003 \cdot (1{,}998)^2 \cdot (3{,}005)^3 \approx 108{,}648$.

Задача 5.4. Написать:

1) уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$;

2) $grad\ z$ в точке $M_0(x_0, y_0)$;

3) производную функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\overline{a}$;

$z = arctg\,\dfrac{y}{x},\quad M_0(-1,\ 1),\qquad \bar{a} = \bar{i} - \bar{j}.$

Решение. 1) уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0),$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Вычисляем $f'_x(x, y) = \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_x = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$;

$$f'_x(-1,\ 1) = -\frac{1}{2}.$$

$$f'_y(x, y) = \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x};\qquad f'_y(-1,\ 1) = -\frac{1}{2}.$$

$$z_0 = f(-1,\ 1) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тогда уравнение касательной плоскости: $z + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}(x+1) - \dfrac{1}{2}(y-1)$ или

$$x + y + 2z + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Нормаль к поверхности – это прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в точке $\left(x_0, y_0,\ f(x_0, y_0)\right)$. Ее уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}.$$

Тогда можем записать $\dfrac{x+1}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{y-1}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{z+\frac{\pi}{4}}{-1}$ или, что равносильно,

$x + 1 = y - 1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{\pi}{4}\right)$ - уравнение искомой нормали.

2) $grad\ z$ – это вектор с координатами $\left(f'_x, f'_y\right)$.

Тогда $grad\ z(M_0) = \left(f'_x(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0)\right) = \left(f'_x(-1,\ 1); f'_y(-1,\ 1)\right) =$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

3) Производная функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\bar{a}$ - это число, которое вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}(x_0, y_0) = \frac{f'_x(x_0, y_0)\cdot a_x + f'_y(x_0, y_0)\cdot a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \quad \text{где } \bar{a} = (a_x, a_y).$$

Тогда $\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}(-1,\ 1) = \frac{-\frac{1}{2}\cdot 1 + (-\frac{1}{2})\cdot(-1)}{\sqrt{2}} = 0$.

<u>Ответ</u>: 1) касательная плоскость: $x + y + 2z + \frac{\pi}{2} = 0$;

нормаль: $x + 1 = y - 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $grad\, z(-1,\ 1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;

3) $\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}(-1,\ 1) = 0$.

<u>Задача 5.5</u>. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y + 1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$. Сделать чертеж области.

<u>Решение</u>. Изобразим область

Далее решаем задачу, действуя по схеме:

а) Найдем стационарные точки функции z, принадлежащие заданной области и вычислим значения z в этих точках.

СОСТАВЛЯЕМ И РЕШАЕМ СИСТЕМУ

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 6y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Точка $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ не принадлежит треугольнику ABC, следовательно, функция z будет достигать своего наибольшего и наименьшего значений на границе области, а не внутри нее.

б) Исследуем поведение функции на границе:

1) на отрезке AB.

Тогда $y = 1,\ 0 \le x \le 1$ и функция z принимает вид

$$z_{AB} = x^2 + 3 \cdot 1^2 + x - 1 + 1 = x^2 + x + 3.$$

Получили функцию одной переменной $z_1(x) = x^2 + x + 3$. Исследуем ее на экстремум на отрезке $x \in [0,1]$.

$z_1' = 2x + 1 = 0, \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2}$ - точка возможного экстремума, но

$-\dfrac{1}{2} \notin [0,\ 1]$, поэтому экстремум будет достигаться на концах отрезка $[0,\ 1]$.

Вычислим $z_1(0) = z(0,\ 1) = 3$; $z_1(1) = z(1,\ 1) = 5$.

2) на отрезке ВС.

Тогда $x = 1,\ 0 \le y \le 1$,

$$z_{BC} = 1^2 + 3y^2 + 1 - y + 1 = 3y^2 - y + 3.$$

Обозначим $z_2(y) = 3y^2 - y + 3$ и исследуем ее на экстремум на отрезке $[0,\ 1]$.

$z_2' = 6y - 1 = 0, \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{6}$.

Вычислим $z_2(\frac{1}{6}) = z(1,\ \frac{1}{6}) = 2\frac{11}{12}$; $z_2(0) = z(1,\ 0) = 3$;

$z_2(1) = z(1,\ 1) = z_1(1) = 5$.

3) на отрезке AC.

Тогда $y = 1 - x,\ 0 \le x \le 1$, функция $z(x, y)$ принимает вид

$$z_{AC} = x^2 + 3(1-x)^2 + x - (1-x) + 1 = 4x^2 - 2x + 3.$$

Обозначим $z_3(x) = 4x^2 - 4x + 3$ и исследуем эту функцию на экстремум на отрезке $[0,\ 1]$.

$z_3' = 8x - 4 = 0, \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$.

Вычисляем значение $z_3(\frac{1}{2}) = z\left(\frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{2}\right) = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$. Значения $x = 0$ и $x = 1$ соответствуют точкам A и C, значение функции z в которых уже было вычислено.

в) Сравнивая полученные в пунктах 1-3 результаты, делаем вывод:

$z_{\min} = z\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = 2$; $\quad z_{\max} = z(1,\ 1) = 5$.

<u>Ответ</u>: $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = 2$; $\quad z_{\max} = z(1,\ 1) = 5$.

<u>Задача 5.6</u>. Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице

x	1	2	3	4	5
y	5,0	3,5	2,9	1,6	1,0

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $Y = ax + b$, выражающую приближенно (аппроксимирующую) функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в прямоугольной декартовой системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $Y = ax + b$.

<u>Решение</u>. Согласно методу наименьших квадратов коэффициенты a и b линейной функции $Y = ax + b$ определяют из системы

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases}$$

где n – число экспериментальных данных (x_i, y_i). В нашем случае $n = 5$,

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 5 + 3{,}5 + 2{,}9 + 1{,}6 + 1 = 14,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^{\ 2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 2{,}9 + 4 \cdot 1{,}6 + 5 \cdot 1 = 32{,}1.$$

Система для определения коэффициентов a и b принимает вид

$$\begin{cases} 15a + 5b = 14, \\ 55a + 15b = 32{,}1. \end{cases}$$

Отсюда получаем $a = -0{,}99$, $b = 5{,}77$.

Аппроксимирующая функция имеет вид $Y = -0{,}99x + 5{,}77$.

Контрольная работа № 6

Неопределенный и определенный интегралы

Литература: [2], гл.10,11; [3], гл. 12; [5], гл. 2, 5; [11], гл.5; [14], гл.4.

Целью выполнения контрольной работы №6 является овладение необходимым набором математических понятий, приемов и методов, перечисленных ниже.

Основные понятия: первообразная; неопределенный интеграл и его свойства; таблица основных неопределенных интегралов; определенный интеграл и его свойства; формула Ньютона-Лейбница.

Основные приемы и методы:

- табличное интегрирование;
- подведение под знак дифференциала;
- интегрирование по частям в неопределенном и определенном интегралах;
- методы приближенного вычисления определенных интегралов;
- вычисление площадей плоских областей, длин плоских кривых и объемов некоторых тел.

Блок обучающих задач с решениями

Задача 6.1. Найти неопределенные интегралы.

1) $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{7\sqrt[5]{x^2}}dx$; 2) $\int e^{2-3x}dx$; 3) $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x \cdot ctg^4 x}$; 5) $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^7 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 6) $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx$;

7) $\int \frac{7x-x^2-4}{(x+1)^2(x^2-5x+6)}dx$; 8) $\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 9) $\int x^2 \ln(x+1)dx$.

Решение.

1) $$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{7\sqrt[5]{x^2}}dx = \frac{3}{7}\int x^{-\frac{2}{5}}dx - \frac{2}{7}\int x^{4-\frac{2}{5}}dx + \frac{1}{7}\int x^{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}}dx =$$

$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1} - \frac{2}{7}\frac{x^{\frac{18}{5}+1}}{\frac{18}{5}+1} + \frac{1}{7}\frac{x^{\frac{4}{15}+1}}{\frac{4}{15}+1} + c = \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{23}x^{\frac{23}{5}} + \frac{1}{7}\cdot\frac{15}{19}x^{\frac{19}{15}} + c =$$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^3} - \frac{10}{161}x^4\cdot\sqrt[5]{x^3} + \frac{15}{133}x\sqrt[15]{x^4} + c.$$

2) $\int e^{2-3x}dx = \int e^{2-3x} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3dx) = -\frac{1}{3}\int e^{2-3x} \cdot (2-3x)'dx =$

$= -\frac{1}{3}\int e^{2-3x} \cdot d(2-3x) = -\frac{1}{3}e^{2-3x} + c.$

3) $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx = \int \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)(-5\sin 5x)}{\sqrt{\cos 5x}}dx = -\frac{1}{5}\int \frac{(\cos 5x)'dx}{\sqrt{\cos 5x}} =$

$= -\frac{1}{5}\int \cos^{-\frac{1}{2}} 5x \cdot d(\cos 5x) = -\frac{1}{5} \cdot 2\cos^{\frac{1}{2}} 5x + c = -\frac{2}{5}\sqrt{\cos 5x} + c.$

4) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x \cdot ctg^4 x} = -\frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}dx}{ctg^4 x} = -\frac{1}{3}\int ctg^{-4} x d(ctgx) =$

$= -\frac{1}{3}\frac{ctg^{-3} x}{-3} + c = \frac{1}{9ctg^3 x} + c.$

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^7 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \arccos^{\frac{7}{3}} x \cdot \left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$

$= -\int \arccos^{7/3} x \, d(\arccos x) = -\frac{(\arccos x)^{10/3}}{10/3} + c = -0{,}3\sqrt[3]{(\arccos x)^{10}} + c.$

6) $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx = \int \frac{3xdx}{6x^2-4} + 10\int \frac{dx}{6x^2-4} =$

$= \int \frac{\frac{1}{4} \cdot 12xdx}{6x^2-4} + 10\int \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}d(\sqrt{6}x)}{\left(\sqrt{6}x\right)^2 - 2^2} =$

$= \frac{1}{4}\int \frac{(6x^2-4)'dx}{6x^2-4} + \frac{10}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}\ln 10\left|\frac{\sqrt{6} \cdot x - 2}{\sqrt{6} \cdot x + 2}\right| + c =$

$= \frac{1}{4}\ln\left|6x^2 - 4\right| + \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6} \cdot x - 2}{\sqrt{6} \cdot x + 2}\right| + c.$

7) $\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)^2(x^2 - 5x + 6)}dx.$

$$\frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)^2(x^2 - 5x + 6)} = \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)^2(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C, D правую часть последнего равенства приводим к общему знаменателю и, приравнивая числители дробей, получаем тождество:

$$7x - x^2 - 4 = A(x+1)(x-2)(x-3) + B(x-2)(x-3) +$$
$$+ C(x+1)^2(x-3) + D(x+1)^2(x-2).$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют равные коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 0 = A + C + D \\ x^2: & -1 = A - 5A + B - C \\ x: & 7 = A - 5B - 5C - 3D \\ x^0: & -4 = -6A + 6B - 3C - 2D \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, находим $A = \frac{1}{6}$, $B = -1$, $C = -\frac{2}{3}$, $D = \frac{1}{2}$. Подставляя коэффициенты в разложение подынтегральной функции на простейшие дроби, получаем

$$\int \frac{7x - x^2 - 4}{(x+1)^2(x^2 - 5x + 6)} dx = \int \left(\frac{1/6}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2/3}{x-2} + \frac{1/2}{x-3} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + c =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \ln\sqrt[6]{x+1} - \ln\sqrt[3]{(x-2)^2} + \ln\sqrt{x-3} + c =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \ln\frac{\sqrt[6]{x+1}\cdot\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} + c.$$

8) $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Для вычисления интеграла используем формулу интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

В нашем случае $u = \operatorname{arctg} x$; $du = \frac{dx}{1+x^2}$; $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $v = \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}.$$

$$\int \frac{x\,arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\cdot arctgx - \int \cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot arctgx - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + c.$$

9) $$\int x^2\ln(x+1)dx = \left|\begin{matrix} u=\ln(x+1), & du=\frac{dx}{x+1} \\ dv=x^2dx, & v=\frac{x^3}{3}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x+1} = \frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int\frac{x^3+1-1}{x+1}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|\right) + c.$$

<u>Задача 6.2</u>. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$; 2) $\int\limits_{2/3}^{10/3} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

4) $\int\limits_0^\pi \sin^4\frac{x}{2}dx$; 5) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\cdot\cos 3x\cdot\cos 5x dx$.

<u>Решение</u>.

1) $$\int\limits_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int\limits_0^1 \frac{2x}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx - 11\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}} =$$

$$= -\int\limits_0^1 \frac{(-2x-2)+2}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx - 11\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-(x+1)^2+4}} = -\int\frac{(-x^2-2x+3)'dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}} -$$

$$-13\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = -\int\limits_0^1 \frac{d(-x^2-2x+3)}{(-x^2-2x+3)^{1/2}} - 13\arcsin\frac{x+1}{2}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -2\sqrt{-x^2-2x+3}\Bigg|_0^1 - 13(\arcsin 1 - \arcsin\tfrac{1}{2}) = -2(0-\sqrt{3}) - 13\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\sqrt{3} - \tfrac{13}{3}\pi.$$

$$2)\ \int\limits_{2/3}^{10/3} \frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{3x-1}=t; \quad 3x-1=t^2, & x=\frac{1}{3}(t^2+1), \\ dx=\frac{2}{3}t\,dt, & \begin{array}{c|cc} x & 2/3 & 10/3 \\ \hline t & 1 & 3 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^3 \frac{\frac{1}{3}(t^2+1)\cdot\frac{2}{3}t\,dt}{t^2\cdot t} = \frac{2}{9}\int\limits_1^3 \frac{t^2+1}{t^2}\,dt = \frac{2}{9}\int\limits_1^3 (1+t^{-2})\,dt =$$

$$= \frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{2}{9}\left(3-\tfrac{1}{3}-1+1\right) = \frac{16}{27}.$$

$$3)\ \int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{c} x=tg\,t; \quad dx=\frac{dt}{\cos^2 t} \\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \pi/4 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{tg^3 t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{tg^2 t+1}} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \frac{tg^3 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}{1/\cos t}\,dt = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{tg^3 t}{\cos t}\,dt = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 t\cdot\sin t}{\cos^4 t}\,dt = \int\limits_0^{\pi/4} -\frac{1-\cos^2 t}{\cos^4 t}\,d(\cos t) = \left| \begin{array}{c} u=\cos t \\ \begin{array}{c|cc} t & 0 & \pi/4 \\ \hline u & 1 & \sqrt{2}/2 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{2}/2} \frac{u^2-1}{u^4}\,du = \int\limits_1^{\sqrt{2}/2} (u^{-2}-u^{-4})\,du = -\frac{1}{u}+\frac{1}{3u^3}\Bigg|_1^{\sqrt{2}/2} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{8}{3\cdot 2\sqrt{2}}+1-\frac{1}{3} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}+\frac{2}{3} = \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

$$4)\ \int\limits_0^{\pi} \sin^4\frac{x}{2}\,dx = \int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-2\cos x+\cos^2 x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x\Big|_0^{\pi} - 2\sin x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi - 2\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\left(x+\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{4}\left(\pi+\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{3}{8}\pi.$$

5) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos 3x \cdot \frac{\cos(x-5x)+\cos(x+5x)}{2} dx =$

$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (\cos 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \cos 6x) dx =$

$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} (\cos x + \cos 7x + \cos 3x + \cos 9x) dx =$

$= \frac{1}{4}\left(\sin x + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 9x}{9} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} =$

$= \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{9}\sin\frac{9\pi}{2} \right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) = \frac{10}{63}.$

<u>Задача 6.3.</u> Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{e^{0,1x}}{x} dx$ по методу: 1) прямоугольников; 2) Симпсона, разбивая промежуток интегрирования на 10 равных частей. Все вычисления производить с точностью до трех десятичных знаков после запятой.

<u>Решение.</u> Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Пусть $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Тогда по формуле левых прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

По формуле правых прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

По методу парабол (методу Симпсона) отрезок интегрирования $[a,b]$ разбиваем на четное число частей $n = 2m$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\big(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) +$

$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})\big).$

Для нашего интеграла $n = 10$, $a = x_0 = 0{,}5$, $x_1 = 0{,}55$; $x_2 = 0{,}6$; $x_3 = 0{,}65$; $x_4 = 0{,}7$; $x_5 = 0{,}75$; $x_6 = 0{,}8$; $x_7 = 0{,}85$; $x_8 = 0{,}9$; $x_9 = 0{,}95$; $x_{10} = 1$.

Составим таблицу значений функции $f(x) = \dfrac{e^{0,1x}}{x}$ для значений x_i, $i = \overline{0,10}$. Вычисления будем вести с четырьмя знаками после запятой.

i	x_i	$0{,}1x_i$	$e^{0,1x_i}$	y_i
0	0,5	0,05	1,0512	2,1025
1	0,55	0,055	1,0565	1,9209
2	0,6	0,06	1,0618	1,7697
3	0,65	0,065	1,0671	1,6417
4	0,7	0,07	1,0725	1,5321
5	0,75	0,075	1,0778	1,4371
6	0,8	0,08	1,0832	1,3541
7	0,85	0,085	1,0887	1,2808
8	0,9	0,09	1,0941	1,2157
9	0,95	0,095	1,0996	1,1575
10	1	0,1	1,1051	1,1051

По формуле левых прямоугольников

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^{0,1x}}{x} dx \approx \frac{1-0{,}5}{10}(2{,}1025 + 1{,}9209 + 1{,}7697 + 1{,}6417 + 1{,}5321 +$$

$$+ 1{,}4371 + 1{,}3541 + 1{,}2808 + 1{,}2157 + 1{,}1575) = 0{,}7706 \approx 0{,}771.$$

По формуле правых прямоугольников

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^{0,1x}}{x} dx \approx \frac{1-0{,}5}{10}(1{,}9209 + 1{,}7697 + 1{,}6417 + 1{,}5321 + 1{,}4371 + 1{,}3541 +$$

$$+ 1{,}2808 + 1{,}2157 + 1{,}1575 + 1{,}1051) = 0{,}72073 \approx 0{,}721.$$

По методу Симпсона $(2m = 10, \quad m = 5)$

$$\int_{0,5}^{1} \frac{e^{0,1x}}{x} dx \approx \frac{1-0{,}5}{6 \cdot 5}\big(2{,}1025 + 1{,}1051 + 4 \cdot (1{,}9209 + 1{,}6417 + 1{,}4371 +$$

$$+ 1{,}2808 + 1{,}1575) + 2 \cdot (1{,}7697 + 1{,}5321 + 1{,}3541 + 1{,}2157)\big) = 0{,}7450.$$

Задача 6.4. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $x^2 = 4y$ и кривой $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения кривых. Для этого исключим y из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 8/(x^2+4), \\ y = x^2/4, \end{cases}$$

откуда $x^2 + 4x^2 - 32 = 0 \iff x_{1,2} = \pm 2$. Тогда

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left(4arctg\frac{x}{12} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 2\pi - \frac{4}{3}.$$

Задача 6.5. Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{y^4}{4} - \frac{\ln y}{2}$, заключенной между точками с ординатами $y_1 = 1$ и $y_2 = 2$.

Решение. В этой задаче в качестве независимой переменной удобнее взять y, тогда $x = x(y)$, и формула для вычисления длины дуги принимает вид

$$l = \int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy = \left| \begin{array}{c} x'(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y} \\ \sqrt{1+(x'(y))^2} = \sqrt{\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \int_{1}^{2}\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} + \ln y\right)\Bigg|_{1}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \ln 2\right).$$

Задача 6.6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}; \quad z = 1.$$

Решение. Воспользуемся формулой нахождения объема тела с известными площадями поперечных сечений $S(z)$:

$V = \int_a^b S(z)dz$, где $S(z)$ - функция, выражающая площадь любого сечения данного тела плоскостями, перпендикулярными оси Oz, $z \in [a,b]$. Так как в нашем случае поверхность $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ является параболоидом, а его поперечные сечения плоскостями $z = z_0$, где $z_0 \in (0;1]$, ограничены эллипсами $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=z_0$ или $\frac{x^2}{4z_0}+\frac{y^2}{2z_0}=1$, то их площади $S(z_0)=\pi\cdot a\cdot b$, где $a=\sqrt{4z_0}$, $b=\sqrt{2z_0}$, т.е. $S(z_0)=\pi\cdot\sqrt{4z_0}\cdot\sqrt{2z_0}=2\pi\sqrt{2}z_0$.

Тогда $$V=\int_0^1 2\pi\sqrt{2}zdz=2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{z^2}{2}\bigg|_0^1=\pi\sqrt{2}.$$

Контрольная работа № 8

Дифференциальные уравнения

Литература: [2], гл. XIII; [3], гл. XIII; [5], ч. III, гл. 8; [6], гл. III; [14], гл. 6.

Целью выполнения контрольной работы №8 является овладение необходимыми математическими понятиями, методами и приемами, перечисленными ниже.

Основные понятия: дифференциальное уравнение; общее и частное решения; типы дифференциальных уравнений первого порядка; линейные дифференциальные уравнения высших порядков (однородные и неоднородные); системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Основные методы и приемы:

- нахождение общего (частного) решения следующих типов дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными; с однородными функциями; линейных уравнений; уравнений Бернулли;
- нахождение общего (частного) решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами;
- нахождение общего (частного) решения линейного неоднородного уравнения второго порядка со специальной правой частью;
- нахождение общего решения системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Блок обучающих задач с решениями

Задача 8.1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка:

1) $xy^2 + x = y'(x^2 y - y)$; 2) $y - x \cdot \dfrac{dy}{dx} = x + y \cdot \dfrac{dy}{dx}$;

3) $y = \dfrac{e^{-x}}{1-x} - y'$; 4) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} = xy + x^2 y^2$.

Решение. 1) $xy^2 + x = y'(x^2 y - y) \Leftrightarrow x(y^2+1)dx = y(x^2-1)dy$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Чтобы разделить переменные, разделим обе части уравнения на $(y^2+1)\cdot(x^2-1)$:

$$\frac{x}{x^2-1}dx = \frac{y}{y^2+1}dy.$$

Интегрируем левую часть уравнения по переменной x, а правую часть – по переменной y:

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{y}{y^2+1}dy,$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{y^2+1},$$

$$\ln\left|x^2-1\right| = \ln(y^2+1) - \ln|c|,$$

$$\ln\left|c(x^2-1)\right| = \ln(y^2+1),$$

$$y^2+1 = c(x^2-1).$$

Решение получено в виде общего интеграла.

2) $y - x \cdot \dfrac{dy}{dx} = x + y \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx}(x+y) = y - x \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{x-y}{x+y}.$$

Это однородное уравнение (уравнение с однородными функциями). Решаем его с помощью замены: $y(x) = x \cdot u(x)$, где $u(x)$ - новая неизвестная функция.

Находим $y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$

Подставляем выражения для $y(x)$ и $y'(x)$ в исходное уравнение:

$$u + u' \cdot x = -\frac{x - xu}{x + xu} \text{ или}$$

$$u'(x) = -\frac{1-u}{1+u} - u;$$

$$u'(x) = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} = -\ln|x| + \ln|c|;$$

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + arctgu = \ln\left|\frac{c}{x}\right|.$$

Учитывая, что $u = {}^{y}\!/_{x}$, получаем

$$arctg\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{c}{x}\right| - \ln\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} \text{ или}$$

$$arctg\frac{y}{x} = \ln\frac{|c|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение получено в виде общего интеграла.

3) $y = \dfrac{e^{-x}}{1-x} - y' \Leftrightarrow$

$y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ - линейное уравнение первого порядка. Решаем его методом Бернулли с помощью подстановки $y = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x),\ v(x)$ - две новые неизвестные функции.

$$y' = u'v + uv'.$$

После подстановки y и y' в уравнение оно принимает вид:

$$u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x} \text{ или}$$

$$u'v + u(v'+v) = \frac{e^{-x}}{1-x} \quad (*).$$

Находим функцию $v(x)$ из условия:

$$v' + v = 0.$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \text{ или } \int\frac{dv}{v} = -\int dx,$$

$$\ln|v| = x + \ln|c|,$$

$v = ce^{-x}$.

Пусть $c = 1$, тогда $v = e^{-x}$.

Подставляем $v(x)$ в уравнение (*) :

$$u' \cdot e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$\int du = \int \frac{dx}{1-x}, \qquad u = -\ln|1-x| + \ln|c|,$$

$$u = \frac{c}{x-1}.$$

Тогда $y = u \cdot v = \frac{c}{x-1} \cdot e^{-x}$, или $y = \frac{c}{e^x(x-1)}$ - общее решение уравнения.

4) $(x^2+1)\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^2 \Leftrightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+1} + \frac{x^2y^2}{x^2+1}$ - это уравнение Бернулли. Решаем его подстановкой $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Тогда

$$y' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' = \frac{xuv}{x^2+1} + \frac{x^2u^2v^2}{x^2+1},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{xv}{x^2+1}\right) = \frac{x^2u^2v^2}{x^2+1}.$$

Пусть $v' - \frac{xv}{x^2+1} = 0$, тогда

$$u'v = \frac{x^2u^2v^2}{x^2+1}. \qquad (**)$$

Решаем первое из этих уравнений:

$\frac{dv}{dx} = \frac{xv}{x^2+1}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x^2+1},$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|c|.$$

Пусть $c = 1$: $v = \sqrt{x^2+1}$.

Подставляем v в уравнение (**):

$$u' \cdot \sqrt{x^2+1} = \frac{x^2u^2(x^2+1)}{x^2+1},$$

$$\frac{du}{dx}\sqrt{x^2+1} = x^2u^2,$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}.$$

Вычислим $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ интегрированием по частям:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{matrix} u_1 = x, & du_1 = dx \\ dv_1 = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}, & v_1 = \sqrt{1+x^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx\ .$$

В итоге получили уравнение относительно $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$2\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + 2c,$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} = c + \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right).$$

Тогда

$$u=-\left(c+\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)\right)^{-1}.$$

Окончательно получаем общее решение уравнения

$$y=u\cdot v=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{c+\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)}.$$

Задача 8.2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

1) $y''+16y=(34x+13)e^{-x}$, $\quad y(0)=-1;\ \ y'(0)=5$;

2) $y''+2y'+2y=2x^2+8x+6$, $\quad y(0)=1;\ \ y'(0)=4$;

3) $y''+5y'+2y=52\sin 2x$, $\quad y(0)=-2;\ \ y'(0)=-2$.

Решение. 1) Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$\lambda^2+16=0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_1=4i,\ \lambda_2=-4i$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y_0=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x$.

Частное решение имеет вид: $\quad \tilde{y}=(Ax+B)e^{-x}$.

Для нахождения неизвестных коэффициентов A и B вычислим $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подставим в исходное уравнение:

$\tilde{y}'=Ae^{-x}-(Ax+B)e^{-x}=e^{-x}(A-B-Ax)$,

$\tilde{y}''=-Ae^{-x}-(A-B-Ax)e^{-x}=-e^{-x}(2A-B-Ax)$.

$-e^{-x}(2A-B-Ax)+16e^{-x}(Ax+B)=(34x+13)e^{-x}$.

Сокращаем на e^{-x}:

$-2A+B+Ax+16Ax+16B=34x+13$,

$x(A+16A-34)+(17B-2A-13)=0 \ \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}17A=34\\17B=2A+13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=2\\B=1\end{cases}.$$

Тогда $\quad \tilde{y}=(Ax+B)e^{-x}=(2x+1)e^{-x}$.

Общее решение исходного уравнения:

$$y=y_0+\tilde{y}=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x+(2x+1)e^{-x}.$$

Используя начальные условия: $y(0)=-1,\ \ y'(0)=5$, составим систему для нахождения c_1 и c_2:

$$y(0) = c_1 \cdot c_2 \sin 0 + (2 \cdot 0 + 1) \cdot e^0 = c_1 + 1,$$
$$y'(0) = -4c_1 \sin 0 + 4c_2 \cos 0 + 2e^0 - (2 \cdot 0 + 1)e^0 = 4c_2 + 2 - 1;$$

$$\begin{cases} c_1 + 1 = -1 \\ 4c_2 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \end{cases}.$$

Подставляя c_1, c_2 в общее решение, находим частное решение исходного уравнения:

$$y = -2\cos 4x + \sin 4x + (2x + 1) \cdot e^{-x}.$$

2) $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1; \; y'(0) = 4.$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -1 + i, \; \lambda_2 = -1 - i.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_0 = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x.$$

Частное решение $\tilde{y}$ подбираем в соответствии с видом правой части уравнения:

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Неизвестные коэффициенты *A*, *B*, *C* находим, подставляя $\tilde{y}, \tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение.

$$\tilde{y}' = 2Ax + B,$$
$$\tilde{y}'' = 2A.$$

Подставляем в уравнение:

$$2A + 2(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 8x + 6,$$
$$x^2(2A - 2) + x(4A + 2B - 8) + (2A + 2B + 2C - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2A - 2 = 0 \\ 2A + 2B - 8 = 0 \\ 2A + 2B + 2C - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 - 2A = 2 \\ C = 3 - A - B = 0 \end{cases}$$

Тогда $\tilde{y} = x^2 + 2x$, а общее решение исходного уравнения принимает вид:

$$y = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x + x^2 + 2x.$$

Используя начальные условия, получаем систему уравнений для нахождения c_1 и c_2:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \sin 0 + 0 = c_1 \\ y'(0) = -c_1 e^0 \cdot \cos 0 + c_1 \cdot e^0 \cdot \sin 0 + c_2 \cdot e^0 \sin 0 + c_2 e^0 \cdot \cos 0 + 2 = \\ = -c_1 + c_2 + 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 - 2 + 4 = 3. \end{cases}$$

Подставляя c_1 и c_2 в общее решение, получаем частное решение исходного уравнения:

$$y = e^{-x} \cos x + 3e^{-x} \sin x + x^2 + 2x.$$

3) $y'' + 5y' + 2y = 52 \sin 2x$, $\qquad y(0) = -2;\;\; y'(0) = -2$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -3,\;\; \lambda_2 = -2.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_0 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Частное решение $\tilde{y}$ с неопределенными коэффициентами имеет вид:

$$\tilde{y} = A \sin 2x + B \cos 2x.$$

Коэффициенты A, B находим, подставляя $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в исходное уравнение:

$$y' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x,$$

$$y'' = -2 \cdot 2A \sin 2x - 2 \cdot 2B \cos 2x.$$

Подставляем в уравнение:

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 5(2A \cos 2x - 2B \sin 2x) +$$

$$+ 6(A \sin 2x + B \cos 2x) = 52 \sin 2x,$$

$$\sin 2x(-4A - 10B + 6A - 52) + \cos 2x(-4B + 10A + 6B) = 0,$$

$$\begin{cases} 2A - 10B = 52 \\ 2B + 10A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + 50A = 52 \\ B = -5A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -5 \end{cases}.$$

Тогда $\tilde{y} = \sin 2x - 5 \cos 2x$, общее решение исходного уравнения:

$$y = y_0 + \tilde{y} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \sin 2x - 5 \cos 2x.$$

Используя начальные условия $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$, составляем систему уравнений для нахождения c_1 и c_2:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 + \sin 0 - 5\cos 0 = c_1 + c_2 - 5, \\ y'(0) = -3c_1 e^0 - 2c_2 e^0 + 2\cos 0 + 5 \cdot 2 \sin 0 = -3c_1 - 2c_2 + 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 5 = -2 \\ -3c_1 - 2c_2 + 2 = -2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ 3c_1 + 2c_2 = 4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 5 \end{cases}.$$

Подставляя c_1 и c_2 в общее решение, получаем частное решение исходного уравнения:

$$y = -2e^{-3x} + 5e^{-2x} + \sin 2x - 5\cos 2x .$$

Задача 8.3. Представить систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в матричной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$$

Найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения.

Решение. Обозначим $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overline{x}$, $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \overline{\dfrac{dx}{dt}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теперь исходную систему можно записать в матричном виде:

$$\overline{\frac{dx}{dt}} = A \cdot \overline{x}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow (7-\lambda)(5-\lambda) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 8.$$

Составляем и решаем для каждого λ_1, λ_2 однородную систему

$$(A - \lambda E)\overline{x} = \overline{0}.$$

Для $\lambda_1 = 4$:

$$(A-4E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+3y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x+y=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y\in R\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Вектор $\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $y\neq 0$, $y\in R$, является собственным вектором матрицы А, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 4$. Полагая, например, $y=1$, получаем частное решение исходного матричного уравнения:

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{4t} = \begin{pmatrix} -e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = 8$:

$$(A-8E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x+3y=0 \\ x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-3y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ y\in R\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Вектор $\begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $y\neq 0$, $y\in R$, является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 8$. Полагая в нем $y=1$, получаем другое частное решение исходного матричного уравнения:

$$\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{8t} = \begin{pmatrix} 3e^{8t} \\ e^{8t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение матричного уравнения имеет вид:

$$\overline{X}_1 = c_1\overline{X}_1 + c_2\overline{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} -e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3e^{8t} \\ e^{8t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1e^{4t}+3c_2e^{8t} \\ c_1e^{4t}+c_2e^{8t} \end{pmatrix}.$$

С учетом обозначения

$\overline{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ получаем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x(t) = -c_1e^{4t} + 3c_2e^{8t}, \\ y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{8t}. \end{cases}$$

Задача 8.4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $P(1,\ 2)$ и обладающей следующим свойством: площадь треугольника, образованного радиус–вектором любой точки кривой, касательной в этой точке и осью абсцисс, равна 2.

Решение. Пусть точка $M(x, y)$ - произвольная точка искомой кривой.

Как видно из рисунка,

$$S_{\Delta OMA} = \frac{1}{2} OA \cdot MB.$$

По условию задачи $S_{\Delta OMA} = 2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} OA \cdot MB = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$OA \cdot y = 4. \qquad (*)$$

Выразим OA через координаты x, y точки M, лежащей на искомой кривой.

$$OA = OB + BA = x + BA.$$

Из прямоугольного ΔMBA $\dfrac{y}{BA} = tg(\pi - \alpha) \quad \Leftrightarrow$

$BA = \dfrac{y}{-tg\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad BA = -y \cdot ctg\alpha,$ где $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx}$ в соответствии с геометрическим смыслом производной. Тогда $BA = -y \cdot \dfrac{dx}{dy}$. Подставим выражение OA в равенство (*) :

$$\left(x - y\frac{dx}{dy} \right) y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad xy - y^2 \frac{dx}{dy} = 4 \quad \Leftrightarrow.$$

$$y^2 \frac{dx}{dy} - xy = -4,$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{4}{y^2}.$$

Получили линейное уравнение первого порядка относительно $x(y)$ и $\dfrac{dx}{dy}$.

Решаем его с помощью подстановки $x(y) = v(y) \cdot u(y)$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = -\frac{4}{y^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = -\frac{4}{y^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{y} = 0, \\ u'v = -\dfrac{4}{y^2}, \end{cases} \qquad \frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}, \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y},$$

$\ln|v| = \ln|y| + \ln|c|$, $v = Cy$. Возьмем $C = 1 \Rightarrow$ $v = y$, подставляем найденную функцию v во 2-е уравнение системы, которое решаем затем относительно u.

$\dfrac{du}{dy} \cdot y = -\dfrac{4}{y^2}$ - уравнение с разделяющимися переменными.

$$\int du = -\int \frac{4dy}{y^3},$$

$$u = \frac{2}{y^2} + C.$$

Тогда $x = u \cdot v = \left(\dfrac{2}{y^2} + c\right) y = Cy + \dfrac{2}{y}$.

Искомая кривая проходит через точку $P(1,2)$. Поэтому $1 = C \cdot 2 + \dfrac{2}{2} \Rightarrow$

$C = 0$. Следовательно, уравнение кривой $x = \dfrac{2}{y}$ или $xy = 2$ - гипербола.

Контрольная работа № 9

Ряды

<u>Литература:</u> [2], гл. 16, 17; [3], гл. 14; [5], ч. 3, гл. 9 - 10; [12], ч. 3.

Целью выполнения контрольной работы №9 является овладение основными математическими понятиями, приемами и методами, перечисленными ниже.

Основные понятия : числовые и функциональные ряды; сумма ряда; абсолютная и условная сходимость; область сходимости функционального ряда; радиус и интервал сходимости степенного ряда; ряд Тейлора; разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора; ряд Фурье.

Основные приемы и методы :

- необходимый и достаточные признаки сходимости положительных числовых рядов (признаки сравнения, Даламбера, Коши, интегральный);
- признак Лейбница сходимости знакочередующихся числовых рядов;
- способы вычисления радиуса сходимости степенного ряда;
- использование разложений основных элементарных функций в ряд Тейлора для построения разложения заданной функции в ряд Тейлора;
- отыскание решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда;
- построение ряда Фурье для функции, заданной на отрезке.

Блок обучающих задач с решениями.

Задача 9.1. Исследовать сходимость числового ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt[5]{n}}{n}$.

Решение. 1) Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$ является положительным. Воспользуемся признаком Даламбера для исследования сходимости этого ряда.

Вычислим $q=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Если $0\le q<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если $q>1$, то ряд расходится. Если же $q=1$, то признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости данного ряда. Нужны дополнительные исследования с помощью других признаков сходимости.

В нашем случае $a_n=\frac{3^n}{(n+1)!}$, поэтому $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{\left((n+1)+1\right)!}=\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$.

Тогда

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{3^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)}=$$

$= 3 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0 < 1,$ следовательно, ряд сходится.

2) Исследуем вопрос о сходимости положительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln \sqrt[5]{n}}{n}$ с помощью интегрального признака.

$$a_n = f(n) = \frac{\ln \sqrt[5]{n}}{n} .$$

Функция $f(x) = \dfrac{\ln \sqrt[5]{x}}{x}$ положительна и не возрастает при $x \geq 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln \sqrt[5]{x}}{x} dx = \frac{1}{5} \int\limits_1^{+\infty} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{10} \ln^2 x \Big|_1^{+\infty} = \infty,$$

т.е. интеграл расходится, следовательно, ряд тоже расходится.

<u>**Ответ:**</u> 1) сходится; 2) расходится.

<u>**Задача 9.2**</u>. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{3n^2+2} x^n$.

<u>**Решение**</u>. Интервал сходимости данного ряда имеет вид $|x| < R$, где R – радиус сходимости.

Вычислим радиус сходимости по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, где $c_n = \dfrac{5^n}{3n^2+2}$. Получим

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^n}{3n^2+2} \cdot \frac{3(n+1)^2+2}{5^{n+1}} \right| = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^2+2}{3n^2+2} = \frac{1}{5} .$$

Итак, интервал сходимости: $|x| < \dfrac{1}{5} \iff -\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{1}{5}$.

Исследуем поведение ряда в граничных точках $x = \pm\dfrac{1}{5}$ интервала сходимости.

1) $x = \dfrac{1}{5}$. Тогда исходный ряд примет вид

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3n^2+2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+2}$. Этот ряд сходится на основании предельного признака сравнения, где в качестве эталонного ряда для сравнения взят сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2) $x=-\frac{1}{5}$. Тогда исходный ряд примет вид

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3n^2+2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n^2+2}$. Ряд знакочередующийся. Он сходится на основании признака Лейбница. Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n^2+2}=0$ и

$\frac{1}{3n^2+2}>\frac{1}{3(n+1)^2+2}$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$.

Таким образом, областью сходимости заданного степенного ряда будет его интервал сходимости, дополненный граничными точками $x=\pm\frac{1}{5}$.

Ответ: ряд сходится при $x\in\left[-\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}\right]$.

Задача 9.3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1\frac{\sin x^3}{x}dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и проинтегрировав ее почленно.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд.

$$\frac{\sin x^3}{x}=\frac{1}{x}\left(x^3-\frac{1}{3!}(x^3)^3+\frac{1}{5!}(x^3)^5-\frac{1}{7!}(x^3)^7+\ldots\right)=$$

$$=x^2-\frac{1}{3!}x^8+\frac{1}{5!}x^{14}-\frac{1}{7!}x^{20}+\ldots$$

Проинтегрируем почленно полученный степенной ряд.

$$\int_0^1\frac{\sin x^3}{x}dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{3!}x^8+\frac{1}{5!}x^{14}-\frac{1}{7!}x^{20}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3!\cdot 9}x^9+\frac{1}{5!\cdot 15}x^{15}-\frac{1}{7!\cdot 21}x^{21}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!\cdot 9}+\frac{1}{5!\cdot 15}-\frac{1}{7!\cdot 21}+\ldots$$

Этот ряд является знакочередующимся и он сходится. Поэтому справедлива следующая оценка остатка ряда: $|R_n| \le |a_{n+1}|$.

Воспользуемся этим неравенством для определения числа слагаемых, достаточного для достижения заданной точности вычислений $\varepsilon = 0{,}001$.

Так как $\dfrac{1}{5!\cdot 15} = \dfrac{1}{1800} < 0{,}001$, то взяв первые два члена ряда, получим

$$\int_0^1 \frac{\sin x^3}{x} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 9} \approx 0{,}314.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^3}{x} dx \approx 0{,}314$ с точностью до $0{,}001$.

Задача 9.4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = y_0$:

$$y' = y^2 + x^3, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Так как $x_0 = 0$, то решение данного уравнения будем искать в виде ряда по степеням x:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots.$$

Первый коэффициент этого ряда определяется начальным условием $y(0) = 1$.

Второй коэффициент разложения получим из дифференциального уравнения при $x = 0$:

$$y'(0) = y^2(0) + 0^3 = 1^2 + 0 = 1.$$

Чтобы найти $y''(0)$ продифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 2yy' + 3x^2.$$

Тогда при $x = 0$ получим

$$y''(0) = 2y(0)\cdot y'(0) + 3\cdot 0^2 = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

Подставляя полученные значения в ряд для $y(x)$, получим три первых ненулевых члена искомого разложения.

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots.$$

Ответ: $y(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$.

Задача 9.5. Разложить функцию $f(x) = x - 6$ в ряд Фурье в интервале $(3, 9)$.

Решение. Ряд Фурье для функции $f(x)$, заданной в интервале $(a,\ b)$ длины $2l$, имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0,1,2,3...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2,3...$$

Поскольку длина интервала $(3,9)$ равна $2l=6$, то ряд Фурье примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{3} + b_n \sin\frac{n\pi x}{3}\right),$$

где $a_n = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_3^9 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx, \quad n = 0,1,2...$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_3^9 f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx, \quad n = 1,2...$$

Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_3^9 (x-6)dx = \frac{1}{6}(x-6)^2\Big|_3^9 = 0\ ;$$

$$n \neq 0, \quad a_n = \frac{1}{3}\int_3^9 (x-6)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{\pi n}\int_3^9 (x-6)d\left(\sin\frac{n\pi x}{3}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi n}\left[(x-6)\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_3^9 - \int_3^9 \sin\frac{n\pi x}{3}dx\right] = \frac{3}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_3^9 = 0\ ;$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_3^9 (x-6)\sin\frac{n\pi x}{3}dx = -\frac{1}{\pi n}\int_3^9 (x-6)d\left(\cos\frac{n\pi x}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left[(x-6)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_3^9 - \int_3^9 \cos\frac{n\pi x}{3}dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left[3\cos\pi n + 3\cos\pi n - \frac{3}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_3^9\right] = -\frac{6}{\pi n}\cos n\pi =$$

$$= -\frac{6}{\pi n}(-1)^n = \frac{6}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в ряд Фурье, получим искомое разложение

$$x - 6 = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3},\quad x \in (3,9).$$

<u>Ответ</u> : $x - 6 = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3},\quad x \in (3,9).$

Контрольная работа № 10

Задачи с экономическим содержанием

<u>Литература: </u>:[3], гл.3, §3,10,гл.4 §4.4,гл.10, §10.4-10.5,гл.11, §11.3,гл.12, §12.8; [13], §3.7.

Краткие теоретические сведения
<u>и обучающие задачи с решениями</u>

1. В математической экономике большую роль играют так называемые продуктивные матрицы. Доказано, что матрица является продуктивной тогда и только тогда, когда все её собственные значения по модулю меньше 1.

<u>Задача 10.1</u>. Выяснить, является ли матрица A продуктивной:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Характеристический многочлен матрицы A имеет вид:

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda & 0\\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{9}{2}-\lambda\end{vmatrix}=\left(\frac{9}{2}-\lambda\right)\left(\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)^2-1\right).$$

Собственные значения матрицы находим из уравнения:

$$\left(\frac{9}{2}-\lambda\right)\left(\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)^2-1\right)=0 \iff \left[\begin{array}{l}\lambda_1=\frac{9}{2}\\ \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2=1\end{array}\right. \iff$$

$$\lambda_1=\frac{9}{2},\quad \lambda_2=\frac{3}{2},\quad \lambda_3=-\frac{1}{2}.$$

Т.к. $\lambda_1=\dfrac{9}{2}>1;\quad \lambda_2=\dfrac{3}{2}>1,$ то матрица A непродуктивна.

2. Чтобы интерпретировать математически закономерности реальных явлений (в том числе и в экономике), формируют соответствующие им математические модели. Широкое распространение в экономических исследованиях получили линейные модели. Они во многих случаях с достаточно высокой точностью соответствуют описываемым явлениям. Почти все линейные модели сводятся к системам алгебраических уравнений или неравенств. Приведем пример составления линейной математической модели для конкретной экономической задачи.

Задача. 10.2. Три судна доставили в порт 6000т чугуна, 4000т железной руды и 3000т апатитов. Установлены следующие условия разгрузки. Разгрузку можно осуществлять либо сразу в железнодорожные вагоны (общая вместительность которых 8000т), либо в портовые склады. Вагоны должны быть загружены полностью. Известно также, что поданные в порт вагоны не приспособлены для перевозки апатитов. Стоимость выгрузки в вагоны 1т груза каждого вида составляет соответственно 4,3; 5,25 и 2,2 ден.ед., стоимость отправки 1т груза на склад составляет соответственно 7,8; 6,4 и 3,75 ден.ед. Составить математическую модель условий полной разгрузки судов, если затраты на неё составляют 58850 ден.ед.

Решение. В соответствии с условиями задачи прибывший груз можно либо отправить в портовые склады, либо загрузить в железнодорожные вагоны. Обозначим:

x_1 и x_2 (y_1 и y_2 / z_1 и z_2) — количество чугуна (руды / апатитов), разгружаемых соответственно на склады и в вагоны.

Запишем условия полной разгрузки каждого вида груза:

$x_1 + x_2 = 6000$; (1)

$y_1 + y_2 = 4000$; (2)

$z_1 + 0 = 3000$; (3)

где $z_2 = 0$, т. к. по условию задачи апатиты нельзя разгружать в вагоны.

Условие полной загрузки всех поданных вагонов:

$x_2 + y_2 = 8000.$ (4)

И наконец, условие, определяющее установленные затраты на разгрузку судов:

$4,3x_2 + 5,25y_2 + 7,8x_1 + 6,4y_1 + 3,25z_1 = 58850.$ (5)

Итак, условия полной разгрузки судов выражаются системой линейных уравнений (1)-(5).

Система (1)-(5) решается методом Гаусса:

$x_1 = 644,4; \quad x_2 = 5355,6; \quad y_1 = 1355,6;$

$y_2 = 2644,4; \quad z_1 = 3000; \quad z_2 = 0.$

3. Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая в точке x функция. Эластичностью функции $y = f(x)$ относительно переменной x называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} f'(x)$$

Величина эластичности функции y относительно переменной x обозначается $E_x(y)$. $E_x(y)$ выражает приближенное процентное изменение функции y, соответствующее приращению независимой переменной x на 1%.

Аналогично для функции $z = f(x,y)$, имеющей частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, вводятся понятия эластичности относительно независимых переменных x и y. Так эластичностью $E_x(z)$ по переменной x называется величина

$E_x(z) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$,

а эластичностью $E_y(z)$ по переменной y величина

$E_y(z) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$

Задача 10.3. Вычислить эластичность: а) функции $f(x) = 5^{sh^2 x}$ относительно переменной x; б) производственной функции $z = 2,7\left(x^{-3,5} + 4 \cdot y^{-5,2}\right)^{-1/3}$, где x - затраты живого труда, y - затраты овеществленного труда по переменным x и y в точке $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. На сколько процентов приближенно изменится объем производства z, если затраты живого труда и овеществленного труда увеличатся на 1%?

Решение. а) По определению $E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x)$.

В нашем случае $f(x) = 5^{sh^2 x}$,

$$f'(x) = 5^{sh^2x} \cdot \ln 5 \cdot 2shx \cdot chx = sh2x \cdot 5^{sh^2x} \cdot \ln 5,$$

$$E_x(y) = \frac{x}{y} sh2x \cdot 5^{sh^2x} \cdot \ln 5.$$

б) $z = 2{,}7\left(x^{-3{,}5} + 4 \cdot y^{-5{,}2}\right)^{-1/3}$.

$$E_x(z) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z} \cdot 2{,}7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(x^{-3{,}5} + 4y^{-5{,}2}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot (-3{,}5) \cdot x^{-4{,}5} =$$

$$= 3{,}75 \cdot \frac{x^{-3{,}5}}{z}\left(x^{-3{,}5} + 4y^{-5{,}2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{3{,}75}{x^{3{,}5} \cdot z\left(x^{-3{,}5} + 4y^{-5{,}2}\right)^{4/3}}.$$

При $x_0 = y_0 = 1 \quad z_0 = \dfrac{2{,}7}{3\sqrt{5}}$.

$$E_x(z_0) = \frac{3{,}75}{5^{1/3} \cdot 5^{4/3}} = \frac{15}{4 \cdot 5\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{5^2}}.$$

$E_x(z_0) \approx 0{,}2565$, т.е. при изменении затрат живого труда на 1% объем производства приближенно увеличится на 0,26%.

Вычислим

$$E_y(z) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z} \cdot 2{,}7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\left(x^{-3{,}5} + 4 \cdot y^{-5{,}2}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot 4 \cdot (-5{,}2) \cdot y^{-6{,}2} =$$

$$= 18{,}72 \cdot \frac{y^{-5{,}2}}{z}\left(x^{-3{,}5} + 4 \cdot y^{-5{,}2}\right)^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{18{,}72}{z \cdot y^{5{,}2}\left(x^{-3{,}5} + 4y^{-5{,}2}\right)^{4/3}}.$$

При $x_0 = y_0 = 1 \quad z_0 = \dfrac{2{,}7}{3\sqrt{5}}$.

$$E_y(z_0) = \frac{18{,}72}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5^4}} = \frac{18{,}72}{5\sqrt[3]{5^4}} = \frac{18{,}72}{5\sqrt[3]{5^2}} \approx 1{,}28,$$

т.е. при увеличении затрат овеществленного труда на 1% объем производства приближенно увеличится на 1,28 %.

4. Издержки производства **K** однородной продукции есть функция количества продукции, т. е. $K = K(x)$. Пусть объём продукции меняется от a до b единиц. Тогда, если функция $K(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то среднее значение

издержек можно вычислить по теореме о среднем значении интеграла $\int_a^b K(x)dx$:

$$K(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)dx.$$

Решая затем уравнение *K(x) = K(c)*, можно указать объём продукции *x*>0, для которого издержки принимают среднее значение.

Если непрерывная функция *f(t)* характеризует зависимость производительности труда от времени *t*, то объём продукции, произведённой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, будет выражаться формулой

$$V=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

__**Задача 10.4.**__ Найти среднее значение издержек К(x), выраженное в денежных единицах, если объем продукции x меняется от 0 до a единиц. Указать тот объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

$$K(x)=x^2-x+5, \qquad a=7.$$

__**Решение.**__ Находим среднее значение издержек $K(c)$:

$$K(c)=\frac{1}{7}\int_0^7 (x^2-x+5)dx=\frac{1}{7}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_0^7=\frac{107}{6}.$$

Находим тот объем продукции x, при котором издержки принимают среднее значение:

$$x^2-x+5=\frac{107}{6} \iff 6x^2-6x+30-107=0 \iff$$

$$6x^2-6x-77=0.$$

Так как $x>0$, то $x=3+\sqrt{471}\approx 24{,}7$.

__**Задача 10.5.**__ Определить объем продукции, произведенной рабочим с третьего по шестой часы работы, если его производительность труда задается функцией $f(t)=\dfrac{8}{2t+7}+5$.

__**Решение.**__ Объем продукции V выражается формулой:

$$V=\int_3^6 f(t)dt=\int_3^6\left(\frac{8}{2t+7}+5\right)dt=\frac{8}{2}\ln|2t+7|\ \Big|_3^6+5t\Big|_3^6=$$

$$=4\ln\frac{19}{13}+5\cdot 3=4\ln\frac{19}{13}+15.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука. Ч.1,2. 1970.
3. Высшая математика / Под ред. А.И. Яблонского. – Мн.: Выш. шк., 1993.
4. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1986.
5. Жевняк Р.М. Карпук А. А. Высшая математика. Ч.1 - 4 – Мн.: Выш. шк., 1984-1988.
6. Шестаков А.А., Малышева И.А., Полозков Д.П. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1987.
7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1965-1980.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1964-1984.
9. Апатенок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Высш. шк., 1986.
10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2 . – М.: Высш. шк., 1980.
11. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. – М.: Наука, 1966.
12. Методические указания к контрольным работам по высшей математике для студентов-заочников/ Ч.1,2,3. – Мн.: МРТИ, 1984.
13. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Ч.1. – М.: Финансы и статистика, 1998.
14. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.А., Шандра И.Г. Математика в экономике. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 1999.

Св.план 2002, поз

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Черняк Жанна Альбертовна,
Степанова Татьяна Сергеевна

Руководство к выполнению
контрольных работ по высшей математике
для студентов экономических специальностей БГУИР
заочной формы обучения

Редактор Т.Н. Крюкова
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать	Формат 60х84 1/16.
Бумага писчая	Печать гарнитура.
Усл.печ.л.	Уч.-изд.л. 5,5.
Тираж 350 экз.	Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия ЛП №156 от 05.02.2001.
Лицензия ЛВ №509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки 6.