

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет инфокоммуникаций

Кафедра инфокоммуникационных технологий

С. Б. Саломатин

КОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ В СЕТЯХ ПОДВИЖНО Й СВЯЗИ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники для направлений специальностей
1-45 01 01-02 «Инфокоммуникационные технологии (сети
инфокоммуникаций)», 1-39 01 01-01 «Радиотехника (программируемые
радиоэлектронные средства)», 1-39 01 01-02 «Радиотехника (техника
цифровой радиосвязи), специальности 1-39 01 03 «Радиоинформатика»
в качестве пособия*

Минск БГУИР 2017

УДК 621.391.7:621.396.2(076)

ББК 32.811.4я73+32.884.1я73

C16

Рецензенты:

кафедра последиplomного образования
учреждения образования «Белорусская государственная академия связи»
(протокол №9 от 19.05.2016);

доцент кафедры дискретной математики и алгоритмики
Белорусского государственного университета,
кандидат технических наук Ю. В. Свирид

Саломатин, С. Б.

C16 Кодирование информации в сетях подвижной связи : пособие / С. Б. Саломатин. – Минск : БГУИР, 2017. – 78 с. : ил.
ISBN 978-985-543-311-9.

Излагается материал пространственно-временного кодирования сигналов в сетях подвижной связи. Рассматриваются методы построения пространственно-временных кодов на основе теории решеток, алгебраических чисел и алгебраических систем с делением. Приводятся и анализируются основные алгоритмы декодирования пространственно-временных кодов на основе алгебраических моделей каналов и систем обработки сигналов. Даются примеры применения алгоритмов пространственно-временного кодирования в системах подвижной связи стандартов LTE, UMTS и IEEE 802.16 e WiMax.

Пособие содержит примеры и алгоритмы, поясняющие принципы кодирования и декодирования сигналов.

УДК 621.391.7:621.396.2(076)

ББК 32.811.4я73+32.884.1я73

ISBN 978-985-543-311-9

© Саломатин С. Б., 2017

© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. СЕТИ ПОДВИЖНОЙ СВЯЗИ	6
1.1. Системы связи с пространственным кодированием	9
1.2. Пространственно-временные блочные коды	13
1.3. Математическая модель подпространственного кодирования	17
Контрольные вопросы	20
2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ КОДЫ	21
2.1. Алгебраические структуры	21
2.2. Кодовые структуры решеток для каналов с замираниями	23
2.3. Алгебраические поля чисел	26
2.4. Коды на основе алгебраических систем с делением	30
2.5. Коды целочисленных решеток	36
2.6. Относительное пространственно-временное кодирование	41
Контрольные вопросы	44
3. АЛГОРИТМЫ ДЕКОДИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОДОВ	45
3.1. Алгоритмы декодирования блочных кодов в системах ММО	45
3.2. Декодирование на основе матричного линейного преобразования	50
3.3. Алгоритмы сферического декодирования	57
3.4. Формирование и обработка сигналов в ММО-системах с обратной связью	62
Контрольные вопросы	65
4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОДОВ В СИСТЕМАХ ПОДВИЖНОЙ СВЯЗИ	66
4.1. Система LTE	66
4.2. Система LTE-Advanced	70
4.3. Система UMTS	72
4.4. Система WiMax IEEE 802.16e	75
Контрольные вопросы	76
ЛИТЕРАТУРА	77

ВВЕДЕНИЕ

Происходящий в настоящее время многократный рост трафика передачи данных вызывает необходимость ускоренного развития всей телекоммуникационной инфраструктуры. Существенное повышение пропускной способности сетей подвижной связи (СПС) при экономически обоснованных затратах операторов может быть достигнуто внедрением новых, более совершенных технологий сотовой связи и широкополосного доступа.

Решение задачи повышения пропускной способности перспективных СПС и качества обслуживания абонентов особенно актуально для сложных условий распространения сигналов в условиях города. Для обеспечения связи в городе характерными являются случайные каналы с рэлеевскими замираниями амплитуды сигналов вследствие эффекта многолучевого распространения радиоволн и с доплеровской частотной дисперсией при перемещении абонентов. Рэлеевские замирания, обусловленные интерференцией большого числа рассеянных сигналов и сильным ослаблением основного сигнала, являются наиболее глубокими и приводят к увеличению вероятности ошибки при приеме сообщений. При наличии нескольких антенн на передаче и приеме в реальных условиях распространения радиоволн существует несколько пространственных каналов, по которым можно осуществлять независимый обмен сообщениями, что и реализуется с помощью многоканальной технологии ММО (Multiple Input Multiple Output).

С применением в перспективных СПС технологии ММО (СПС-ММО) уменьшение вероятности ошибки на бит принимаемого сообщения достигается разнесением сигнала на передаче и приеме, а повышение пропускной способности – использованием методов адаптивной пространственной обработки сигналов для обеспечения одновременного приема сообщений по нескольким независимым радиоканалам. Однако с увеличением числа независимых радиоканалов происходит снижение энергии на бит передаваемого сообщения и соответствующее повышение вероятности ошибки на бит принимаемого сообщения.

Среди различных методов разнесения на передаче перспективным является пространственно-временное кодирование, реализация которого предполагает не только передачу информационных сигналов через несколько антенн, но и соответствующее их кодирование, что с учетом адекватной обработки их в приемнике по сравнению с некодированной передачей через одну антенну должно обеспечить выигрыш как от разнесения, так и от кодирования.

Применение алгоритмов пространственно-временного кодирования позволяет достичь компромисса между повышением пропускной способности СПС-ММО и уменьшением вероятности ошибки на приеме.

В первом разделе пособия рассматриваются особенности сетей подвижной связи с пространственным кодированием. Даются определения пространственно-временным блочным кодам и их основным характеристикам. Приводится математическая модель подпространственного кодирования.

Второй раздел посвящен алгебраическим пространственно-временным кодам. Рассматриваются вопросы алгебраических кодовых структур. Приводятся кодовые структуры решеток для каналов с замираниями. Даются основы алгебраических числовых полей. Показывается, что основные пространственно-временные коды тесно связаны с алгебраическими системами с делением. Определяются коды целочисленных решеток и возможности относительного пространственно-временного кодирования.

В третьем разделе рассматриваются алгоритмы декодирования пространственно-временных кодов. Даются основные алгоритмы декодирования блочных кодов в системах MIMO. Показывается, что в основе алгоритмов декодирования лежат матричные линейные преобразования и алгоритмы сферического декодирования. В основе алгоритмов формирования и обработки сигналов в MIMO-системах с обратной связью лежат сингулярные матричные преобразования.

Вопросы применения пространственно-временных кодов в системах подвижной связи рассматриваются в четвертом разделе пособия. Приводятся примеры применения алгоритмов пространственно-временного кодирования в системах LTE и LTE-Advanced, системе UMTS, а также в мобильной системе беспроводного доступа WiMax IEEE 802.16e.

Пособие содержит много примеров, поясняющих вопросы синтеза кодовых структур, расчета эффективности алгоритмов декодирования.

1. СЕТИ ПОДВИЖНОЙ СВЯЗИ

Сети подвижной связи предоставляют пользователям большой комплекс услуг различного вида. Основное требование, предъявляемое к СПС, касается минимизации энергетических затрат как базовой станции, так и мобильных терминалов. Для достижения поставленной цели используются новые инфраструктурные методы, такие как оптимизация размеров соты и размещения базовых станций, применение пико- и фемтосот, ретрансляторов и систем ширококвещательной передачи (рис. 1.1). Применяются более совершенные протоколы, учитывающие инфраструктурные особенности сети. Для повышения показателей радиосистемы используются эффективные методы адаптивной и пространственно-временной модуляции и кодирования. Показатели сети подвижной связи представлены в табл. 1.1.

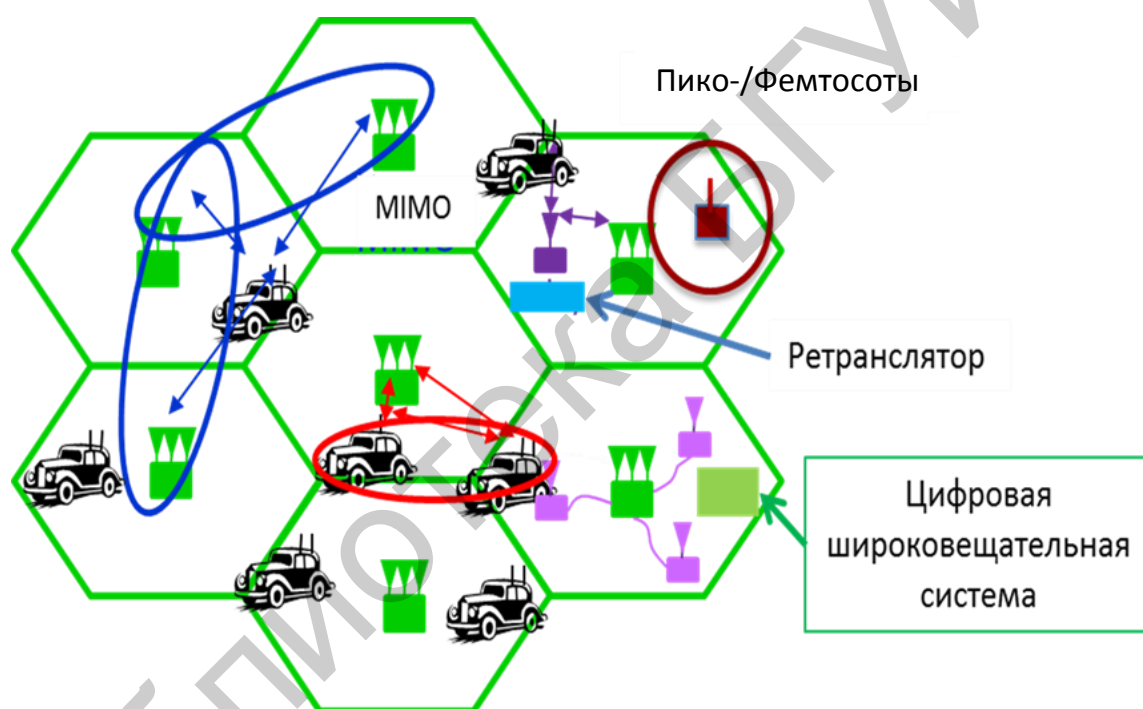


Рис. 1.1. Сеть подвижной связи

Таблица 1.1

Показатели сети подвижной связи

Показатель радиосистемы	Речь	Данные	Видео
Задержка	<100 мс	-	<100 мс
Потеря пакета	<1 %	-	<1 %
BER	10^{-3}	10^{-6}	10^{-6}
Скорость передачи	8–32 кбит/с	10–1000 Мбит/с	10–1000 Мбит/с
Трафик	Непрерывный	Прерывистый	Непрерывный

Технология многоканальных сетей связи

Решение задачи повышения пропускной способности сетей сотовой связи и качества обслуживания абонентов особенно актуально для сложных условий распространения сигналов в условиях города. Для обеспечения связи в городе характерными являются случайные каналы с рэлеевскими замираниями амплитуды сигналов вследствие эффекта многолучевого распространения радиоволн и с доплеровской частотной дисперсией при перемещении абонентов. Рэлеевские замирания, обусловленные интерференцией большого числа рассеянных сигналов и сильным ослаблением основного сигнала, являются наиболее глубокими и приводят к увеличению вероятности ошибки при приеме сообщений [3]. При наличии нескольких антенн на передаче и приеме в реальных условиях распространения радиоволн существует несколько пространственных каналов, по которым можно осуществлять независимый обмен сообщениями, что и реализуется с помощью многоканальной технологии MIMO (Multiple Input Multiple Output). Технология MIMO уменьшает вероятность ошибки на бит принимаемого сообщения за счет разнесения сигнала на передаче и приеме. Методы адаптивной пространственной обработки сигналов обеспечивают одновременный прием сообщений по нескольким независимым радиоканалам, что повышает пропускную способность сети. Однако с увеличением числа независимых радиоканалов происходит снижение энергии на бит передаваемого сообщения и соответствующее повышение вероятности ошибки на бит принимаемого сообщения, что делает актуальным поиск компромисса между повышением пропускной способности технологии MIMO и уменьшением вероятности ошибки на приеме.

Применение методов пространственно-частотного кодирования сигналов с использованием технологии MIMO и многолучевых адаптивных антенных систем с коммутируемыми лучами позволяет увеличить энергетический потенциал радиолинии и пропускную способность сотовых сетей связи и, следовательно, повысить их спектральную эффективность.

Пространственно-временное кодирование используется в сетях беспроводного широкополосного доступа городского масштаба (WiMax), работающих по стандарту IEEE 802.16e. Кроме того, эта технология реализована в беспроводных локальных сетях (WiFi) по стандарту IEEE 802.11n, в сетях сотовой связи LTE. В табл. 1.2 приведены основные характеристики этих систем.

Системы MIMO используют различные методы пространственной обработки сигналов (пространственного кодирования и декодирования). Эти методы можно разделить на две группы. К первой из них относятся методы, которые не предполагают наличие канальной информации на передающей стороне. Поэтому при их использовании только прием сигналов является адаптивным и согласованным со случайным пространственным каналом. Вторую группу составляют методы, основанные на знании канала не только

приемником, но и передатчиком, и обеспечивающие адаптивную пространственную обработку сигналов не только на прием, но и на передачу.

Таблица 1.2

Характеристики систем связи с реализацией технологии MIMO

Стандарт	IEEE 802.16 e (WiMax)	WCDMA/UMTS	3GPP (LTE)
Диапазон рабочих частот, ГГц	2,3; 2,5; 3,5; 5,8	2,4; 1,8	0,7; 0,9; 1,8; 1,9; 2,1; 2,3; 2,6
Ширина полосы частотного канала, МГц	5; 7,5; 10; 20	5	1,4; 3; 5; 10; 15; 20
Тип многостанционного доступа	OFDMA	WCDMA	OFDMA
Модуляция	ФМ-2, ФМ-4, 16-КАМ, 64-КАМ	Когерентная BPSK, QPSK	ФМ-2, ФМ-4, 16-КАМ, 64-КАМ
Максимальное число передающих антенн MIMO	4	2	4
Стандарт	IEEE 802.16 e (WiMax)	IEEE 802.11n (WiFi)	3GPP (LTE)
Максимальное число передающих антенн MIMO	4	4	4

Основными алгоритмами обработки сигналов в MIMO-системах без обратной связи являются:

- ортогональное блочное пространственно-временное кодирование (Space-Time Block Coding (STBC));
- метод Zero Forcing (ZF);
- оценка по минимуму среднеквадратичной ошибки (МСКО-приемник);
- максимально правдоподобная (МП) оценка принятых символов (МП-приемник);
- алгоритм BLAST (Bell Laboratories Layered Space-Time) пространственного декодирования.

Эти методы отличаются способом разделения переданных символов (посимвольным детектированием) в приемных антеннах.

При использовании ортогонального блочного пространственного кодирования последовательность символов разделяется на блоки, которые специальным образом обрабатываются (пространственное кодирование) на передающем конце линии. В результате одновременной передачи данных

несколькими антеннами каждая приемная антенна принимает смесь сигналов от всех передающих антенн. Блочное кодирование обеспечивает такую структуру передаваемого блока, которая позволяет разделить символы в приемных антеннах с помощью линейного преобразования.

1.1. Системы связи с пространственным кодированием

Системы связи с пространственным кодированием используют несколько антенн на передающей и приемной сторонах (рис. 1.2).

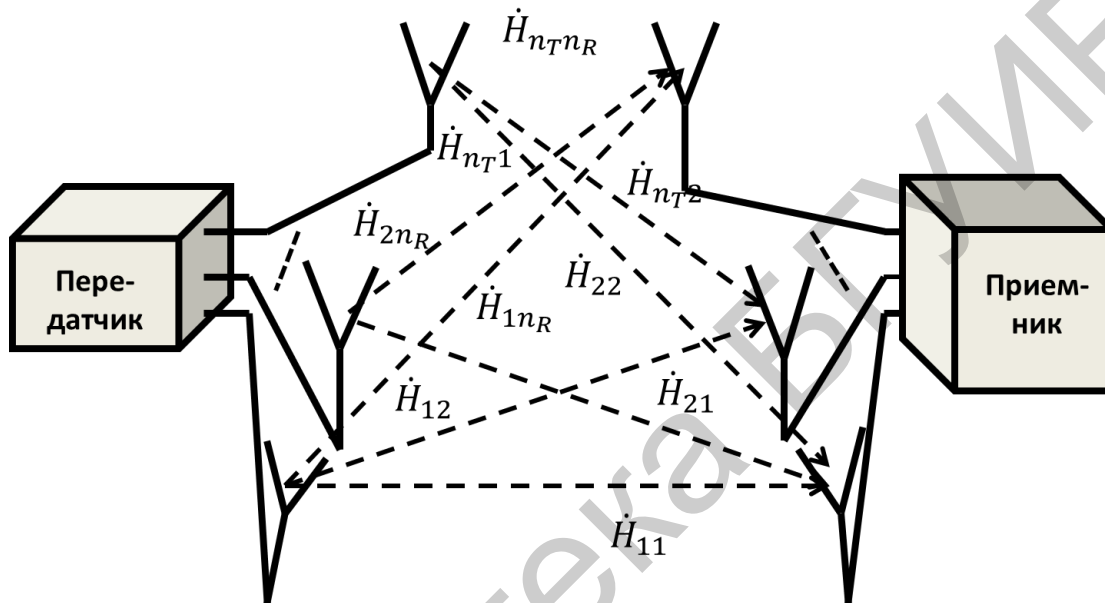


Рис. 1.2. Многоантенная система связи

В структуре системы i -я передающая и j -я приемная антенны образуют субканалы. Текущее состояние каналов характеризуется комплексными коэффициентами затухания $\dot{H}_{i,j}$, которые могут зависеть от времени и частоты.

Системы связи часто используют выделенный канала для пилот-сигнала, по результатам обработки которого система получает информацию о состоянии канала. В этом случае приемник осведомлен о текущем состоянии канала и может использовать коэффициенты $\dot{H}_{i,j}$ для эффективной совместной обработки (комбинирования) субканальных сигналов.

Передачик может располагать знаниями о состоянии каналов и возможностью адаптации сигналов к текущим условиям распространения за счет организации надежной информационной обратной связи «приемник – передатчик» (замкнутой петли разнесения на передаче).

Возможны следующие конфигурации каналов.

1. Традиционная конвенциональная система связи использует одну передающую и одну приемную антенну (система SISO).

2. Имеется одна передающая и n_R приемных антенн, т. е. n_R субканалов с коэффициентами затухания $\dot{H}_1, \dots, \dot{H}_{n_R}$ (система MISO). Обработка заключается в адекватном комбинировании сигналов, принятых параллельными антеннами.

3. Система с одной передающей и несколькими приемными антеннами, которые применяются для реализации алгоритма разнесенного приема сигналов в каналах с замираниями (система SIMO).

4. Кардинальное изменение ситуации при одновременной работе нескольких параллельных передающих и приемных антенн (система MIMO). Приемник сталкивается с проблемой разделения их сигналов, интерферирующих друг с другом на входе каждой из приемных антенн. Для эффективной обработки необходимо применять *пространственно-временное кодирование*.

Самый простой пространственно-временной код работает в разнесенных каналах с медленными замираниями, коэффициенты замираний постоянные, один и тот же символ передается антеннами по очереди, сигнал каждой антенны использует полный ресурс, а также идентифицирован во времени и ортогонален к другим сигналам. Сигнал в каждом из подканалов (ветви) может быть подвержен рэлеевским (или другим) замираниям, однако вероятность того, что интерференционные картины в каждом из них будут одновременно неблагоприятными, определяется правилом умножения вероятностей и, таким образом, существенно меньше вероятности «плохого» состояния индивидуальной ветви.

В динамически изменяющихся каналах используется пространственно-временной код с временной коммутацией (мультиплексированием). Декодер системы, имея информацию о каналах и наблюдая субканалы, способен скомбинировать их любым подходящим способом для достижения максимума отношения сигнал/шум на выходе.

Модели системы MIMO

Предполагается, что сигналы на передающей стороне излучаются одновременно и в одной полосе частот через M передающих антенн.

Дискретная во времени модель канала включает в себя:

– $x_\mu[k]$: символ, передаваемый μ -й антенной, индекс времени k , математическое ожидание $E\{x_\mu[k]\} = 0$, $E\{|x_\mu[k]|^2\} \triangleq \sigma_{x_\mu}^2$;

– $h_{v,\mu}$: характеристика канала – комплексный коэффициент передачи тракта распространения сигнала между μ -й передающей и v -й приемной антеннами. Амплитуда $|h_{v,\mu}|$ имеет распределение Рэлея, коэффициент передачи канала представляет собой комплексную переменную с гауссовским законом распределения вероятности $h_{v,\mu} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_h^2)$ (i. i. d);

– $n_v[k]$: выборка аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) на приемной v -й антенне в момент времени k $n_{v,\mu} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$;

– $y_v[k]$ – принимаемый символ v -й антенной в момент времени k .

Векторно-матричная модель определяет:

– передаваемый вектор: $\mathbf{x}[k] := [x_1[k], \dots, x_M[k]]^T$;

– вектор шума: $\mathbf{n}[k] := [n_1[k], \dots, n_N[k]]^T$;

– принимаемый вектор: $\mathbf{y}[k] := [y_1[k], \dots, y_N[k]]^T$.

Матрица канала записывается в виде

$$H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1} & \dots & h_{N,M} \end{bmatrix}.$$

Уравнение наблюдения определяется как

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{H}\mathbf{x}[k] + \mathbf{n}[k].$$

Пример. Система ММО 3×3 работает с многолучевым каналом. За счет многолучевого распространения сигнал каждого абонента поступает на вход приемной антенны с запаздыванием.

Абонент 1: каждый следующий луч проходит на четверть волны больше.

Абонент 2: каждый следующий луч проходит на полволны больше.

Абонент 3: нет разности хода в лучах.

Матрица канала имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) & \exp(j\pi) \\ 1 & \exp(j\pi) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Каждому абоненту передаем символ $x_i, i = \{1, 2, 3\}$. Обозначим через y_i , где $i = \{1, 2, 3\}$, декодированный сигнал, принятый i -м абонентом.

Как сделать, чтобы выполнялось равенство $y_i = x_i$?

Решение. Применим метод декомпозиции матрицы \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H,$$

где \mathbf{U} – унитарная ($N \times N$)-матрица; \mathbf{D} – диагональная ($N \times N$)-матрица собственных значений $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

Будем передавать место $\mathbf{x}[k]$, сигнал $\mathbf{x}'[k] := \mathbf{U}\mathbf{x}[k]$, а принимать и обрабатывать сигнал $\mathbf{y}'[k]$:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{y}'[k] := \mathbf{y}[k].$$

Используя свойство унитарных матриц получаем

$$y_v[k] = \lambda_v x_\mu[k] + \tilde{n}_v[k],$$

где $\tilde{n}_v[k]$ – трансформированная в процессе обработки шумовая компонента.

Статистическая модель пространственного мультиплексирования

Системная модель ММО имеет N_T антенн на передающей стороне и N_R антенн на приемной. Отношение между передаваемым вектором (вход)

$$\mathbf{x}_C = [x_{c,1}, x_{c,2}, \dots, x_{c,N_T}]^T \in \mathbb{C}^{N_T \times 1}$$

и принимаемым вектором (выход)

$$\mathbf{y}_C = [y_{c,1}, y_{c,2}, \dots, y_{c,N_R}]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times 1}$$

определяется как

$$\mathbf{y}_C = \mathbf{H}_C \mathbf{x}_C + \mathbf{n}_C,$$

где $\mathbf{H}_C \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$ – матрица канала.

Элементы $h_{i,j}$ матрицы канала \mathbf{H}_C представляются в виде комплексных коэффициентов ассоциированных линиями распространения между i -й антенной на приемной стороне и j -й антенной на передающей стороне. Коэффициенты $h_{i,j} \sim \mathcal{N}_C(0,1)$ являются случайными величинами процесса с циклическим, симметричным, комплексным, гауссовским распределением вероятности, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (действительная и мнимая компоненты процесса имеют одинаковую дисперсию, равную 1/2).

Фаза коэффициентов $h_{i,j}$ равномерно распределена на интервале $[0, 2\pi]$. Амплитуда коэффициентов имеет рэлеевский закон распределения. Такие условия характерны для модели многолучевого канала связи с независимым, равномерным рэлеевским законом плотности распределения вероятности.

Шумовая компонента $\mathbf{n}_C = [n_{c,1}, n_{c,2}, \dots, n_{c,N_R}]^T \in \mathbb{C}^{N_R \times 1}$ моделируется как случайная переменная с независимым, циклическим, симметричным комплексным гауссовским законом распределения вероятности $\mathcal{N}_C(0, \sigma_n^2)$, нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_n^2 . Такой шум в литературе часто называют пространственным белым шумом с нулевым математическим ожиданием.

Для независимого источника информации ковариационная функция имеет вид $R_x = E\{\mathbf{x}_C \mathbf{x}_C^H\} = \sigma_x^2 I_n$. Ковариацию независимого вектора шума запишем как $R_n = E\{\mathbf{n}_C \mathbf{n}_C^H\} = \sigma_n^2 I_n$.

В случае целочисленного вектора входа x любой возможный вектор является точкой решетки \mathbb{Z}^n . Выполняя линейное преобразование \mathbf{H}_C , модель канала учитывает искажения в \mathbb{Z}^n (рис. 1.3).

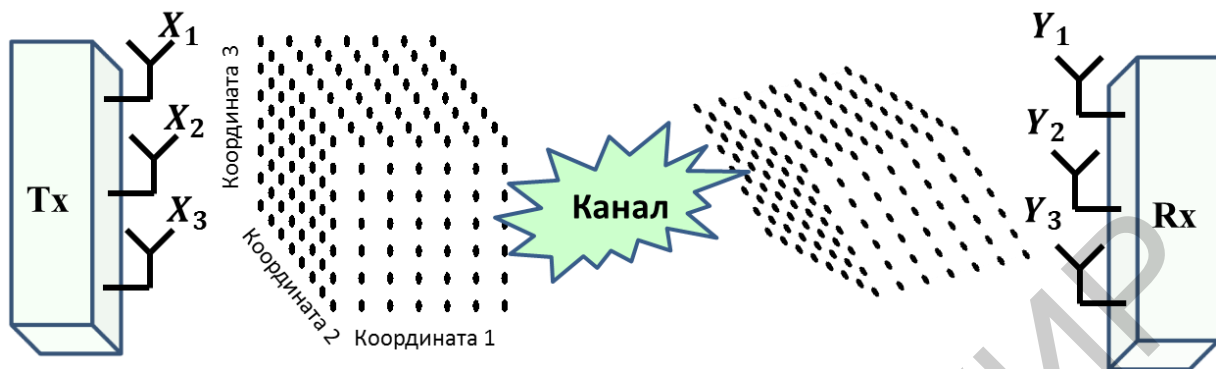


Рис. 1.3. Пространственное мультиплексирование действительного сигнала

Решетка \mathbb{Z}^n формируется на передающей стороне. Канал вносит в пространственный сигнал геометрические искажения, деформируя решетку.

Отношение сигнал/шум ρ на приемной стороне можно записать как

$$\rho \triangleq \frac{E\{\|y\|^2\}}{E\{\|n\|^2\}} = N_T \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}.$$

Учитывая, что сигнал имеет энергию E_s на интервале T , а шум характеризуется спектральной плотностью мощности N_0 в полосе сигнала B , отношение дисперсий принимает вид

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} = \frac{E_s/T}{N_0 B} = \frac{E_s}{N_0}.$$

Определяя энергию бита информации как $E_b = E_s/M$, где M – значность алфавита модулирующего созвездия, получаем выражение для отношения сигнал/шум:

$$\rho = N_T \frac{E_s}{N_0} = N_T \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}.$$

1.2. Пространственно-временные блочные коды

Ортогональные пространственно-временные (ПВ) коды позволяют получить максимально возможный порядок разнесения, равный NM , при низкой вычислительной сложности оптимального по критерию максимального правдоподобия демодулятора.

Примем следующие обозначения. Число тактовых интервалов, из которых состоит один передаваемый блок комплексных информационных коэффициентов, обозначим символом p , а порядок используемой в системе модуляции – $L = 2^m$.

Процесс ПВ-кодирования состоит в формировании N параллельных последовательностей длиной p с помощью k информационных символов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, каждый из которых несет m бит информации. Каждая из этих последовательностей передается через отдельную антенну. В результате на передающей стороне формируется пространственно-временная матрица \mathbf{S} размером $N \times p$ (STC-матрица).

Строки матрицы \mathbf{S} представляют собой последовательности из p символов, излучаемых отдельными антеннами. Каждый из столбцов матрицы \mathbf{S} представляет собой совокупность пространственно-временных символов, одновременно излучаемых через N передающих антенн на текущем тактовом интервале. Пространственно-временной символ имеет размерность N . Символ $s_{i,j}$, где $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, p$, матрицы \mathbf{S} представляет собой символ, излучаемый i -й передающей антенной на j -м интервале времени.

Скорость ПВ кода определяется через отношение числа символов k на входе пространственно-временного кодера к числу пространственно-временных символов, излучаемых каждой передающей антенной:

$$R = k/p.$$

Спектральная эффективность ПВ кода оценивается с помощью соотношения

$$v = r_b/B = mR = m \frac{k}{p} \left(\frac{\text{бит/с}}{\text{Гц}} \right),$$

где r_b – скорость передачи данных, бит/с; B – ширина полосы частот канала связи, Гц.

Элементы ПВ матрицы \mathbf{S} представляют собой линейные комбинации k комплексных информационных символов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ и k символов $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*$, являющихся их комплексными сопряжениями. Матрица \mathbf{S} должна удовлетворять следующему условию ортогональности

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^*\mathbf{S} = c \text{diag}\{|\theta_1|^2 + |\theta_2|^2 + \dots + |\theta_k|^2\},$$

где c – некоторая константа; $\text{diag}\{\cdot\}$ – диагональная матрица.

Скорость ПВ-кода, имеющего максимально возможный порядок разнесения на передаче, не может превышать единицу $R \leq 1$. Скорость кода R существенным образом зависит от структуры пространственно-временной матрицы \mathbf{S} .

Система MISO

В случае когда имеются две излучающие антенны и одна приемная, информационные символы передаются и принимаются парами (блоком из двух символов).

Во время первого символьного интервала, составляющего половину длительности блока, первый символ x_1 в модуляторе преобразуется в сигнал $u_1(t)$, который поступает на первую антенну, а второй символ x_2 в модуляторе преобразуется в сигнал $u_2(t)$, который поступает на вторую антенну. Во время второго символьного интервала на первую антенну подается сигнал $-u_2^*(t)$ (знаком * обозначен комплексно-сопряженный сигнал), а на вторую антенну поступает сигнал $u_1^*(t)$.

Сигналы, которые поступят на вход приемника в первый и второй символьные интервалы, обозначим через $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Они определяются выражениями:

$$\begin{cases} z_1(t) = h_1 u_1(t) + h_2 u_2(t); \\ z_2(t) = -h_1 u_2^*(t) + h_2 u_1^*(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где h_1 и h_2 – комплексные коэффициенты передачи канала.

Значения h_1 и h_2 соответствуют отношению комплексной амплитуды напряжения на выходе приемной антенны к комплексной амплитуде сигнала на входе первой (второй) передающей антенны. Для простоты мы полагаем, что рассматривается узкополосный канал, и зависимость федингов от частоты можно не учитывать.

Из сигналов $z_1(t)$ и $z_2(t)$, принятых в первый и второй символьные интервалы, составим следующие две линейные комбинации:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(t) = h_1^* z_1(t) + h_2 z_2^*(t); \\ \hat{u}_2(t) = h_2^* z_1(t) - h_1 z_2^*(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Подстановка выражений (1.1) в (1.2) приводит к следующему виду:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(t) = (|h_1|^2 + |h_2|^2) u_1(t); \\ \hat{u}_2(t) = (|h_1|^2 + |h_2|^2) u_2(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

где $|\cdot|$ – модуль числа.

Выражение (1.3) показывает, что комбинируя принятые сигналы в соответствии с выражением (1.2), можно получить сигналы, которые отличаются от переданных сигналов $u_1(t)$ и $u_2(t)$ только действительным множителем. Рассмотренный выше алгоритм пространственно-временного кодирования является ортогональным алгоритмом Аламоути [4, 6].

Система MIMO

В многоантенных системах с несколькими пространственными каналами полагается, что число передающих антенн не больше числа приемных ($N_t \leq N_r$). В этом случае можно получить скорости передачи информации, близкие к предельным значениям без адаптации, т. е. если параметры канала известны в передатчике.

В MIMO-системе связи с N_t передающими и N_r приемными антеннами при $N_t \leq N_r$ входной поток данных делится на N_t подпотоков.

Вектор принятых сигналов $\mathbf{y}(t)$ представляет произведение матрицы канала \mathbf{H} на вектор излученных сигналов $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t),$$

где $\mathbf{n}(t)$ – N_r -мерный вектор шума.

Задача разделения и оценки сигналов имеет решение в системе из N_r алгебраических уравнений с N_t неизвестными. MIMO-система связи обеспечивает передачу информации по N_t пространственным каналам. Причем все каналы работают в одной и той же полосе частот и разделяются только за счет пространственного разнесения излучающих и приемных антенн.

На рис. 1.4 приведены результаты моделирования многоантенных систем, использующие конфигурации антенн 2×1 и 1×2 .

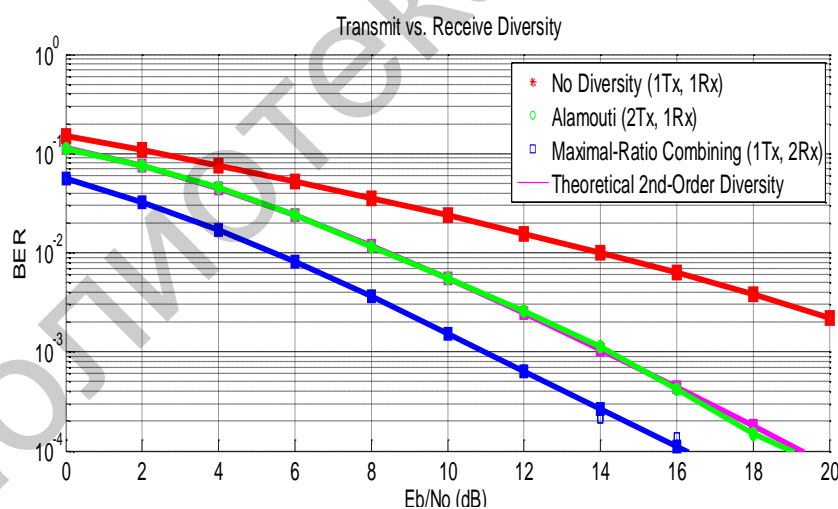


Рис. 1.4. Зависимость вероятности ошибки BER от отношения сигнал/шум в канале

Как видно из результатов моделирования, применение многоканальности позволяет повысить надежность передачи информации.

Возможность одновременной передачи информации по нескольким пространственным каналам объясняет высокую спектральную эффективность многоантенных систем и пристальное внимание к ним со стороны разработчиков высокоскоростных систем радиосвязи.

1.3. Математическая модель подпространственного кодирования

Основные определения и обозначения. Пусть $W_{N,q}$ – некоторое фиксированное N -мерное векторное пространство над конечным полем \mathbb{F}_q . Множество $\mathcal{P}(W_{N,q})$ определено для всех подпространств в N -мерном пространстве $W_{N,q}$.

Подпространство V является m -мерным и состоит из q^m векторов длиной N над базовым полем \mathbb{F}_q . Его можно рассматривать как подпространство, натянутое на строки матрицы $\mathbf{M}(V)$ размером $n \times N$ ранга m над полем \mathbb{F}_q , $n \geq m$. Матрица $\mathbf{M}(V)$ называется порождающей матрицей m -мерного подпространства V . Размерность подпространства и ранг порождающей матрицы совпадают, т. е. $\dim(V) = \text{rank}(\mathbf{M}(V))$, где использовано обозначение $\text{rank}(A)$ – ранг матрицы A . Если $n = m$, то матрица $\mathbf{M}(V)$ называется базисной порождающей матрицей.

Подпространственная метрика на множестве $\mathcal{P}(W_{N,q})$

Подпространственное расстояние между подпространствами U и V определено в виде

$$d(U, V) = \dim(U \cup V) - \dim(U \cap V),$$

где $\dim(U \cup V)$ – размерность суммы подпространств U и V ; $\dim(U \cap V)$ – размерность пересечения подпространств U и V .

Если $\mathbf{M}(U)$ и $\mathbf{M}(V)$ – порождающие матрицы подпространств U и V , то подпространственное расстояние $d(U, V)$ между подпространствами U и V равно удвоенному рангу матрицы, состоящей из двух базисных порождающих матриц, и минус сумма рангов матриц $\mathbf{M}(U)$, $\mathbf{M}(V)$. Функция расстояния принимает значения $\{0, 1, \dots, N\}$.

Множество всех подпространств в множестве $\mathcal{P}(W_{N,q})$ является объединением подпространственно определенной размерности l , где $l = \overline{0, N}$; $|\mathcal{P}(W_{N,q})|$ – мощность множества $\mathcal{P}(W_{N,q})$. Множество всех l -мерных подпространств N -мерного векторного пространства над полем \mathbb{F}_q называется Грассманианом $G_l(N, q)$. Мощность Грассманиана определяется через гауссовские биномиальные коэффициенты. Количество всех подпространств равно сумме мощностей Грассманианов размерностью от 0 до N . В теории сетевого кодирования множество $\mathcal{P}(W_{N,q})$ рассматривается как алфавит кода или как сигнальное пространство.

Любое непустое подмножество $C \subseteq \mathcal{P}(W_{N,q})$ называется кодом. Мощность кода обозначается $|C|$ и равна числу его элементов, в данном случае числу подпространств. Минимальное расстояние C обозначим

$$d(C) = \min_{U, V \in C: U \neq V} d(U, V).$$

Пусть $l(C) = \max_{V \in C} \dim(V)$, где $\dim(V)$ – размерность подпространства V . Скорость кода определяется как

$$R = \log_q |C| / \log_q |\mathcal{P}(W_{N,q})|.$$

Основная проблема теории кодирования для данной метрики – построить коды с заданным подпространственным расстоянием.

Модель работы сети. За один сеанс связи в источник поступает n пакетов X_1, \dots, X_n длиной N . Источник объединяет их в матрицу \mathbf{X} размером $n \times N$, состоящую из элементов конечного поля \mathbb{F}_q . На любом узле сети, включая и источник, создается линейная комбинация пакетов со случайными коэффициентами. Коэффициенты – элементы поля \mathbb{F}_q . Пункт приема сообщений (получатель) получает n_r пакетов Y_1, \dots, Y_{n_r} длиной N , образует матрицу \mathbf{Y} размером $n_r \times N$ над полем \mathbb{F}_q и старается определить начальную матрицу \mathbf{X} . Предполагается, что передаваемая матрица \mathbf{X} и принятая матрица \mathbf{Y} связаны соотношением, характеризующим канал связи:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Z}.$$

Здесь \mathbf{A} – матрица размером $n_r \times n$, задающая все линейные преобразования, произошедшие в сети с передаваемыми пакетами за время передачи. Матрица \mathbf{Z} размером $s \times N$ характеризует ошибки, ее строки – это ошибочные пакеты Z_1, \dots, Z_s , введенные где-либо в сети во время передачи; \mathbf{B} – матрица размером $n_r \times s$, соответствующая всем линейным преобразованиям с ошибочными пакетами Z_1, \dots, Z_s на пути к пункту приема. Предполагается, что матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Z} имеют случайные элементы. Матрица \mathbf{A} может быть известна или неизвестна на приемном конце в зависимости от выбранного метода кодирования. Матрицы \mathbf{B} , \mathbf{Z} неизвестны на приемной стороне.

Пусть \mathbf{X} – матрица над полем \mathbb{F}_q с N столбцами. Обозначим $V = \{X\}$ пространство строк матрицы \mathbf{X} . Все матрицы $\tilde{\mathbf{X}}$ с таким же пространством строк считаем эквивалентными, V – подпространство пространства $W_{N,q}$. Следовательно, можно предположить, что подпространство V есть отображение матрицы \mathbf{X} . Множество подпространств $\mathcal{P}(W_{N,q})$ при этом рассматривается как входной и выходной алфавит канала.

Конструкция подпространственных кодов. Потребуем, чтобы матрица ранга, не превосходящего n , преобразовывалась в матрицу фиксированного ранга n путем добавления единичной матрицы. Эта составная матрица названа лифтинговой конструкцией. В лифтинговой конструкции подпространственный код \mathcal{X} представляет собой множество матриц

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{X} : \mathbf{X} = [\mathbf{I}_n \ \mathbf{X}_p]\},$$

где \mathbf{I}_n – единичная матрица порядка n ; $\mathbf{X}_p \in C$ – матрица рангового кода.

Множество C представляет собой ранговый код с ранговым расстоянием d_r , состоящий из прямоугольных матриц размером $n \times m$, где $m = N - n$.

Предположим, что передана матрица $\mathbf{X} = [\mathbf{I}_n \ \mathbf{X}_p]$. На приемной стороне получаем матрицу \mathbf{Y} в виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Z} = [\hat{\mathbf{A}} \ \mathbf{Y}_b],$$

где $\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{Y}_b$ – матрицы размером $(n_r \times n)$ и $(n_r \times m)$ соответственно, состоящие из элементов базового поля.

В работе [8] показано, что с помощью стандартного преобразования строк (метода исключений Гаусса) матрица \mathbf{Y} может быть преобразована в

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \hat{\mathbf{L}}\mathbf{I}_u^T & \mathbf{P} \\ 0 & & \hat{\mathbf{E}} \end{bmatrix},$$

где $\hat{\mathbf{L}}$ – матрица размером $n \times \mu$; $\hat{\mathbf{E}}$ матрица размером $\delta \times m$, где $\mu \triangleq n - \text{rank}(\hat{\mathbf{A}})$ и $\delta \triangleq N - \text{rank}(\hat{\mathbf{A}})$.

Подмножество $U \subset \{1, 2, \dots, n\}$ определяет элементы единичной матрицы, которые должны быть заменены нулями. Такое представление позволяет свести декодирование подпространственных кодов к декодированию ранговых кодов путем извлечения $\mathbf{X}_p \in C$ из \mathbf{Y} .

В процессе декодирования для принятой матрицы \mathbf{Y} с параметрами $(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{E}})$ и рангами $\text{rank}(\hat{\mathbf{L}}) = \mu$, $\text{rank}(\hat{\mathbf{E}}) = \delta$ определяется матрица

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in C} \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}} & \mathbf{P} - \mathbf{X}_p \\ 0 & \hat{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \right).$$

Пусть $(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{E}})$ характеризуют принятую и преобразованную матрицу \mathbf{Y} . Тогда расстояние $d(\{X\}, \{Y\})$ между передаваемым подпространством $\{X\}$ и принятым подпространством $\{Y\}$ равно

$$d(\{X\}, \{Y\}) = 2 \text{rank} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}} & \mathbf{P} - \mathbf{X}_p \\ 0 & \hat{\mathbf{E}} \end{pmatrix} - (\mu + \delta).$$

Алгоритм декодирования ранговых кодов находит по принципу минимума расстояния в коде C такое кодовое слово \mathbf{x} , которое минимизирует ранг матрицы $\hat{\mathbf{X}}$. Принятое сообщение соответствует переданному, если расстояние меньше половины минимального расстояния кода, т. е. $d(X, Y) < d_{\min}(C)/2$.

Контрольные вопросы

1. Эргодическую емкость канала связи с нормальным распределением значений можно оценить с помощью следующих выражений [1]:

– канал MIMO $M \times M$

$$C_{\text{MIMO}} = \log_2 \left(1 + \frac{\text{SNR}}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right),$$

где \mathbf{H} – матрица канала связи; SNR – отношение сигнал/шум в канале;

– канал SIMO $1 \times M$

$$C_{\text{SIMO}} = \log_2(1 + \text{SNR} \|\mathbf{h}_{\text{SIMO}}\|^2),$$

где \mathbf{h}_{SIMO} – M -мерный вектор-столбец импульсной характеристики канала связи;

– канал MISO $M \times 1$

$$C_{\text{MISO}} = \log_2 \left(1 + \frac{\text{SNR}}{M} \|\mathbf{h}_{\text{MISO}}\|^2 \right),$$

где \mathbf{h}_{MISO} – вектор-строка характеристики канала связи;

– канал SISO

$$C_{\text{SISO}} = \log_2(1 + \text{SNR} \text{abs}(h_{\text{SISO}})^2),$$

где h_{SISO} – комплексное значение характеристики канала связи.

Напишите программу вычисления усредненных эргодических емкостей каналов систем MIMO, MISO, SIMO и SISO и проведите сравнительный анализ.

2. Сеть связи использует MIMO-систему 2×2 . Матрицы пространственной корреляции элементов передающей (BS) и приемной (MS) антенных решеток имеют вид

$$R_{\text{BS}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^* & 1 \end{bmatrix}, R_{\text{MS}} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta^* & 1 \end{bmatrix},$$

где α и β – значения пространственной корреляции между антеннами.

Используя операцию кронекеровского произведения матриц, постройте матрицу пространственной корреляции канала связи.

3. Оцените выигрыш за счет разнесения на передаче при увеличении количества передающих антенн (две либо четыре антенны) при одной приемной антенне.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ КОДЫ

С математической точки зрения для построения кода для заданного целого n требуется определить кодовую книгу $C \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, кодовые слова которой принадлежат n -мерному пространству \mathcal{M} над полем \mathbb{F} .

Кодовая книга имеет вид множества матриц, размером $n \times n$, над полем \mathbb{F} . Кодовые матрицы должны удовлетворять условию *полноты разнесения*, т. е. свойству, согласно которому разность двух различных матричных элементов кода C имела отличный от нуля определитель. Желательно, чтобы код C обладал свойствами не исчезающей положительности определителя, реализовывал полную скорость информационного сигнала, имел удобную для реализации форму символов и имел равномерное распределение средней передаваемой мощности.

2.1. Алгебраические структуры

Одними из основных алгебраических структур являются *группа* $(G, *)$, определяемая как множество G вместе с одной операцией, а также *кольцо* $(R, +, \cdot)$, представляющее собой множество R совместно с операциями сложения и умножения. Заметим, что в кольце отсутствует мультипликативная инверсия (нет деления).

Примеры колец: \mathbb{Z} – кольцо целых чисел; $\mathbb{Q}[x]$ – кольцо многочленов рациональных чисел; $\mathbb{Z}[i]$ – кольцо целых комплексных чисел.

Подмножество I кольца R является *двусторонним идеалом*, или просто *идеалом*, если справедливы соотношения:

- 1) $(I, +)$ – подгруппа группы $(R, +)$;
- 2) $a \cdot r \in I, r \cdot a \in I \quad \forall r \in R, a \in I$.

Если идеал формируется одним элементом $I = \langle a \rangle = aR = \{a \cdot r \mid r \in R\}$, то он носит название «главный идеал». Если все идеалы $I \subset R$ главные, то R является областью главных идеалов.

Пример. Множество $\langle x \rangle = x\mathbb{Q}[x]$ – главный идеал полиномиального кольца $\mathbb{Q}[x]$.

Следующим важным понятием алгебраических структур является поле. Поле \mathbb{F} можно определить как ненулевое коммутативное кольцо, содержащее мультипликативные инверсные (обратные) элементы для каждого ненулевого элемента кольца. Эквивалентное определение: поле – кольцо, у которого ненулевые элементы образуют абелеву группу $G^* = G \setminus \{0\}$ относительно операции умножения (G^*, \cdot) .

В поле действуют все четыре операции: сложения, вычитания, умножения и деления.

Векторное пространство над полем \mathbb{F} определяется как множество V с операциями сложения и умножения:

- 1) $(V, +)$ – абелева группа;

$$2) a(bv) = (ab)v \quad \forall a, b \in \mathbb{F}, v \in V;$$

$$3) e = 1, 1 \cdot v = v, \forall v \in V;$$

$$4) a(u + v) = au + av, (a + b)v = av + bv \quad \forall a, b \in \mathbb{F}, u, v \in V.$$

Элементы поля называются скалярами.

Базис V определяется как множество линейно независимых векторов $\beta_i \in V$, таких, что каждый вектор $v \in V$ может быть записан через линейную комбинацию базисных векторов:

$$v = \sum_{i=1}^n f_i \beta_i, \quad f_i \in \mathbb{F}.$$

Размерность V равна $\dim_{\mathbb{F}} V = n$.

Решетка Λ определяется как дискретная, имеющая базис, абелева подгруппа действительных или комплексных n -мерных векторных пространств V , т. е. $V = \mathbb{R}^n$.

Пусть Λ формируется с помощью базиса $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Тогда мы можем записать решетку $\Lambda \subset V$ как

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^k z_i \beta_i \mid z_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

где $k \leq n$ – ранг решетки.

Решетка имеет полный ранг, если $k = n$.

Объем основного параллелепипеда решетки обозначается как $\text{vol}(\Lambda)$ и определяется через гипермеру множества

$$\left\{ \sum_{i=1}^k x_i \beta_i \mid 0 \leq x_i < 1 \right\}.$$

Матричное представление полных решеток $\Lambda \subseteq V$ задается порождающей матрицей \mathbf{M} , строками которой являются векторы базиса

$$\{\beta_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,n}), i = 1, \dots, n\}.$$

Объем решетки может быть вычислен через определитель порождающей матрицы

$$\text{vol}(\Lambda) = \det(\mathbf{M}) = \det([\beta_{i,j}]).$$

Матрица Грамма решетки Λ имеет вид

$\text{Gram}(\Lambda) = \mathbf{M}\mathbf{M}^T$ – для действительных чисел;

$\text{Gram}(\Lambda) = \mathbf{M}\mathbf{M}^H$ – для поля комплексных чисел,

где T и H – операторы транспонирования и эрмитово сопряжение матриц соответственно.

Отсюда объем решетки запишем как

$$\text{vol}(\Lambda) = \sqrt{\det(\text{Gram}(\Lambda))}.$$

Решетка называется ортогональной, если ее базисные векторы ортогональны друг другу. Матрица Грамма в этом случае имеет вид диагональной матрицы.

Примеры решеток представлены на рис. 2.1

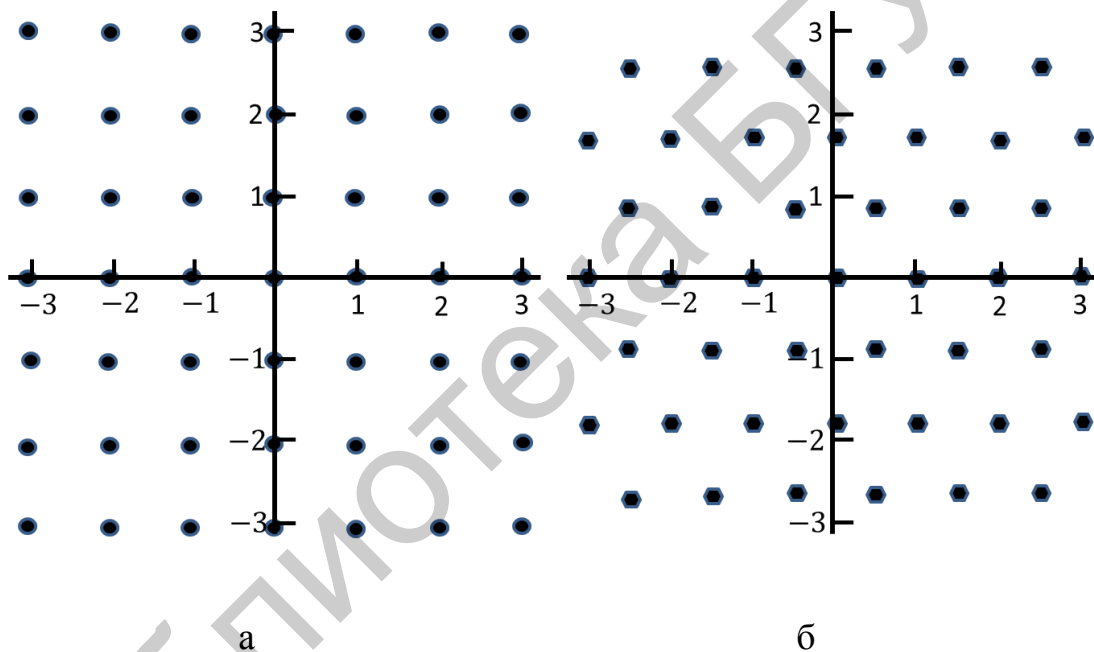


Рис. 2.1. Примеры дискретных решеток:

а – решетка гауссовских целых чисел \mathbb{Z}^2 , эквивалентное множество – кольцо комплексных целых $\mathbb{Z}[i] = \{a + bj | a, b \in \mathbb{Z}, j = \sqrt{-1}\}$;

б – решетка гексагональной формы, построенная с помощью алгебры A^2 (решетка целых чисел Эйнштейна)

2.2. Кодовые структуры решеток для каналов с замираниями

Рассмотрим канал с одним входом и одним выходом (SISO), в котором возможны медленные замирания по рэлеевскому закону. Модель канала имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v},$$

где $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ – передаваемое кодовое слово, формируемое с помощью кодовой книги $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}^n$; $\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ – вектор аддитивного белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_v^2 , $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$; \mathbf{y} – принимаемый вектор.

Качество канала оценивается по измеряемому отношению сигнал/шум (SNR):

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{E[\|\mathbf{H}\mathbf{x}\|^2]}{E[\|\mathbf{v}\|^2]} \right).$$

Положим, что на приемной стороне имеется полная информация о состоянии канала (CSIR – Channel State Information Ratio). В этом случае может быть использован алгоритм декодирования по критерию максимального правдоподобия (ML):

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\arg \min}_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2.$$

Алгоритм декодирования по критерию максимального правдоподобия характеризуется достаточно большой вычислительной сложностью. Часто используют менее сложный алгоритм сферического декодирования, в основе которого лежит решение задачи поиска на решетке ближайшей точки к принимаемому вектору в заданной гиперсфере (рис. 2.2):

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\arg \min}_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{y} - \Lambda(\mathbf{x})\|^2, \\ \text{subject to } \|\mathbf{y} - \Lambda(\mathbf{x})\|^2 \leq D^2,$$

где D – радиус сферы декодирования.

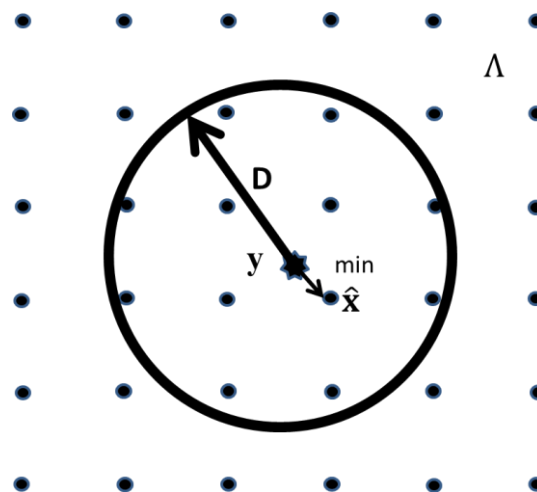


Рис. 2.2. Геометрическая модель сферического декодирования

В процедурах сферического декодирования используется диаграмма (ячейки) Вороного. Для заданной точки $P_i \in \{P_1, \dots, P_n\}$ на плоскости многоугольником (ячейкой) Вороного называется геометрическое место точек на плоскости, которые находятся к P_i ближе, чем к любой другой заданной точке $P_j, j \neq i$. Совокупность многоугольников Вороного образует разбиение плоскости, представляющее векторную сеть. Диаграммой Вороного заданного множества точек $\{P_1, \dots, P_n\}$ называется совокупность всех многоугольников Вороного этих точек.

Ячейка Вороного для точки \mathbf{u} , которая принадлежит решетке Λ , определится как

$$\mathcal{V}_\Lambda(\mathbf{u}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \mathbf{y} \in \Lambda\}.$$

Вероятность ошибки декодирования

$$P_e(C) \leq \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \in C} P(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$$

может быть получена с помощью методики Чернова для получения граничных соотношений [7]:

$$P(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \leq \frac{1}{2} \prod_{x_i \neq x'_i} \frac{4\sigma_v^2}{(x_i - x'_i)^2} = \frac{1}{2} \frac{(4\sigma_v^2)^l}{d_p^{(l)} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle^2},$$

где d_p – расстояние между кодовыми словами \mathbf{x} и \mathbf{x}' ; $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle$ – скалярное произведение векторов; $l = |\{i \mid x_i - x'_i \neq 0\}|$ – коэффициент множества несовпадений векторов. Тогда порядок разнесения кодовых слов можно оценить как $\delta = \min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \in C} \{l\}$.

Зададимся вопросом: *как выбрать хорошую кодовую решетку?* Возможны разные критерии выбора. Например, выбор кодов с наибольшим минимальным кодовым расстоянием. Потребуем, чтобы минимальное кодовое расстояние $d_{p\min}(C)$ было постоянным и положительным. В этом случае расстояние между любыми двумя кодовыми словами не должно быть произвольно малым. Отсюда следует необходимость применения для кодирования дискретных решеток.

На практике существует ограничение на мощность передаваемого сигнала. В пространстве Евклида мощность передаваемого сигнала, $\mathbf{x} \in C$, оценивается через норму $P = \|\mathbf{x}\|^2$. Мощность сигнала напрямую зависит от объема решетки. Корректное сравнение решеток разной формы требует нормализации объема основного параллелепипеда $\text{vol}(\Lambda) = 1$.

Ранг решетки определяет количество векторов с заданным ограничением по мощности. Чем меньше ранг, тем меньше кодовых слов содержит кодовая

книга. Очевидно, что наибольший интерес представляют решетки полного ранга.

Возможны следующие критерии выбора:

1) $\text{vol}(\Lambda) = 1$, чем достигается одинаковая скорость при фиксированной максимальной мощности и максимизация $d_{p\min}(C)$, что, в свою очередь, минимизирует вероятность ошибки;

2) $2d_{p\min}(C) = 1$, что позволяет обеспечить одинаковую вероятность ошибки при фиксированной скорости передачи информации и минимизацию объема $\text{vol}(\Lambda)$, что, в свою очередь, приводит к минимальной мощности передаваемого сигнала.

2.3. Алгебраические поля чисел

Рассмотрим поле комплексных чисел \mathbb{C} . Понятие алгебраического поля подразумевает, что все элементы поля являются корнями полиномиального уравнения с коэффициентами из \mathbb{Q} . Алгебраическое поле целых чисел состоит из чисел, являющихся корнями полиномиального уравнения с целыми коэффициентами из \mathbb{Z} .

Поля Галуа и поля комплексных чисел

Известно, что полная система вычетов по модулю простого числа p образует конечное поле порядка p , которое обозначают через $GF(p)$ и называют простым полем Галуа. Сложение и умножение элементов поля осуществляются в виде арифметических операций по модулю p над числами $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$.

Для построения *расширенных* полей Галуа используют неприводимые в $\mathbb{F}[x]$ полиномы (аналоги простых чисел в кольце \mathbb{Z}).

Пусть $f(x)$ – полином, принадлежащий $\mathbb{F}[x]$ и отличающийся от нулевого. Два полинома $a(x)$ и $b(x)$ сравнимы по модулю $f(x)$, если оба полинома при делении на $f(x)$ дают один и тот же остаток.

Если $f(x) = p(x)$ – неприводимый полином, то остатки от деления ненулевых полиномов в $\mathbb{F}[x]$ на полином $p(x)$ образуют поле относительно операции покомпонентного сложения и операции умножения по модулю $p(x)$.

Рассмотрим кольцо полиномов с вещественными коэффициентами $\mathbb{F}[x] = \mathbb{R}[x]$. Возьмем неприводимый полином $p(x) = x^2 + 1$. Этот полином не разлагается на полиномы первой степени с вещественными коэффициентами. Остатками от деления полиномов в $\mathbb{R}[x]$ будут полиномы первой степени вида $cx + d$. Поскольку $x^2 + 1$ – неприводимый полином, то множество полиномов $cx + d$ должно образовывать поле $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \times \mathbb{R}[x]$.

Рассмотрим теперь сумму и произведение двух комплексных чисел $aj + b$ и $cj + d$:

$$(aj + b)(cj + d) = (bc + ad)j + (bd - ac),$$

$$(aj + b) + (cj + d) = (a + c)j + (b + d).$$

Нетрудно заметить, что законы сложения и умножения в $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \times \mathbb{R}[x]$ полностью совпадают с законами в поле комплексных чисел \mathbb{C} . Отсюда следует, что эти два поля изоморфны:

$$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \times \mathbb{R}[x] \sim \mathbb{C}.$$

Говорят, что поле комплексных чисел получается при расширении поля вещественных чисел присоединением к нему корня уравнения

$$x^2 + 1 = 0: x = \sqrt{-1} = j.$$

Поскольку неприводимых полиномов со степенью выше 2 в кольце $\mathbb{R}[x]$ не существует, единственным расширением поля вещественных чисел является поле комплексных чисел.

Рассмотрим расширенное алгебраическое поле \mathbb{E}/\mathbb{F} степени n . Обозначим кольцо целых чисел поля \mathbb{E} как $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$. Кольцо $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$ также имеет единственный максимальный порядок \mathbb{E} .

Расширение называют простым, если $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{E}$. Алгебраическое расширение использует неприводимый полином. Определим минимальный полином элемента поля α как μ_{α} , степень которого $\deg \mu_{\alpha}$ определит степень расширенного поля.

Пример. Пусть $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ – простое алгебраическое расширение со степенью 2 и минимальным полиномом $\mu_i = x^2 + 1$. Тогда кольцо целых чисел имеет вид $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)} = \mathbb{Z}[i]$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.

Пример. Пусть $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ – простое алгебраическое расширение степени 2 с кольцом целых чисел $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$. Минимальный полином элемента $\theta = (1 + \sqrt{5})/2$ равен $\mu_{\theta}(x) = x^2 - x - 1$.

Пусть полином $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ имеет один корень в \mathbb{E} . Поле называется *нормальным*, если все корни $p(x)$ также лежат в \mathbb{E} . Нормальное алгебраическое числовое расширенное поле \mathbb{E}/\mathbb{F} называется полем Галуа. Автоморфизмы такого поля формируют группу Галуа $Gal(\mathbb{E}/\mathbb{F}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Норма элемента $e \in \mathbb{E}$ определяется как

$$N_{\mathbb{E}/\mathbb{F}}(e) = \sigma_1(e) \dots \sigma_n(e) \in \mathbb{F}.$$

Группу $Gal(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ можно рассматривать как группу перестановок корней минимального полинома.

Пример. $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ образует циклическую группу Галуа, формируемую операцией комплексного сопряжения $\sigma = *$:

$$Gal(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}) = \langle * \rangle = \{*, *^2\} = \{jd, *\} = \{j \mapsto j, j \mapsto -j\}.$$

Пример. Поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ образует циклическую группу Галуа с помощью отображения $\sigma: \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$:

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle = \langle \sigma, \sigma^2 \rangle = \{jd, \sigma\}.$$

Как получить решетку из расширенного поля?

Положим упрощенно, что имеется циклическое расширение Галуа, т. е. $\sigma(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{R}$ для всех $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$.

Используем операцию канонического встраивания $\psi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\psi(e) = (e, \sigma(e), \dots, \sigma^{n-1}(e)), \quad \forall e \in \mathbb{E}.$$

Тогда $\psi(\mathcal{O}_{\mathbb{E}}) \subseteq \mathbb{R}^n$ является решеткой с неисчезающим минимальным расстоянием, равным

$$d_{p\min}(\psi(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})) = \min_{e \in \mathcal{O}_{\mathbb{E}}} \prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i(e) = \min_{\substack{e \in \mathcal{O}_{\mathbb{E}} \\ e \in \mathcal{O}_{\mathbb{E}} = \mathbb{Z}}} N_{\mathbb{E}/\mathbb{F}}(e) = 1.$$

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ с $\text{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{F}) = \{jd, \sigma: \sqrt{5} \rightarrow -\sqrt{5}\}$ и

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[\theta], \quad \theta = (1 + \sqrt{5})/2, \quad \tilde{\theta} = \sigma(\theta) = (1 - \sqrt{5})/2.$$

Бесконечное множество векторов решетки формирует операция встраивания:

$$\psi(a + b\theta) = (a + b\theta, a + b\tilde{\theta}), \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Конечная решетка может быть получена, если ввести ограничение $|a|, |b| \leq M$ для $M \in 2\mathbb{Z}$.

Так, сигнальное созвездие M -РАМ состоит из нечетных целых

$$2\text{-РАМ} = \{-1, 1\}, \quad 4\text{-РАМ} = \{\pm 1, \pm 3\}, \dots$$

Используя полученную ранее решетку, для 4-РАМ получаем кодовую книгу размером 16:

$$C = \{(1 + \theta, 1 + \tilde{\theta}), (1 - \theta, 1 - \tilde{\theta}), (-1 + \theta, -1 + \tilde{\theta}), (-1 - \theta, -1 - \tilde{\theta}), \\ (1 + 3\theta, 1 + 3\tilde{\theta}), (1 - 3\theta, 1 - 3\tilde{\theta}), (-1 + 3\theta, -1 + 3\tilde{\theta}), (-1 - 3\theta, -1 - 3\tilde{\theta})\},$$

$$(3 + \theta, 3 + \tilde{\theta}), (3 - \theta, 3 - \tilde{\theta}), (-3 + \theta, -3 + \tilde{\theta}), (-3 - \theta, -3 - \tilde{\theta}),$$

$$(3 + 3\theta, 3 + 3\tilde{\theta}), (3 - 3\theta, 3 - 3\tilde{\theta}), (-3 + 3\theta, -3 + 3\tilde{\theta}),$$

$$(-3 - 3\theta, -3 - 3\tilde{\theta}).$$

Полученная решетка не является ортогональной структурой. В общем случае ортогонализация решетки не всегда возможная операция. Однако в нашем случае эту операцию можно выполнить, используя идеал решетки. Элемент $\alpha = 3 - \theta$ формирует основной идеал $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$. Запишем кодовую книгу в виде

$$C = \{(\sqrt{\alpha}a + b\theta, a + b\tilde{\theta}) \mid |a|, |b| \leq M\},$$

что позволяет получить ортогональную решетку.

Другая задача оптимизации связана с получением решеток $\psi(\mathcal{O}_{\mathbb{E}}) \subseteq \mathbb{R}^n$, имеющих полное разнесение. Для решения этой задачи используют инвариант, который носит название определителя.

Пусть $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ – базис \mathbb{E} над \mathbb{Q} и $Gal(\mathbb{E}/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$.

Определитель \mathbb{E} задается выражением

$$d_{\mathbb{E}} = \left[\det(\sigma_i(\beta_j)) \right]^2.$$

Для решетки $\Lambda = \psi(\mathcal{O}_{\mathbb{E}}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ее объем равен

$$\text{vol}(\psi(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})) = 2^{-n} \sqrt{|d_{\mathbb{E}}|}.$$

Следовательно, если мы минимизируем объем решетки, то минимизируется и ее определитель.

Для получения кода с порядком разнесения, равным n , необходимо, чтобы минимальный ранг матрицы $D(X^i, X^j)$ для любых $i \neq j$, был равен n . В свою очередь, для получения максимальной энергетической эффективности также необходимо, чтобы выполнялся критерий определителя (детерминанта) – минимальный определитель матрицы $D(X^i, X^j)$ был максимален. При этом

$$D(X^i, X^j) = (X^i - X^j)^H (X^i - X^j), i \neq j,$$

где X^i и X^j – две различные матрицы в пространственно-временном коде.

2.4. Коды на основе алгебраических систем с делением

Алгебраические системы с делением (алгебры делений) являются алгебрами над полем действительных чисел и включают в себя системы комплексных чисел, системы кватернионов и октав.

Алгебра кватернионов

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{F}^*$. Алгеброй \mathcal{A} обобщенных кватернионов над \mathbb{F} называется 4-мерное векторное пространство с базисом $\mathcal{B} = \{e, i, j, k\}$. Будем считать, что e является единицей, т. е. $e^2 = e, ej = j$ и т. д. Зададим равенства

$$i^2 = -e\alpha, j^2 = -e\beta,$$

где α и β – произвольные элементы поля \mathbb{F} , и $ij = -ji = k$.

Тогда

$$\begin{aligned}k^2 &= ijij = -iijj = -e\alpha\beta, \\ik &= iij = -e\alpha j = -j\alpha, \\ki &= -jii = +je\alpha = j\alpha, \\jk &= -jji = +e\beta i = i\beta, \\kj &= ijj = -ie\beta = -i\beta.\end{aligned}$$

Получившаяся алгебра \mathcal{A} называется алгеброй обобщенных кватернионов. Ее элементы выглядят так:

$$\mathbf{x} = e\mathbf{x}_0 + i\mathbf{x}_1 + j\mathbf{x}_2 + k\mathbf{x}_3, \quad \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\} \in \mathbb{F}.$$

Элементы $e\mathbf{x}_0$ и \mathbf{x}_0 отождествляются, и поле \mathbb{F} оказывается вложенным в алгебру \mathcal{A} .

Матричное представление алгебры обобщенных кватернионов \mathcal{A} получается тогда, когда она рассматривается как двойной модуль, для которого \mathcal{A} служит областью левых, а $\Sigma = \mathbb{F}(i)$ – областью правых мультипликаторов. Если считать, что $-\alpha$ не является квадратом в поле \mathbb{F} , тогда $\Sigma = \mathbb{F}(j) = \mathbb{F}(\sqrt{-\alpha})$ – поле.

Алгебра является 2-мерным векторным пространством над этим полем. В качестве базисных элементов можно взять, например, e и $-j$. Векторы \mathbf{x} представляются тогда так:

$$\mathbf{x} = e(\mathbf{x}_0 + i\mathbf{x}_1) + (-j)(-\mathbf{x}_2 + i\mathbf{x}_3).$$

Если эти векторы \mathbf{x} умножить справа на произвольный элемент, то получится линейное преобразование векторного пространства \mathcal{A} , которое может быть представлено некоторой матрицей. Ее столбцы получаются, если

умножить базисные элементы e и $-j$ на произвольный элемент. Если в качестве такого элемента выступают j, k или l , то получатся следующие матрицы:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & i\beta \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Если выбрать $\alpha = \beta = 1$, то получатся *гамильтоновы кватернионы* и алгебра \mathbb{H}

$$\mathbf{x} = ex_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$$

с правилами оперирования

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ ij &= k, & ji &= -k, \\ jk &= i, & kj &= -i, \\ ki &= j, & ik &= -j. \end{aligned}$$

Если \mathbb{F} – вещественное числовое поле, то в матричном представлении алгебры элемент i может быть заменен на мнимую единицу $j = \sqrt{-1}$. Тогда получится

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}.$$

Если в качестве базисных элементов алгебры взять все элементы конечной группы, то получится групповое кольцо этой конечной группы.

Код Аламоути. Пусть $\{1, i, j, k\}$ будет базис 4-мерного векторного пространства над \mathbb{R} . Гамильтонов кватернион представляет собой множество \mathbb{H} :

$$\mathbb{H} = \{x + yi + zj + wk | x, y, z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Гамильтоновы кватернионы являются алгеброй с делением. Кватернион, сопряженный с $q = x + yi + zj + wk$ определяется как

$$\tilde{q}^* = x - yi - zj + wk.$$

Норма кватернионов задается как

$$q\tilde{q}^* = x^2 + y^2 + z^2 + w^2, x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

Инверсный к q кватернион определяется по формуле $q^{-1} = \tilde{q}^*/q\tilde{q}^*$.

Любой кватернион $q = x + yi + zj + wk$ может быть записан в виде

$$(x + yi) + j(z - wi) = \alpha + j\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Умножим на q форму $(\gamma + j\delta)$:

$$\underbrace{(\alpha + j\beta)}_q (\gamma + j\delta) = \alpha\gamma + j\tilde{\alpha}^*\delta + j\beta\gamma + j^2\tilde{\beta}^*\delta = (\alpha\gamma - \tilde{\beta}^*\delta) + j(\tilde{\alpha}^*\delta + \beta\gamma).$$

Перепишем это равенство, используя матричную форму в базисе $\{1, j\}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\tilde{\beta}^* \\ \beta & \tilde{\alpha}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma - \tilde{\beta}^*\delta \\ \tilde{\alpha}^*\delta + \beta\gamma \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем код Аламоути:

$$q = \alpha + j\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & -\tilde{\beta}^* \\ \beta & \tilde{\alpha}^* \end{bmatrix}.$$

Циклическая алгебра и Golden-код

Для дальнейшего изложения полезно рассмотреть поля алгебраических чисел и ввести понятие циклической алгебры.

Пусть α – алгебраическое число над полем рациональных чисел \mathbb{Q} , т. е. число, которое является корнем многочлена с рациональными коэффициентами

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = 0.$$

Используя алгебраическое число α , можно построить множество чисел вида

$$\omega = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \dots + \alpha^{n-1} a_{n-1}.$$

Относительно обычных операций сложения и умножения, определенных для многочленов, с учетом того что

$$\alpha_n = \frac{b_1}{b_0} \alpha^{n-1} + \frac{b_2}{b_1} \alpha^{n-2} + \dots + \frac{b_n}{b_{n-1}},$$

множество таких чисел образует поле $\mathbb{Q}(\alpha)$ алгебраических чисел степени n . Процесс построения поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ называется расширением поля рациональных чисел \mathbb{Q} с помощью алгебраического числа α .

Пример. Пусть алгебраическое число α – корень квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\alpha = j = \sqrt{-1}$. Множество чисел $\mathbb{Q}(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha \mid a_0, a_1 \in \mathbb{Q}\}$ – поле комплексных рациональных чисел.

Пример. Пусть $\alpha = \sqrt[3]{2}\exp(j2\pi/2)$. Это число алгебраическое, оно является корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$. Рассмотрим все числа вида

$$\omega = a_0 + a_1\sqrt[3]{2}\exp(j2\pi/2) + a_2(\sqrt[3]{2}\exp(j2\pi/2))^2 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2.$$

Множество таких чисел образует поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Циклическая алгебра. Пусть $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{d}) = \{u + \sqrt{d}v, u, v \in \mathbb{Q}(i)\}$. Циклическая алгебра \mathcal{A} определяется как $\mathcal{A} = L \oplus eL$, где $e^2 = \gamma$, $le = e\sigma(\lambda)$ и $\sigma(u + \sqrt{d}v) = u - \sqrt{d}v$.

Напомним, что $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ и гамильтонова алгебра $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $j^2 = -1$, $ij = -ji$. По аналогии с гамильтоновыми кватернионами

$$q = \alpha + j\beta \in \mathbb{H} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & -\tilde{\beta}^* \\ \beta & \tilde{\alpha}^* \end{bmatrix}$$

ассоциируем элемент x с матричным представлением:

$$x = x_0 + ex_1 \in \mathcal{A} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 & \gamma\sigma(x_1) \\ x_1 & \sigma(x_0) \end{bmatrix}.$$

C_G -код золотого сечения (Golden-код)

Для построения C_G -кода используется поле алгебраического числа (числа «золотого сечения») [1]

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

которое является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ и отношения сопряжения $\sigma(\theta) = \tilde{\theta} = (1 - \sqrt{5})/2$.

C_G определяется через матричное множество как

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b\theta & c + d\theta \\ i(c + d\tilde{\theta}) & a + b\tilde{\theta} \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i] \right\},$$

где $\mathbb{Z}[i]$ – кольцо целых комплексных чисел.

Структура кода определяется из циклической алгебры \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \{y = (u + v\theta) + e(w + z\theta) | e^2 = \gamma, u, v, w, z \in \mathbb{Q}(i)\}.$$

Код C является линейным кодом. Сумма кодовых слов принадлежит коду, т. е. $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \in C$ для всех $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in C$.

Алгебра \mathcal{A} является алгеброй с делением, отсюда следует, что минимальный определитель кода не равен нулю

$$\delta_{\min}(C) = \min_{\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2 \in C} |\det(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)|^2 = \min_{0 \neq \mathbf{X} \in C} |\det(\mathbf{X})|^2 \neq 0.$$

Свойство положительности определителя кода C_G .

Пусть $\mathbf{X} \in C_G$, тогда

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{X}) &= \det \begin{bmatrix} a + b\theta & c + d\theta \\ i(c + d\bar{\theta}) & a + b\bar{\theta} \end{bmatrix} = (a + b\theta)(a + b\bar{\theta}) - i(c + d\theta)(c + d\bar{\theta}) = \\ &= a^2 + ab(\bar{\theta} + \theta) - b^2 - i[c^2 + cd(\theta + \bar{\theta}) - d^2] = \\ &= a^2 + ab - b^2 + i(c^2 + cd - d^2), \end{aligned}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i]$.

Следовательно

$$\det(\mathbf{X}) \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow \delta_{\min}(C_G) = |\det(\mathbf{X})|^2 \geq 1$$

и не зависит от кардинальности кода.

Значения элементов конечного кода C_G согласуются со значениями информационных символов сигнального созвездия. Код реализует полную скорость модуляции.

Моделирование Golden-кода

В основе структуры Golden-кода положим циклическую алгебру $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}(i, \theta)/\mathbb{Q}(i), \sigma, i)$, где $\theta = (\sqrt{5} + 1)/2$ и отображение $\sigma: x \rightarrow \bar{x}$ такое, что $\sigma(\theta) = \bar{\theta} = 1 - \theta$.

Код использует множество

$$\mathcal{O} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ j\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[i, \theta] \right\}$$

для получения максимального порядка \mathcal{A} .

Множество \mathcal{O} может быть записано в виде $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i, \theta] \oplus \mathbb{Z}[i, \theta]l$, где

$$l = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ j & 0 \end{bmatrix}.$$

Каждое кодовое слово имеет форму

$$X = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ \bar{\alpha} j \bar{x}_2 & \bar{\alpha} \bar{x}_1 \end{bmatrix},$$

где $\alpha = 1 + j\bar{\theta}$ – масштабирующий множитель; $x_1 = s_1 + s_2\theta$, $x_2 = s_3 + s_4\theta$, символы s_1, s_2, s_3, s_4 принадлежат сигналу с QAM-модуляцией.

Пространственно-временная матрица неортогонального кода для 2×2 системы MIMO может быть представлена в виде

$$C_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \begin{bmatrix} \theta_1 + jr\theta_4 & r\theta_2 + \theta_3 \\ \theta_2 - r\theta_3 & jr\theta_1 + \theta_4 \end{bmatrix},$$

где $r = (-1 + \sqrt{5})/2$ – числовой коэффициент; $j = \sqrt{-1}$.

Зависимость вероятности ошибки на бит (BER) от отношения сигнал/шум на входе приемника кода Golden-QPSK и различных алгоритмов декодирования показана на рис. 2.3.

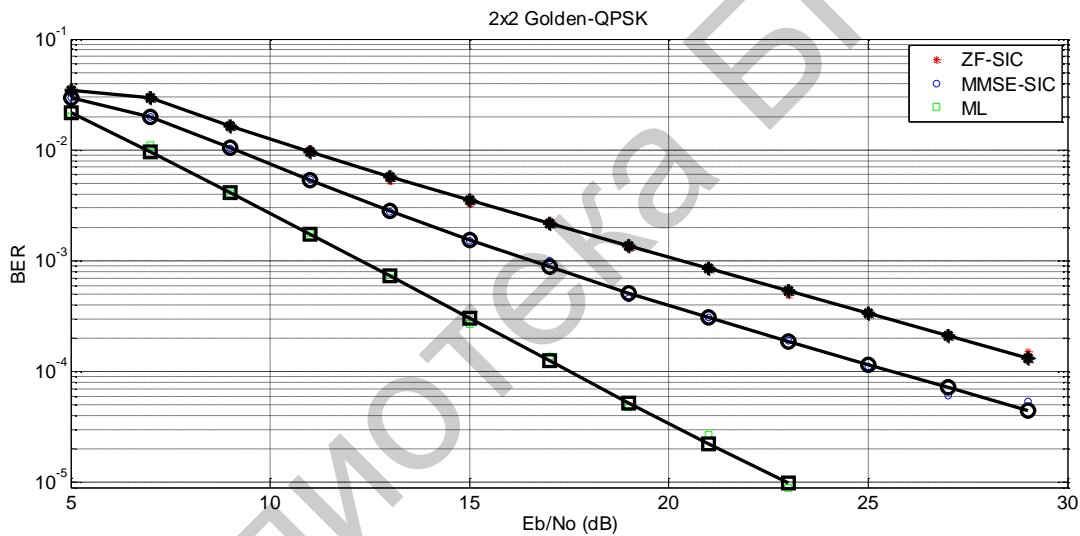


Рис. 2.3. Зависимость вероятности ошибки на бит (BER) от отношения сигнал/шум на входе приемника кода Golden-QPSK. Алгоритмы декодирования: ZF-SIC – обнуление, последовательное исключение демодулированных компонент; MMSE-SIC – минимум среднего квадрата ошибки, последовательное исключение демодулированных компонент; ML – критерий максимального правдоподобия

Скорость пространственно-временного кода равна $R = 2$. Применение кода Golden дает значительный энергетический выигрыш (1...2 дБ в зависимости от параметров системы связи) по сравнению с пространственным мультиплексированием, использующим N передающих антенн и более простую пространственно-временную матрицу $B_N(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_N) = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_N]^T$.

2.5. Коды целочисленных решеток

Определение. Пусть $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ – базис решетки. Основным параллелепипедом решетки называется множество

$$T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k; 0 \leq c_i < 1\}.$$

Объем основного параллелепипеда называется детерминантом решетки. Объем основного параллелепипеда равен абсолютной величине определителя, строками которого являются координаты базисных векторов $\{\mathbf{b}_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,n})\}$:

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Поскольку базисы связаны унимодулярными преобразованиями, соответствующие объемы равны.

Если T – основной параллелепипед полной решетки M , то имеется разбиение

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{z \in M} z + T,$$

причем $z + T \cap w + T = \emptyset$ при $z \neq w$.

Пусть $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ – базис решетки M . Тогда ее детерминант равен квадратному корню из определителя:

$$\begin{vmatrix} \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_m \rangle \end{vmatrix}.$$

Определение. Пусть $B_m(0, r)$ – открытый шар радиусом r в пространстве \mathbb{R}^n и Λ – решетка. Определим последовательность минимумов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ формулой

$$\lambda_i(\Lambda) = \inf \{r \mid \dim(\text{span}(\Lambda \cap B_m(0, r))) \geq i\}.$$

Критерий полноты решетки. Решетка M в линейном пространстве L полна тогда и только тогда, когда в L существует ограниченное множество U , сдвиги которого на векторы из M полностью заполняют все пространство L .

Неравенство Адамара. Пусть $\det(\Lambda)$ – детерминант решетки, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ – ее базис. Справедливо неравенство

$$\det(\Lambda) \leq \|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\|,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма, т. е. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$.

Основные вычислительные задачи теории решеток. Пусть Λ будет решетка размерностью n .

1. Требуется найти наиболее короткий ненулевой вектор в Λ (Shortest Vector Problem (SVP)).

2. Задан вектор $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ не принадлежащий решетке. Требуется найти вектор в Λ , наиболее близко расположенный к \mathbf{t} (Closest Vector Problem (CVP)).

3. Нахождение аппроксимирующего вектора (The Approximate Closest Vector Problem (apprCVP)). Найти вектор $\mathbf{v} \in \Lambda$, такой, что $\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\|$ достаточно мала. Например

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\| \leq k \min_{\mathbf{w} \in \Lambda} \|\mathbf{w} - \mathbf{t}\|$$

для небольшого значения константы k .

Лемма Минковского о выпуклом теле. Пусть в n -мерном пространстве \mathbb{R}^n заданы полная решетка M , объем основного параллелепипеда, которой равен Δ , и ограниченное центрально симметричное выпуклое множество X объемом $\text{vol}(X)$. Если $\text{vol}(X) > 2^n \Delta$, то множество X содержит по крайней мере одну отличную от нуля точку решетки M .

Задача поиска последовательного минимума решетки

Предположим, в решетке Λ определены следующие векторы:

\mathbf{v}_1 – наиболее короткий вектор решетки Λ ;

\mathbf{v}_2 – наиболее короткий вектор решетки Λ , линейно независим от \mathbf{v}_1 ;

\mathbf{v}_3 – наиболее короткий вектор решетки Λ , линейно независим от $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$;

...

\mathbf{v}_n – наиболее короткий вектор решетки Λ , линейно независим от векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$.

Длины векторов $\lambda_1 = \|\mathbf{v}_1\|, \lambda_2 = \|\mathbf{v}_2\|, \dots, \lambda_n = \|\mathbf{v}_n\|$ носят название *последовательного минимума* решетки Λ . В частности $\lambda_1 = \lambda_1(\Lambda)$ определяет длины наиболее короткого ненулевого вектора. Можно показать, что

$$\lambda_1(\Lambda) \leq \sqrt{2n/\pi e} \det(\Lambda)^{1/n}.$$

Ранг t решетки Λ базиса \mathbf{B} подпространства \mathbf{H} в \mathbb{R}^n определяется числом векторов в \mathbf{B} . Если $t = n$, тогда \mathbf{H} есть \mathbb{R}^n и решетка Λ имеет полный ранг.

Фундаментальная область решетки определяется как область, где справедливо следующее соотношение для базиса \mathbf{H} (рис. 2.4):

$$\mathfrak{R}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{H}\mathbf{x}: 0 < x_i < 1\}.$$

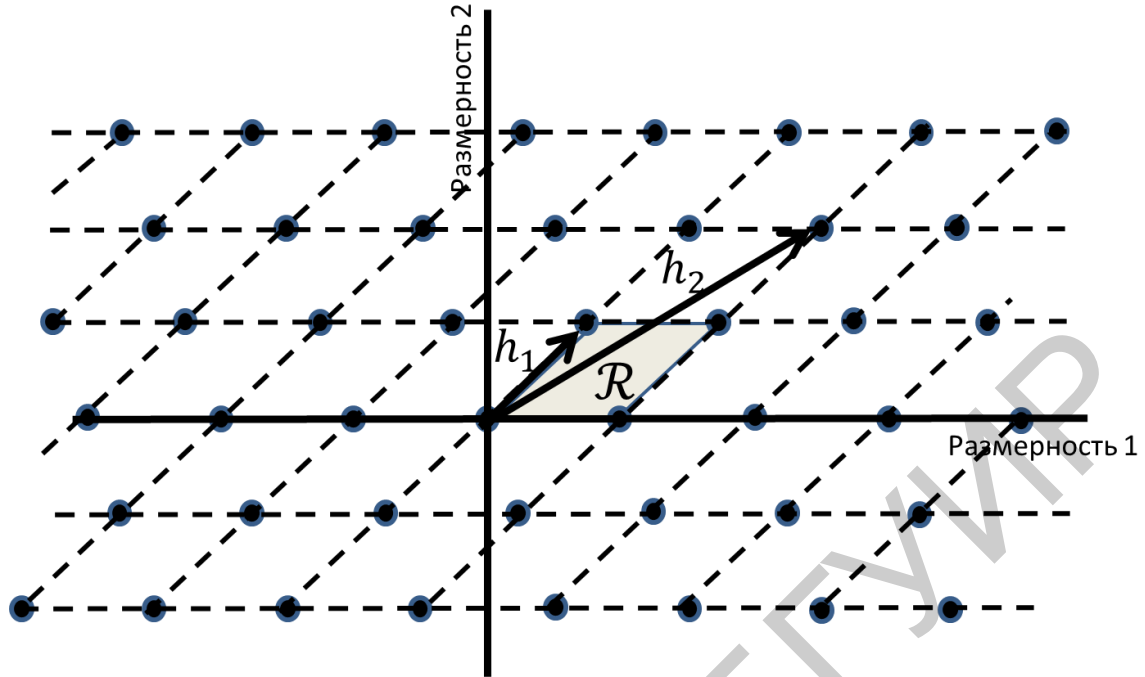


Рис. 2.4. Решетка в \mathbb{R}^2 : фундаментальная область ассоциирована с особым базисом

Дуальные решетки. Каждая решетка имеет свою дуальную решетку. Пусть решетка Λ определена на базисе \mathbf{H} . Дуальную решетку запишем как

$$\Lambda_D = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n: \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{x} \in \Lambda\}.$$

С использованием дуального базиса $\mathbf{H}^{(D)}$ дуальная решетка может быть записана как

$$\Lambda_D = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n: \underbrace{(\mathbf{H}^+)^T}_{\mathbf{H}^{(D)}} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Lambda \right\},$$

где $\mathbf{H}^{(D)}$ определяется через псевдоинверсную матрицу Мура – Пенроуза:

$$\mathbf{H}^{(D)} = (\mathbf{H}^+)^T = \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}.$$

Для матрицы \mathbf{H} полного ранга при $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{Z}$

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{z}^T \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{H}^+)^T}_{\mathbf{z} \in \Lambda^{(D)}} \mathbf{x}_1 \underbrace{\mathbf{H} \mathbf{x}_2}_{\mathbf{y} \in \Lambda} = \mathbf{x}_1^T \mathbf{H}^+ \mathbf{H} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 \in \mathbb{Z}.$$

Например. Пусть матрица базиса решетки имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{bmatrix},$$

тогда базис дуальной решетки имеет вид $\mathbf{H}^{(D)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Нормальная форма целочисленных решеток

Любая решетка \mathbf{H} может быть представлена в нормальной форме Эрмита (HNF) с помощью унимодулярного преобразования

$$\mathbf{H}_{\text{HNF}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{M},$$

где \mathbf{M} – унимодулярная матрица.

Генераторная матрица решетки приводится к треугольной форме с целыми положительными числами. HNF-форма существует для матриц целых и рациональных чисел.

Пример. Декомпозиция решетки в виде произведения унимодулярной матрицы \mathbf{M} и матрицы с HNF-формой:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{HNF}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}.$$

Геометрия унимодулярного преобразования поясняется на рис. 2.5.

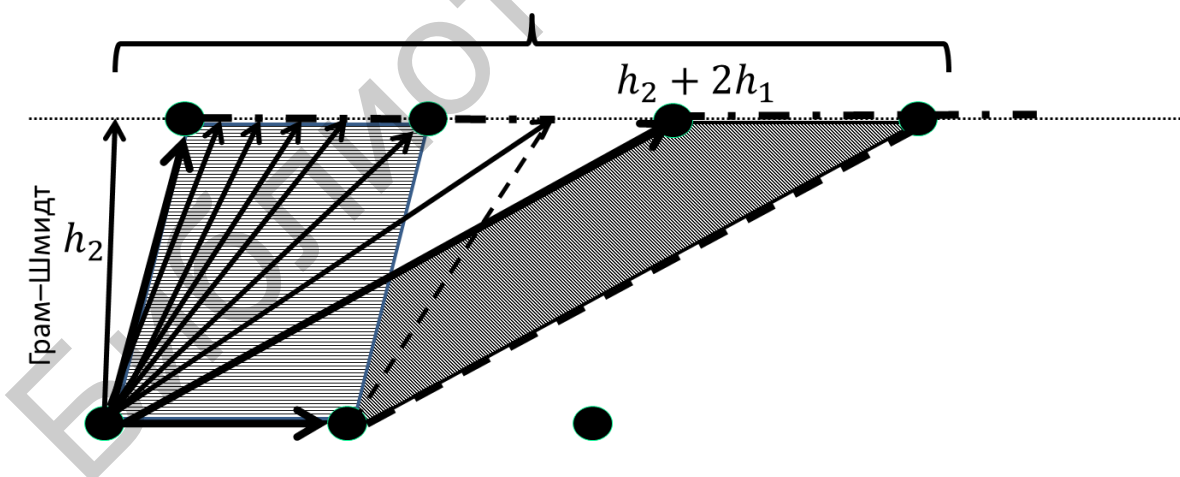


Рис. 2.5. Воздействие на решетку элементарной операции с изменением фундаментальной области, но с сохранением площади затемненных участков

Модулярные решетки

Структура решеток тесно связана со свойствами групп и колец. Целочисленная решетка может иметь структуру смежных классов вида

$$\Lambda = \Lambda' + \left[\frac{\Lambda}{\Lambda'} \right],$$

где $\left[\frac{\Lambda}{\Lambda'} \right]$ – система смежных классов, представляющая собой элементы частной группы Λ/Λ' .

Геометрически Λ' является подрешеткой Λ со своей фундаментальной областью. Число точек подрешетки, лежащих внутри фундаментальной области, называется индексом подрешетки.

Терм $\left[\frac{\Lambda}{\Lambda'} \right]$ содержит конечное множество точек решетки, которые образуют семейства точек класса эквивалентности, определяемого отношением эквивалентности. Точки решетки в каждом таком семействе обладают следующим свойством. Любая точка соотносится с другой точкой семейства через сложение с вектором подрешетки Λ' . Такое представление обобщает концепцию модулярных операций в \mathbb{Z} . В частности, про элементы класса эквивалентности говорят, что они получены по модулю эквивалентности Λ' .

Поскольку \mathbb{Z}^n также является решеткой, то можно определить частную группу \mathbb{Z}^n/Λ для целочисленной решетки Λ . Некоторые из этих групп обладают свойством цикличности и могут быть записаны в форме

$$\mathbb{Z}^n/\Lambda \sim \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{k_t},$$

k_i делит k_{i+1} для $i = 1, 2, \dots, t - 1$.

Величину t называют *числом циклов* решетки.

Решетка, имеющая циклы, может быть представлена модулярным линейным уравнением вида

$$\Lambda = \{y: \langle u_1, y \rangle = 0 \text{ mod } k_1 \wedge \langle u_2, y \rangle = 0 \text{ mod } k_2 \wedge \dots \wedge \langle u_d, y \rangle = 0 \text{ mod } m\},$$

решения уравнения являются точками решетки.

Такие решетки называются *циклическими*. Модулярные уравнения решеток с циклами могут использоваться для решения задач аппроксимации решеток другого вида.

Образующая решетка смежного класса Λ' может быть геометрически близка к решетке Λ , если близки координаты их точек.

Для оценки степени близости двух решеток вводится понятие меры близости $(\mathbf{H}, \varepsilon)$ и генераторной матрицы двух решеток $\mathbf{H} = [h_{i,j}]$ и $\mathbf{H}' = [h'_{i,j}]$

$$\|\mathbf{H}, \varepsilon\| \triangleq \max_{i,j} \{|h_{i,j} - h'_{i,j}|\} < \varepsilon,$$

где ε – произвольное положительное действительное число.

Пусть $\sigma: \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^n$ – линейное отображение, k – целый масштабирующий множитель. Для решеток справедливы следующие два свойства:

- 1) $\|y - \sigma(y)/k\| \leq \varepsilon\|x\|$ для всех $y \in \Lambda$;
- 2) группа частного $\mathbb{Z}^n / \sigma(\Lambda)$ является циклической.

Используя данные свойства, можно для заданной целочисленной решетки Λ построить близко расположенную циклическую решетку, изменяя генераторную матрицу Λ с помощью отображения $\sigma(\Lambda)$. В простейшем случае каждый элемент \mathbf{H} изменяется в соответствии с формулами

$$\sigma(\mathbf{h}_i)/k = \tilde{\mathbf{h}}_i = [\tilde{h}_{i,1}, \tilde{h}_{i,2}, \dots, \tilde{h}_{i,m}],$$

$$\tilde{h}_{i,j} = \begin{cases} h_{i,j}, & \text{если } i \neq j, \\ h_{i,j} - (1/k), & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Для процедуры аппроксимации в целочисленной области масштабирующий множитель k может быть выбран как

$$k \triangleq [1/\varepsilon]2^n \prod_{i \neq j} |h_{i,i} - h_{j,j}|.$$

Любая решетка может быть аппроксимирована решеткой с t циклами. Все циклические решетки имеют базис HNF-вида:

$$\mathbf{H}_{\text{HNF}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & t \end{bmatrix}.$$

Применение базиса HNF позволяет упростить решение CVP-задачи при декодировании в MIMO-системах связи.

2.6. Относительное пространственно-временное кодирование

Применение методов пространственно-временного кодирования в системах MIMO позволяет повысить помехоустойчивость и спектральную эффективность систем связи. При этом предполагается, что информация о текущем состоянии канала связи полностью известна на приемной стороне. Это значит, что на приемной стороне матрица \mathbf{H} комплексных коэффициентов канала связи предполагается известной точно и может быть реализован когерентный прием.

В реальных системах матрица \mathbf{H} изменяется во времени случайным образом. Если изменения матрицы \mathbf{H} быстрые, что имеет место при высокой скорости движения абонентов в системе связи, то осуществить оценивание

матрицы канала и слежение за всеми ее изменениями с нужной точностью оказывается затруднительным или вообще невозможным.

В таких условиях необходимо использовать пространственно-временные коды, которые не требуют наличия на приемной стороне информации о текущем состоянии канала связи. В этой связи представляют интерес пространственно-временные коды, при использовании которых не требуется оценивать матрицу \mathbf{H} .

Дифференциальное унитарное пространственно-временное кодирование

Пусть имеется пространственно-временной вектор \mathbf{S}_t , изменяющийся во времени t . В начальный момент времени $\mathbf{S}_{t=0} = \mathbf{I}$ представляет собой единичную матрицу. Определим также унитарные матрицы $(M \times M)$ сигнального созвездия $\mathcal{C} = \{\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_{L-1}\}$.

Метод дифференциального (относительного) кодирования предполагает применение рекурсивного алгоритма кодирования $\mathbf{S}_t = \mathbf{X}_{z_t} \mathbf{S}_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots$, где $z_t \in \{0, \dots, L-1\}$ – передаваемая информация.

Если предположить, что в моменты наблюдений канал приблизительно постоянный, то можно записать уравнение наблюдения на приемной стороне:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= \mathbf{S}_t \mathbf{H} + \mathbf{W}_t = \mathbf{X}_{z_t} \mathbf{S}_{t-1} \mathbf{H} + \mathbf{W}_t = \\ &= \mathbf{X}_{z_t} (\mathbf{Y}_{t-1} - \mathbf{W}_{t-1}) + \mathbf{W}_t = \mathbf{X}_{z_t} \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{W}'_t, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \mathbf{W}_t и \mathbf{W}'_t – матрицы шума в канале до и после рекурсивного преобразования.

Как видно из (2.1), в уравнении наблюдения отсутствует матрица канала.

Вероятность ошибки P_e в этом случае удовлетворяет неравенству

$$P_e \leq \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{8}{\rho}\right)^{MN} \frac{1}{|\det(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)|^{2N}},$$

где M и N – числа передающих и приемных антенн соответственно.

В качестве примера рассмотрим схему передачи двух комплексных символов с помощью матрицы Аламоути.

Пусть имеется 2-мерный вектор передаваемых комплексных информационных символов

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} a_{2i-1} \\ a_{2i} \end{bmatrix}.$$

Этому вектору ставится в соответствие матрица Аламоути передаваемых символов

$$\mathbf{X}_i = Z(\mathbf{X}_i) = \begin{bmatrix} a_{2i-1} & -a_{2i}^* \\ a_{2i} & a_{2i-1}^* \end{bmatrix}.$$

Пусть имеется другой 2-мерный вектор комплексных символов

$$\mathbf{S}_{i-1} = \begin{bmatrix} s_{2i-3} \\ s_{2i-2} \end{bmatrix},$$

которому также поставим в соответствие матрицу Аламоути:

$$\mathbf{S}_{i-1} = Z(\mathbf{S}_{i-1}) = \begin{bmatrix} s_{2i-3} & -s_{2i-2}^* \\ s_{2i-2} & s_{2i-3}^* \end{bmatrix}.$$

Произведение двух матриц \mathbf{S}_i и \mathbf{X}_i имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{i-1}\mathbf{X}_i &= \begin{bmatrix} s_{2i-3}a_{2i-1} - s_{2i-2}^*a_{2i} & -s_{2i-2}^*a_{2i-1} - s_{2i-3}a_{2i}^* \\ s_{2i-3}a_{2i-1} + s_{2i-2}^*a_{2i} & s_{2i-3}a_{2i-1}^* - s_{2i-2}a_{2i}^* \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s_{2i-1} & -s_{2i}^* \\ s_{2i} & s_{2i-1}^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что произведение двух матриц Аламоути есть также матрица Аламоути.

В результате преобразования двух матриц $\mathbf{S}_{i-1}\mathbf{X}_i$ получена новая матрица Аламоути, образованная из нового вектора. С помощью такого преобразования последовательности векторов $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, 3, \dots$ можно поставить в соответствие другую последовательность $\mathbf{S}_i, i = 1, 2, 3, \dots$, используя в качестве начального значения вектор $\mathbf{S}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Для того чтобы нормы векторов \mathbf{S}_i с увеличением номера i не изменялись, необходимо, чтобы матрицы Аламоути удовлетворяли условию ортонормированности $\mathbf{S}_i\mathbf{S}_i^H = 1$. Для выполнения этого условия необходимо выдерживать следующие соотношения:

$$\|\mathbf{S}_i\|^2 = |s_{2i-1}|^2 + |s_{2i}|^2 = 1, \quad \|\mathbf{X}_i\|^2 = |a_{2i-3}|^2 + |a_{2i-2}|^2 = 1.$$

Эти условия выполняются, если в системе используется фазовая модуляция, имеющая следующее множество точек сигнального созвездия

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(j \frac{2\pi k}{L}\right), k = 0, 1, \dots, L-1 \right\},$$

совпадающих с точностью до нормирующего множества со значениями элементов унитарной дискретной матрицы Фурье.

Отметим, что в рассмотренном примере кодовая структура обеспечивает суммарную мощность излучения двух передающих антенн, равную единице.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные свойства алгебры решеток.
2. Поясните, как можно сформировать код Аламоути на основе теории алгебры с делением.
3. В чем отличия Golden-кода и кода Аламоути?
4. Поясните понятие алгебраического числа.
5. Поясните назначение целочисленных решеток в теории пространственно-временных кодов.
6. Напишите алгоритмы формирования кодов Аламоути и Golden-кода.
7. Поясните целесообразность дифференциального унитарного пространственно-временного кодирования.
8. Сформулируйте SVP- и CVP-задачи теории решеток и алгоритмы возможных решений.
9. Напишите программы формирования алгебраической и целочисленной решеток.
10. Поясните возможные механизмы воздействия на геометрии решеток.
11. В системе MIMO с N передающими антеннами максимальное число тактовых интервалов p пространственно-временного кода с максимальной (полной) скоростью может быть вычислено следующим образом [1]:

$$p = \min[2^{4c+d}],$$

где поиск минимума производится по множеству

$$c, d \in \{c \geq 0, 0 \leq d \leq 4,8c + 2^d \geq N\},$$

где c и d – целые числа.

Получите значения p для различного числа N передающих антенн.

3. АЛГОРИТМЫ ДЕКОДИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОДОВ

3.1. Алгоритмы декодирования блочных кодов в системах ММО

Наиболее перспективным для борьбы с замираниями сигналов является использование антенных решеток (АР) на обоих концах линии связи, т. е. применение ММО-систем и различных методов пространственной обработки сигналов (пространственного кодирования и декодирования). Эти методы можно разделить на две группы. К первой из них относятся методы, которые не предполагают наличие канальной информации на передающей стороне. Поэтому при их использовании только прием сигналов является адаптивным и согласованным со случайным пространственным каналом. Вторую группу составляют методы, основанные на знании канала не только приемником, но и передатчиком, и обеспечивающие адаптивную пространственную обработку сигналов не только на прием, но и на передачу.

Алгоритм выбеливания – Zero Forcing (ZF)

Рассмотрим ММО-систему с M передающими и N приемными антеннами и предположим, что приемных антенн больше, чем передающих ($N > M$). Информационные символы $\mathbf{d} = [d_1(t), d_2(t), \dots, d_M(t)]^T$ разделяются на M параллельных потоков. Если передатчик не имеет информации о пространственном канале, то используется равномерное распределение полной мощности P_0 между параллельными потоками данных.

Тогда вектор \mathbf{x} принятых сигналов равен

$$\mathbf{x} = \sqrt{P_0/M} \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{n}.$$

Далее для простоты написания будем опускать множитель $\sqrt{P_0/M}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{n}.$$

ZF-приемник использует оценку $\hat{\mathbf{d}}_{ZF}$ переданных символов на основе обеспечения минимума функционала $J_{ZF}(\hat{\mathbf{d}}_{ZF})$ по вектору $\hat{\mathbf{d}}$, где [13]

$$J_{ZF}(\hat{\mathbf{d}}_{ZF}) = |\mathbf{x} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{d}}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{d}})^H (\mathbf{x} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{d}}).$$

Дифференцируя этот функционал по вектору $\hat{\mathbf{d}}^H$ и приравнявая производную к нулю, получим, что

$$dJ_{ZF}(\hat{\mathbf{d}}_{ZF})/d\hat{\mathbf{d}}^H = \mathbf{H}^H (\mathbf{x} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{d}}) = 0.$$

Отсюда

$$\hat{\mathbf{d}}_{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{x}.$$

Матрица $\mathbf{F}_{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$ называется псевдообратной матрицей к канальной матрице \mathbf{H} . Таким образом, для разделения сигналов в приемных антеннах необходимо преобразование вектора принятых сигналов \mathbf{x} , описываемое псевдообратной матрицей \mathbf{F}_{ZF} . В случае одинакового числа передающих N и приемных M антенн ($N = M$) обратная матрица \mathbf{H}^{-1} существует и выполняется равенство $\hat{\mathbf{d}}_{ZF} = (\mathbf{H})^{-1} \mathbf{x}$.

Отметим, что выходные собственные шумы \mathbf{z}_{ZF} имеют дисперсию, отличную от единичной, и коррелированы между собой.

Шумовую компоненту на входе можно представить в виде

$$\mathbf{n}_{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{n} = \mathbf{F}_{ZF} \mathbf{n}.$$

Отсюда корреляционная матрица шума имеет вид

$$\langle \mathbf{n}_{ZF} \mathbf{n}_{ZF}^H \rangle = \mathbf{F}_{ZF} \langle \mathbf{n} \mathbf{n}^H \rangle \mathbf{F}_{ZF}^H.$$

Учитывая некоррелированность собственных шумов, будем иметь, что

$$\langle \mathbf{n}_{ZF} \mathbf{n}_{ZF}^H \rangle = \sigma_0^2 \mathbf{F}_{ZF} \mathbf{F}_{ZF}^H = \sigma_0^2 (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}.$$

Коррелированность собственных шумов необходимо принимать во внимание при детектировании сигналов.

Декодирование по критерию минимума среднего квадрата ошибки (МСКО)

Более высокой помехоустойчивостью обладает алгоритм декодирования, оптимальный по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (МСКО, или Minimum Mean Square Error – MMSE).

МСКО-декодер обеспечивает оценку $\hat{\mathbf{d}}_{MMSE}$ переданных символов на основе обеспечения минимума среднеквадратичного функционала ошибки [13]

$$J_{MMSE} = E \left(|\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d}|^2 \right).$$

Обозначим $\hat{\mathbf{d}}_{MMSE} = \mathbf{F}^H \mathbf{x}$ и найдем матрицу \mathbf{F}^H . Среднеквадратичный функционал ошибки будет иметь вид

$$J_{MMSE}(\mathbf{F}) = E \left((\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \mathbf{d})^H (\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \mathbf{d}) \right).$$

Используя известное матричное тождество, среднеквадратичный функционал ошибки можно переписать в виде

$$J_{\text{MMSE}}(\mathbf{F}) = \text{Sp}\{(\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \mathbf{d})(\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \mathbf{d})^H\},$$

где $\text{Sp}(\cdot)$ – обозначает след матрицы.

Продифференцируем функционал $J_{\text{MMSE}}(\mathbf{F})$ по матрице \mathbf{F} и приравняем производную к нулю. Учтем независимость матриц \mathbf{F} и \mathbf{F}^H и то, что первый множитель под знаком следа не зависит от матрицы \mathbf{F} . В результате будем иметь, что

$$dJ_{\text{MMSE}}(\mathbf{F})/d\mathbf{F} = E\{(\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \mathbf{d})\mathbf{X}^H\},$$

или

$$E\{(\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d})\mathbf{x}^H\} = \{0\}.$$

Таким образом, MMSE-приемник обеспечивает ортогональность входного вектора \mathbf{x} и вектора ошибки $(\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d})$.

Учтем далее два следующих условия. Во-первых, собственные шумы в приемных антеннах между собой не коррелированы и, во-вторых, информационные потоки в отдельных антеннах также между собой не коррелированы. В математической форме эти условия имеют вид

$$E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H\} = \sigma_0^2 \mathbf{I}, E\{\mathbf{d}\mathbf{d}^H\} = (P_0/M)\mathbf{I}.$$

Принимая во внимание статистическую независимость данных и собственных шумов, получим, что

$$\begin{aligned} E\{(\mathbf{F}^H \mathbf{x} - \mathbf{d})\mathbf{x}^H\} &= E\{(\mathbf{F}^H \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{F}^H \mathbf{z} - \mathbf{d})(\mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{z})^H\} = \\ &= \sigma_0^2 (\rho_0 \mathbf{F}^H \mathbf{H}\mathbf{H}^H / M - \rho_0 \mathbf{H}^H / M + \mathbf{F}^H) = \{0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем, что искомая матрица \mathbf{F} равна

$$\mathbf{F}^H = \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + M\mathbf{I}/\rho_0)^{-1}.$$

Отсюда

$$\hat{\mathbf{d}}_{\text{MMSE}} = \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + M\mathbf{I}/\rho_0)^{-1} \mathbf{x}, \quad (3.1)$$

или [13]

$$\hat{\mathbf{d}}_{\text{MMSE}} = (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + M\mathbf{I}/\rho_0)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{x}. \quad (3.2)$$

При достаточно больших отношениях сигнал/шум ρ_0 получим, что $\hat{\mathbf{d}}_{\text{MMSE}} \approx \hat{\mathbf{d}}_{\text{ZF}}$, т. е. оценки вектора \mathbf{d} переданных символов с помощью ZF- и MMSE-декодера совпадают между собой.

В случае когда число передающих и приемных антенн одинаковое ($N = M$), обратная матрица \mathbf{H}^{-1} существует. Пусть также отношение сигнал/шум $\rho \gg 1$. Тогда получим, что

$$\mathbf{F}^H \approx \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H)^{-1} = \mathbf{H}^{-1}.$$

Отсюда

$$\hat{\mathbf{d}}_{\text{MMSE}} \approx \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{d}.$$

Отметим, что собственные шумы MMSE \mathbf{z} на выходе MMSE-приемника имеют дисперсию, отличную от единичной, и коррелированы между собой. Из выражения (3.1) для оценки информационного вектора $\hat{\mathbf{d}}_{\text{MMSE}}$ получаем, что шумовая компонента общего выходного сигнала равна

$$\mathbf{z}_{\text{MMSE}} = \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + M\mathbf{I}/\rho_0)^{-1} \mathbf{z}.$$

Отсюда корреляционная матрица шума имеет вид

$$E\{\mathbf{z}_{\text{MMSE}} \mathbf{z}_{\text{MMSE}}^H\} = \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + M\mathbf{I}/\rho_0)^{-1} E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^H\} (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + M\mathbf{I}/\rho_0)^{-1} \mathbf{H}.$$

Или, учитывая некоррелированность собственных шумов \mathbf{z} , получим, что

$$E\{\mathbf{z}_{\text{MMSE}} \mathbf{z}_{\text{MMSE}}^H\} = \sigma_0^2 \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + M\mathbf{I}/\rho_0)^{-2} \mathbf{H}.$$

Коррелированность собственных шумов необходимо принимать во внимание при детектировании сигналов.

Декодер максимального правдоподобия

Рассмотрим МП-оценку символа \mathbf{d} в ММО-системе при посимвольном детектировании. Если шумы приемников некоррелированы между собой, то совместная функция плотности вероятности комплексного M -мерного шумового вектора \mathbf{n} равна

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{\pi^M \sigma_0^2} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{n}^H \mathbf{n}\right).$$

Условная плотность вероятности вектора \mathbf{X} при условии, что был передан пространственный символ \mathbf{D} , определяется следующим выражением:

$$f(\mathbf{x}/\mathbf{d}) = \frac{1}{\pi^M \sigma_0^2} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_0^2} |\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{d}|^2\right).$$

Это выражение является функцией правдоподобия для пространственного символа \mathbf{d} . Для реализации алгоритма МП-оценки необходимо выбрать такой символ $\hat{\mathbf{d}}$, который будет максимизировать функцию правдоподобия. Тогда алгоритм МП-оценки можно представить в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{d}}_{ML} = \arg \min_{\mathbf{d}} \{|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{d}|^2\}.$$

Проводя сравнения методов декодирования, можно сделать вывод, что при статистически независимых собственных шумах в приемных антеннах эффективность МП-декодера совпадает с эффективностью ZF-декодера. Следовательно, имеем, что $\hat{\mathbf{d}}_{ML} = \hat{\mathbf{d}}_{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{x}$.

Алгоритм BLAST пространственного декодирования

Алгоритм BLAST (Bell Laboratories Layered Space-Time), разработанный специалистами Bell Laboratories, имеет две основные модификации D (diagonal)-BLAST и V (vertical)-BLAST. Алгоритм D-BLAST позволяет получать более высокие скорости передачи информации, но более сложен в реализации. Так как потери в скорости при переходе от D-BLAST к V-BLAST невелики, то второму алгоритму обычно отдается предпочтение.

В алгоритме V-BLAST детектирование M переданных символов (оценка M -мерного вектора \mathbf{d}) выполняется за M итераций, каждая из которых состоит из трех шагов [1, 13].

Итерация 1

Шаг 1. Вычисляется оценка (3.2) вектора \mathbf{d} с помощью MMSE-приемника:

$$\hat{\mathbf{d}}_{MMSE} = \mathbf{F}^H \mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{H}^H \mathbf{x},$$

где матрица $\mathbf{Q} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + M \rho_0^{-1} \mathbf{I})^{-1}$.

Отметим, что $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H$. Здесь можно использовать оценку на основе ZF-приемника.

Шаг 2. Из вектора $\hat{\mathbf{d}}$ выбирается оценка символа с максимальным отношением сигнал/шум.

Номер этого элемента определяется номером наименьшего диагонального элемента матрицы \mathbf{Q} при MMSE-приемнике или номером столбца с наименьшей нормой при ZF-приемнике. Обозначим этот номер через p_1 .

Шаг 3. Модификация вектора \mathbf{x} принятых сигналов и канальной матрицы \mathbf{H} . Из вектора \mathbf{x} принятых сигналов удаляется вклад, создаваемый символом $\hat{\mathbf{d}}_{p_1}$, а из матрицы \mathbf{H} удаляется столбец с номером p_1 . Обозначим модифицированный вектор через $\mathbf{d}^{(p_1)}$.

Таким образом, имеем, что

$$\mathbf{d}^{(p_1)} = \mathbf{d} - \mathbf{H}^{(p_1)} \hat{\mathbf{d}}_{p_1},$$

где $\mathbf{H}^{(p_1)}$ – столбец с номером p_1 матрицы \mathbf{H} .

Считаем, что оценка $\hat{\mathbf{d}}_{p_1}$ символа \mathbf{d}_{p_1} является окончательной.

Итерация 2

На этой итерации аналогично (с помощью трех шагов) оценивается тот символ из модифицированного вектора $\mathbf{d}^{(p_1)}$, для которого отношение сигнал/шум является наибольшим. Номер этого элемента определяется номером наименьшего диагонального элемента матрицы $\mathbf{Q}^{(p_1)}$. Эта матрица формируется с помощью вектора $\mathbf{H}^{(p_1)}$, т. е.

$$\mathbf{Q}^{(p_1)} = (\mathbf{H}^{(p_1)H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^{(p_1)} + \rho^{-1} \mathbf{I})^{-1}.$$

Отметим, что матрица $\mathbf{Q}^{(p_1)}$ имеет меньшую размерность. Оценку комплексного символа, полученного на второй итерации, считаем окончательной. На последующих итерациях алгоритма вычисляются оценки остальных комплексных символов, входящих в вектор \mathbf{d} .

Итерации 3–M

Каждая из этих итераций состоит из трех шагов и выполняется аналогично.

Всего с помощью M итераций последовательно оцениваются все символы вектора \mathbf{d} , что завершает процесс декодирования по методу V-BLAST.

3.2. Декодирование на основе матричного линейного преобразования

В основе декодирования принятого сигнала линейным приемником лежит преобразование \mathbf{W} . Далее результат преобразования подвергается операции квантования, или деления на части. Линейное преобразование выполняет фильтр, структура которого выбирается исходя из двух возможных критериев: декодер прямого ZF-преобразования или приемник, обеспечивающий минимум среднеквадратичного функционала квадрата ошибки (MMSE).

Процесс декодирования включает в себя следующие этапы.

1. Линейное преобразование принятого вектора \mathbf{y} :

$$\mathbf{x}_W = \mathbf{W}\mathbf{y}.$$

2. Вычисление оценки $\hat{\mathbf{x}}$ переданного вектора \mathbf{x} :

$$\hat{\mathbf{x}}_W = Q_Z\{\mathbf{x}_W\},$$

где $Q_{\mathbb{Z}}\{\cdot\}$ – оператор квантования, реализующий алгоритм решения целочисленной задачи *поиска ближайшего соседа* по критерию ZF (или MMSE).

ZF-алгоритм. Матрица \mathbf{W} линейного преобразования находится путем инверсии матрицы канала \mathbf{H} . Инверсная матрица существует, если определитель исходной матрицы отличен от нуля (матрица \mathbf{H} инвертируемая или несингулярная). Необходимым условием для этого является выполнение неравенства $N_T < N_R$, при этом количество антенн на приемной стороне N_R должно быть больше числа антенн на передающей стороне N_T .

В случае сингулярности матрицы канала \mathbf{H} используется псевдоинверсная матрица \mathbf{H}^+ Мура – Пенроуза, которая является решением нормального уравнения

$$\mathbf{H}^H \mathbf{y} = \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{x}.$$

Прямое решение этого уравнения дает

$$(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y} = \mathbf{x},$$

где матрица $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ инвертируема, поскольку это матрица Грамма решетки и, следовательно, положительно определена. Инверсия Мура – Пенроуза матрицы $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$ для $N_R > N_T$ всегда существует и определяется как

$$\mathbf{H}^+ = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H.$$

ZF-декодер предварительно формирует псевдоинверсную матрицу канала \mathbf{W}_{ZF} , осуществляет линейную фильтрацию принятого вектора $\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{n}$, вычисляя вектор \mathbf{x}_{ZF} , выполняет операцию квантования результата фильтрации, вычисляя оценку $\hat{\mathbf{x}}_{ZF}$. Квантование может быть реализовано с помощью алгоритма поиска наиболее близкой точки решетки к входному вектору (задача «ближайшего соседа»).

Математически алгоритм декодирования записывается в следующем виде:

$$\mathbf{W}_{ZF} = \mathbf{H}^+ = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H,$$

$$\mathbf{x}_{ZF} = \mathbf{W}_{ZF} \mathbf{y}, \quad \hat{\mathbf{x}}_{ZF} = Q_{\mathcal{A}}\{\mathbf{x}_{ZF}\},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{ZF} = Q_{\mathcal{A}}\{\mathbf{W}_{ZF}(\mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{n})\} = Q_{\mathcal{A}}\{\mathbf{x} + \mathbf{W}_{ZF} \mathbf{n}\}.$$

Шумовая компонента принимаемого сигнала изменяется после операции линейной фильтрации $\mathbf{W}_{ZF} \mathbf{n}$.

Структура ZF-декодера приведена на рис. 3.1.

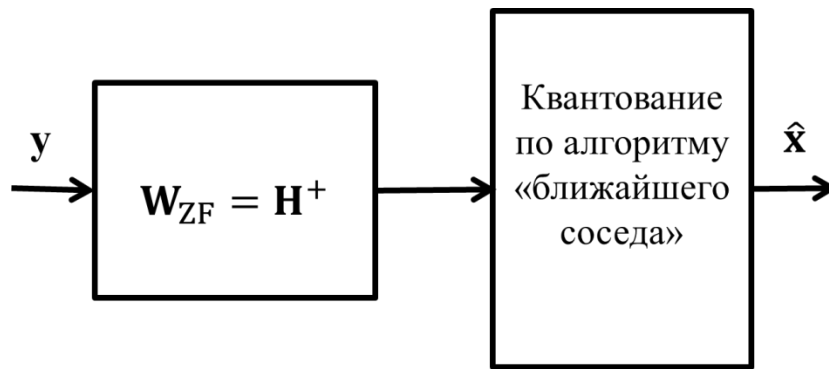


Рис. 3.1. Схема декодера по алгоритму Zero-Forcing

Процесс получения вектора $\hat{\mathbf{x}}_{\text{ZF}}$ эквивалентен решению задачи поиска минимума расстояния

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ZF}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_T}} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|\}.$$

ZF-алгоритм является подоптимальным, поскольку использует непрерывное пространство \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) вместо дискретного комплексного алфавита \mathcal{A} ($\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$). После инверсного преобразования все точки в решетке согласованы с исходным полем \mathbb{Z}^n . Ортогональная геометрия \mathbb{Z}^n позволяет исключить интерференцию между размерностями решетки, т. е. между уровнями MIMO. В системе с $N_T = N_R$ сигнал, принятый i -й приемной антенной от i -й передающей антенны свободен от интерференции других $N_T - 1$ передающих антенн. Благодаря этому свойству, когда влияние антенн друг на друга минимизируется, алгоритм и получил название «сводящий к нулю» – forced to zero. Геометрическая интерпретация проекций принимаемого вектора на ортогональные пространства с интерференцией для евклидова сигнального пространства показана на рис. 3.2.

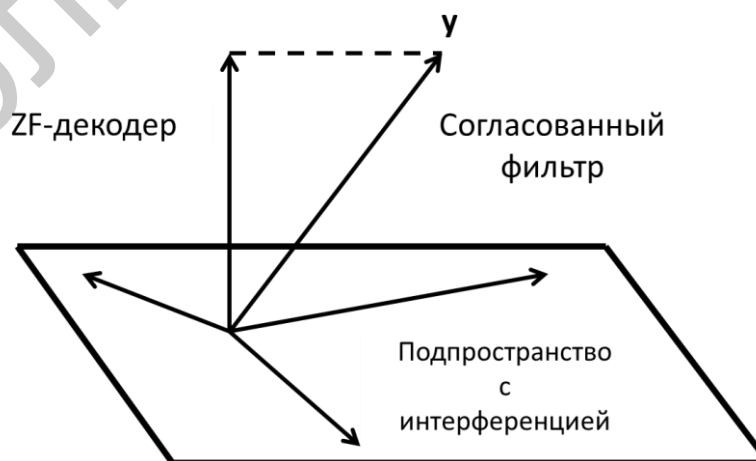


Рис. 3.2. Геометрическая интерпретация ZF-декодирования в сигнальном пространстве

Сложность алгоритмов вычисления инверсии матрицы асимптотически оценивается как $O(n^3)$.

Алгоритм квантования в ZF-декодере решает так называемую CVP-задачу поиска ближайшего соседа путем вычисления расстояния между принимаемым вектором (называемым «целью») и каждой точкой решетки. Для пояснения хода решения задач такого вида полезно использовать метод *геометрического места точек* и понятие *диаграммы Вороного*.

Пусть задано множество S из n точек $\{p_1, \dots, p_n\}$. Диаграмма Вороного множества S , обозначим ее как $\text{Vor}(S)$, разбивает плоскость на n классов «эквивалентности», причем каждый из них соответствует заданной точке. В частности, класс эквивалентности, соответствующий точке p_i , — это многоугольник Вороного $V(p_i)$, определяемый как

$$V(p_i) = \{r \in \mathbb{R}^2, d(r, p_i) \leq d(r, p_j), i \neq j\}.$$

Другими словами, $V(p_i)$ — это геометрическое место точек, таких, что они расположены ближе к точке p_i , чем к любой другой точке множества S , и этот многоугольник может быть определен как пересечение полуплоскостей

$$\bigcap_{i \neq j} H(p_i, p_j),$$

где $H(p_i, p_j)$ — полуплоскость, определяемая прямой, перпендикулярной отрезку $\overline{p_i p_j}$, делящей его пополам и содержащей точку p_i . Диаграмма Вороного может быть построена методом «разделяй и властвуй» за время $O(n \log n)$. Пример диаграммы Вороного приведен на рис. 3.3.

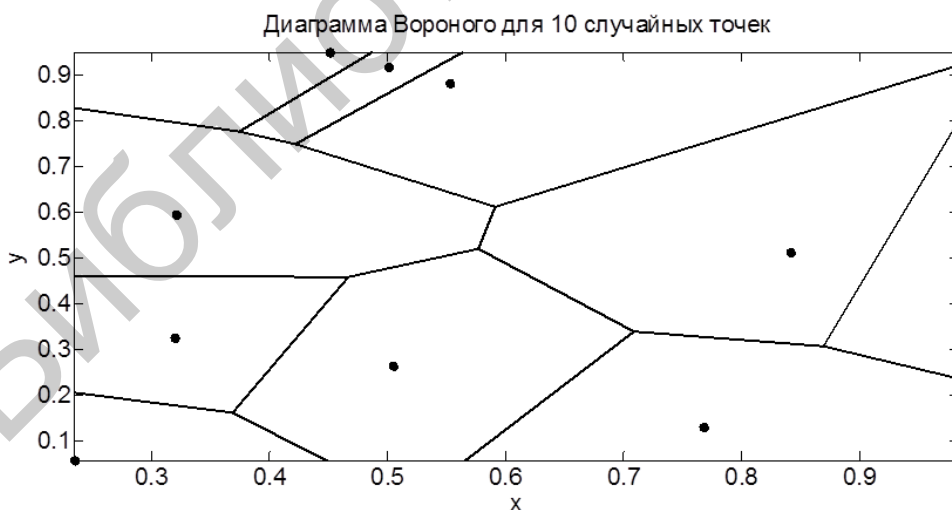


Рис. 3.3. Диаграмма Вороного

Проведем анализ алгоритма. Ковариационная матрица шумовой компоненты имеет вид

$$R_{n,W} = E\{(\mathbf{Wn})(\mathbf{Wn})^H\} = E\{\mathbf{Wn}\mathbf{n}^H\mathbf{W}^H\} = \mathbf{W}\mathbf{R}_n\mathbf{W}^H.$$

Отношение сигнал/шум (SNR) на выходе алгоритма линейного преобразования на i -м уровне может быть записано как

$$\rho_{ZF_i} = \left[\frac{R_x}{R_{nZF}} \right]_{i,i} = \left[\frac{\sigma_x^2 I}{W_{ZF} R_n W_{ZF}^H} \right]_{i,i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Для преобразования W_{ZF} , ковариационных функций сигнала $\mathbf{R}_x = \sigma_x^2 \mathbf{I}$ и шума $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ отношение сигнал/шум становится равным

$$\rho_{ZF_i} = [(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} ((\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H})^H]_{i,i}^{-1} \rho_a = [(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}]_{i,i}^{-1} \rho_a, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где ρ_a – отношение сигнал/шум передающей антенны.

Заметим, что $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$ представляет собой инверсию матрицы \mathbf{G} Грамма, иными словами, матрицы Грамма дуальной решетки. Когда матрица \mathbf{G} близка к единичной диагональной матрице, то решетка формируется с помощью унитарной матрицы \mathbf{U} и $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}$. В этом случае интерференция между уровнями MIMO-системы равна нулю. Если решетка неортогональная, то матрице $\mathbf{G}_{i,i}^{(D)}$ соответствует квадратичная норма дуального вектора.

Пример. Декодер использует ZF-алгоритм для декодирования кода Аламоути с 4-PSK модуляцией. Программа моделирования вычисляет вероятность ошибки BER при различных отношениях сигнал/шум. На рис. 3.4 приведена зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум

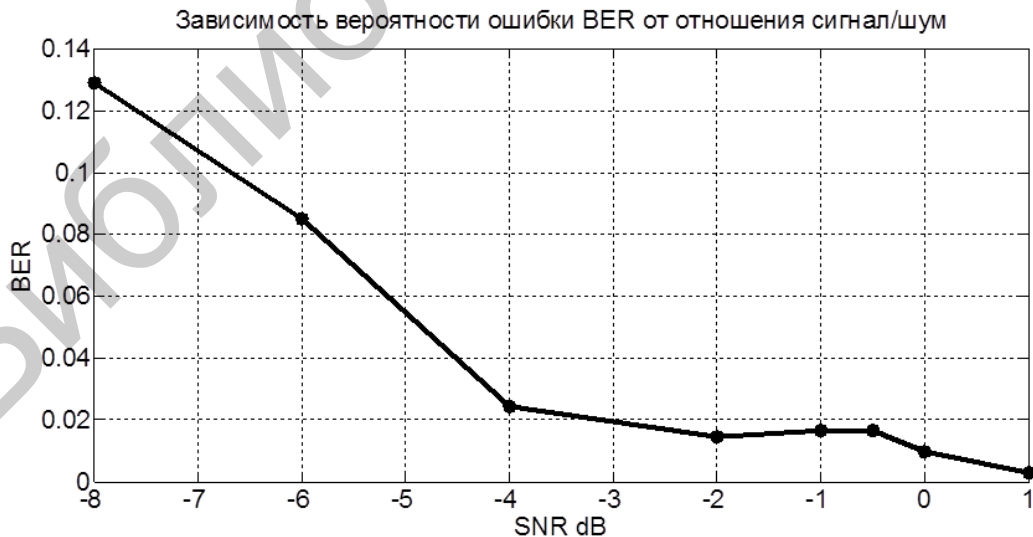


Рис. 3.4. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум для ZF-декодера

Декодирование по критерию минимума среднего квадрата ошибки

Матрица фильтра декодера определяется по критерию минимума среднего квадрата ошибки (MMSE):

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} = \arg \min_{\mathbf{W}} E\{\|\mathbf{W}\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2\}.$$

Критерий не предназначен для компенсации интерференции между уровнями системы, как это было сделано в ZF-алгоритме. Критерий минимума среднего квадрата ошибки ставит своей целью минимизировать ошибку оценки, величина которой зависит как от интерференции между уровнями системы, так и от шума. Процесс оптимизации состоит в поиске точки, в которой градиент системной функции равен нулю. В основе метода лежит принцип ортогональности вектора ошибки $\Delta = \mathbf{x} - \mathbf{W}_{\text{MMSE}}\mathbf{y}$ к сигнальному вектору (рис. 3.5).

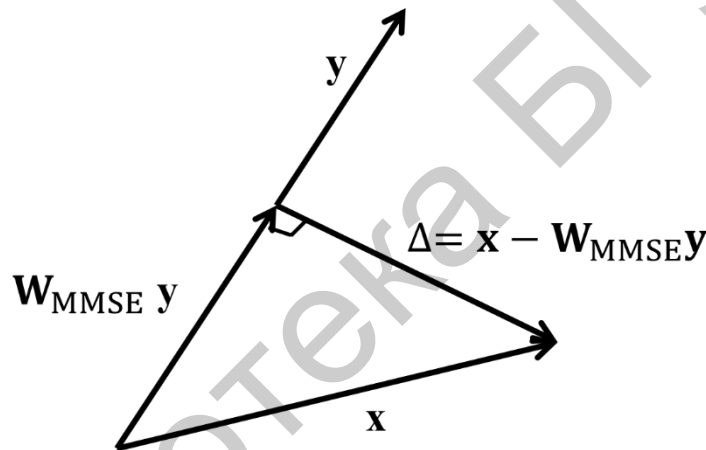


Рис. 3.5. Геометрическая интерпретация принципа ортогональности

Минимум нормы ошибки $\|\Delta\|$ соответствует принципу ортогональности двух векторов ошибки Δ и $\mathbf{W}_{\text{MMSE}}\mathbf{y}$, т. е. $\Delta \perp \mathbf{W}_{\text{MMSE}}\mathbf{y}$. Исходя из этого принципа, можно записать условие ортогональности:

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\} - E\{\mathbf{x}\mathbf{y}^H\} = 0.$$

Детализируя это равенство, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\text{MMSE}}(\mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_n) - E\{\mathbf{x}(\mathbf{H}\mathbf{x})^H\} &= 0, \\ \mathbf{W}_{\text{MMSE}}(\mathbf{R}_n + \mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H) - \mathbf{R}_x\mathbf{H}^H &= 0. \end{aligned}$$

Окончательно получаем выражение для матрицы линейного преобразования:

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} = \mathbf{R}_z\mathbf{H}^H(\mathbf{R}_n + \mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H)^{-1}. \quad (3.3)$$

Перепишем формулу (3.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\text{MMSE}} &= \mathbf{R}_x \mathbf{H}^H (\mathbf{R}_n + \mathbf{H} \mathbf{R}_x \mathbf{H}^H)^{-1} = \\ &= \mathbf{R}_x \mathbf{H}^H (\mathbf{R}_n (\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{R}_x \mathbf{H}^H))^{-1} = \\ &= \mathbf{R}_x \mathbf{H}^H ((\mathbf{I} + \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{R}_x \mathbf{H}^H)^{-1} \mathbf{R}_n^{-1}).\end{aligned}$$

Для модели с корреляционными функциями вида $\mathbf{R}_x = \sigma_x^2 \mathbf{I}$ и $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\text{MMSE}} &= \sigma_x^2 \mathbf{I} \cdot \mathbf{H}^H (\sigma_n^2 \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \sigma_x^2 \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{H}^H)^{-1} = \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^H + (\sigma_n^2 / \sigma_x^2) \mathbf{I})^{-1} = \\ &= \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^H + (1/\rho) \mathbf{I})^{-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, работа декодера по критерию минимума среднего квадрата ошибки описывается уравнениями

$$\mathbf{x}_{\text{MMSE}} = \mathbf{W}_{\text{MMSE}} \mathbf{y} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}} = Q[\mathbf{x}_{\text{MMSE}}].$$

Схема декодера приведена на рис. 3.6.

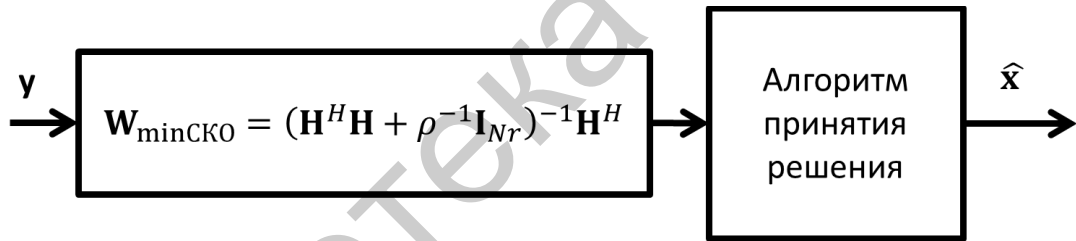


Рис. 3.6. Декодер системы ММО, использующий алгоритм декодирования по критерию минимума среднего квадрата ошибки

Ковариационная матрица шума после умножения принятого сигнала на матрицу \mathbf{W}_{MMSE} принимает вид

$$\mathbf{R}_{n\text{MMSE}} = \mathbf{W}_{\text{MMSE}} \mathbf{R}_n \mathbf{H}_{\text{MMSE}}^H,$$

или

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{n\text{MMSE}} &= E\{(\mathbf{W}_{\text{MMSE}} \mathbf{n})(\mathbf{W}_{\text{MMSE}} \mathbf{n})^H\} = \\ &= E\{((\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \rho^{-1} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{n})((\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \rho^{-1} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{n})^H\} = \\ &= E\{(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \rho^{-1} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{n} \mathbf{n}^H \mathbf{H} ((\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \rho^{-1} \mathbf{I})^{-1})^H\}.\end{aligned}$$

Отношение сигнал/шум SNR на выходе i -го уровня MMSE-фильтра равно

$$\rho_{\text{MMSE},i} = \frac{1}{[(\mathbf{H}^H + \rho_a^{-1} \mathbf{I})^{-1}]_{i,i}} \rho_a, \quad 1 \leq i \leq n.$$

3.3. Алгоритмы сферического декодирования

Сферическое декодирование (SD) относится к точным методам декодирования со сложностью в среднем не выше сложности декодирования по критерию максимального правдоподобия.

Основная идея SD-декодирования состоит в том, что заданное вращение матрицы \mathbf{Q} может быть применено к ансамблю $\{\Lambda, \mathbf{y}\}$ и CVP-алгоритма для детектирования эквивалентной формы решетки в виде верхней треугольной матрицы. Эквивалентная форма решетки описывает норму любой детектируемой точки решетки как сумму, которая вычисляется последовательными приращениями, позволяя аккумулировать вклад каждой векторной компоненты. Считается, что верхняя граница нормы стабильна. Эквивалентная форма базиса решетки и эффект накопления позволяют учитывать при принятии решения все возможные значения информационного вектора $\mathbf{x}(n)$.

Схема сферического декодера приведена на рис. 3.7.

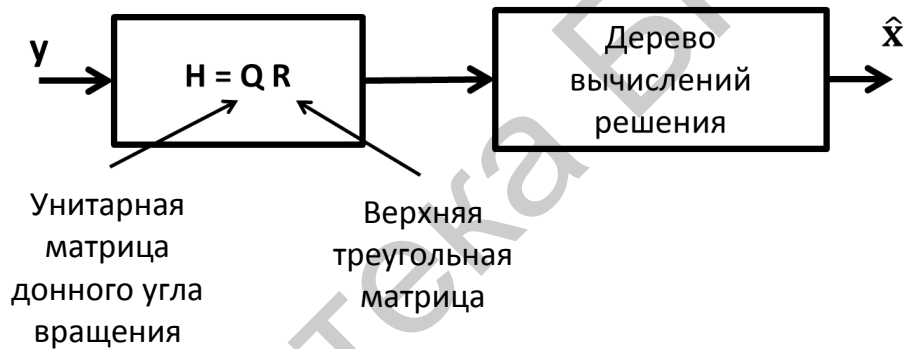


Рис. 3.7. Декодер сферического декодирования

На рис. 3.8 приведен пример дерева вычисления решений для системы MIMO 3×3 с антенной решеткой и 4-значной импульсно-кодовой модуляцией.

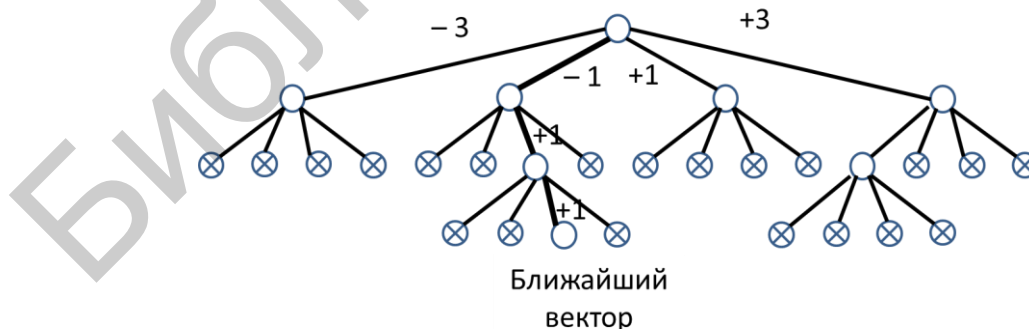


Рис. 3.8. Вычислительное дерево алгоритма сферического декодирования

Граничные соотношения для радиуса ξ (или квадрата радиуса) сферы вблизи точки принятого сигнала определяются как

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 \leq \xi^2,$$

$$\left\| \mathbf{y} - [\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} \right\|^2 \leq \xi^2,$$

где \mathbf{x} – n -мерный вектор выхода; \mathbf{y} – n -мерный вектор входа; \mathbf{H} – матрица канала размером $n \times m$.

Матрица канала может быть факторизована как $\mathbf{H} = \mathbf{Q}[\mathbf{R} : \mathbf{0}_{(n-m) \times m}]^T$, где $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2]$.

Применяя инверсное вращение \mathbf{Q}^H (\mathbf{Q} – унитарная или ортогональная матрица), получим

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^H \\ \mathbf{Q}_2^H \end{bmatrix} \mathbf{y} - \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} \right\|^2 \leq \xi^2,$$

или

$$\|\mathbf{Q}_1^H \mathbf{y} - \mathbf{R} \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{Q}_2^H \mathbf{y}\|^2 \leq \xi^2.$$

Обозначим $\mathbf{y}' = \mathbf{Q}_1^H \mathbf{y}$ и $\xi'^2 = \xi^2 - \|\mathbf{Q}_2^H \mathbf{y}\|^2$, тогда задача поиска ближайшего вектора (CVP-задача) может быть записана как

$$\|\mathbf{y}' - \mathbf{R} \mathbf{x}\|^2 \leq \xi'^2.$$

Если корреляционная матрица \mathbf{R} имеет вид верхнетреугольной матрицы, то CVP-задача может быть записана как

$$\sum_{i=1}^m \left(y'_i - \sum_{j \neq i} r_{i,j} x(j) \right)^2 \leq \xi'^2,$$

где $r_{i,j}$ – (i,j) -элемент матрицы \mathbf{R} ; y'_i – элемент вектора \mathbf{y}' .

Сложность сферического алгоритма декодирования обычно измеряют числом узлов в вычислительном дереве, которые необходимо посетить для выработки решения по методу максимального правдоподобия. Сложность является случайной величиной и ограничивает возможности сферического декодера. В среднем сложность SD-алгоритма оценивается экспоненциальной функцией $O(M^{\alpha N_T})$, где $0 \leq \alpha \leq 1$.

Алгоритм сферического декодирования

Вход: \mathbf{Q} – ортогональная матрица, \mathbf{R} – верхнетреугольная матрица, $\mathbf{y} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}$ – целевой вектор, $\mathbf{y}' = \mathbf{Q}_1^H \mathbf{y}$, ξ – радиус сферы.

Выход: решение по критерию максимального правдоподобия CVP-задачи, оценка $\hat{\mathbf{x}}_{SD}$.

Шаг 1. Вычисление значений:

$$k = n, \xi'_m = \xi^2 - \|\mathbf{Q}_2 \mathbf{x}\|^2 \frac{1}{2}, \mathbf{y}'_{m|m+1} = \mathbf{y}'_m.$$

Шаг 2. Вычисление границы для x_k :

$$UB(x_k) = [(\xi'_k + y'_{k|k+1})/r_{k,k}], x_k = [(-\xi'_k + y'_{k|k+1})/r_{k,k}] - 1.$$

Шаг 3. Увеличение x_k :

$$x_k = x_k + 1.$$

Шаг 4. Увеличение k :

$$k = k + 1$$

if $k = m + 1$, terminate (завершение программы), else go to 3.

Шаг 5. Уменьшение k :

if $k = 1$ go to 6 else $k = k - 1$,

$$y'_{k|k+1} = y'_k - \sum_{j=k+1}^m r_{k,j} x_j, \quad \xi'^2_k = \xi'^2_{k+1} - (y_{k+1|k+2} - r_{k+1,k+1} x_{k+1})^2$$

go to 2.

Шаг 6. Решение найдено:

return $\hat{\mathbf{x}}_{SD} = \mathbf{x}$ (возврат оценки)

go to 3.

Сферическое декодирование с уменьшением сложности обработки

Матрица Грама [17] канала $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ удовлетворяет условию Чолеску декомпозиции матриц. Применяя метод декомпозиции, уравнения оценки символа можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_{ML} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{U}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\|^2 \leq \xi^2,$$

где \mathbf{U} – матрица декомпозиции матрицы Грама $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$.

Далее, используя алгоритм наименьшего квадрата ошибки, можно декодировать принимаемый символ как

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}\mathbf{H}^H)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y}.$$

Решение может быть получено рекурсивно для каждой антенны следующим образом:

$$|x_i - z_i|^2 \leq \frac{T_i}{u_{i,i}^2};$$

$$z_i = \hat{x}_i - \sum_{j=i+1}^M \frac{u_{i,j}}{u_{i,i}} (x_j - \hat{x}_j); T_i = \xi^2 - \sum_{j=i+1}^M u_{j,j}^2 |x_j - z_j|^2.$$

где $\{u_{i,j}\}$ – элементы матрицы декомпозиции.

Алгоритм сферического декодирования с деревом вычислений и рекурсивной процедурой показан на рис. 3.9. Алгоритм использует дерево вычислений с M уровнями и метрикой, ограниченной величиной ξ^2 . Каждый узел дерева имеет P ветвей с параметрами

$$D_i = \underbrace{u_{i,i}^2 |x_i - z_i|^2}_{d_i} + \underbrace{\sum_{j=i+1}^M u_{j,j}^2 |x_j - z_j|^2}_{D_{i+1}} \leq \xi^2,$$

где D_{i+1} – аккумулярующая метрика Евклида, соотнесенная с антенной $(i + 1)$ -го уровня; d_i – метрика Евклида ветви дерева, соотнесенная с антенной i -го уровня.

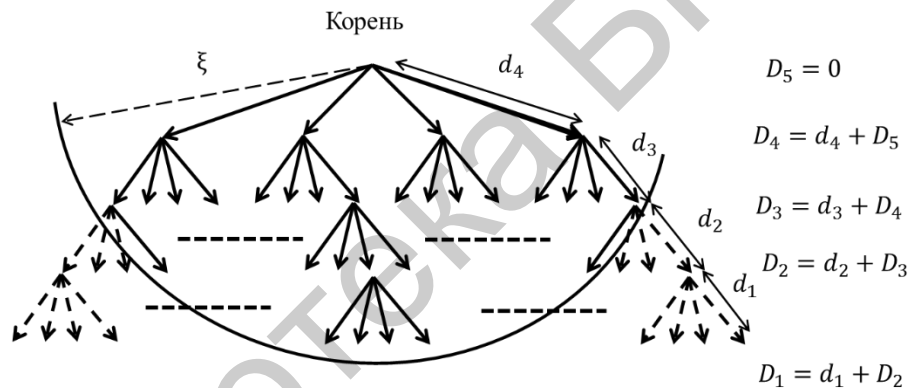


Рис. 3.9. Дерево вычислений сферического алгоритма декодирования

Процесс декодирования может использовать *перечислительные алгоритмы* обработки. Два основных алгоритма перечисления точек сигнального пространства:

- 1) точки сигнального созвездия обрабатываются в произвольном порядке;
- 2) алгоритм обработки с перечислением Шнора, который использует с последовательным увеличением расстояния между x_i и z_i .

Алгоритмы декодирования с упорядочиванием обработки антенных сигналов. Алгоритм VBLAST-ZF упорядочивает антенные сигналы по увеличению шумовой компоненты (уменьшению отношения сигнал/шум). Алгоритм VBLAST-MMSE использует вариант упорядочивания по уменьшению отношения сигнал/(шум + интерференция). Алгоритм V-BLAST можно рассматривать как первый шаг в алгоритме сферического декодирования с перечислением по Шнору (рис. 3.10).

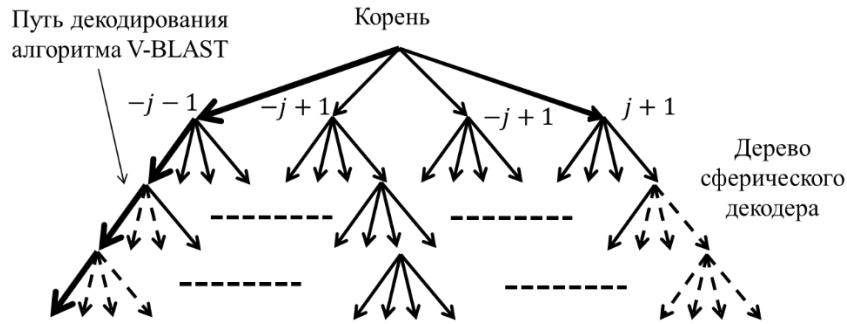


Рис. 3.10. Вычислительное дерево для алгоритмов V-BLAST и сферического декодирования

Алгоритм сферического декодирования с фиксированной сложностью обработки

Статистический анализ вариаций коэффициентов $u_{i,i}$ разложения Чолеску показывает, что они имеют распределение с $2(N - i + 1)$ степенями свободы. При этом имеем следующую зависимость:

$$E\{u_{M,M}^2\} < E\{u_{M-1,M-1}^2\} < \dots < E\{u_{1,1}^2\}.$$

Алгоритм декодирования с фиксированной сложностью использует ограниченное количество сигнальных точек (кандидатов) n_i ($1 \leq n_i \leq P$) на каждом уровне анализа. Наибольшее количество кандидатов имеет первый уровень анализа. Эффект эквалайзинга за счет обратной связи по решению при вычислении z_i и увеличении значения $E\{u_{i,i}^2\}$ с ростом i позволяет уменьшить число кандидатов на последующих уровнях вычисления. Общее количество M -мерных требуемых точек оценивается как $N_s = \prod_{i=1}^M n_i$. Пример дерева вычисления для сферического алгоритма с фиксированной сложностью приведен на рис. 3.11.

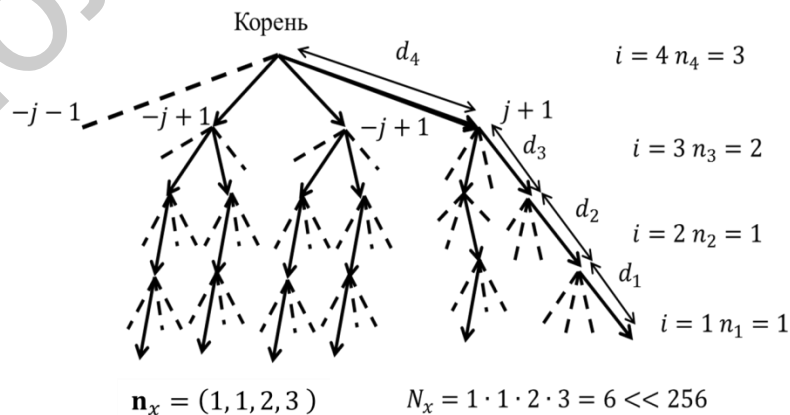


Рис. 3.11. Иллюстрация алгоритма сферического декодирования с фиксированной сложностью обработки для QAM-сигнала и системы ММО с четырьмя передающими антеннами

Алгоритм достигает границы декодирования по критерию максимального правдоподобия при малых размерах пространства обработки $N_s \ll P^M$.

3.4. Формирование и обработка сигналов в ММО-системах с обратной связью

Предположим теперь, что передатчик обладает знанием канала. Это означает, что матрица \mathbf{H} коэффициентов передачи между передающими и приемными антеннами оценивается на приемном конце линии связи, и затем эта информация сообщается передатчику. Очевидно, что в такой системе имеется обратная связь (обратная линия от приемника к передатчику). Знание канала на передающем конце линии дает возможность построить адаптивную пространственную обработку сигналов не только на прием, но и на передачу. Такая обработка может быть реализована на основе сингулярного разложения канальной матрицы \mathbf{H} .

Входные символы разделяются на K параллельных информационных потоков, каждый из которых передается независимо друг от друга. Число таких потоков определяется рангом матрицы \mathbf{H} и не может быть больше минимального числа передающих (M) или приемных (N) антенн, т. е. $K \leq \min\{M, N\}$. В случае некоррелированного рэлеевского канала вероятность вырождения матрицы \mathbf{H} является ничтожно малой. Поэтому число параллельных потоков определяется минимальным числом передающих или приемных антенн, т. е. $K = \min\{M, N\}$.

Параллельные потоки символов $d_1(t), d_2(t), \dots, d_K(t)$ объединим в K -мерный вектор $\mathbf{d}(t) = [d_1(t), d_2(t), \dots, d_K(t)]^T$ пространственного символа. Сигналы из каждого потока умножаются на соответствующие весовые коэффициенты (пространственно кодируются) и излучаются M антеннами. Принятые сигналы (вектор $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)]^T$) преобразуются в пространственном декодере. Схема ММО-системы с параллельной передачей информации показана на рис. 3.12.

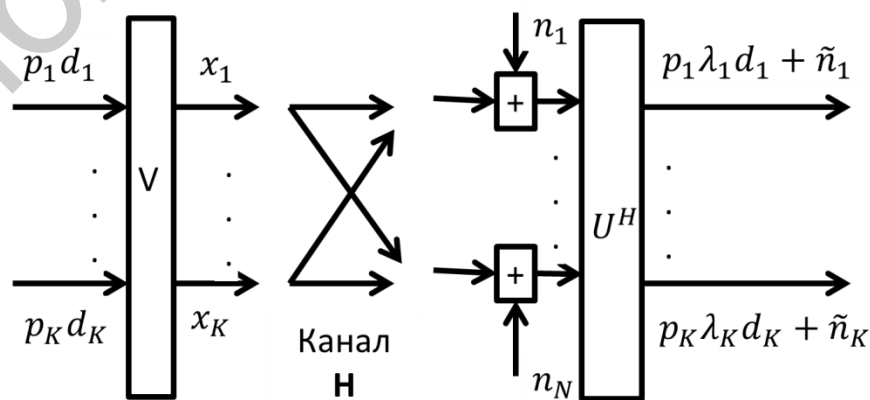


Рис. 3.12. ММО-система с передачей данных по параллельным независимым каналам

M -мерный вектор сигналов $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$ на выходе пространственного кодера может быть представлен в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{d}(t), \quad (3.4)$$

где $(M \times K)$ -размерная матрица $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_K]$ – матрица, состоящая из весовых векторов \mathbf{v}_i пространственного кодера; $\mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_K\}$ – диагональная матрица, составленная из чисел p_i , которые дают распределение полной мощности между параллельными каналами.

Вектор $\mathbf{y}(t)$ сигналов в приемных антеннах равен

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (3.5)$$

Преобразование сигналов в пространственном декодере может быть описано $(N \times K)$ -размерной матрицей $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K]$. На выходе декодера вектор сигнала равен $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{U}^H\mathbf{x}(t)$. С учетом (3.5) будем иметь, что

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{U}^H\mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{n}}(t)$$

где $\tilde{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{U}^H\mathbf{n}(t)$ – вектор выходных шумов. С помощью (3.4) можно получить, что вектор $\hat{\mathbf{x}}(t)$ на выходе декодера равен

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{U}^H\mathbf{H}\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{d}(t) + \tilde{\mathbf{z}}(t). \quad (3.6)$$

Весовые векторы кодера и декодера должны быть выбраны так, чтобы обеспечить наилучшие характеристики системы (максимальное ОСШ и максимальную пропускную способность). Кроме того, для упрощения оценки принимаемых сигналов желательно, чтобы вторичные каналы были бы независимыми между собой. Тогда возможна независимая оценка сигналов в каждом канале.

Для формирования таких каналов должны быть выполнены два следующих условия:

$$\mathbf{u}_i^H\mathbf{H}\mathbf{v}_j = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i}, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad \mathbf{u}_i^H\mathbf{u}_j = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (3.7)$$

Первое условие в (3.7) обеспечивает диагональность матрицы $\mathbf{U}^H\mathbf{H}\mathbf{V}$ в (3.6), т. е. независимость параллельных каналов по сигналам. Второе условие в (3.7) является условием ортогональности весовых векторов декодера и обеспечивает некоррелированность собственных шумов в параллельных каналах. Для корреляционной матрицы шумов в таких каналах получим, что

$$E\{\tilde{\mathbf{n}}(t)\tilde{\mathbf{n}}^H(t)\} = \mathbf{U}^HE\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\} = \sigma_0^2\mathbf{I}.$$

Условия (3.7) выполняются, когда весовые векторы являются векторами сингулярного разложения матрицы \mathbf{H} канальных коэффициентов, которое имеет вид [8]

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{L}^{1/2}\mathbf{V}^H, \quad (3.8)$$

где $\mathbf{L} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ – диагональная матрица ненулевых собственных чисел λ матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$; $(M \times K)$ -размерная матрица $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K]$ состоит из собственных векторов матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$; матрица $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_K]$ имеет размерность $(N \times K)$ и составлена из собственных векторов матрицы $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$.

Векторы \mathbf{u}_i и \mathbf{v}_i образуют ортонормированные векторные системы и связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathbf{u}_i = \lambda_i^{-1/2}\mathbf{H}\mathbf{v}_i,$$

$$\mathbf{v}_i = \lambda_i^{-1/2}\mathbf{H}^H\mathbf{u}_i.$$

Ненулевые собственные числа матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ и $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ совпадают между собой. Однако матрица $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ имеет размерность $N \times N$, а размерность матрицы $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ равна $M \times M$. Поэтому в случае $M > N$ удобнее использовать матрицу $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$, а при $M < N$ более простой является матрица $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$.

Сформированные таким образом каналы называются *собственными каналами*.

Подставляя (3.7) в (3.6), а (3.6) в (3.5), получим, что вектор сигналов в собственных каналах равен

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{L}^{1/2} \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{d}(t) + \tilde{\mathbf{n}}(t), \quad (3.9)$$

или в поэлементной записи

$$y_i(t) = \sqrt{p_i \lambda_i} d_i(t) + n_i(t). \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что в i -м собственном канале присутствует только i -й передаваемый символ. Кроме этого, в соответствии с (3.7) выходные собственные шумы являются некоррелированными между собой.

Таким образом, ММО-система может быть представлена в виде K независимых параллельных собственных каналов, т. е. как совокупность K независимых одноканальных систем. Для формирования собственных каналов приемник должен оценивать матрицу \mathbf{H} коэффициентов передачи, и затем эта информация должна сообщаться на передающую сторону по обратной линии.

Контрольные вопросы

1. Как влияет сингулярное разложение комплексной матрицы канала \mathbf{H} на сложность алгоритмов декодирования пространственно-временного кода?
2. Выведите выражение для корреляционной матрицы ошибок декодирования по методу минимума среднеквадратичной ошибки.
3. Сравните вычислительные сложности алгоритмов декодирования пространственно-временных кодов Аламоути и Golden-кода.
4. При каких условиях оценка, оптимальная по критерию минимума среднеквадратичной ошибки, оказывается близкой к оценке, полученной по методу ZF?
5. Покажите, что сложность ZF-метода определяется главным образом операциями обращения и умножения матриц линейного преобразования.
6. Сформулируйте основные достоинства и недостатки алгоритмов декодирования по методам минимума среднеквадратичной ошибки и ZF.
7. Покажите, что инверсия матрицы канала по методу Мура – Пенроуза позволяет представить MIMO-канал в виде совокупности параллельных каналов со скалярными алгоритмами декодирования в каждом из параллельных каналов.
8. Напишите программу, реализующую алгоритм сферического декодирования.
9. Поясните, как осуществляется процесс прекодирования в системах связи с обратной связью?
10. Постройте структурную схему декодера кода Аламоути с многоэлементными антенными решетками.
11. Алгоритм Babai выбора радиуса сферического декодирования имеет следующий вид [16].

Вход: \mathbf{R} , где \mathbf{R} – верхнетреугольная матрица QR-декомпозиции матрицы \mathbf{H} канала связи; $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{yQ}$ – редуцированный вектор \mathbf{y} принятого сигнала.

Выход: $\hat{\rho}$ – радиус сферы декодирования

Шаг 1: solve $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$ for $\mathbf{R}\mathbf{s} = \hat{\mathbf{y}}$.

Шаг 2: round: $\hat{\mathbf{s}} = \lfloor \mathbf{s} \rfloor \in \mathbb{Z}^m$.

Шаг 3: set $\hat{\rho} = \|\mathbf{R}\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{y}}\|_2$.

Напишите программу вычисления радиуса ρ для следующих исходных данных:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{y} = [-1 \ 1 \ 0]^T.$$

4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОДОВ В СИСТЕМАХ ПОДВИЖНОЙ СВЯЗИ

Использование технологии ММО предусматривается во всех современных системах подвижной связи, включая системы стандартов LTE, UMTS и WiMax. Каждый стандарт использует свою технологию ММО.

4.1. Система LTE

Технологии ММО на линии вверх и вниз различаются. На линии вниз возможны схемы ММО максимального размера 4×4 с пространственным мультиплексированием до четырех независимых потоков информации, т. е. с рангом 4. Под рангом понимается число передаваемых в системе независимых потоков информации. На линии вверх ранг ММО не превышает 1, даже если абонентская станция оснащается несколькими антеннами.

Классификация схем ММО. В Release 8 3GPP для линии вниз используются следующие схемы: разнесенная передача; пространственное мультиплексирование; пространственное мультиплексирование с предварительным кодированием (прекодированием); схема многопользовательского ММО (MU-MIMO); схема с прекодированием и рангом 1; адаптивное формирование луча диаграммы направленности. В Release 9 добавлено адаптивное формирование луча диаграммы направленности с поддержкой на линии вниз двух пространственных уровней, или ранга 2.

Классификация схем ММО на линии вверх поддерживает: режим разнесенной передачи; многопользовательское ММО; адаптивное формирование луча диаграммы направленности антенны.

Схема разнесенной передачи. На линии вниз в системах LTE разнесенная передача может использоваться для всех физических каналов, включая каналы управления и трафика. Другие схемы ММО применимы только к каналу трафика.

На линии вниз используется вариант кода Аламоути, применительно к пространственно-частотному режиму кодирования. Пространственно-частотный код (SFBC) разбивает модулированные символы на блоки по два символа, которые передаются через две антенны на паре смежных поднесущих (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Схема пространственно-частотного кода

Номер антенны	Частота	
	f_1	f_2
1	θ_1	θ_2
2	$-\theta_2^*$	θ_1^*

В системе LTE ресурсы для передачи пользовательских данных выделяются блоками. Блоки в некоторых конфигурациях состоят из нечетного

числа символов OFDM, что определяет временные ресурсы. Количество поднесущих частот (частотные ресурсы) в блоке всегда четное, это позволяет выделять пары поднесущих для каждого блока кода Аламоути.

Код SFBC позволяет достичь высокой помехоустойчивости и используется для увеличения дальности связи. С другой стороны, применение такого кода улучшает распределение отношения сигнал/шум и, как следствие, повышает пропускную способность системы.

При наличии четырех передающих трактов на базовой станции используются комбинации режима SFBC и разнесенной передачи с переключением (FSTD). Порождающая матрица кода, где строки соответствуют антеннам, а столбцы поднесущим, имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & \theta_4 \\ -\theta_2^* & \theta_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_4^* & \theta_3^* \end{bmatrix}.$$

Передача SFBC в комбинации с FSTD позволяет уменьшить эффект корреляции между сигналами соседних передающих антенн и за счет структуры матрицы SFBC упростить реализацию метода.

На линии вверх SFBC не применяется. Здесь используется процедура селективного разнесения на передаче по командам от базовой станции при замкнутой петле обратной связи или самостоятельно абонентской станцией в режиме без обратной связи.

Схемы SU-MIMO

Схема однопользовательского MIMO (SU-MIMO) используется только для канала трафика на линии вниз. Позволяет повысить пропускную способность системы за счет мультиплексирования нескольких потоков информации в пространственной области. На рис. 4.1 и 4.2 показаны схемы SU-MIMO на передающей и приемной сторонах.



Рис. 4.1. Схема SU-MIMO на передающей стороне

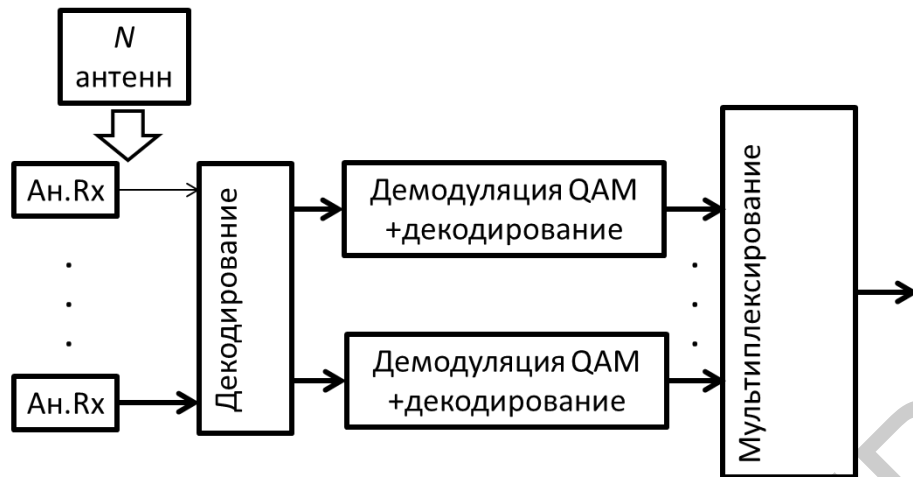


Рис. 4.2. Схема SU-MIMO на приемной стороне

Операция прекодирования описывается выражением

$$\Theta(i) = \mathbf{W}\mathbf{x}(i),$$

где $\Theta(i) = [\theta_1(i), \dots, \theta_M(i)]^T$; $\theta_m(i)$ – i -й комплексный символ, передаваемый через m -ю антенну; \mathbf{W} – прекодирующая матрица размером $M \times V$; вектор $\mathbf{x}(i) = [x_1(i), \dots, x_V(i)]^T$; $x_v(i)$ – i -й модулированный символ, передаваемый через v -й уровень.

Прекодирующие матрицы для базовых станций с двумя передающими антеннами приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Прекодирующие матрицы для базовых станций

Индикатор прекодирующей матрицы PMI	Число уровней V	
	1	2
0	$(1/\sqrt{2})[1 \ 1]^T$	$(1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
1	$(1/\sqrt{2})[1 \ -1]^T$	$(1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
2	$(1/\sqrt{2})[1 \ j]^T$	$(1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$
3	$(1/\sqrt{2})[1 \ -j]^T$	-

Для четырех передающих антенн прекодирующие матрицы формируются из столбцов матрицы, генерируемой с помощью функции Хаусхолдера [1, 17]

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{I} - 2\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_i^*/\boldsymbol{\mu}_i^*\boldsymbol{\mu}_i,$$

где $\boldsymbol{\mu}_i$ – вектор, соответствующий индикатору PMI.

Номера столбцов, используемых для формирования прекодирующей матрицы указываются в верхнем индексе. Например, $W_0^{(124)}$ для $V=3$ соответствует матрице, образованной из столбцов матрицы W_i с номерами 1, 2, 4. Благодаря такому способу формирования прекодирующей матрицы можно уменьшить объем вычислительных операций в абонентской станции при выборе оптимальной матрицы для канала ММО с максимальным значением CQI.

Свойства прекодирующих матриц

Постоянное абсолютное значение. После выполнения операции прекодирования мощности сигналов на выходе всех передающих ветвей равны и не зависят от прекодирующей матрицы.

Наследственность. Каждая прекодирующая матрица более высокого ранга содержит как минимум одну прекодирующую матрицу меньшего ранга с тем же PMI.

Ограниченный алфавит. В случае с двумя антеннами элементами прекодирующих матриц являются символы QPSK $\{\pm 1, \pm j\}$ с нормирующими коэффициентами. В случае четырех антенн элементами матриц μ_i являются символы 8-PSK:

$$\{\pm 1, \pm j, \pm (1 + j)/\sqrt{2}, \pm (-1 + j)/\sqrt{2}, \dots\}.$$

Если характеристики канала быстро изменяются, то нет возможности передавать PMI, пространственное мультиплексирование работает в режиме без обратной связи. При этом остается обязательная передача по обратному каналу индикаторов качества RI и CQI. В этом случае передается только одно кодовое слово, т. е. осуществляется последовательное помехоустойчивое кодирование. Базовая станция по принятому RI выбирает ранг кодирования и осуществляет прекодирование с циклически изменяющимися прекодирующими матрицами из фиксированного набора CCD. Сигналы на разных поднесущих передаются с циклически изменяющимися фазовыми сдвигами. На приемной стороне получают сигнал, аналогичный сигналу, прошедшему многолучевой канал с варьируемыми задержками.

Процедура прекодирования в схеме ММО без обратной связи описывается как

$$\Theta(i) = \mathbf{W}(i)\mathbf{D}(i)\mathbf{U}\mathbf{x}(i),$$

где $\Theta(i) = [\theta_1(i), \dots, \theta_M(i)]^T$; $\theta_m(i)$ – i -й комплексный символ, передаваемый через m -ю антенну; \mathbf{W} – прекодирующая матрица размером $M \times V$; вектор $\mathbf{x}(i) = [x_1(i), \dots, x_V(i)]^T$; $x_v(i)$ – i -й модулированный символ, передаваемый через v -й уровень; \mathbf{U} – прекодирующая матрица дискретного преобразования Фурье размером $V \times V$; $\mathbf{D}(i)$ – матрица размером $V \times V$, задающая циклические сдвиги.

Операция $\mathbf{D}(i)\mathbf{U}$ позволяет распределить i -е модулированные символы единственного кодового слова между уровнями циклически с периодом V для декорреляции сигналов в канале.

Схемы MU-MIMO

В схеме многопользовательского MIMO (MU-MIMO) на линиях вверх и вниз базовая станция может работать одновременно с K абонентскими станциями, $K \leq M$, выделяя этим станциям одинаковые частотно-временные ресурсы. При этом обеспечивается только пространственное разнесение сигналов разных абонентов.

На линии вниз данные для разных абонентов передаются с одним пространственным уровнем. Для каждой абонентской станции используются те же прекодирующие матрицы, что и в режиме SU-MIMO для $V=1$.

На линии вверх несколько абонентских станций могут передавать данные на базовую станцию, т. е. могут работать по схеме MU-MIMO. Для того чтобы базовая станция могла распознать и нормально демодулировать сигналы разных абонентских станций, эти станции излучают ортогональные пилот-сигналы, для формирования которых используются сдвинутые относительно друг друга копии последовательности Задова – Чу.

4.2. Система LTE-Advanced

Система LTE-Advanced позволяет повысить спектральную эффективность за счет использования на линии вверх и вниз схем MIMO более высокого порядка, чем в системе LTE [1]. Максимальный размер MIMO в системе LTE-Advanced на линии вниз – 8×8 , а на линии вверх – 4×4 . Повышение скорости передачи данных на краях сот может обеспечиваться благодаря схемам скоординированной многоточечной связи (CoMP). В такой схеме абонентская станция может работать одновременно с несколькими базовыми станциями.

Для линии вниз добавлен новый режим MIMO-TM9, позволяющий мультиплексировать до восьми пространственных уровней с прекодированием и с использованием новых пилот-сигналов. В этом режиме система может динамически переключаться между схемами SU-MIMO и MU-MIMO. В системе существует возможность передачи абонентской станции информации о характеристиках каналов для каждой из базовых станций, с которыми она работает в режиме CoMP.

Схемы разнесенной передачи LTE-Advanced

В системе для базовых станций с двумя и четырьмя передающими антеннами схемы разнесенной передачи на линии вниз такие же, как в LTE. Для базовых станций, оснащенных восьмью передающими антеннами, могут использоваться схемы разнесенной передачи, гармонизированные со схемами

для базовых станций с двумя или четырьмя антеннами. В этом случае может использоваться следующая порождающая матрица:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & -\theta_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & -\theta_4^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_4 & \theta_3^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_5 & -\theta_6^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_6 & \theta_5^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_7 & -\theta_8^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_8 & -\theta_7^* \end{bmatrix}$$

В системе на линии вверх не используется разнесенная передача. Используется режим передачи через один антенный порт. Разнесенная передача используется для канала управления с целью передачи подтверждений и запросов ресурсов у диспетчера. Для станций как с двумя, так и с четырьмя передающими антеннами разнесение осуществляется с помощью двух антенн. Одни и те же сигналы передаются через две антенны с использованием ортогональных ресурсов. Ортогональность ресурсов канала обеспечивается использованием разных циклических сдвигов последовательностей Задова – Чу и кодов Уолша. Эта схема MIMO называется «пространственно-разнесенная передача ортогональных ресурсов». Для нормальной демодуляции абонентская станция передает пилот-сигналы в канале управления с использованием тех же ортогональных признаков.

Схема SU-MIMO

В схеме применяется на линии вниз пространственное мультиплексирование $8 \times N$ ($2 \leq N \leq 8$), поддерживаются максимум восемь пространственных уровней с передачей максимум двух кодовых слов на одной несущей. Для пространственного мультиплексирования с обратной связью на линии вниз используется режим MIMO-TM9. В этом режиме оценивание канала и демодуляция на абонентской станции осуществляются по пилот-сигналам. Пилот-сигналы, используемые для демодуляции, подвергаются такому же прекодированию, что и полезная информация. Благодаря этому, полезную информацию после MIMO-прекодирования можно демодулировать в приемнике без знания прекодирующей матрицы. В этом случае можно обойтись без передачи на абонентскую станцию индикатора используемой прекодирующей матрицы и без использования кодовой книги.

Для базовых станций с восьмью передающими антеннами используется метод прекодирования данных по иерархическому принципу. Прекодирующая матрица вычисляется как $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2$, где \mathbf{W}_1 – прекодирующая матрица, учитывающая характеристики канала, усредненные по ширине полосы и/или за значительный период времени, а \mathbf{W}_2 – прекодирующая матрица, учитывающая

характеристики канала в определенной частотной полосе и/или за короткий интервал времени.

Матрица \mathbf{W}_1 учитывает корреляционные свойства канала, изменяющиеся медленно и незначительно в частотной области в пределах полосы канала. В пространственной области канал можно разложить на несколько подканалов, каждому из которых будет соответствовать одна из матриц множества перекодирующих матриц \mathbf{W}_1 . Вторая матрица \mathbf{W}_2 отвечает за мгновенные свойства канала на определенном участке частот и обеспечивает ортогонализацию сигналов, переданных через антенны, или синфазное сложение компонент такого сигнала в точке приема.

4.3. Система UMTS

Система использует схему пространственного мультиплексирования с обратной связью для режима высокоскоростной передачи данных на линии вниз (HSDPA) для базовых станций с двумя передающими антеннами. В технологии MIMO в UMTS специфицированы: схемы MIMO с обратной связью на линии вниз для базовых станций с четырьмя передающими антеннами; схемы MIMO на линии вверх для абонентских станций с двумя передающими антеннами; схемы многоточечной связи [1]. Схема MIMO для базовых станций с двумя передающими антеннами показана на рис. 4.3.

Такая конфигурация предусматривает применение следующих схем MIMO:

- пространственно-временная разнесенная передача (STTD);
- разнесенная передача с переключением по времени (TSTD);
- разнесенная передача с обратной связью;
- схема пространственного мультиплексирования с обратной связью.

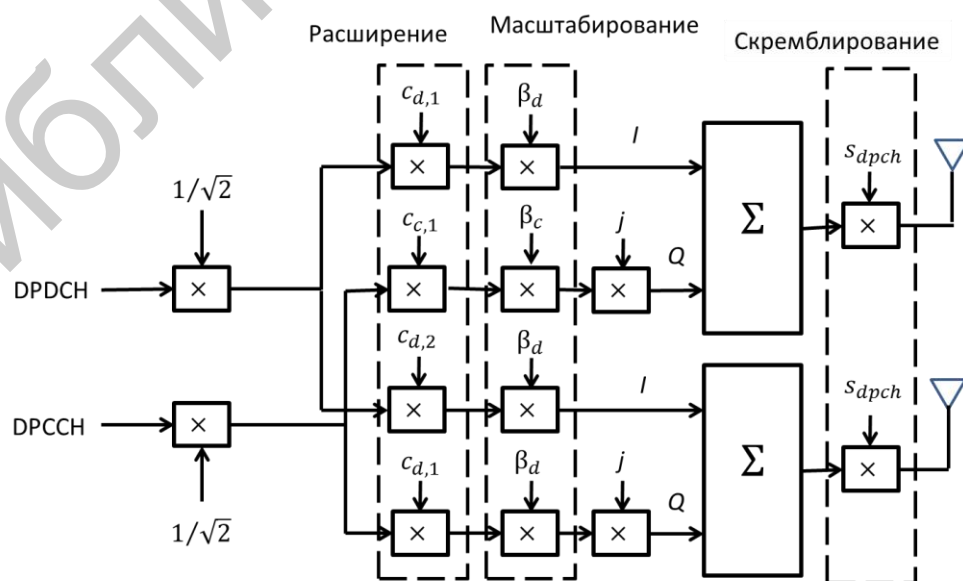


Рис. 4.3. Схема MIMO

Схема STTD реализуется с использованием пространственно-временного кода Аламоути:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & -\theta_2^* \\ \theta_2 & \theta_1^* \end{bmatrix}.$$

Схема TSTD используется только для канала синхронизации. В этой схеме сигналы канала синхронизации передаются в четных слотах кадра через первую антенну, а в нечетных слотах – через вторую антенну. Таким образом, схема TSTD реализуется с использованием пространственного кода:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix}.$$

При реализации схемы MIMO с двумя транспортными уровнями сигналы передаются в режиме пространственного мультиплексирования (D0TxAA). Пользовательская информация упаковывается в один или два транспортных блока в соответствии с количеством пространственных уровней в схеме MIMO. Их количество выбирается по отчетам абонентской станции о состоянии канала (отношение сигнал/шум, степень корреляции сигналов двух антенных трактов). Пользовательская информация, упакованная в транспортные уровни, подвергается операциям расширения спектра и скремблирования для каждого кодового канала с коэффициентом расширения спектра 16 (SF16). Расширенные сигналы прекодируются, т. е. умножаются на прекодирующую матрицу \mathbf{W} (с весовыми коэффициентами w_1, \dots, w_4). Затем выполняется операция кодового мультиплексирования: сигналы кодовых каналов SF16 складываются в каждой из двух передающих ветвей.

Операция прекодирования описывается следующим выражением:

$$\Theta(i) = \mathbf{W}\mathbf{x}(i),$$

где $\Theta(i) = [\theta_1(i), \dots, \theta_M(i)]^T$; $\theta_m(i)$ – i -й комплексный символ, передаваемый через m -ю антенну, $m = 1, 2$; \mathbf{W} – прекодирующая матрица размером $M \times V$; $\mathbf{x}(i) = [x_1(i), \dots, x_V(i)]^T$; $x_v(i)$ – i -й модулированный символ v -го транспортного уровня, $v = 1, 2$; $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & w_3 \\ w_2 & w_4 \end{bmatrix}$ – прекодирующая матрица, причем $w_2 = \{(1 + j)/2, (1 - j)/2, (-1 + j)/2, (-1 - j)/2\}$ $w_3 = w_1 = 1/\sqrt{2}$, $w_4 = -w_2$

Коэффициенты w_1, w_3 – постоянные действительные числа, а w_2, w_4 – переменные комплексные числа. По сообщениям от абонентской станции выбирается одно из четырех возможных значений w_2 и соответствующее ему значение w_2 . При передаче двух транспортных блоков используются все четыре коэффициента, а при передаче одного блока – только два коэффициента w_1 и w_2 .

На рис. 4.4 показаны результаты моделирования схемы MIMO. Используются код Аламоути и пилот-сигналы для оценки состояния канала.

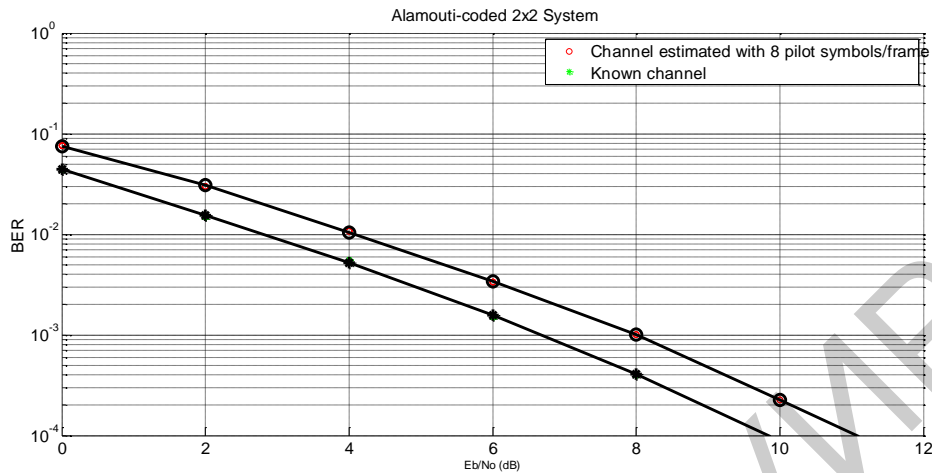


Рис. 4.4. Зависимость вероятности ошибки на информационный бит от отношения сигнал/шум при кодировании кодом Аламоути

Схемы MIMO для базовых станций с четырьмя передающими антеннами

Информация для пользователя HSDPA упаковывается в 1, 2, 3 или 4 транспортных блока в соответствии с количеством пространственных уровней в схеме MIMO. Количество пространственных уровней выбирается базовой станцией по отчетам от абонентской станции о состоянии канала, которые также включают индикатор предпочтительной прекодирующей матрицы PMI. Пользовательская информация упаковывается в транспортные блоки, подвергается операции расширения спектра и скремблирования для каждого кодового канала SF16. Расширенные сигналы прекодируются. Затем выполняется операция кодового мультиплексирования: сигналы кодовых каналов SF16 складываются в каждой из четырех передающих ветвей.

Операция прекодирования описывается выражением

$$\Theta(i) = \mathbf{W}\mathbf{x}(i),$$

где $\Theta(i) = [\theta_1(i), \dots, \theta_M(i)]^T$; $\theta_m(i)$ – i -й комплексный символ, передаваемый через m -ю антенну, $m = 1, 2, \dots, 4$; \mathbf{W} – прекодирующая матрица размером $M \times V$; $\mathbf{x}(i) = [x_1(i), \dots, x_V(i)]^T$; $x_v(i)$ – i -й модулированный символ v -го транспортного уровня, $v = 1, 2, \dots, V$; V – число транспортных блоков (один – четыре); \mathbf{W} – прекодирующая матрица с элементами $w_{m,v}$.

Прекодирующая матрица формируется из столбцов матрицы:

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{1} - 2\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_i^*/\boldsymbol{\mu}_i^*\boldsymbol{\mu}_i,$$

где $\boldsymbol{\mu}_i$ – вектор, соответствующий индикатору PMI.

Схемы MIMO для абонентских станций с двумя передающими антеннами

На линии вверх могут применяться следующие схемы MIMO: разнесенная передача без обратной связи (OLTD), разнесенная передача с обратной связью (CLTD), пространственное мультиплексирование с обратной связью.

При реализации схемы с обратной связью на линии вверх с одним пространственным уровнем или разнесенной передаче с обратной связью, для канала трафика HSUPA используется только первичный тракт. При реализации схемы с двумя пространственными уровнями, или пространственного мультиплексирования, задействуются два тракта.

Пользовательская информация упаковывается в один или два транспортных блока в соответствии с количеством пространственных уровней в схеме MIMO с обратной связью. Их количество выбирается базовой станцией в зависимости от состояния канала. Пользовательская информация, упакованная в транспортные блоки, подвергается скремблированию, а затем прекодируется в соответствии с принятым от базовой станции индикатором прекодирования TPI.

Операция описывается выражением

$$\Theta(i) = \mathbf{W}\mathbf{x}(i),$$

где $\Theta(i) = [\theta_1(i), \dots, \theta_M(i)]^T$; $\theta_m(i)$ – i -й комплексный символ, передаваемый через m -ю антенну, $m = 1, 2$; \mathbf{W} – прекодирующая матрица размером $M \times V$; $\mathbf{x}(i) = [x_1(i), \dots, x_V(i)]^T$; $x_v(i)$ – i -й модулированный символ v -го транспортного уровня, $v = 1, 2$; V – число транспортных блоков (один – четыре); \mathbf{W} – прекодирующая матрица с элементами $w_{m,v}$.

Матрица прекодирования определяется как

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & w_3 \\ w_2 & w_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \exp(-j\tau/2) & \exp(-j\tau/2) \\ \exp(j\tau/2) & \exp(-j\tau/2) \end{bmatrix},$$

где $\tau = \tau^{k+1}$ – фазовый сдвиг, применяемый на интервале действия данного TPI.

Фазовый сдвиг может отличаться от величины, соответствующей принятому индикатору TPI. В этом случае применяется процедура корректировки фазового сдвига.

4.4. Система WiMax IEEE 802.16e

Максимальный размер схемы MIMO на линии вниз в системе – 4×4 , стандартизированы схемы с обратной связью и без обратной связи [1, 15]. В качестве обязательной схемы определены только схемы без обратной связи.

На линии вверх поддерживается разнесенный прием и технология MU-MIMO. В системе может поддерживаться адаптивное формирование луча диаграммы направленности.

Для базовых станций с двумя передающими антеннами определены следующие пространственно-временные коды:

– матрица

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix},$$

где s_i – комплексный информационный символ;

– матрица

$$B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix};$$

– матрица

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \begin{bmatrix} s_1 + jrs_4 & rs_2 + s_3 \\ s_2 - rs_3 & jrs_1 + s_4 \end{bmatrix}, \quad r = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Для базовых станций с четырьмя передающими антеннами определены следующие пространственно-временные коды-матрицы

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* & 0 & 0 \\ s_2 & s_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & -s_4^* \\ 0 & 0 & s_4 & s_3^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* & s_5 & -s_7^* \\ s_2 & s_1^* & s_6 & -s_8^* \\ s_3 & -s_4^* & s_7 & -s_5^* \\ s_4 & s_3^* & s_8 & s_6^* \end{bmatrix}.$$

Переключение между пространственно-временными кодами в каналах, выделенных одному пользователю, может осуществляться в динамическом режиме.

Контрольные вопросы

1. Поясните, в чем суть операции прекодирования в системе MIMO стандарта LTE.
2. Сформулируйте задачу повышения эффективности работы сети подвижной связи и пути ее решения с помощью пространственно-временного кодирования.
3. Нарисуйте схемы MU-MIMO LTE.
4. Объясните, в чем отличие систем MIMO для сетей стандартов LTE и UMTS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакулин, М. Г. Технология ММО: принципы и алгоритмы / М. Г. Бакулин, Л. А. Варукина, В. Б. Крейнделин. – М. : Горячая линия. – Телеком, 2014. – 244 с.
2. Крейнделин, В. Б. Методы обработки сигналов в системах с пространственно-временным кодированием : учеб. пособие / В. Б. Крейнделин, Л. А. Варукина. – М. : МТУСИ, 2009. – 31 с.
3. Кудряшов, Б. Д. Основы теории кодирования : учеб. пособие / Б. Д. Кудряшов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2016. – 400 с.
4. MIMO System Technology for Wireless Communications / Edited by George Tsoulos. – USA, FL, Boca Raton : CRC Press, 2006. – 378 p.
5. Габидулин, Э. М. Кодирование в радиоэлектронике / Э. М. Габидулин, В. Б. Афанасьев. – М. : Радио и связь, 1986. – 176 с.
6. MIMO-OFDM Wireless Communication with Matlab / Y. S. Cho [et al.]. – John Wiley @Sons (Asia) Pte.Ltd, 2010. – 457 p.
7. Monteiro, F. Lattices in MIMO Spatial Multiplexing: Detection and Geometry / F. Monteiro. – Department of Engineering University of Cambridge, 2012. – 196 p.
8. Ермолаев, В. Т. Адаптивная пространственная обработка сигналов в системах беспроводной связи / В. Т. Ермолаев, А. Г. Флакман. – Нижний Новгород, 2006. – 99 с.
9. Прокис, Д. Цифровая связь / Д. Прокис ; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 2000. – 797 с.
10. Скляр, Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр ; пер. с англ. – М. : Вильямс, 2003. – 1104 с.
11. Space-Time Processing for MIMO Communications / Ed. : A. V. Gershman, N. D. Sidoropoulos. – Wiley&Sons, 2005. – 357 p.
12. Vucetic, B. Space-Time Coding / B. Vucetic, J. Yuan. – Wiley, 2003. – 301 p.
13. Oesges, C. MIMO Wireless Communications. Channels. Techniques and Standards for Multi-Antenna, Multi-User and Multi-Cell Systems / C. Oesges, B. Clerckx. – U.K. : Academic Press, 2013. – 733 p.
14. Alamouti, S. M. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications / S. M. Alamouti // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1998. – Vol. 16, №8. – P. 1451–1458.
15. Вишнеvский, В. М. Энциклопедия WiMAX. Путь к 4G / В. М. Вишнеvский, С. Л. Портной, И. В. Шанхнович. – М. : Техносфера, 2009. – 472 с.
16. Hassibi, B. On the Sphere Decoding Algorithm I. Expected Complexity / B. Hassibi, H. Vikalo // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2005. – Vol. 53, №8. – P. 2806–2818.
17. Воеводин, В. В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 544 с.

Учебное издание

Саломатин Сергей Борисович

**КОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ В СЕТЯХ
ПОДВИЖНОЙ СВЯЗИ**

ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*

Корректор *Е. И. Герман*

Компьютерная правка, оригинал-макет *М. В. Касабуцкий*

Подписано в печать 27.09.2017. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,77. Уч-изд. л. 4,5. Тираж 70 экз. Заказ 389.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.

ЛП №02330/264 от 14.04.2014.

220013, Минск, П. Бровки, 6