ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ MATHEMATICA В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Мокеева Ольга Александровна
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Клингер Светлана Александровна
кандидат физико-математических наук,
доцент

***Аннотация**. В статье рассматривается использование математических пакетов в учебном процессе. Приведены решения задач по математическим дисциплинам с использованием системы Mathematica. Компьютерная поддержка практических и лекционных занятий приносит результат при изучении некоторых тем, которые требуют сложных графических иллюстраций, трудоемких вспомогательных вычислений; позволяет провести занятие на более качественном уровне; экономит время, которое тратится на громоздкие вычисления и построения.*

***Ключевые слова:** информационные технологии, мультимедийная презентация, математические пакеты, система Mathematica, двойной интеграл, симплексный метод.*

Активное использование информационных технологий в процессе обучения является неотъемлемой частью современного образования. Внедрение компьютерных средств и технологий обучения способствуют повышению эффективности образовательного процесса и способствует формированию высококвалифицированных востребованных профессионалов. Правильное использование в учебном процессе компьютера, позволяет осуществлять учебный процесс в новых условиях.

Эффективность воздействия учебного материала на студенческую аудиторию во многом зависит от степени и уровня иллюстративности устного материала. Мультимедийная презентация наиболее оптимально и эффективно соответствует дидактической цели занятия. Использование презентаций позволяет экономить время, не тратя его на лишнее повторение пройденного материала; акцентировать внимание студентов на значимых моментах излагаемого материала и создавать наглядные эффектные образы в виде схем, диаграмм, графических композиций и т. п. Для решения разнообразных задач и визуализации данных можно использовать математические пакеты: Maple, MathCAD, MathLAB, Mathematica и др. Они имеют существенные различия, но позволяют освободить от трудоемких операций при решении задач и сократить время получения результата. Например, система Mathematica проводит сложные символьные преобаразования и является одной из самых мощных и эффективных компьютерных математических систем. С ее помощью можно решать задачи линейной алгебры, математического анализа, задачи теории чисел и статистики, дискретной математики, линейного программирования, а также проводить вычисления с любой заданной точностью, т. е можно использовать как «калькулятор». Следует отметить, что сильной стороной данной системы является развитая двух- и трехмерная графика, которая применяется для вычерчивания кривых и изображения поверхностей по их уравнениям, можно создавать собственные интерактивные графики и анимационные модели. Использование системы Mathematica в учебном процессе позволяет делать изложение материала по изучаемым математическим дисциплинам более понятным, наглядным, интересным и экономит время при выполнении рутинных трудоемких операций.

Рассмотрим решение некоторых задач с применением системы Mathematica 9.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, где D – область, ограниченная линиями: $x=0,\ y=\frac{3}{2}x\ (x>0)\ \ y=4-(x-1)^2$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых $y=4-(x-1)^2,\ y=\frac{3}{2}x$. Для построения графиков функций одного аргумента в пакете Mathematica предусмотрена функция $Plot[\{f_1(x), f_2(x), ...\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$ (рис. 1).

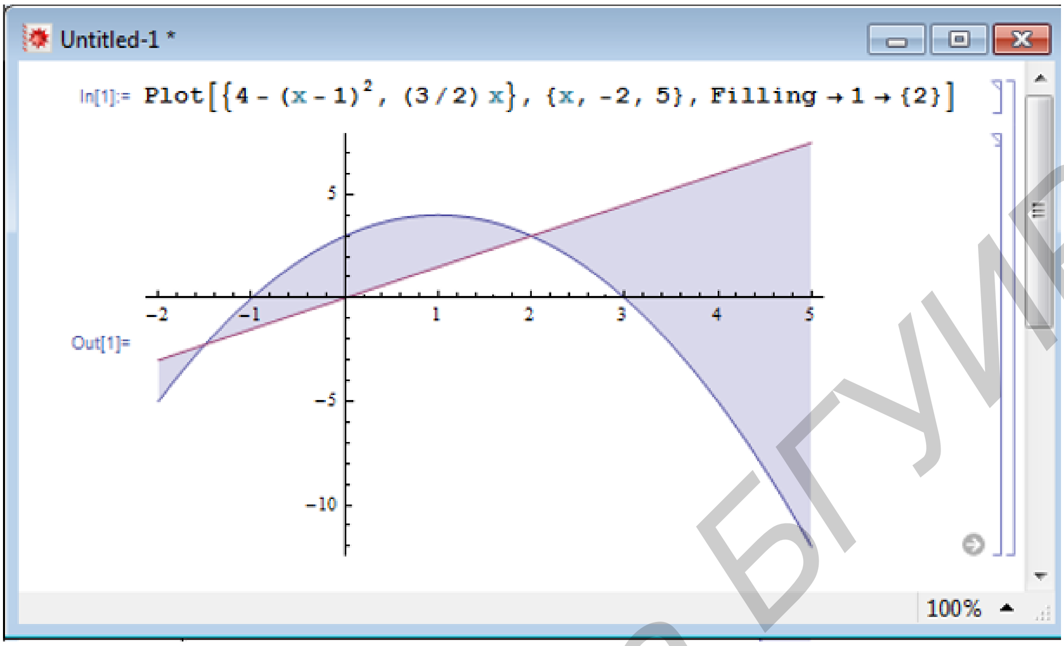


Рис. 1

На рис. 1 видим $x_1=-\frac{3}{2}, x_2=2$. Но иногда по рисунку сложно точно определить значения. Поэтому для нахождения точек пересечения кривых $y=4-(x-1)^2,\ y=\frac{3}{2}x$ решим систему уравнений: $\begin{cases} y=4-(x-1)^2, \\ y=\frac{3}{2}x, \end{cases} \Rightarrow$ решим уравнение $4-(x-1)^2-\frac{3}{2}x=0$. Для символьного решения уравнения используется функция $Solve$, которая имеет два обязательных аргумента: первым аргументом является уравнение, а вторым – искомая переменная. Оператор /. (слеш и точка) означает «заменить» (рис. 2).

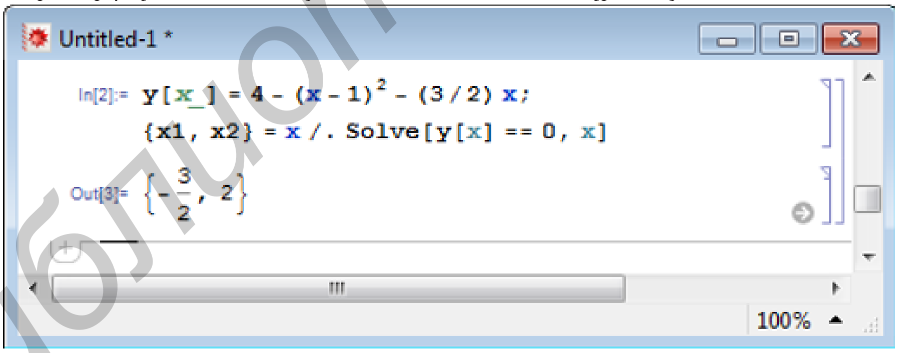


Рис. 2

На рис. 2 корни этого квадратного уравнения: $x_1=-\frac{3}{2}, x_2=2$. Так как по условию $x>0$, то подходит только x=2, следовательно, $0<x<2$. При $x=2,\ y=\frac{3}{2}\cdot 2=3$. Линии пересекаются в I четверти $(x>0)$ в точке $(2;3)$.

Для построения области D, ограниченной параболой $y=4-(x-1)^2$, прямой $y=\frac{3}{2}x\ (x>0)$ и осью *Oy (x=0)* в система Mathematica используем функцию $Plot[\{f_1(x), f_2(x)\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}, Option]$ (рис. 3).

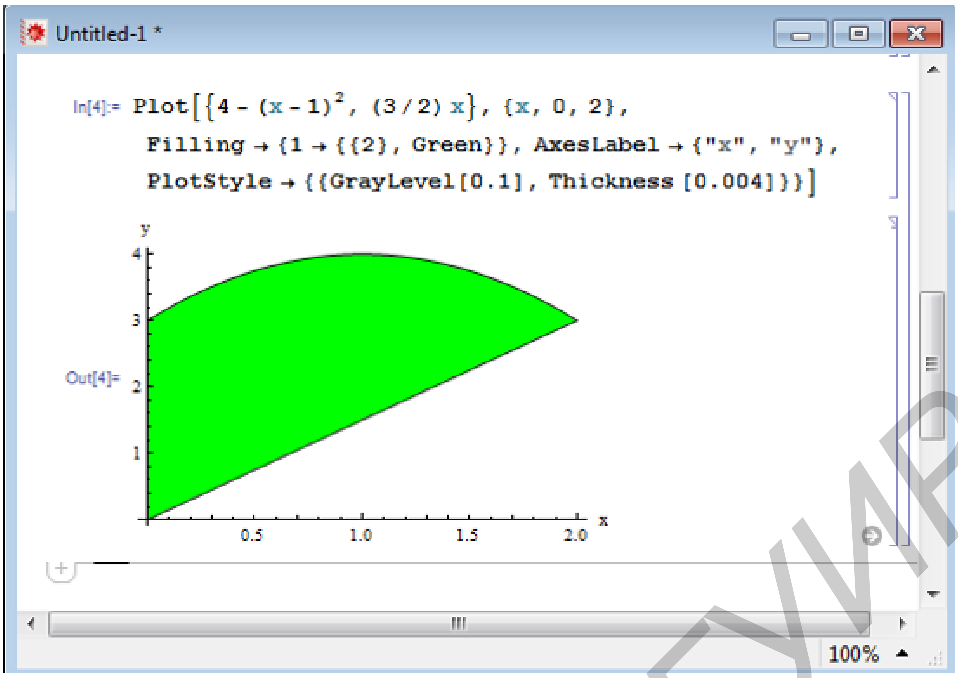


Рис. 3

Объясним записанную функцию на рис. 3. Для точной настройки графиков Mathematica использует специальные опции графических функций.

Для создания надписей координатных осей используется опция *AxesLabel*. После нее указывается список, содержащий в кавычках две надписи: одну для оси *Ox* и другую для оси *Oy*. По умолчанию на каждой из осей наносятся метки, указывающие используемый масштаб. Метки не будут изображаться на осях, если указать опции $Ticks \to None$. С помощью опции *GridLines* наносится координатная сетка.

Опция *PlotStyle* позволяет задавать толщину, цвет, стиль кривых, изображающие область. Данная опция включает список директив:

$Thickness\,[l]$ – устанавливает толщину l, заданную как отношение ширины линии к ширине всего графика;

$GrayLevel\,[s]$ – определяет цвет линии, аргумент S изменяется от 0 до 1;

$Dashing\,[\{d_1, d_2, ...\}]$ – изображает линию пунктиром; $d_1, d_2, ...$ – длины изображаемых и неизображаемых сегментов кривой в относительных единицах.

Для каждой из построенных кривых можно задать свой стиль.

Для построения графиков с заполненными областями между кривыми используют опцию *Filling*, с ее помощью задается также область между кривой и осью (*Axis*), между кривой и нижней границей графика (*Bottom*).

По условию необходимо заполнить область между кривым $y = 4 - (x-1)^2$ и $y = \frac{3}{2}x\ (x > 0)$, поэтому записываем $Filling \to \{1 \to \{2\}\}$. Цвет заполнения, например, зеленый (*Green*) определяется записью: $Filling \to \{1 \to \{\{2\}, Green\}\}$.

Рассмотрим два способа.

1) Рассмотрим сначала область *D* как правильную область в направлении оси *Oy* (рис. 4).

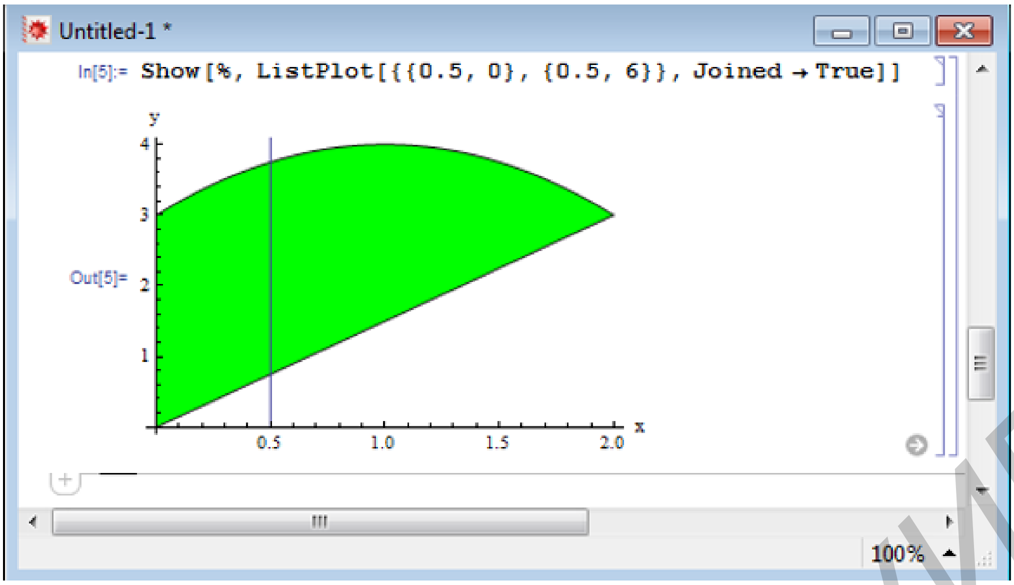


Рис. 4

На рис. 4 использовали функцию $ListPlot[\{\{x_1, y_1\}\ \{x_2, y_2\}\}]$ для построения прямой, данная функция изображает точки и соединяет их, указывая опцию $Joined \to True$. Для отображения нескольких графических объектов используем функцию $Show[g1, g2, ...]$. Так как на рис. 3 построили область, то воспользовались символом %, который означает ссылку на предыдущее действие.

Линия входа в область D – прямая $y = \frac{3}{2}x$, линия выхода из D – парабола $y = 4 - (x-1)^2$. Переменная x в области D изменяется от 0 до 2.

Итак, от двойного интеграла перейдем к повторному, используя формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Вычисление повторного интеграла начинается с вычисления внутреннего интеграла по переменной y.

$$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} (x+y)\,dy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} (x+y)\,dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left(xy \Big|_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} + \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(x\left(4-(x-1)^2\right) - x\cdot\frac{3}{2}x + \frac{\left(4-(x-1)^2\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2} \right) dx = \ldots =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-x^3 - \frac{37}{8}x^2 + 11x + 4 + \frac{(x-1)^4}{2} \right) dx =$$

$$= -\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{37}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 11\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 4x\Big|_0^2 + \frac{(x-1)^5}{10}\Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{16}{4} - \frac{37}{8}\cdot\frac{8}{3} + 22 + 8 + \frac{1}{10} - \frac{(0-1)^5}{10} = 26 + \frac{1}{5} - \frac{37}{3} = \frac{390+3-185}{15} = \frac{208}{15}.$$

Вычислить этот интеграл можно быстро в системе Mathematica с помощью функци $Integrate[f, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}, \{x, y_{\min}, y_{\max}\}]$, здесь первым указывается интервал изменения той переменной, интегрирование по которой производится в последнюю очередь (рис. 5).

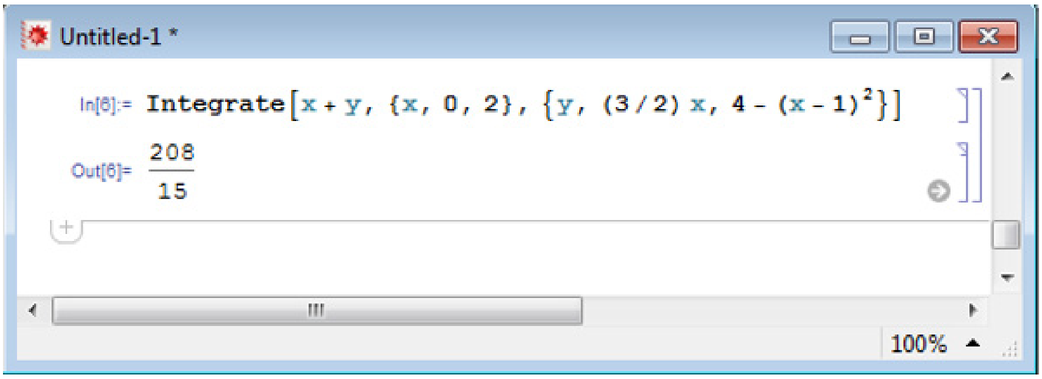


Рис. 5

2) Если рассматривать область D как правильную область в направлении оси Ox (рис. 6), то для перехода к повторным интегралам необходимо разбить ее прямой y=3 на две области для того, чтобы в пределах каждой из них линия входа (так же, как и линия выхода) определялась одним и тем же уравнением. Для дополнительного построения прямой y=3, добавим 3 к первому аргументу функции *Plot*.

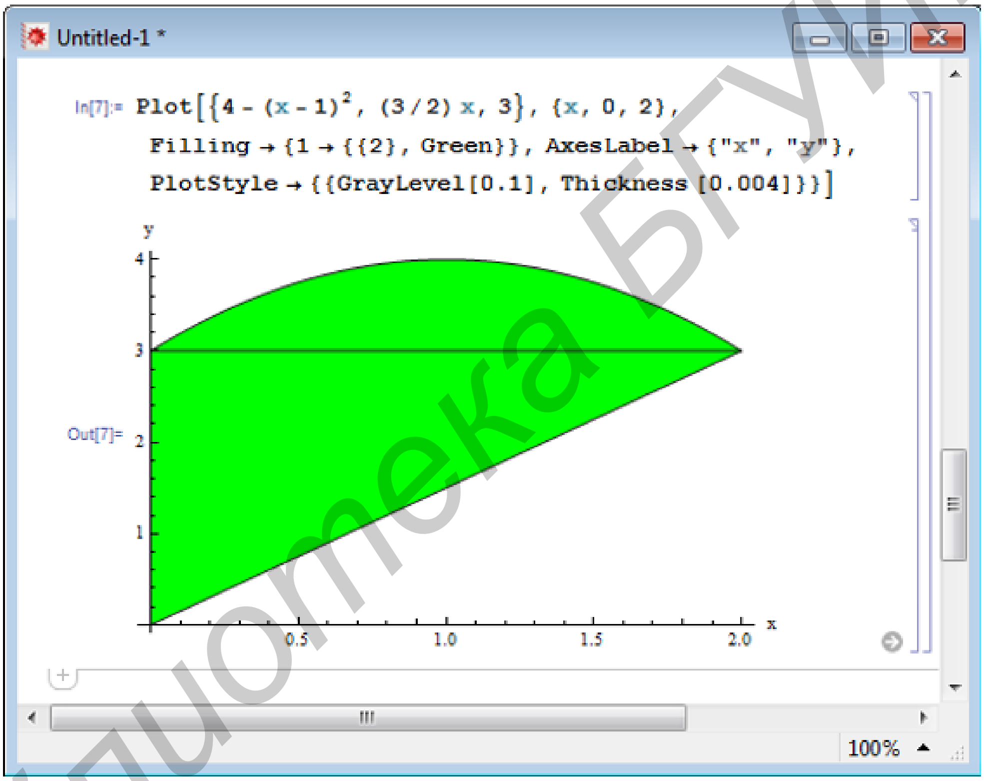


Рис. 6

Область D при любом $y \in [0;3]$ ограничена слева прямой x=0, справа прямой $x = \frac{2}{3} y$. При любом $y \in [3;4]$ ограничена слева и справа дугами парабол $x_1 = 1 - \sqrt{4-y}$, $x_2 = 1 + \sqrt{4-y}$. Оба этих уравнения получены из уравнения параболы $y = 4-(x-1)^2$, разрешенного относительно переменной x: $(x-1)^2 = 4 - y \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{4-y}$.

В соответствии со свойством аддитивности двойного интеграла $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$ представим двойной интеграл как сумму двух повторных с внешним интегрированием по y.

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^3 dy \int_0^{\frac{2}{3}y} (x+y)dx + \int_3^4 dy \int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} (x+y)dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{2}{3}y} (x+y)dx \right) dy + \int_3^4 \left(\int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} (x+y)dx \right) dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{2}{3}y} + yx\Big|_0^{\frac{2}{3}y} \right) dy + \int_3^4 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} + yx\Big|_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} \right) dy = \int_0^3 \left(\frac{\left(\frac{2}{3}y\right)^2}{2} + y\cdot\frac{2}{3}y \right) dy +$$

$$+ \int_3^4 \left(\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{4-y})^2 - (1-\sqrt{4-y})^2\right) + y\left((1+\sqrt{4-y}) - (1-\sqrt{4-y})\right) \right) dy =$$

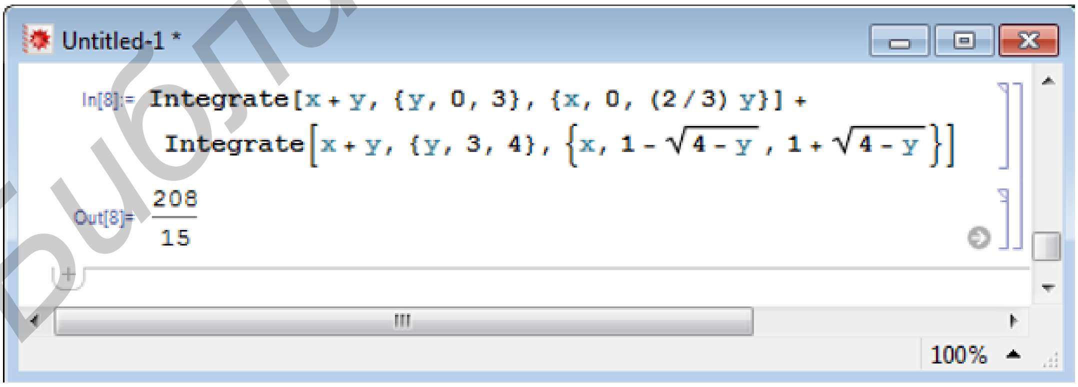
$$= \int_0^3 \frac{8}{9} y^2 dy + \int_3^4 2\sqrt{4-y}\,dy + \int_3^4 2y\sqrt{4-y}\,dy =$$

$$= \frac{8}{9}\int_0^3 y^2 dy - 2\int_3^4 (4-y)^{\frac{1}{2}} d(4-y) + \left| \begin{array}{l} \sqrt{4-y} = z,\ 4-y = z^2, \\ y = 4-z^2,\ dy = -2zdz, \\ z(3) = 1,\ z(4) = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{8}{9}\frac{y^3}{3}\Big|_0^3 - 2\frac{(4-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_3^4 - 2\int_0^1 (4-z^2)z(-2z)dz + C =$$

$$= 8 + \frac{4}{3} + 16\frac{z^3}{3}\Big|_0^1 - 4\frac{z^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{28}{3} + \frac{16}{3} - \frac{4}{5} = \frac{208}{15}.$$

В системе Mathematica:



Очевидно, что расстановка пределов интегрирования первым способом быстрее приводит к ответу.

Пример 2. Симплексным методом решить следующую задачу:

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 \quad (\max);$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3})$$

Решение. Для того, чтобы записать задачу в форме жордановой таблицы, приведем ее к канонической форме. Для этого в левую часть первого неравенства вводим дополнительную переменную x_4 со знаком

«+», а в левую часть второго неравенства — дополнительную переменную x_5 со знаком «–». В целевую функцию, дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю. Получаем

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \quad (\max);$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,5})$$

Теперь записываем задачу (табл. 1) в форме жордановой таблицы.

Таблица 1

		1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
	$x_4 =$	6	-1	4	-2	0
	$0 =$	6	1	1	2	-1
→	$0 =$	4	2	-1	$\langle 2 \rangle$	0
	$f =$	0	-1	-2	1	0

Поскольку переменная x_4 входит только в первое уравнение, причем с коэффициентом 1, ее можно отнести к базисным, и именно поэтому в табл. 1 первое уравнение записано не в форме 0-строки, а в виде, разрешенном относительно x_4. Это позволяет сократить решения примера на одну таблицу.

Таблица 2

		1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_5$
	$x_4 =$	10	1	3	0
→	$0 =$	2	-1	$\langle 2 \rangle$	-1
	$x_3 =$	2	1	$-\frac{1}{2}$	0
	$f =$	-2	-2	$-\frac{3}{2}$	0

Сделав два шага жордановых исключений (таблицы 1 и 2), приходим к табл. 3.

Таблица 3

		1	$-x_1$	$-x_5$
→	$x_4 =$	7	$\left\langle \frac{5}{2} \right\rangle$	$\frac{3}{2}$
	$x_2 =$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	$x_3 =$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
	$f =$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{3}{4}$

Из табл. 3 получаем начальный опорный план $x_0 = \left(0; 1; \frac{5}{2}; 7; 0\right)$, $f(x_0) = -\frac{1}{2}$. План этот не оптимален, так как в f-строке табл. 3 имеются отрицательные элементы. Для очередного шага разрешающим возьмем первый столбец, так как в f-строке $\max\left(\left|-\frac{11}{4}\right|; \left|-\frac{3}{4}\right|\right) = \frac{11}{4}$. Разрешающей будет первая строка, ибо $\min\left(\frac{7}{\frac{5}{2}}; \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}}\right) = \frac{7}{\frac{5}{2}}$ соответствует именно ей. Преобразовывая табл. 3 шагом жорданова исключения с разрешающим элементом $\frac{5}{2}$, приходим к табл. 4.

Получаем опорный план $x_1 = \left(\frac{14}{5}; \frac{12}{5}; \frac{2}{5}; 0; 0\right)$, $f(x_1) = \frac{36}{5}$., который является оптимальным, поскольку в f-строке нет отрицательных элементов.

Таблица 4

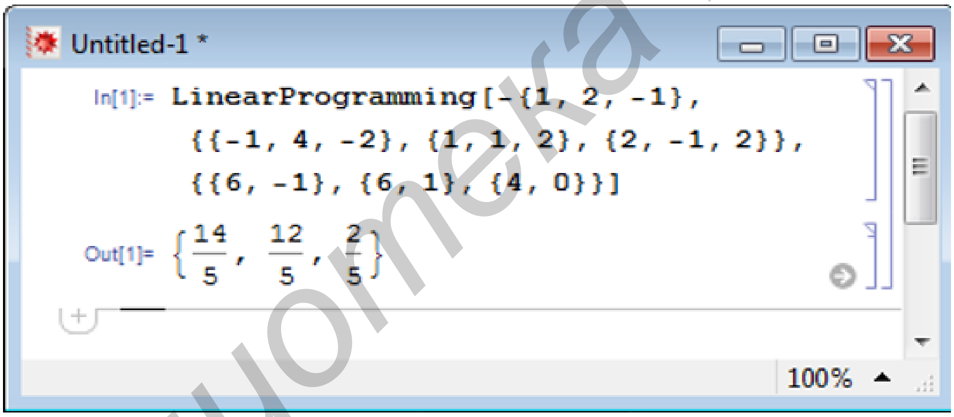
	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_1 =$	$\frac{14}{5}$		
$x_2 =$	$\frac{12}{5}$		
$x_3 =$	$\frac{2}{5}$		
$f =$	$\frac{36}{5}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{9}{10}$

Итак, $x_{опт.} = \left(\frac{14}{5};\frac{12}{5};\frac{2}{5};0;0\right)$, $f_{\max} = \frac{36}{5}$.

Система Mathematica имеет встроенные функции решения задач математического программирования. Для примера используем функцию *LinearProgramming[c,a,b]*, где *c* – минимизируемая величина, *a* – ограничения, *b* – величина ограничений. Данная функция ищет вектор $x = (x_1, x_2, ... x_n)$, который минимизирует скалярное произведение *xc* при условиях $ax \geq b, x \geq 0$.

Если дана задача на максимум, то необходимо поменять целевую функцию на минимум. Если ограничения вида ≤, =, а не ≥, то командой *LinearProgramming[c,a,*{{b1,s1},...}], где в зависимости от типа ограничения меняется индекс si. Если знак =, то si = 0, если знак вида ≤, то "–1", если знак ≥, то можно ничего не писать.

Итак, полученный оптимальный план можно проверить с помощью системы Mathematica:



Пример 3. Найти остаток от деления числа 293^{175} на число 48.

Решение. Для нахождения остатка воспользуемся свойствами сравнений.

$$293 \equiv 5(\mathrm{mod}\,48),\ 293^{175} \equiv 5^{175}(\mathrm{mod}\,48).$$

Так как $5^3 \equiv 29(\mathrm{mod}\,48)$, то $5^{175} = 5\cdot(5^3)^{58} \equiv 5\cdot 29^{58}(\mathrm{mod}\ 48)$. Поскольку $29^2 \equiv 25(\mathrm{mod}\,48)$, то $5\cdot(29^2)^{29} \equiv 5\cdot 25^{29}(\mathrm{mod}\ 48)$. Так как $25^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,48)$, то $5\cdot(25^2)^{14}\cdot 25 \equiv 5\cdot 1^{14}\cdot 25(\mathrm{mod}\ 48)$.

Итак, $293^{175} \equiv 125(\mathrm{mod}\,48)$.

Поскольку $125 \equiv 29(\mathrm{mod}\ 48)$, то $293^{175} \equiv 29(\mathrm{mod}\,48)$, т. е. остаток при делении числа 293^{175} на число 48 равен 29.

В системе Mathematica с помощью функции $Mod[293\text{^}175,48]$ получим ответ 29.

Закреплять теоретический материал на лекции можно решая задачи с использованием математических пакетов и объяснением на классической доске главных моментов новой темы. На практических занятиях желательно использовать математические пакеты после овладения традиционными способами вычисления. Предлагая обучающимся задания, в которых необходимо использование математических пакетов, предоставляем им возможность овладения материалом дисциплины и формируем логику действий.

Использование компьютера в учебном процессе способствует: формированию деятельностного подхода, дифференциации и индивидуализации учебного процесса, стимулированию познавательной активности студентов, осуществлению самоконтролю, усилению мотивации обучения. Творческий подход к построению занятий, его неповторимость, насыщенность многообразием приемов, методов и форм могут обеспечить эффективность учебного процесса.