ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

Кузнецов В. П., Хаджинова Н. В.
Кафедра систем управления, кафедра информационных технологий автоматизированных систем
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: khajynova@bsuir.by

Рассматриваются динамические модели управнения производством. Вводится понятие динамической производственной функции. Предлагается линеаризация уравнений замкнутой системы и получение линейных уравнений. Рассматриваются как непрерывные, так и дискретные системы.

При описании производственных процессов, социальных и экономических явлений широкое применение находят производственные функции, под которыми понимают функции, связывающие факторы производства и объемы выпускаемой продукции. Факторы производства (трудовые, материальные, финансовые и т.п. ресурсы) можно рассматривать как входные управляющие переменные, а саму производную функцию, как математическую модель объекта управления, выходной координатой которой является объем выпускаемой продукции. Производственные функции применяются как на микроуровне (отдельные технологические процессы производства, цех, завод), так и на макроуровне (отдельные отрасли, регионы, народное хозяйство страны). Наиболее часто используются двухфакторные модели производственных функций

$$y = f(x_1, x_2),$$

где x_1, x_2 - факторы производства, представляющие собой обобщенные факторы труд и капитал; y- объем выпускаемой продукции.

В литературе обычно рассматриваются статические модели производства, когда координаты x_1, x_2, y – установившиеся значения переменных. На практике при описании производственных процессов следует учитывать их динамические свойства: инерционность, запаздывание и т.п. С этой точки зрения предлагается рассматривать модели производственных функций в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (непрерывные модели), разностных уравнений (дискретные модели) и дифференциально-разностных уравнений (модели с запаздыванием). Итак, модель

$$\Phi(y, x_1, x_2) = 0$$

представляет собой один из видов указанных выше уравнений и является моделью объекта управления.

Будем рассматривать производственный процесс как систему управления, тогда в соответствии с общей теорией управления в системе необходима управляющая часть (регулятор), который обязательно содержит элемент, сравнения выходной координаты у задающего воздействия υ. Уравнение элемента сравнения имеет вид

$$e = \upsilon - y,$$

где e - ошибка уравнения.

Будем полагать, что регулятор описывается уравнением

$$\Phi_p(x_1, x_2, y, e) = 0,$$

которое является дифференциальным, разностным или дифференциально-разностным уравнением.

Таким образом, динамика системы управления производством описывается системой уравнений

$$\Phi_0(y, x_1, x_2) = 0, \Phi_p(x_1, x_2, y, e) = 0, e = \upsilon - y$$

соответсвующего типа.

Упрощением полученных моделей является их линеаризация и переход к линейным моделям. В настоящей работе рассмотрены два возможных вида моделей непрерывные и дискретные (импульсные) в предположениях, что объект управления описывается линейным дифференциальным уравнением первого или второго порядка, а законы регулирования являются простейшими: пропорциональным, интегральным и т.п.

Так как объект управления имеет две управляющие координаты x_1, x_2 и один выход y, то возникает задача выбора x_1, x_2 для заданного y, которая является многозначной. Предлагается процедура выбора координат на базе максимизации получаемой прибыли P от реализации произведенной продукции y. Величину прибыли определяет функция прибыли

$$P = p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2,$$

где p_0, p_1, p_2- рыночные цены соответсвенно производственной продукции, первого и второго фактора производства, а $f(x_1, x_2)$ является производственные функцей. Рассматриваются линейные, функции Кобба-Дугласа, производственные функции с постоянной эластичностью замещения.

Максимизация функции p производится обычным путем получения максимума функции двух переменных. В результате такой операции получаем искомые постоянные величины x_1, x_2. Подстановка их в уравнения $\Phi_0(y_1, x_1, x_2) = 0$ и $\Phi_p(x_1, x_2, y, e) = 0$ позволяет найти установившиеся значения всех координат системы. Далее относительно полученных установившихся значений проводится обычная линеаризация путем разложения в ряд Тейлора. В результате приходим к линейной модели всей системы.

После линеаризации получим систему уравнений в изображениях следующего вида $Y(s) = W_1(s)X_1 + W_2(s)X_2, X_1(s) = W_1^{'}(s)E(s), X_2(s) = W_2{'}(s)E(s), E(s) = V(s) - Y(s)$.

В качестве примера пусть $W_1(s) = k_1/(T_1S+1), W_2 = k_2/(T_2S+1), W_1^{'} = k_1^{'}/S, W_2^{'} = k_2^{'}/S, T_1 = T_2 = T$.

При таких параметрах при $T > 0$, $k = k_1k_1^{'} + k_2k_2^{'} > 0$ система будет всегда устойчива. Можно показать, что при $T_1 \neq T_2$ в системе возможны неустойчивые режимы.

Далее рассматриваются дискретные динамические модели в развитии работ авторов [1]. Данная работа является развитием работы авторов [1]. В отличие от [1] здесь предполагается, что регулятор является дискретным. Управляющее воздействие поступает в дискретные моменты времени t_i, которые в общем случае являются не равноотстоящими. При этом имеем частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ). В более простом случае управляющие воздействия поступают через равноотстоящие моменты времени $t_1 = iT$, $i = 0, 1, 2, \dots$, Т - период дискретизации.

Структура дискретной (импульсной) системы следующая. Сигнал ошибки $e = (v-y)$ поступает на импульсный элемент, который выдает последовательность импульсов постоянного периода Т и постоянной длительности τ, амплитуда которых $h_k = e(kT)$. Далее эти импульсы поступаю на регулятор в первом канале с передаточной функцией $W_1^{'}(s)$, которой вырабатывает сигнал x_1 и далее на звено с передаточной функцией $W_1(s)$. Аналогично во втором канале имеем регулятор с передаточной функцией $W_2^{'}(s)$ и далее звено с передаточной функцией $W_2(s)$. Таким образом, в прямой цепи после импульсного элемента и до выхода системы y имеем общую передаточную функцию $W(s) = W_1^{'}W_1 + W_2^{'}W_2$. Далее применяя известные методы из теории импульсных систем находим дискретную передаточную функцию прямой цепи $W(z) = Z\{W(s)\}$.

Дальнейший анализ системы как разомкнутой, так и замкнутой проводим известными методами теории линейных импульсных систем. Пусть, например, $W_1^{'} = K_1^{'}/S$, $W_1 = K_1/(T_1S + 1)$, $W_2^{'} = K_2^{'}/S$, $W_2 = K_2/(T_2S + 1)$. Тогда для простейшего случая $T_1 = T_2 = \theta$ получим дискретную передаточную функцию в следующем виде:

$$W|z| = \alpha T \left[\frac{\gamma}{z-1} + \frac{d(1-d^{-\gamma})\theta}{T(z-d)} \right],$$

где $\alpha = K_1^{'}K_1 + K_2^{'}K_2$, $\gamma = \tau/T$, $d = e^{-\frac{T}{\theta}}$.

Далее несложно получить результат по анализу устойчивости и оценки качества дискретной системы. Обсуждаются результаты работы системы при $\tau << T$, а также при $\tau = T$.

1. Кузнецов В. П., Хаджинова Н. В. Замкнутые динамические системы управления производственными процессами. //МНТК Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов. Мн. БГТУ, 2012.