СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КОНТУРА ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЯ ПО ЛИНЕЙНОЙ ОШИБКЕ НАВЕДЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ

Еромин А. М., Шабан С. А., Сидорович О. В., Мороз А. Н.
Кафедра систем автоматического управления, кафедра тактики и вооружения войсковой противовоздушной обороты, Учреждение образования «Военная академия Республики Беларусь»
Минск, Республика Беларусь
E-mail: aeromin@yandex.ru, serg-shab@mail.ru

Рассматривается один из подходов к решению задачи синтеза оптимального контура телеуправления по линейной ошибке наведения, основанный на использовании априорной информации об объекте управления с ограничением на управление.

Введение

Различные аспекты теории синтеза оптимального управления рассмотрены в работах [1,2,3]. В работе [3] проводится синтез оптимального регулятора с траекторным управлением по линейной ошибке наведения, однако на управление не накладываются ограничения. В данной работе будет рассмотрен синтез оптимального управления с учетом ограничения действующего нормального ускорения ракеты и его влияние на параметры контура телеуправляемой ракеты.

Постановка задачи

Пусть для $t_0 < t < t_k$ задана совокупность измерений:

$$Z(t) = CX(t) + Nh(t),$$

а также модель управляемой системы:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + GU(t) + J\xi(t); \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где $C,\ N,\ F,\ G,\ J$ – матрицы заданных размерностей;
$h(t), \xi(t)$ – некоррелированные гауссовские процессы типа белого шума, со спектральными плотностями R и Q соответственно.

Требуется найти такое управление $U(t)$, которое является функционалом от $Z(t)$ и минимизирует функционал [2]:

$$I = \frac{1}{2}M\left\{\int_{t_0}^{t_k}[X^T(t)AX(t)+ +U^T(t)KU(t)]dt\right\}, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix}k & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Первое подынтегральное слагаемое в (2) определяет требование минимума дисперсии ошибки наведения вдоль траектории полета ракеты ($x_1(t) = h(t)$), а второе слагаемое является ограничением действующего нормального ускорения ракеты с коэффициентом штрафа на управление:

$$k = \frac{h^2_{dop}}{W^2_{pmax}},$$

где h_{dop} и W_{pmax} – допустимое значения финальной ошибки наведения и максимальное значение располагаемого ускорения соответственно.

Синтез оптимального управления

Используя известные методы [1,2], можно найти управление $U(t)$, минимизирующее (2), путем совместного решения системы (1) и уравнений Эйлера – Лагранжа [1]:

$$\dot{\lambda}^T(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial X(t)} =$$

$$-AX(t) - F^T\lambda(t); \quad \lambda^T(t_k) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial U(t)} = KU(t) + G^T\lambda = 0, \quad (4)$$

где

$$H(t) = X^T(t)AX(t) + U^T(t)KU(t)+$$

$$\lambda^T(FX(t) + GU(t) + J\xi(t).$$

Из уравнения (4) следует:

$$U(t) = -K^{-1}G^T\lambda.$$

В силу линейности уравнений (1) и (3) множители Лагранжа можно выразить через вектор состояния X(t) соотношением [1]:

$$\lambda(t) = S(t)X(t),$$

Таким образом, управление оказывается связанным с математическим ожиданием вектора состояния:

$$U(t) = -d(t)\hat{X}(t), \quad (7)$$

где

$$d(t) = -K^{-1}G^TS(t), \quad (8)$$

а матрица $S(t)$ определяется путем решения уравнений Риккати [1]:

$$\dot{S}(t) = -S(t)F - F^TS(t)+$$

$$+S(t)GK^{-1}G^TS(t) - A; \qquad S(t_k) = S_k. \qquad (9)$$

Отметим, что $\hat{X}$ есть оценка $X(t)$ по методу максимума правдоподобия, т.е. это математическое ожидание $X(t)$ при условии, что имеются измерения до момента t [1].

Уравнения (7),(8) и (9) при известном $\hat{X}(t)$ позволяют однозначно определить оптимальное управление $U(t)$.

Для определения оценки $\hat{X}(t)$ проведем анализ уравнений оптимальной линейной фильтрации. Уравнения оптимального фильтра в векторной форме запишется в виде [1,2]:

$$\dot{\hat{X}}(t) = F\hat{X}(t) + GU(t) + B(Z(t) -$$

$$-N\hat{X}(t)); \qquad \hat{X}(t_0) = 0, \qquad (10)$$

где матрица оптимальных коэффициентов фильтрации:

$$B(t) = P(t)C^T(NRN^T)^{-1}, \qquad (11)$$

$P(t)$ – матрица ошибок оценивания вектора состояний, определяемая решением уравнений Риккати [1]:

$$\dot{P}(t) = FP(t) + P(t)F^T - P(t)C^T(NRN^T)^{-1}CP(t) +$$

$$+JQJ^T; \qquad P(t_0) = P_0. \qquad (12)$$

Определив в уравнениях (8) и (11) произведения матриц, можно векторные уравнения (7) и (10) представить в скалярной форме:

$$\begin{cases} U(t) = \frac{s_{21}(t)}{k}\hat{x}_1(t) + \frac{s_{22}(t)}{k}\hat{x}_2(t) + \frac{s_{23}(t)}{k}\hat{x}_3(t); \\ \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + \frac{p_{11}(t)}{R}(z(t) - \hat{x}_1); \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) - W_p(t) + \frac{p_{21}(t)}{R}(z(t) - \hat{x}_1); \\ \dot{\hat{x}}_3(t) = -\frac{1}{T}\hat{x}_3(t) + \frac{p_{31}(t)}{R}(z(t) - \hat{x}_1). \end{cases}$$

Представив матричные уравнения (9) и (12) в виде систем уравнений, определяющих установившиеся значения s_{21}, s_{22}, s_{23} и значения дисперсий оценок p_{11}, p_{21} и p_{31} и решив их получим:

$$s_{21} = \sqrt{k}; \; s_{22} = \sqrt[4]{4k^3}; \; s_{23} = \frac{(T + \sqrt[4]{4k})kT}{T\sqrt[4]{4k} + \sqrt{k} + T^2};$$

$$p_{11} \approx 2R\sqrt[6]{\frac{Q}{RT^2}} - \frac{R}{T}; \; p_{21} = \frac{p_{11}^2}{2R}; \; p_{31} = \sqrt{\frac{QR}{T^2}} - \frac{p21}{T}.$$

Структура оптимального контура телеуправления по линейной ошибке наведения, полученная из решения уравнений (7),(10), представленна на рисунке 1.

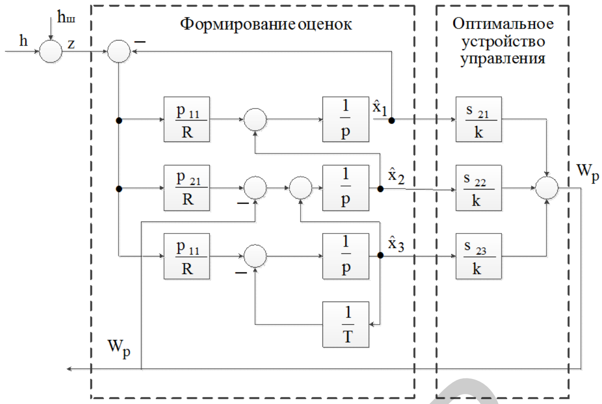

Рис. 1 – Структурная схема контура телеуправления

График зависимости коэффициента преобразования разомкнутого контура управления от изменения коэффициента штрафа на управление представлен на рисунке 2.

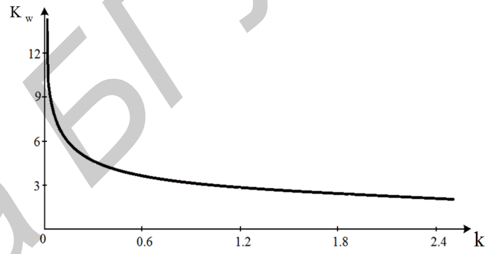

Рис. 2 – График зависимости коэффициента преобразования разомкнутого контура управления от изменения коэффициента штрафа на управление

Заключение

Рассмотрен один из подходов к решению задачи синтеза оптимального контура телеуправления по линейной ошибке наведения с ограничением на управление. Проведен анализ влияния ограничений на параметры контура телеуправления.

1. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо-ю-ши. – М. : Мир, 1972. – 545 с.
2. Кун, А. А. Основы построения систем автоматического управления: в 3 ч. / А. А. Кун, В. Ф. Лукьянов, С. А. Шабан. Под ред. А. А. Куна. – Минск: Издание академии, 2001. – 3 ч.
3. Беркс, П. П. Разработка структурной схемы оптимального регулятора с траекторным управлением по линейной ошибке наведения / П. П. Беркс // Математическая морфология. Математический и медико-биологический журнал [Электронный ресурс]. – 2011. – Т.10 – №1 – Режим доступа: http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-29-html/berks-2/berks.html – Дата доступа: 10.04.2013.