Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве пособия для специальностей,
закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2014

Библиотека БГУИР

УДК 517.3(076)
ББК 22.161.1я73
И73

А в т о р ы:
В. В. Цегельник, Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец, И. Е. Конюх,
Л. А. Конюх, М. А. Сафронова

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа
Белорусского государственного университета
(протокол №4 от 14.11.2013);

профессор кафедры высшей математики
учреждения образования «Белорусский государственный
экономический университет»,
доктор физико-математических наук, профессор А. И. Астровский

И73 **Интегральное** исчисление функций одной переменной. Дифференциальное исчисление функций многих переменных : пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2014. – 96 с.
ISBN 978-985-543-071-2.

В пособии приводятся задачи по разделам курса высшей математики: интегральное исчисление функций одной переменной и дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Предлагаются контрольные работы и задачи для самостоятельного решения. Пособие входит в состав методического комплекса вместе со сборниками задач в 10 частях.

УДК 517.3(076)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-985-543-071-2

© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2014

Библиотека БГУИР

Содержание

Библиотека БГУИР

Занятие 1
Комплексные числа

Пример 1

Даны комплексные числа $z_1 = 2+3i$ и $z_2 = 1-2i$. Найдите z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$.

$\triangle$ $z_1+z_2 = (2+3i)+(1-2i) = 3+i$;

$z_1 - z_2 = (2+3i)-(1-2i) = 1+5i$;

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(1-2i) = 2-4i+3i+6 = 8-i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i-6}{5} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i. \ \blacktriangle$$

Пример 2

Запишите комплексное число $z = \dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$ в алгебраической форме.

$$\triangle \ \frac{5+i}{(1+i)(2-3i)} = \frac{5+i}{2-3i+2i+3} = \frac{5+i}{5-i} = \frac{(5+i)^2}{(5-i)(5+i)} = \frac{25+10i-1}{26} =$$

$$= \frac{12}{13}+\frac{5}{13}i. \ \blacktriangle$$

Пример 3

Найдите действительные x и y, удовлетворяющие уравнению $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i) = 5+6i$.

$\triangle$ $6x+3xi-2i+1+x+2ix-iy+2y = 5+6i$,

$$\begin{cases} 6x+1+x+2y=5 \\ 3x-2+2x-y=6 \end{cases} \sim \left.\begin{cases} 7x+2y=4 \\ 5x-y=8 \end{cases}\right|_{2}, \quad 17x = 20, \quad x = \frac{20}{17}, \quad y = -\frac{36}{17}. \ \blacktriangle$$

Пример 4

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-(2+i)y = -7-5i, \\ ix-5y = -7+15i. \end{cases}$

$$\triangle \ \left.\begin{cases} 3x-(2+i)y = -7-5i \\ ix-5y = -7+15i \end{cases}\right|3i \quad (-2-16i)y = -52-26i;$$

$$y = \frac{26(2+i)}{2(1+8i)} = \frac{13(2+i)(1-8i)}{65} = 2-3i;$$

$ix = -7+15i+10-15i; \qquad x = -3i. \ \blacktriangle$

Библиотека БГУИР

Пример 5

Решите уравнение $z^2+|z|=0$.

$\triangle$ Пусть $z=x+iy$. Тогда $(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0$, откуда

$(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2})+2xyi=0$.

Следовательно,

$$\begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0, & \text{если} \quad x=0, \text{ то } y_1=0,\ y_2=1,\ y_3=-1. \\ 2xy=0, & \text{если} \quad y=0, \text{ то } x=0. \end{cases}$$

Таким образом, корнями данного уравнения являются числа $z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=-i$. ▲

Пример 6

Запишите комплексные числа в тригонометрической форме: $2,\ -3,\ -i,$ $1+i,\ \sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}$.

$\triangle$ $2=2(\cos 0+i\sin 0)$; $-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$;

$-i=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}-i\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$. ▲

Пример 7

Запишите в тригонометрической форме комплексное число $2i\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

$\triangle$ Рассмотрим два комплексных числа $z_1=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ и

$z_2=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}=1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

$|z_1|=2$ и $\arg z_1=\frac{\pi}{2}$; $|z_2|=1$ и $\arg z_2=-\frac{\pi}{5}$.

Так как $z=z_1\cdot z_2$, то $|z|=2\cdot 1=2$ и $\arg z=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}+2\pi k=\frac{3\pi}{10}+2\pi k$.

$z=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}+2\pi k\right)\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$. ▲

Библиотека БГУИР

Пример 8

Запишите в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{(-\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{-1-i}.$$

$\triangle$ Каждое из трех чисел представим в показательной форме:

$$z_1 = -\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}};$$

$$z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12} = \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = 1e^{-i\frac{7\pi}{12}};$$

$$z_3 = -1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Тогда $z = \dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot 1e^{-i\frac{7\pi}{12}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{12} + \frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\pi}$. ▲

Пример 9

Найдите модуль и аргумент числа $(1+i)^5$.

$\triangle$ Пусть $z_1 = (1+i)$. Тогда $|z_1| = \sqrt{2}$ и $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$; $|z| = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$ и $\arg z = 5\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Так как $-\pi < \arg z \le \pi$, то $\arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$. ▲

Пример 10

Вычислите $(\sqrt{3}+i)^{723} \cdot (i-1)^{358} : 2^{900}$.

$\triangle$ Запишем числа $\sqrt{3}+i$ и $i-1$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad i-1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Теперь по формуле Муавра находим

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{723} = 2^{723}\left(\cos\frac{723}{6}\pi + i\sin\frac{723}{6}\pi\right) = 2^{723}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{723}i;$$

$$(i-1)^{358} = 2^{173}\left(\cos\frac{1074}{4}\pi + i\sin\frac{1074}{4}\pi\right) = 2^{179}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{179}i.$$

Искомое произведение равно $2^{723}i \cdot 2^{179}i \cdot 2^{-900} = 4i^2 = -4$. ▲

Библиотека БГУИР

Пример 11

Вычислите $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}$.

$$\triangle\quad \frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}=\frac{1}{6^5 6}\left(\cos\frac{77}{12}\pi+i\sin\frac{77}{12}\pi\right)=\frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).\ \blacktriangle$$

Пример 12

Исходя из определения, вычислите $\sqrt{3-4i}$.

$\triangle$ Пусть $\sqrt{3-4i}=x+iy$, тогда $(x+iy)^2=3-4i$, или

$x^2-y^2+i2xy=3-4i$.

Получим систему

$$\begin{cases}x^2-y^2=3\\ 2xy=-4\end{cases}\sim\begin{cases}x^2-y^2=3\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\sim\begin{cases}x^2-\dfrac{4}{x^2}=3\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\sim\begin{cases}x^4-3x^2-4=0\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\sim\begin{cases}x^2=4\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\sim$$

$$\sim\begin{cases}x_1=2\\ y_1=-1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x_2=-2\\ y_2=1.\end{cases}$$

В результате получаем два значения квадратного корня $\sqrt{3-4i}=2-i$ и $\sqrt{3-4i}=-2+i$. $\blacktriangle$

Пример 13

Найдите все значения корня $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

$\triangle$ Записав комплексное число $-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме

$-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$, находим

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

Откуда

Библиотека БГУИР

$$u_0' = \sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right), \quad k=0.$$

$$u_1' = \sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right), \quad k=1.$$

$$u_2' = \sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\right), \quad k=2. \ \blacktriangle$$

Пример 14

Найдите все значения корня $\sqrt[4]{16i}$.

$\triangle$ Поскольку $16i = 16\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right), \quad k=0, 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right); \quad \omega_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right);$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right); \quad \omega_3 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 15

Изобразите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right) \geq 1$.

$\triangle$ ОДЗ: $z \neq 0$, $\displaystyle \frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}} = \frac{1}{x+iy}+\frac{2}{x-iy} = \frac{x-iy+2x+2iy}{x^2+y^2} = \frac{3x+iy}{x^2+y^2}$,

$$\frac{y}{x^2+y^2} \geq 1, \quad y \geq x^2+y^2, \quad x^2+y^2-y \leq 0, \quad x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Дополнительные задачи

1. Представьте в алгебраической форме комплексное число

$$z = \frac{13+12i}{6i-8}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}.$$

Ответ: $-\dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}i$.

2. Представьте в тригонометрической форме комплексное число

Библиотека БГУИР

$z = -3 + i$.

Ответ: $\sqrt{10}\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right) + i\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)\right)$.

3. Решите систему $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 - iz_2 = 2 - 3i. \end{cases}$

Ответ: $z_1 = \frac{13 - 33i}{37}$, $z_2 = \frac{12 + 35i}{37}$.

4. Используя формулу Муавра, выразите $\sin 4x$ и $\cos 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Ответ: $\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$;

$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$.

5. Найдите все значения $\sqrt[4]{-16}$.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\omega_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$,

$\omega_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $\omega_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

6. Найдите множество точек координатной плоскости z, для которой $|z + i - 2| \le 2$.

Ответ: множество всех точек круга радиусом 2 с центром в точке (2; –1).

Занятия 2–3
Непосредственное интегрирование. Метод подстановки, интегрирование по частям

Примеры

Найдите следующие интегралы:

1. $\int \frac{2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} + 5}{\sqrt{x}} dx$;
2. $\int (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})^3 dx$;
3. $\int 2^{3x} \cdot e^{2x} dx$;
4. $\int (\operatorname{tg}^2 x - 1) dx$;
5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;
6. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 8x - 7}{x^2 - 4} dx$;
7. $\int \frac{5x^2 + 2}{x^2(1 + 2x^2)} dx$;
8. $\int \cos(2x - 3) dx$;
9. $\int \sin^4 x \cos x dx$;
10. $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}}$;
11. $\int x(2x + 3)^9 dx$;
12. $\int \frac{\ln x dx}{x(1 - \ln x)^2}$;

Библиотека БГУИР

13. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$;

14. $\int \frac{dx}{e^x+1}$;

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x<-1$;

16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

17. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+7}$;

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+4x-x^2}}$;

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{14-6x-3x^2}}$;

20. $\int \frac{5x-2}{x^2+6x+17}dx$;

21. $\int \frac{3x-7}{x^2+4x+1}dx$;

22. $\int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$;

23. $\int x\sin 2x dx$;

24. $\int \arcsin x dx$;

25. $\int xe^{-3x}dx$;

26. $\int x\,\mathrm{arctg}\, x dx$;

27. $\int (x^2+3x+5)\cos 2x dx$;

28. $\int x^3\ln^2 x dx$;

29. $\int \cos(\ln x)dx$;

30. $\int e^{ax}\cos bx dx$.

△ 1. $\int \frac{2\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[4]{x}+5}{\sqrt{x}}dx = \int (2x^{1/6}-3x^{-1/4}+5x^{-1/2})dx = 2\cdot\frac{6}{7}x^{7/6} -$

$-3\cdot\frac{4}{3}x^{3/4} + +5\cdot 2x^{1/2}+C = \frac{12}{7}x^{7/6}-4x^{3/4}+10x^{1/2}+C$.

2. $\int (\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x})^3 dx = \int (x^{3/2}+6x^{4/3}+12x^{7/6}+8x)dx =$

$=\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{18}{7}x^{7/3}+\frac{72}{13}x^{13/6}+4x^2+C$.

3. $\int 2^{3x}\cdot e^{2x}dx = \int (8e^2)^x dx = \frac{(8e^2)^x}{\ln 8e^2}+C$.

4. $\int (\mathrm{tg}^2 x-1)dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-2\right)dx = \mathrm{tg}\, x - 2x + C$.

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$

$= \mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x + C.$

6. $\int \frac{2x^3+3x^2-8x-7}{x^2-4}dx$.

Библиотека БГУИР

Разделим уголком числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 2x^3+3x^2-8x-7 \\ 2x^3\qquad\quad -8x \end{array} & \begin{array}{l} x^2-4 \\ \hline 2x+3 \end{array} \\ \cline{1-1} -\begin{array}{r} 3x^2\qquad -7 \\ 3x^2\quad -12 \end{array} & \\ \cline{1-1} 5\ . & \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x^3+3x^2-8x-7}{x^2-4}dx = \int\left(2x+3+\frac{5}{x^2-4}\right)dx =$$

$$= x^2+3x+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

7. $$\int \frac{5x^2+2}{x^2(1+2x^2)}dx = \int \frac{2(2x^2+1)+x^2}{x^2(2x^2+1)}dx = 2\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,x+C.$$

8. $$\int \cos(2x-3)dx = \frac{1}{2}\int\cos(2x-3)d(2x-3) = \frac{1}{2}\sin(2x-3)+C.$$

9. $$\int \sin^4 x\cos x dx = \int \sin^4 x d\sin x = \frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

10. $$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int\frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$$

11. $$\int x(2x+3)^9dx = \frac{1}{2}\int((2x+3)-3)\,(2x+3)^9dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(2x+3)^{10}dx - \frac{3}{2}\int(2x+3)^9dx = \frac{1}{4}\int(2x+3)^{10}d(2x+3) - \frac{3}{4}\int(2x+3)^9d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{44}(2x+3)^{11} - \frac{3}{40}(2x+3)^{10}+C.$$

Второе решение:

$$\int x(2x+3)^9dx = \left|\begin{array}{l} 2x+3=t \\ x=\frac{1}{2}(t-3) \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{array}\right| = \frac{1}{4}\int(t-3)t^9dt =$$

Библиотека БГУИР

$$=\frac{1}{4}\int t^{10}dt-\frac{3}{4}\int t^{9}dt=\frac{1}{44}t^{11}-\frac{3}{40}t^{10}+C=\frac{1}{44}(2x+3)^{11}-\frac{3}{40}(2x+3)^{10}+C.$$

12. $$\int\frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-\ln^2 x)}{(1-\ln^2 x)^2}=\frac{1}{2(1-\ln^2 x)}+C.$$

Второе решение:

$$\int\frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)^2}dx=\left|\begin{array}{l}1-\ln^2 x=t\\ -\dfrac{2\ln x}{x}dx=dt\\ \dfrac{\ln x}{x}dx=-\dfrac{1}{2}dt\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2t}+C=$$

$$=\frac{1}{2(1-\ln^2 x)}+C.$$

13. $$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=t,\ x=t^2-3\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{2t}{1+t}dt=2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$=2t-2\ln|t+1|+C=2\sqrt{x+3}-2\ln(1+\sqrt{x+3})+C.$$

14. $$\int\frac{dx}{e^x+1}=\left|\begin{array}{l}x=-\ln t\\ e^x=e^{-\ln t}=\dfrac{1}{t}\\ dx=-\dfrac{dt}{t}\end{array}\right|=\int\frac{-dt}{t\left(\frac{1}{t}+1\right)}=-\int\frac{d(t+1)}{t+1}=-\ln|t+1|+C=$$

$$=-\ln(e^{-x}+1)+C.$$

Второе решение:

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}(e^x+1)}=\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}=-\int\frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}=$$

$$=-\ln(e^{-x}+1)+C.$$

15. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},\quad x<-1.$$

Поскольку $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\dfrac{dx}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=\dfrac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$,

Библиотека БГУИР

то $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \arcsin\frac{1}{x} + C$.

Легко показать, что при $x>1$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C$.

16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C$.

17. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+7} = \int \frac{dx}{2(x-1)^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+\frac{5}{2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(x-1)\right) + C$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+4x-x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{19-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{19}} + C$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{14-6x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{14}{3}-2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{\frac{17}{3}-(x+1)^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{\frac{17}{3}}} + C$.

20. $\int \frac{5x-2}{x^2+6x+17}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+6)-17}{x^2+6x+17}dx = \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+6x+17)}{x^2+6x+17} -$

$-17\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+8} = \frac{5}{2}\ln(x^2+6x+17) - \frac{17}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2\sqrt{2}} + C$.

21. $\int \frac{3x-7}{x^2+4x+1}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-6-7}{x^2+4x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+4x+1)}{x^2+4x+1} -$

$-13\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-3} = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right| - \frac{13}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right| + C$.

22. $\int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x+8)-2+3}{\sqrt{2x^2+8x+11}}dx =$

Библиотека БГУИР

$$=\frac{1}{4}\int(2x^2+8x+11)^{-\frac{1}{2}}d(2x^2+8x+11)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+8x+11}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+\frac{3}{2}}\right|+C.$$

23. $$\int x\sin 2x dx=\left|\begin{array}{l} u=x, \quad du=dx \\ \sin 2xdx=dv, \quad v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right|=-\frac{1}{2}x\cos 2x+$$

$$+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

24. $$\int\arcsin xdx=\left|\begin{array}{l} u=\arcsin x, \quad du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=2x, \quad v=x\end{array}\right|=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

25. $$\int xe^{-3x}dx=\left|\begin{array}{l} u=x, \quad du=dx \\ e^{-3x}dx=dv, \quad v=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{array}\right|=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx=$$

$$=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C.$$

26. $$\int x\,\mathrm{arctg}\, xdx=\left|\begin{array}{l} u=\mathrm{arctg}\, x, \quad du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx, \quad v=\frac{1}{2}x^2\end{array}\right|=\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\, x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\, x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctgx}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{arctgx}+C.$$

27. $$\int(x^2+3x+5)\cos 2xdx=\left|\begin{array}{l} u=x^2+3x+5, \quad du=(2x+3)dx \\ \cos 2xdx=dv, \quad v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+3x+5)\sin 2x-\frac{1}{2}\int(2x+3)\sin 2xdx=\left|\begin{array}{l} u=2x+3, \quad du=2dx \\ dv=\sin 2xdx, \quad v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+3x+5)\sin 2x-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x+\int\cos 2xdx\right)=$$

Библиотека БГУИР

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin 2x+\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+C.$$

28. $$\int x^3\ln^2 x dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln^2 x, & du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv=x^3dx, & v=\frac{x^4}{4}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}x^4\cdot\ln^3 x-\frac{1}{2}\int x^3\ln x dx==\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x} \\ x^3dx=dv, & v=\frac{x^4}{4}\end{array}\right|=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx\right)=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{8}x^4\ln x+\frac{1}{32}x^4+C.$$

29. $$I=\int\cos(\ln x)dx=\left|\begin{array}{ll} u=\cos(\ln x), & du=\sin(\ln x)\cdot\frac{dx}{x} \\ dv=dx, & v=x\end{array}\right|=x\cos(\ln x)+$$

$$+\int\sin(\ln x)dx=\left|\begin{array}{ll} u=\sin(\ln x), & du=\cos(\ln x)\cdot\frac{dx}{x} \\ dv=dx, & v=x\end{array}\right|=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-$$

$$-\int\cos(\ln x)dx.$$

$$I=\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C.$$

30. $$I=\int e^{ax}\cos bxdx=\left|\begin{array}{ll} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx \\ dv=\cos bxdx, & v=\frac{1}{b}\sin bx\end{array}\right|=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-$$

$$-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx=\left|\begin{array}{ll} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx \\ dv=\sin bx, & v=\frac{1}{b}\cos bx\end{array}\right|=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-$$

$$-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\right).$$

$$I\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx.$$

$$I=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.\ \blacktriangle$$

Библиотека БГУИР

Дополнительные задачи

1. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$.

2. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x - \operatorname{arctg} x + C$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C$.

4. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$.

5. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arctg} e^x + C$.

6. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$.

7. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \ln\left|\ln(\ln x)\right| + C$.

8. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -3\sqrt{1-x^2} + 5\arcsin x + C$.

9. $\int x\sqrt{x-5}dx = \frac{2(x-5)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{10(x-5)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$.

10. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x} - 4\ln(\sqrt{1+x}+2) + C$.

11. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{7}} + C$.

12. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+3}\right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5} + C$.

14. $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}} = -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}} + C$.

16. $\int (x^2-2x+3)\ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + C$.

Библиотека БГУИР

17. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx = -0{,}5\left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x\right) + C$.

18. $\int (x^2 + 2x - 1)\sin 3x dx = \frac{9x^2 + 18x - 11}{27}\cos 3x + \frac{2x+2}{9}\sin 3x + C$.

19. $\int \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$.

Занятие 4
Интегрирование рациональных функций

Пример 1

Представьте неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

1. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$;

2. $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 + 3x + 7}$.

△ 1. Разделим уголком числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{rl} -\,x^3+1 & \big|\, \underline{x^2+x+1} \\ \underline{x^3+x^2+x} & \;\; x-1 \\ -\,-x^2-x+1 & \\ \underline{-x^2-x-1} & \\ 2 & \end{array}.$$

Следовательно, $\frac{x^3+1}{x^2+x+1} = x - 1 + \frac{2}{x^2+x+1}$.

2. Числитель неправильной рациональной дроби преобразуем так, чтобы в нем выделить слагаемое, кратное знаменателю и включающее старшую степень многочлена x:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 + 3x + 7} = \frac{2x(x^2 + 3x + 7 - 3x - 7) + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 + 3x + 7} =$$

$$= 2x + \frac{-3x^2 - 19x + 8}{x^2 + 3x + 7} = 2x + \frac{-3(x^2 + 3x + 7 - 3x - 7) - 19x + 8}{x^2 + 3x + 7} =$$

$$= 2x - 3 + \frac{-10x + 29}{x^2 + 3x + 7}. \ \blacktriangle$$

Библиотека БГУИР

Пример 2

С помощью элементарных преобразований разложите рациональную дробь $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$ на простейшие.

$$\triangle\ \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2(x^2+1)}-\frac{1}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}-\frac{1}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}.\ \blacktriangle$$

Пример 3

Найдите $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$.

$\triangle$ Поскольку $x^3+1=(x+1)\,(x^2-x+1)$,

то $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{(x+1)\,(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$.

Для нахождения значений A, B и C используем метод неопределенных коэффициентов:

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1,\quad (A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C=1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

Отсюда $A=\dfrac{1}{3},\quad B=-\dfrac{1}{3},\quad C=\dfrac{2}{3}$. Таким образом, при $x\neq-1$

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.\ \blacktriangle$$

Пример 4

Найдите $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$.

Библиотека БГУИР

△ Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть неправильной рациональной дроби:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^4 - 3x^2 - 3x - 2 & x^3 - x^2 - 2x \\
\underline{x^4 - x^3 - 2x^2} \qquad\quad & \overline{\quad x + 1 \quad} \\
-\; x^3 - x^2 - 3x - 2 & \\
\underline{x^3 - x^2 - 2x \qquad} & \\
-x - 2 & .
\end{array}
$$

Следовательно, $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int (x+1)dx - \int \frac{(x+2)}{x(x-2)(x+1)} dx$.

Разлагаем оставшуюся правильную дробь на простейшие:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{x+1}.$$

Значения A, B и D можно найти методом неопределенных коэффициентов. Но так как все корни знаменателя вещественные и простые, более удобным является метод частных значений:

$$A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Dx(x-2) = x + 2.$$

Подставляя поочередно в правую и левую часть значения $x_1 = 0,\ x_2 = 2,$ $x_3 = -1$ (корни знаменателя), получим $A = -1,\ B = \frac{2}{3},\ D = \frac{1}{3}$. Таким образом,

$$\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int (x+1)dx + \int \frac{dx}{x} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C. \ ▲$$

Пример 5

Найдите $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$.

△ Имеем $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$,

$$A(x+1)(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2+x) = 1.$$

Здесь удобно первые два коэффициента A и B получить методом частных значений, а C и D – методом неопределенных коэффициентов. Подставив поочередно $x = 0$ и $x = -1$, получим $A = 1,\ B = -1$. Приравняв коэффициенты

Библиотека БГУИР

при x^3 и x^2, получим систему $\begin{array}{c|c} x^3 & A+B+C=0 \\ x^2 & 2A+B+D+C=0 \end{array}$, из которой находим $C=0,\ D=-1$.

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| -$$

$$- \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 6

Найдите $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,dx$.

$\triangle$ Разложим знаменатель дроби на множители:

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x^3+x^2-x-1) = x^2(x^2-1)(x+1) = x^2(x+1)^2(x-1).$$

Следовательно, $\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{D}{x-1}$.

Отсюда следует равенство многочленов $A(x+1)^2(x-1) +$
$+ A_1x(x+1)^2(x-1) + Bx^2(x-1) + B_1x^2(x+1)(x-1) + Dx^2(x+1)^2 = x^4+1$.

Последовательно полагая $x=0$, $x=-1$ и $x=1$, получаем $A=-1$, $B=-1$, $D=\frac{1}{2}$. Продифференцировав равенство по x, выпишем слева лишь те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=0$:

$$\left.(2A(x+1)(x-1) + A(x+1)^2 + A_1(x+1)^2(x-1))\right|_{x=0} = \left.4x^3\right|_{x=0}$$

и при $x=-1$:

$$\left.(2Bx(x-1) + Bx^2 + A_1x^2(x-1))\right|_{x=-1} = \left.4x^3\right|_{x=-1}.$$

Отсюда находим $A_1 = 1$ и $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, заданная функция принимает вид

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,dx = \frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C. \ \blacktriangle$$

Библиотека БГУИР

Пример 7

Найдите $\int \dfrac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}$.

$\triangle$ Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{(x^2+2x+3)^2+x^2-1}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\ln|x+1|+I_1',$$

где $I_1'=\int \dfrac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx.$

$$I_1'=\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=\int \frac{x-1}{((x+1)^2+2)^2}dx=\begin{vmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{vmatrix}=\int \frac{t-2}{(t^2+2)^2}dt=$$

$$=\int \frac{tdt}{(t^2+2)^2}-2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)^2}-2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2}=-\frac{1}{2(t^2+1)}-2I_2,$$

где $I_2=\int \dfrac{dt}{(t^2+2)^2}$.

Для вычисления I_2 воспользуемся рекуррентным соотношением

$$I_k=\frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}.$$

Так как $I_1=\int \dfrac{dt}{t^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{a}+C,$

то в нашем случае $I_2=\int \dfrac{dt}{(t^2+2)^2}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{t}{t^2+2}+\dfrac{1}{4}\int \dfrac{dt}{t^2+2}=$

$$=\frac{1}{4}+\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Таким образом,

$$I_1=-\frac{1}{2(t^2+2)}-\frac{t}{2(t^2+2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\ln|x+1|-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-$$

Библиотека БГУИР

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Замечание. $\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}$ можно вычислить с помощью подстановки $t=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,z.$ ▲

Пример 8

Найдите $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^{100}}.$

$$\triangle\ \int\frac{x^2dx}{(x-1)^{100}}=\left|\begin{matrix}x-1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t+1)^2}{t^{100}}dt=\int\frac{t^2+2t+1}{t^{100}}dt=$$

$$=\int t^{-98}dt+2\int t^{-99}dt+\int t^{-100}dt=-\frac{1}{97t^{97}}-\frac{2}{98t^{98}}-\frac{1}{99t^{99}}+C=$$

$$=-\frac{1}{97(x-1)^{97}}-\frac{1}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.\quad ▲$$

Дополнительные задачи

1. $\int\frac{xdx}{x^3-1}.$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

2. $\int\frac{x+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

Ответ: $\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|x-2|+\frac{4}{3}\ln|x-3|+C.$

3. $\int\frac{2x-5}{x^3-3x^2+4}dx.$

Ответ: $\frac{1}{3(x-2)}+\frac{7}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$

4. $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx.$

Ответ: $5x+\ln\left|x^2(x+2)^4(x-2)^3\right|+C.$

5. $\int\frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)^2}dx.$

Библиотека БГУИР

Ответ: $\ln|x|-\dfrac{1}{2(x^2+1)}+C.$

Занятие 5
Интегрирование тригонометрических выражений

Пример 1

Найдите $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$

$\triangle$ Применим универсальную подстановку $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$:

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\left|\begin{matrix} x=2\operatorname{arctg} t,\ \ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(2\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{6t^2+4t+4}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.\ \blacktriangle$$

Пример 2

Найдите $\displaystyle\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}.$

$$\triangle\ \int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right|=2\int\frac{dt}{\left(4\dfrac{2t}{1+t^2}+3\dfrac{1-t^2}{1-t^2}+5\right)(1+t^2)}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int(t+2)^{-2}d(t+2)=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C.\ \blacktriangle$$

Пример 3

Найдите $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}dx.$

$\triangle$ При вычислении интегралов $\int \sin^m x \cos^n x dx$, если m – нечетное положительное число, то применяется подстановка $\cos x = t$, если же n – нечетное положительное число, то применяется подстановка $\sin x = t$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^{-4/3} x \sin x dx = \left|\cos x = t\right| =$$

$$= -\int (1-t^2)t^{-4/3}dt = -\int t^{-4/3}dt + \int t^{2/3}dt = 3t^{-1/3} + \frac{3}{5}t^{5/3} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Пример 4

Найдите $\int \sin^4 x \cos^5 x dx.$

$\triangle$ $\int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) d \sin x =$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C. \ \blacktriangle$$

Пример 5

Найдите $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

$\triangle$ Применив формулы понижения степени, получим

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x (\sin x \cdot \cos x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\cdot \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x dx - \int \sin^2 2x \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d \sin 2x = = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Пример 6

Найдите $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$

$\triangle$ Функция $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^3 x \cos x}$ является четной по совокупности аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому для ее интегрирования целесообразно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x} = \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin^4 x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x, \ \ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \ \ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

Библиотека БГУИР

$$=\int \frac{t(1+t^2)^2}{t^4(1+t^2)}dt=\int \frac{1+t^2}{t^3}dt=\int \frac{dt}{t}+\int t^{-3}dt=\ln|t|-\frac{1}{2t^2}+C=$$

$$=\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+C.$$

Пример 7

Найдите $\int \operatorname{tg}^7 x dx.$

$$\triangle \quad \int \operatorname{tg}^7 x dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=t, \quad x=\operatorname{arctg} t \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int \frac{t^7 dt}{1+t^2}=$$

$$=\int \frac{t^7+t^5-t^5-t^3+t^3+t-t}{1+t^2}dt=\int\left(t^5-t^3+t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{6}t^6-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|+C=\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C. \quad \blacktriangle$$

Пример 8

Найдите $\int \operatorname{ctg}^6 x dx.$

$$\triangle \quad \int \operatorname{ctg}^6 x dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{ctg} x=t, \quad x=\operatorname{arcctg} t \\ dx=-\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=-\int \frac{t^6 dt}{t^2+1}=$$

$$=-\int \frac{t^6+t^4-t^4-t^2+t^2+1-1}{t^2+1}dt=\int\left(-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t-\operatorname{arcctg} t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x+C. \quad \blacktriangle$$

Пример 9

Найдите $\int \cos 2x \cos 6x dx.$

$$\triangle \quad \int \cos 2x \cos 6x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 8x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 8x+C. \quad \blacktriangle$$

Пример 10

Найдите $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

Библиотека БГУИР

△ Этот интеграл можно вычислить с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,$ но проще произвести следующие преобразования:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int\frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C. \quad \blacktriangle$$

Пример 11

Найдите $\int\frac{1}{\cos^4 x\sin^2 x}dx.$

△ $\int\frac{dx}{\cos^4 x\sin^2 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\cos^4 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx+$

$+2\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\operatorname{tg}^2 x d\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C=$

$=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$ ▲

Пример 12

Найдите $I_1=\int\frac{\sin x dx}{a\sin x+b\cos x}$ и $I_2=\int\frac{\cos x dx}{a\sin x+b\cos x}.$

△ $aI_1+bI_2=\int dx=x+C_1.$

$-bI_1+aI_2=\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx=\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=$

$=\ln|a\sin x+b\cos x|+C_2.$

Отсюда

$$I_1=\frac{ax-b\ln|a\sin x+b\cos x|}{a^2+b^2}+C,\qquad I_2=\frac{bx+a\ln|a\sin x+b\cos x|}{a^2+b^2}+C_0,$$

где C и C_0 – линейные комбинации произвольных постоянных C и C_1. ▲

Дополнительные задачи

Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}.$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$

Библиотека БГУИР

2. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx.$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + \frac{4}{3}\sqrt{\cos^3 x} - \frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} + C.$

3. $\int \sin^4 3x dx.$

Ответ: $\frac{3}{8}x - \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 16\cos^2 x}.$

Ответ: $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8}\right| + C.$

5. $\int \cos 2x \sin 12x dx.$

Ответ: $-\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{28}\cos 14x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

Ответ: $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$

Занятие 6
Интегрирование иррациональных выражений

Пример 1

Найдите $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

△ НОК (2, 3) = 6, поэтому делаем подстановку $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \frac{(t^3 + 1) - 1}{t+1} dt =$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C. \ ▲$$

Пример 2

Найдите $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx.$

△ НОК (2, 3, 4, 6) = 12, поэтому делаем подстановку $x = t^{12}$.

$$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^{12}, \\ dx = 12t^{11}dt \end{matrix} \right| = 12\int \frac{t^{11}(t^6+t^4)}{t^{15}-t^{14}}dt = 12\int \frac{t^3+t}{t-1}dt =$$

$$= 12\int \frac{(t^3-1)+(t-1)+2}{t-1}dt = 12\int (t^2+t+2+\frac{2}{t-1})dt =$$

$$= 4t^3+6t^2+24t+24\ln|t-1|+C = 4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C. \ ▲$$

Пример 3

Найдите $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$.

$$△ \ \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \ \ x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}, \ 1-x = \frac{2}{t^2+1} \end{matrix} \right| = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2t - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \ ▲$$

Пример 4

Найдите $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}dx.$

△ Подынтегральную функцию $\frac{1}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$ можно представить в виде $\frac{1}{(2-x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$. Эта функция является рациональной относительно переменных x и $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$. В данном случае можно использовать замену $t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}} = \int \frac{1}{(2-x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = \left| \begin{matrix} t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}, \ x = 2\frac{1-t^3}{1+t^3} \\ dx = -\frac{12t^2dt}{(1+t^3)^2}, \frac{1}{2-x} = \frac{1+t^3}{4t^3} \end{matrix} \right| =$$

Библиотека БГУИР

$$= -\int t\,\frac{(1+t^3)^2}{(4t^3)^2}\cdot\frac{12t^2dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 5

Найдите $\int \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}}\,dx.$

$\vartriangle$ Интеграл $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx$ можно найти по формуле

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

$$\int \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}}\,dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Для определения постоянных A, B и λ дифференцируем обе части равенства, затем умножаем его на $\sqrt{x^2 - 2x}$:

$$\frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}} = A\sqrt{x^2 - 2x} + (Ax + B)\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x}};$$

$$\frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}} = A\sqrt{x^2 - 2x} + (Ax + B)\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

$$2x^2 - x - 5 = A(x^2 - 2x) + (Ax + B)(x - 1) + \lambda = 2Ax^2 + (B - 3A)x + (\lambda - B).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим: $A = 1$, $B = 2$, $\lambda = -3$.

$$\int \frac{2x^2 - x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x}} = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x} - 3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}} = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x - 3} -$$

$$-3\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 - 1}} = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 3\ln\left|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}\right| + C. \ \blacktriangle$$

Пример 6

Найдите $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1 - x^2}}.$

Библиотека БГУИР

△ Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно найти подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} x-1=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}} = -\int \frac{|t|dt}{t\sqrt{-1-2t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}},$$

так как $t=\frac{1}{x-1}<0$.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} = -\frac{1}{2}\int (-1-2t)^{-1/2} d(-1-2t) = -(-1-2t)^{1/2}+C =$$

$$= -\sqrt{-1-\frac{2}{x-1}}+C = -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}+C. \ ▲$$

Пример 7

Найдите $\int \frac{x^2}{\sqrt{6-4x-2x^2}}dx.$

△ Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ можно находить с помощью тригонометрических подстановок.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6-4x-2x^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{8-2(x+1)^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x+1=2\cos\varphi,\ dx=-2\sin\varphi\, d\varphi,\ (0<\varphi\le\pi) \\ \sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}. \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{(2\cos\varphi-1)^2(-2\sin\varphi)d\varphi}{2\sin\varphi} = -2\sqrt{2}\int \cos^2\varphi\, d\varphi + 2\sqrt{2}\int \cos\varphi\, d\varphi - \frac{\varphi}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\sqrt{2}\int (1+\cos 2\varphi)d\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}(3\varphi+\sin 2\varphi - 4\sin\varphi)+C =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\arccos\frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(3-x)\sqrt{3-2x-x^2}+C.$$

Для данной подынтегральной функции применима также замена $x+1=2\sin\varphi$. ▲

Библиотека БГУИР

Пример 8

Найдите $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}, \quad x>0.$

$$\triangle \quad \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\,\mathrm{tg}\,t, \quad dx = \dfrac{2}{\cos^2 t}dt \\ (0 < t < \dfrac{\pi}{2}). \end{array} \right| = \int \frac{2\cos t dt}{\cos^2 t \cdot 2^4\,\mathrm{tg}^4\,t \cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{2^4}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt = \frac{1}{16}\int \frac{(1-\sin^2 t)}{\sin^4 t}d\sin t =$$

$$= -\frac{1}{48\sin^3 t} + \frac{1}{16\sin t} + C = -\frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{48x^3} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{16x} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 9

Найдите $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

$$\triangle \quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{1/2}dx.$$

Это интеграл от дифференциального бинома. Здесь $m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{3},$ $P = \frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = 1$ – целое число.

Имеем случай 2. Применим подстановку $1+x^{1/3} = t^2$, тогда $dx = 2tdt$. Следовательно,

$$\int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{1/2}dx = 6\int t^2 dt = 2t^3 + C = 2\left(1+x^{1/3}\right)^{3/2} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 10

Найдите $\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{-5/3}dx.$

Здесь $m=-2, n=3, P=-\frac{5}{3}, \frac{m+1}{n}+P=-2$ – целое число.

Имеем случай 3. Применим подстановку $1+x^3 = x^3t^3$. Тогда $x^3 = \frac{1}{t^3-1},$ $1+x^3 = \frac{t^3}{t^3-1}, \ x = \left(t^3-1\right)^{-1/3}, \ dx = -t^2\left(t^3-1\right)^{-4/3}dt.$

Библиотека БГУИР

$$\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{-5/3}dx = -\int\left(t^3-1\right)^{2/3}\left(\frac{t^3}{t^3-1}\right)^{-5/3}t^2\left(t^2-1\right)^{-4/3}dt =$$

$$=\int\frac{1-t^3}{t^3}dt = \frac{t^{-2}}{-2}-t+C = -\frac{1+2t^3}{2t^2}+C = -\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}+C. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Найдите $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

Ответ: $6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}+C$.

2. Найдите $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$.

Ответ: $-\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C$.

3. Найдите $\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}$.

Ответ: $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$.

4. Найдите $\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$, $x>3$.

Ответ: $\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{\sqrt{2}}+C$.

5. Найдите $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$.

Ответ: $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+C$.

Библиотека БГУИР

Занятие 7
Контрольная работа. Неопределенный интеграл

Вариант 1

Найдите интегралы:

1. $\int x^3(1-2x^4)^4\,dx.$

Ответ: $-\dfrac{1}{40}(1-2x^4)^5+C.$

2. $\int x^2(2x+5)^{10}\,dx.$

Ответ: $\dfrac{1}{104}(2x+5)^{13}-\dfrac{5}{48}(2x+5)^{12}+\dfrac{25}{88}(2x+3)^{11}.$

3. $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

Ответ: $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C.$

4. $\int x^2e^{-2x}dx.$

Ответ: $-\dfrac{e^{-2x}}{2}(x^2+x+\dfrac{1}{2})+C.$

5. $\int \dfrac{2x+8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx.$

Ответ: $-2\sqrt{1-x-x^2}+7\arcsin\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$

6. $\int \dfrac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx.$

Ответ: $\dfrac{2}{3}\ln|x+1|-2\ln|x+2|+\dfrac{1}{2}\ln|x+3|+C.$

7. $\int \dfrac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx.$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+3\ln|x+2|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

8. $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx.$

Ответ: $-\dfrac{3}{80}\cos^{4/3} x(20-16\cos^2 x+5\cos^4 x)+C.$

9. $\int \dfrac{dx}{2\sin x-\cos x}.$

Библиотека БГУИР

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2-\sqrt{5}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{2+\sqrt{5}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right|+C.$

10. $\displaystyle\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

Ответ: $2\left(\dfrac{1}{3}x^{3/2}-\dfrac{1}{2}x+2x^{1/2}\right)-4\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$

11. $x^3(1+2x^2)^{-3/2}\,dx.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}+C.$

Вариант 2

Найдите интегралы:

1. $\displaystyle\int x^4(1-3x^5)^4\,dx.$

Ответ: $-\dfrac{1}{75}(1-3x^5)^5+C.$

2. $\displaystyle\int x^2(2x-3)^9\,dx.$

Ответ: $\dfrac{1}{96}(2x-3)^{12}+\dfrac{3}{44}(2x-3)^{11}+\dfrac{9}{80}(2x-3)^{10}+C.$

3. $\displaystyle\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

Ответ: $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x-\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}+C.$

4. $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,dx.$

Ответ: $-\dfrac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\dfrac{x}{2}\sin 2x+C.$

5. $\displaystyle\int\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx.$

Ответ: $-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C.$

6. $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx.$

Ответ: $3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C.$

Библиотека БГУИР

7. $\int \frac{7x-15}{x(x^2-2x+5)}dx.$

Ответ: $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$

8. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}}\,dx.$

Ответ: $\frac{5}{28}\sin^{4/5} x(7-2\sin^2 x)+C.$

9. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}.$

Ответ: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$

10. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx.$

Ответ: $4\sqrt[4]{x}+2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$

11. $\int x^3(1+x^2)^{1/2}dx.$

Ответ: $\frac{(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)}{15}+C.$

Занятие 8
Определенный интеграл

Пример 1

Покажите, что функция Дирихле $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in \frac{R}{Q}\end{cases}$ не интегрируема на отрезке [0; 1].

$\vartriangle$ Для любого разбиения отрезка [0; 1] на частичных отрезках можно выбрать только рациональные значения ξ_i. Тогда любая из интегральных сумм примет вид

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=1.$$

Библиотека БГУИР

В случае же выбора на частичных отрезках только иррациональных значений ξ_i получим

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Поэтому не существует предела интегральных сумм, а это значит, что функция Дирихле не интегрируема на отрезке [0; 1]. ▲

Пример 2

Вычислите, исходя из определения, интеграл $\int_0^1 xdx.$

△ По определению $\int_0^1 xdx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{\xi=1}^{n} \xi_i \Delta x_i.$

Разобьем отрезок [0; 1] на n равных частей точками $x_i = \dfrac{i}{n}$ $(i = 1, ..., n).$ Длина каждого частичного отрезка равна $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}.$ В нашем случае $\lambda = \dfrac{1}{n},$ причем $\lambda \to 0,$ при $n \to \infty.$

В качестве точек ξ_i возьмем правые концы частичных отрезков:

$$\xi_i = x_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Составим интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\int_0^1 xdx = \dfrac{1}{2}.$

Легко показать, что и при другом выборе точек ξ_i, например, если в качестве ξ_i взять левые концы частичных отрезков, то предел интегральной суммы будет тот же.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}(1 + 2 + ... + n - 1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \quad ▲$$

Пример 3

Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $I = \int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx.$

Библиотека БГУИР

△ Линия $y=\sqrt{16-x^2}$ есть верхняя половина окружности $x^2+y^2=16$. Та часть линии, которая получается при изменении x от 0 до 4, лежит в первой координатной четверти. Таким образом, мы имеем криволинейную трапецию, которая является четвертью круга. Поэтому

$$I=\int_0^4\sqrt{16-x^2}=\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{1}{4}\pi\cdot 16=4\pi.\quad ▲$$

Пример 4

Установите, какой из двух интегралов $\int_0^1\sqrt{x}dx,\quad \int_0^1 x^2dx$ больше.

△ Так как $\sqrt{x}>x^2$ при $0<x<1$, следовательно, $\int_0^1\sqrt{x}dx>\int_0^1 x^2dx.$ ▲

Пример 5

Оцените интеграл $I=\int_0^3(x^2-2x+5)dx.$

△ Функция $y=x^2-2x+5$ на отрезке [0; 3] принимает наименьшее значение при $x=1$, равное 4, и наибольшее значение при $x=3$, равное 8. Поэтому $4(3-0)\le I\le 8(3-0),\quad 12\le I\le 24.$ ▲

Пример 6

Оцените абсолютную величину интеграла $\int_{10}^{20}\frac{\cos x}{1+x^6}dx.$

△ Так как при $x\ge 10$ $\left|\frac{\cos x}{1+x^6}\right|\le 10^{-6}$, то

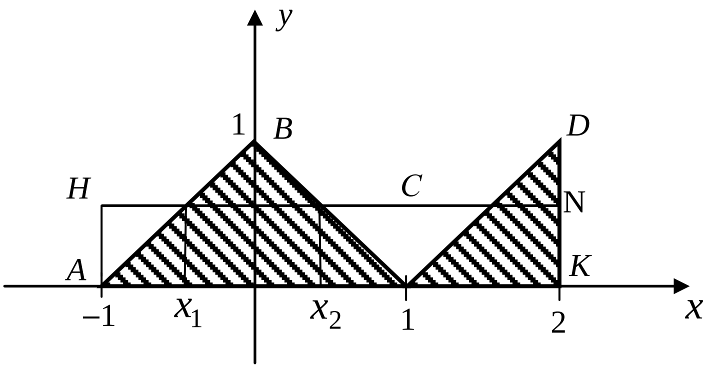
$$\left|\int_{10}^{20}\frac{\cos x}{1+x^6}dx\right|\le 10^{-6}(20-10)=10^{-5}.\ ▲$$

Пример 7

Найдите среднее значение функции $y=\left||x|-1\right|$ на отрезке [–1; 2] и все точки, в которых эта функция достигает своего среднего значения. Дайте геометрическую интерпретацию.

Библиотека БГУИР

△



$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \left||x|-1\right|dx = S_{ABCDKA} = \frac{3}{2}.$$

Так как $f(\xi) = \dfrac{1}{2+1}\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx = \dfrac{3}{2}$, следовательно,

$$\left||x|-1\right| = \frac{1}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{2}.$$

Площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника AHNK. ▲

Пример 8

Найдите производную от функции $\displaystyle\int_0^{x^3} \operatorname{arctg} t dt$.

△ Представим заданную функцию в виде сложной функции аргумента x:

$$u(t) = x^3, \quad F(u) = \int_0^u \operatorname{arctg} t dt.$$

Сложная функция $F(u(t))$ является дифференцируемой, причем

$$\frac{d}{dx} F(u(t)) = \frac{d}{du} F(u)\bigg|_{u = x^3} \frac{du}{dx}.$$

Здесь $\dfrac{d}{du} F(u)\bigg|_{u = x^3} = \dfrac{d}{du} \displaystyle\int_0^u \operatorname{arctg} t dt\bigg|_{u = x^3} = \operatorname{arctg} u\bigg|_{u = x^3} = \operatorname{arctg} x^3$, $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$.

Таким образом, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^3} \operatorname{arctg} t dt = 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x^3$. ▲

Библиотека БГУИР

Пример 9

Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}dx}{x^3}$.

△ Очевидно, все условия, обеспечивающие законность применения правила Лопиталя выполняются. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}dx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{x}dx\right)'\Bigg|_{x^2}\cdot(x^2)'_x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.\ \blacktriangle$$

Пример 10

Вычислите $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

△ Так как на рассматриваемом промежутке одной из первообразных для функции $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ является функция $y=\operatorname{tg}x$, то

$$\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}0=1.\ \blacktriangle$$

Пример 11

Вычислите $\int\limits_0^2|1-5x|dx$.

△ Так как $|1-5x|=\begin{cases}1-5x, & x\le\dfrac{1}{5}\\ 5x-1, & x\ge\dfrac{1}{5}\end{cases}$, то по свойству аддитивности интеграла $\int\limits_0^2|1-5x|dx=\int\limits_0^{1/5}(1-5x)dx+\int\limits_{1/5}^{2}(5x-1)dx=\int\limits_0^{1/5}dx-5\int\limits_0^{1/5}xdx+5\int\limits_{1/5}^{2}xdx-$

$$-\int\limits_{1/5}^{2}dx=x\Big|_0^{\frac{1}{5}}-\frac{5}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{5}}+\frac{5}{2}x^2\Big|_{\frac{1}{5}}^{2}-x\Big|_{\frac{1}{5}}^{2}=\frac{41}{5}.\ \blacktriangle$$

Библиотека БГУИР

Пример 12

Вычислите $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$.

$$\triangle \quad \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = -\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x) d(\cos x) = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\cos^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

Пример 13

Вычислите $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$.

$\triangle$ Положим $u = x$, $dv = e^{-xdx}$. Тогда $du = dx$ и $v = -e^{-x}$. Функции $u = x$, $v = -e^{-x}$ и их производные являются непрерывными на отрезке [0; 1]. Можно применить формулу интегрирования определенного интеграла по частям.

$$\int\limits_0^1 xe^{-x} dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{e-2}{e}. \quad \blacktriangle$$

Пример 14

Вычислите $\int\limits_1^e (1+\ln x)^2 dx$.

$\triangle$ Применим дважды формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^e (1+\ln x)^2 dx = \left| \begin{matrix} u = (1+\ln x)^2, \ du = \dfrac{2(1+\ln x)}{x} dx \\ dv = dx, \ v = x \end{matrix} \right| = x(1+\ln x)^2 \Big|_1^e -$$

$$-2\int\limits_1^e (1+\ln x) dx = \left| \begin{matrix} u = 1+\ln x, \ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, \ v = x \end{matrix} \right| = e(1+\ln e)^2 - (1+\ln 1)^2 -$$

$$-2x(1+\ln x)\Big|_1^e + 2\int\limits_1^e dx = 2e - 1. \quad \blacktriangle$$

Пример 15

Вычислите $\int\limits_0^9 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

Библиотека БГУИР

△ Сделаем замену $x=t^2$. При $x=0$ $t=0$, а при $x=9$ $t=3$. Функция $x=t^2$ непрерывна вместе со своей производной на отрезке [0; 3] изменения переменной t, причем значения $x=t^2$ при изменении t от 0 до 3 не выходят за пределы отрезка [0; 3] изменения переменной x. Поэтому

$$\int_0^9 \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x=t^2, & \sqrt{x}=|t|=t \\ dx=2tdt & \end{matrix} \right| = \int_0^3 \frac{2tdt}{t+2} = \int_0^3 \frac{2t+4-4}{t+2}dt = 2\int_0^3 dt - 4\int_0^3 \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t\Big|_0^3 - 4\ln(t+2)\Big|_0^3 = 6 - 4\ln\frac{5}{2}. \quad ▲$$

Пример 16

Вычислите $I = \int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

△ Положим $x=\sin t$. Функция $\sin t$ и ее производная $\cos t$ являются непрерывными функциями. Новые пределы интегрирования α и β определяем из системы $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Множеством всех ее решений является множество пар $(\alpha;\beta)$,

где $\alpha = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$ и $\beta = (-1)^m \dfrac{\pi}{3} + \pi m, \quad k,\ m \in \mathrm{Z}.$

Возьмем из них, например, пару $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{3}\right)$. На отрезке $\left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ функция $x=\sin t$ является монотонной. Следовательно, $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ и $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ можно взять за новые пределы интегрирования. На отрезке $\left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t.$

Следовательно, имеем

$$I = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos t dt}{\sin t \cdot \cos t} = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t} = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Можно взять некоторую другую пару, например $\left(\dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$. На этом отрезке функция $x=\sin t$ является возрастающей, а $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = -\cos t.$

Библиотека БГУИР

Следовательно,

$$I=-\int_{5\pi/6}^{2\pi/3}\frac{dt}{\sin t}=-\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{5\pi/6}^{2\pi/3}=\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

В то же время на отрезке $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ функция $x=\sin t$ не является монотонной. Поэтому $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ и $\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ не могут быть новыми пределами интегрирования. ▲

Пример 17

Функция $f(x)$ является четной и на отрезке [0; 1] $f(x)=1+2x.$ Вычислите $\int_{-1}^{1}f(x)dx.$

△ Для вычисления $\int_{-1}^{1}f(x)dx$ нет необходимости находить аналитическое выражение функции на отрезке [–1; 0]. Ввиду четности функции,

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}(1+2x)dx=2(x+x^2)\Big|_0^1=4.\ ▲$$

Пример 18

Вычислите $\int_{-2}^{2}\cos x\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx.$

△ Подынтегральная функция является непрерывной на отрезке [–2; 2]. Поэтому она является интегрируемой. Найдем $f(-x)$:

$$f(-x)=\cos(-x)\cdot\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=\cos x\cdot\ln\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$$

$$=\cos x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}=-\cos x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).$$

Подынтегральная функция является нечетной, поэтому

$$\int_{-2}^{2}\cos x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=0.\quad ▲$$

Пример 19

Вычислите $\int_{0}^{200\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx.$

Библиотека БГУИР

$\triangle$ Поскольку $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2\pi^2 x} = \sqrt{2}|\sin x|$ и функция $f(x) = |\sin x|$ имеет период $T = \pi,$ то

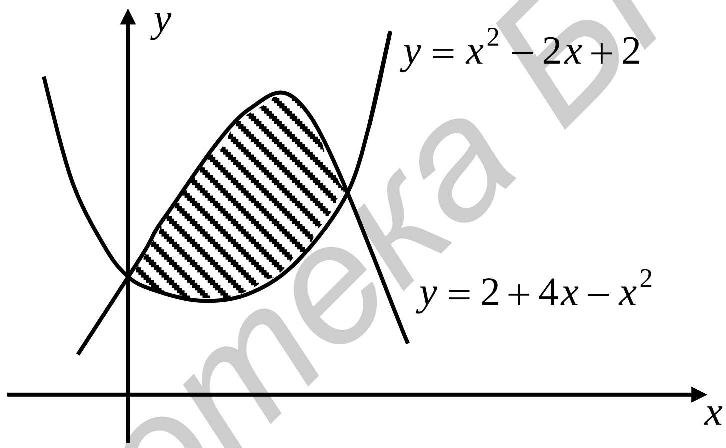
$$\int\limits_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = 200 \cdot \sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -200\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 400\sqrt{2}. \ \blacktriangle$$

Занятия 9–10
Геометрические и физические приложения определенных интегралов

Пример 1

Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = 2 + 4x - x^2$.

$\triangle$ Начертим графики функций и найдем абсциссы их точек пересечения: $x^2 - 2x + 2 = 2 + 4x - x^2$. Решая это уравнение, получим $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$.



Искомая площадь равна

$$S = \int\limits_0^3 ((2+4x-x^2)-(x^2-2x+2))dx = \int\limits_0^3 (6x-2x^2)dx =$$

$$= \left(3x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^3 = 9. \ \blacktriangle$$

Пример 2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$ и $x - y = 1$.

$\triangle$ Решая систему уравнений $\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x - y = 1 \end{cases}$, находим $M_1(0; -1)$ и $M_2(3; 2)$.

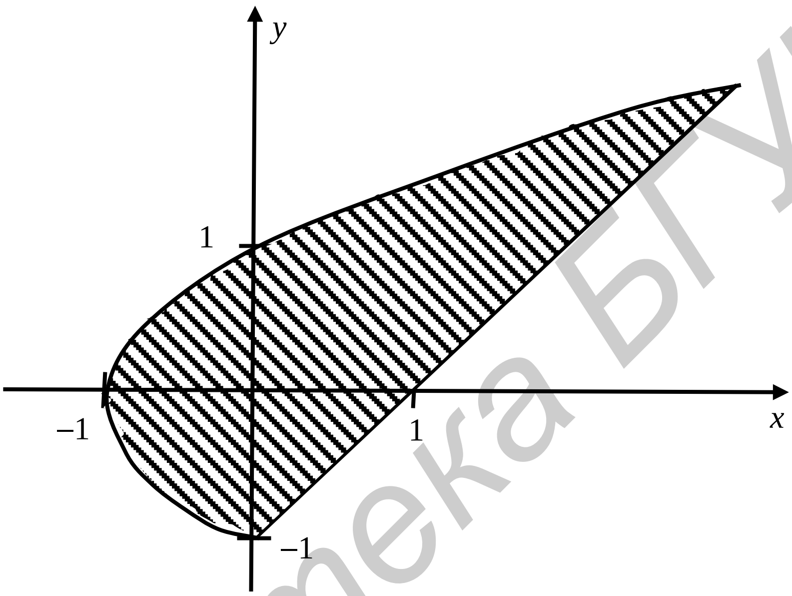
Библиотека БГУИР

Нижняя граница фигуры на разных частях отрезка [–1; 3] задана различными функциями. Поэтому

$$S = \int_{-1}^{0}\left(\sqrt{1+x} - (-\sqrt{x+1})\right)dx + \int_{0}^{3}(\sqrt{x+1} - (x-1))dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{0}(x+1)^{1/2}d(x+1) + \int_{0}^{3}(x+1)^{1/2}d(x+1) - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{2}{3/2}(x+1)^{3/2}\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$



Площадь этой фигуры можно найти проще, если принять y за независимую переменную, а x за функцию. Тогда

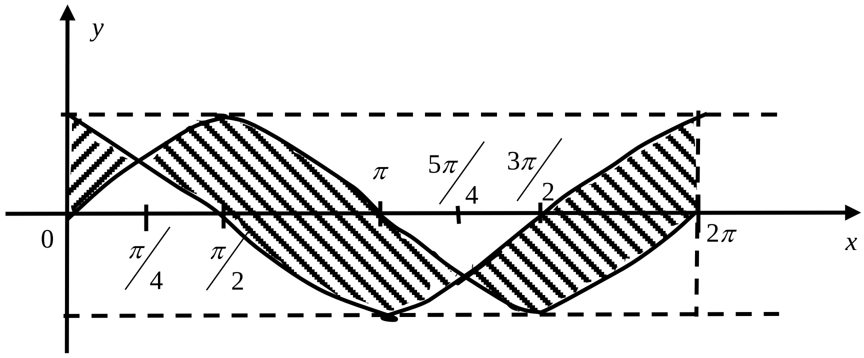
$$S = \int_{-1}^{2}((y+1) - (y^2 - 1))dy = \left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 3

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

Библиотека БГУИР

△



$$S=\int_{0}^{2\pi}\left|\sin x-\cos x\right|dx=\int_{0}^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)dx+$$

$$+\int_{5\pi/4}^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}+$$

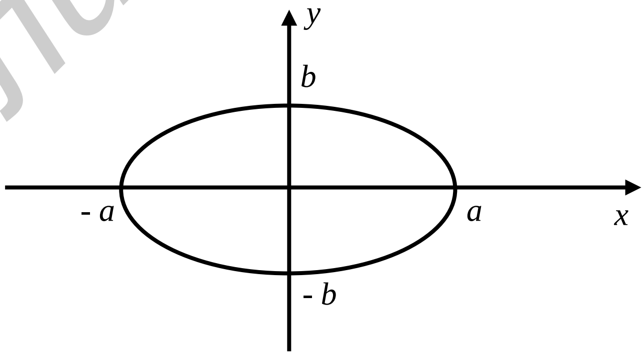
$$+(\sin x+\cos x)\Big|_{5\pi/4}^{2\pi}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+$$

$$+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}.\quad\blacktriangle$$

Пример 4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

△



Запишем параметрическое уравнение эллипса:
$x=a\cos t,\ y=b\sin t\quad(0\le t\le 2\pi).$

Верхняя половина фигуры является криволинейной трапецией. При возрастании x от $-a$ до a параметр t убывает от π до 0. Поэтому

Библиотека БГУИР

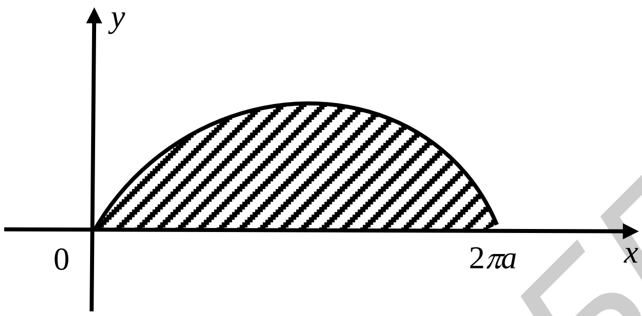
$$S = 2\int_{-a}^{a} y\,dx = \begin{vmatrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{vmatrix} = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -ab\int_{\pi}^{0}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= -ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \pi ab. \quad \blacktriangle$$

Пример 5

Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ и осью Ox.

$\triangle$



Фигура является криволинейной трапецией. При возрастании x от 0 до $2\pi a$ параметр t возрастает от 0 до $2\pi a$. Поэтому

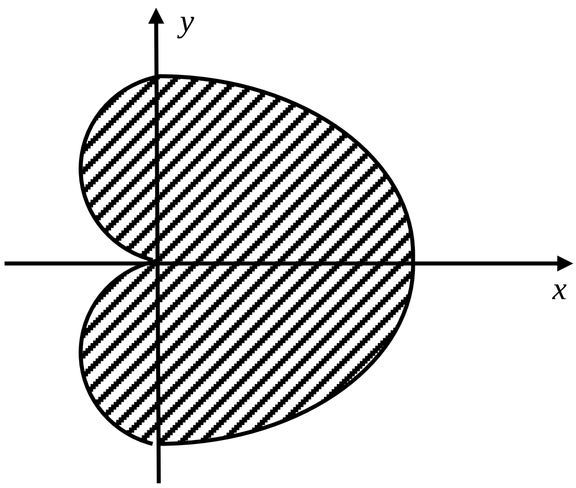
$$S = \int_{0}^{2\pi} y(t)\cdot x'(t)dt = \int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt = a^2\int_{0}^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= a^2\int_{0}^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 3\pi a^2. \quad \blacktriangle$$

Пример 6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2a(1+\cos\varphi)$.

$\triangle$



Библиотека БГУИР

Фигура является криволинейным сектором, следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

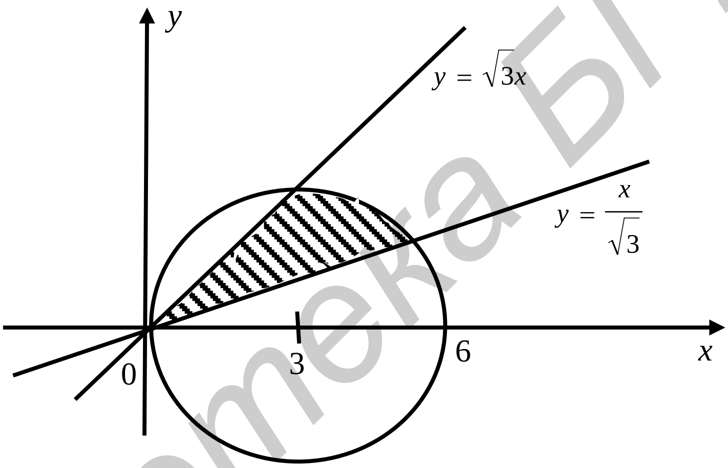
$$= 2a^2\int_0^{2\pi} (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = 2a^2\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}d\varphi = 6\pi a^2. \quad \blacktriangle$$

Пример 7

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2-6x+y^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

$\triangle$ Линия $x^2-6x+y^2=0 \approx (x-3)^2+y^2=3^2$ является окружностью.



Площадь этой фигуры удобно вычислять, используя полярные координаты. В полярной системе координат $x^2-6x+y^2=0$.

$$\begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} \sim r^2\cos^2\varphi - 6r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi = 0 \sim r = 6\cos\varphi;$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}} \sim \varphi = \frac{\pi}{6}; \quad y=\sqrt{3}x \sim \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} 36\cos^2\varphi d\varphi = 9\int_{\pi/6}^{\pi/3}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = 9\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{3}{2}\pi. \quad \blacktriangle$$

Библиотека БГУИР

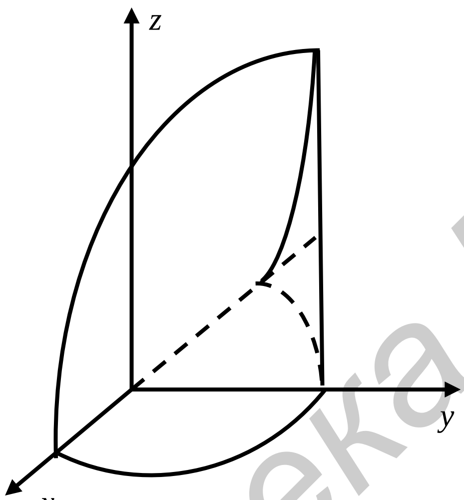
Пример 8

Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2$, $z=\sqrt{3}y$, $z=0$ $(y\geq 0)$.

$\triangle$ *Первый способ.* Рассмотрим сечение этого тела плоскостями $x=\text{const}$. В сечениях получаются прямоугольные треугольники с площадями

$$S(x)=\frac{1}{2}y(x)\cdot z(x)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-x^2).$$

$$V=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$$



Второй способ. Рассекая это же тело плоскостями $y=\text{const}$, в сечениях получим прямоугольники с площадями

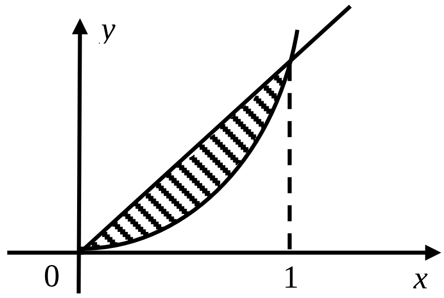
$$S(y)=2x(y)\cdot z(y)=2\sqrt{a^2-y^2}\cdot\sqrt{3}y.$$

$$V=2\sqrt{3}\int\limits_{0}^{a}y\sqrt{a^2-y^2}dy=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3. \quad \blacktriangle$$

Пример 9

Найдите объем тела, полученного вращением области, заключенной между линиями $y=x^2$ и $y=x$ вокруг оси абсцисс.

$\triangle$



Библиотека БГУИР

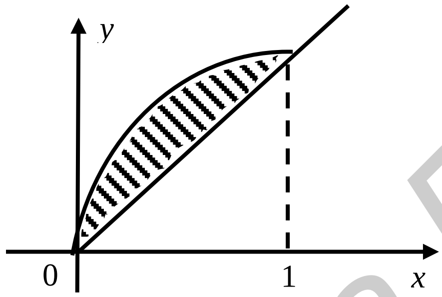
Линии $y = x^2$ и $y = x$ пересекаются в точках с абсциссами 0 и 1. Объем данного тела вращения равен разности объемов двух тел, полученных вращением вокруг оси Ox двух криволинейных трапеций, соответствующих функциям $y = x$ и $y = x^2$. Следовательно,

$$V = \pi\int_0^1 x^2 dx - \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2}{15}\pi. \quad \blacktriangle$$

Пример 10

Найдите площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси Ox фигуры, образованной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x$.

△



Площадь $S_1 = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\sqrt{1 + ((\sqrt{x})')^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx =$

$$= \pi\int_0^1 \sqrt{1 + 4x}\,dx = \frac{1}{6}\pi(1 + 4x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1).$$

Площадь S_2 поверхности, образованной вращением отрезка прямой $y = x$, равна

$$S_2 = 2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt{1 + (x')^2}\,dx = 2\sqrt{2}\pi\int_0^1 x\,dx = \sqrt{2}\pi.$$

Таким образом,

$$S = S_1 + S_2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{6} + \sqrt{2} - \frac{1}{6}\right)\pi. \quad \blacktriangle$$

Пример 11

Кривая линия задана уравнением $y = \ln\sin x$. Найдите длину дуги AB этой кривой от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Библиотека БГУИР

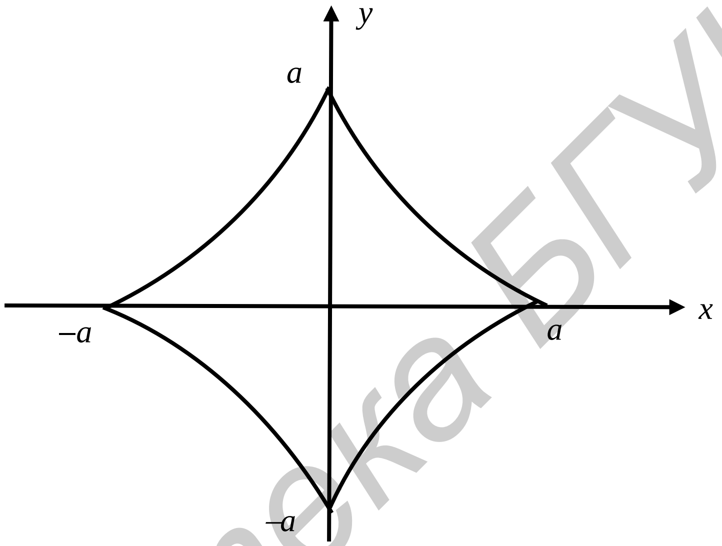
$$\triangle \quad L=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+(\ln\sin x)'^2}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ln 3. \quad \blacktriangle$$

Пример 12

Вычислите длину астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3} \quad (a>0)$.

$\triangle$



Очевидно, что функции $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ задают астроиду параметрически. Ввиду симметрии, $L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=$$

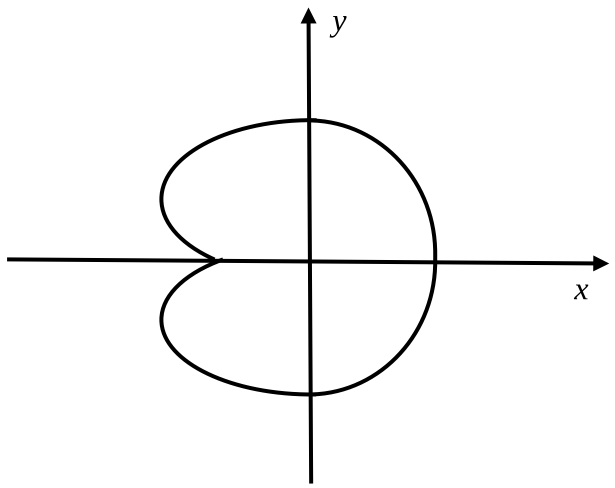
$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=6a\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=-3a\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=6a. \quad \blacktriangle$$

Библиотека БГУИР

Пример 13

Найдите длину кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi) \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$.

$\triangle$



Ввиду симметрии, $L = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$

$$L = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a. \quad \blacktriangle$$

Пример 14

Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 12t - t^2$ (м/с). Найдите длину пути, пройденного телом от начала движения до его остановки.

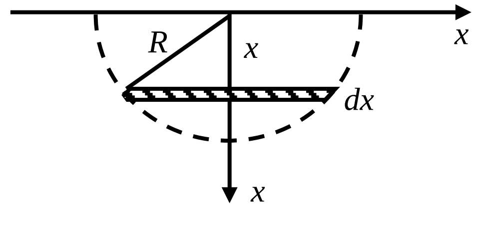
$\triangle$ Найдем промежуток времени движения тела: $12t - t^2 = 0,\ t \in [0;12]$.

$$S(t) = \int\limits_0^{12} (12t - t^2)\, dt = \left(6t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{12} = 144(6-4) = 288 \text{ м.} \quad \blacktriangle$$

Пример 15

Найдите величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого равен k и находится на поверхности воды.

$\triangle$



Согласно закону Паскаля, давление ΔP жидкости на площадку ΔS, погруженную на глубину h, равно $\Delta P = \rho g h \Delta S$.

Библиотека БГУИР

Дифференциал давления на выделенную элементарную площадку выразим так: $dP = 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$ Отсюда

$$P = \int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\rho g\int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) = -\frac{2}{3}\rho g (R^2 - x^2)^{3/2}\Big|_0^R =$$

$$= \frac{2}{3}\rho g R^3. \quad \blacktriangle$$

Пример 16

Вычислите работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если для удлинения ее на 1 см необходимо приложить силу 100 Н.

$\triangle$ Согласно закону Гука, сила F, растягивающая пружину, равна $F = kx.$ Так как $100 = k \cdot 0{,}01,$ получаем $k = 10^4.$ Следовательно, искомая работа равна

$$A = \int_a^b F(x)dx = 10^4 \cdot \int_0^{0,1} x dx = 10^4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,1} = 50 \text{ Дж.} \quad \blacktriangle$$

Пример 17

Определите работу A, необходимую для запуска тела массой m с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h.

$\triangle$ Обозначим через F силу притяжения тела Землей. Согласно закону Ньютона, $F = G\dfrac{m \cdot m_3}{x^2}$, где $x -$ расстояние от центра Земли. Полагая $Gm \cdot m_3 = k$, получаем $F(x) = \dfrac{k}{x^2}$, $R \le x \le h + R$, где R – радиус Земли.

При $x = R$, $F(x) = mg = \text{P}$, т. е. $\dfrac{k}{R^2} = P$, откуда $k = PR^2$ и $F(x) = \dfrac{PR^2}{x^2}.$

Таким образом,

$$A = \int_R^{R+h} F(x)dx = PR^2\int_R^{R+h}\frac{dx}{x^2} = -PR^2 \cdot \frac{1}{x}\Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}. \quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболами $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Ответ: a^2.

Библиотека БГУИР

3. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением вокруг оси абсцисс дуги кривой линии $y=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1,\\ -x+2, & 1\le x\le 2.\end{cases}$

Ответ: $\dfrac{8}{15}\pi.$

4. Вычислите длину первого витка винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,$ $z=ht\quad (0\le t\le 2\pi).$

Ответ: $2\pi\sqrt{a^2+h^2}.$

5. Скорость прямолинейного движения материальной точки $v=te^{-0{,}01t}$ (м/с). Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

Ответ: 10^4 м.

6. Вычислите работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из конического сосуда, обращенного вершиной вниз и имеющего радиус основания R и высоту H.

Ответ: $\dfrac{\pi\rho g R^2 H^2}{12}.$

Занятия 11–12
Несобственные интегралы. Самостоятельная работа

Пример 1

Вычислите следующие несобственные интегралы первого рода или установите их расходимость, основываясь на определении этих интегралов:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3};$ б) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^2};$ в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx;$ г) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\sin x dx.$

$\triangle$ а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A x^{-3}dx=\lim_{A\to+\infty}-\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^A=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2A^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2};$

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{2xdx}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\lim_{A\to+\infty}\ln(1+x^2)\bigg|_0^A=$

$=\displaystyle\lim_{A\to+\infty}(\ln(1+A^2)-0)=+\infty.$ Интеграл расходится;

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx=\int_{-\infty}^{0}e^x dx+\int_0^{+\infty}e^x dx.$

Для того чтобы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились независимо один от другого оба несобственных интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx$ и $\int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx$.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{0} e^x dx = \lim_{A\to-\infty} e^x\Big|_A^0 = \lim_{A\to-\infty}(1-e^A) = 1.$$

$\int\limits_{0}^{\infty} e^x dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A} e^x dx = \lim\limits_{A\to+\infty} e^x\Big|_0^A = \lim\limits_{A\to+\infty}(e^A-1) = +\infty.$ Интеграл расходится;

г) $$\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin x dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A} x\sin x dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A} xd(-\cos x) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}(-x\cos x)\Big|_0^A + \int\limits_{0}^{A}\cos x dx = \lim_{A\to+\infty}(-A\cos A + \sin A).$$

Поскольку предел полученного выражения при $A\to+\infty$ не существует, то рассматриваемый несобственный интеграл расходится. ▲

Пример 2

Вычислите следующие несобственные интегралы с помощью обобщенных формул Ньютона – Лейбница:

а) $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+5}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{2}\dfrac{dx}{x^2(1+x)}$.

△ а) функция $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ имеет первообразную на $[2;\ +\infty]$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[2;\ b]$. Тогда

$$\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(2) = F(x)\Big|_2^{+\infty},$$

где $F(x)$ – любая первообразная.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \frac{1}{2}\int(x^2-3)^{-3/2}d(x^2-3) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-3}};$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\Bigg|_2^{\infty} = -(0-1) = 1;$$

б) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

в) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

Разложим дробь $\dfrac{1}{x^2(1+x)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{D}{1+x}.$$

$$Ax(1+x) + B(1+x) + Dx^2 = 1.$$

Отсюда находим $A = -1$, $B = 1$, $D = 1$.

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2(1+x)} = \int\limits_{-\infty}^{-2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \left(-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|1+x| \right)\Bigg|_{-\infty}^{-2} =$$

$$= \left(\ln\left|\frac{1+x}{x}\right| - \frac{1}{x} \right)\Bigg|_{-\infty}^{-2} = \frac{1}{2} - \ln 2. \ \blacktriangle$$

Пример 3

Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 2x + 3} dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x}$.

$\triangle$ а) функция $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2 + 2x + 3}$ интегрируема на любом конечном промежутке $[1; b] \subset [1; +\infty]$. Так как $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{x^2}$ $(S = 2)$, то $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 2x + 3} dx$ является сходящимся;

б) $f(x)$ непрерывна и

$\dfrac{1}{\sqrt{x} + \cos^2 x} \ge \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} \ge \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(S = \dfrac{1}{2} \right)$ $\forall x \in [1; +\infty]$, то $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^2 x}$ является расходящимся. $\blacktriangle$

Пример 4

Исследуйте на сходимость интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2x + \sqrt[3]{x^4 + 1}}{x^2 + 3\sqrt{x^5 + 2}} dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{(2x^4 - 7)\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^9 + 3x - 2}} dx$;

в) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}\,\mathrm{arctg}\, x}{\sqrt[3]{x^4 + 2}} dx$.

Библиотека БГУИР

$\triangle$ а) $\dfrac{2x+\sqrt[3]{x^4+1}}{x^2+3\sqrt{x^5+2}}=\dfrac{x^{4/3}\left(2x^{-1/3}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^4}}\right)}{3x^{5/2}\left(\dfrac{x^{-1/2}}{3}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^5}}\right)}\sim\dfrac{1}{3x^{7/6}},\quad x\to+\infty.$

$\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{2x+\sqrt[3]{x^4+1}}{x^2+3\sqrt{x^5+2}}dx$ – сходится;

б) $\dfrac{(2x^4-7)\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^9+3x-2}}\sim\dfrac{2}{x},\quad x\to+\infty.$

$\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{(2x^4-7)\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^9+3x-2}}dx$ – расходится;

в) $\dfrac{\sqrt[4]{x+1}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{x^4+2}}\sim\dfrac{x^{1/4}\cdot\dfrac{\pi}{2}}{x^{4/3}}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{13/12}},\quad x\to+\infty.$

$\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{x^4+2}}dx$ – сходится. ▲

Пример 5

Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{5\sin 3x-1}{x^2+\sqrt{x}}dx.$

$\triangle$ $\dfrac{|5\sin 3x-1|}{x^2+\sqrt{x}}\le\dfrac{6}{x^2+\sqrt{x}}\sim\dfrac{6}{x^2},\quad x\to+\infty.$

$\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{5\sin 3x-1}{x^2+\sqrt{x}}dx$ – сходится абсолютно. ▲

Пример 6

Докажите, что $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x}dx$ сходится условно.

$\triangle$ $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x}dx=\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\dfrac{1}{x}d\sin x=\dfrac{1}{x}\sin x\Bigg|_{\pi/2}^{+\infty}+\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}dx=-\dfrac{2}{\pi}+\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}dx.$

Библиотека БГУИР

Так как $\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$, то $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно, а значит $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ является сходящимся.

Рассмотрим $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$, $\quad \frac{|\cos x|}{x} \ge \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1+\cos 2x}{2x}$.

$$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1+\cos 2x}{2x} dx = \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{2x} = \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} d(2x) =$$

$$= \frac{\ln x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Так как $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ сходится, а $\ln(+\infty) = +\infty$, то $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ является расходящимся. Таким образом, $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ сходится условно. ▲

Пример 7

Найдите $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

△ Ранее было установлено, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}. \quad ▲$$

Пример 8

Найдите $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{sh}\, x dx$.

△ Функция $f(x) = \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{sh}\, x$ является нечетной и интегрируема на любом конечном отрезке. Поэтому $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{sh}\, x dx = 0$. ▲

Библиотека БГУИР

Пример 9

Исходя из определения, вычислите несобственные интегралы второго рода или докажите их расходимость:

а) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$.

$\triangle$ а) подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ неограничена в окрестности точки $x=1$. На любом отрезке $[1+\varepsilon;\ e]$ она интегрируема. Поэтому

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^{e}\right) = \frac{3}{2}.$$

б) $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = +\infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится. $\blacktriangle$

Пример 10

Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ с помощью обобщенной формулы Ньютона – Лейбница.

$\triangle$ Функция $F(x)=\arcsin\frac{x}{2}$ является обобщенной первообразной для $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на [0; 2]. Поэтому $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}$. $\blacktriangle$

Пример 11

Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$; б) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$; в) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}\,dx$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt[3]{x}}{\ln(1+\sqrt{x^3})}dx.$

$\triangle$ а) функция $\dfrac{1}{\sqrt{6x-x^2-5}}$ интегрируема на любом отрезке $[\varepsilon;\,2]\subset(1;\,2]$.

При всех $x\in(1;\,2]$ $\quad 0<\dfrac{1}{\sqrt{6x-x^2-5}}=\dfrac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^{1/2}}$.

$\int\limits_1^2\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^{1/2}}dx$ сходится, так как $S=\dfrac{1}{2}<1$, тогда в силу теоремы сравнения рассматриваемый несобственный интеграл тоже сходится;

б) особая точка $x=2$.

$$\int\limits_1^3\frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}=\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}+\int\limits_2^3\frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}.$$

Для сходимости $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$ необходимо и достаточно, чтобы сходились независимо один от другого оба несобственных интеграла

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}\ \text{ и }\ \int\limits_2^3\frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}.$$

Рассмотрим $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$.

Функция $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}\ge\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\dfrac{1}{(x-2)^{5/3}}$ для $\forall x\in(1;\,2]$. Так как $\int\limits_1^2\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\dfrac{1}{(x-2)^{5/3}}dx$ расходится $\left(S=\dfrac{5}{3}>1\right)$, то и $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^5}}$ тоже расходится;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4+x^2}\cdot\sqrt[3]{2+x}}\cdot\dfrac{1}{(2-x)^{1/3}}\sim\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{32}}\cdot\dfrac{1}{(2-x)^{1/3}}$, $\ x\to 2$.

На основании предельного признака сравнения $\int\limits_1^2\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{16-x^4}}$ сходится;

г) $\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x}}{\ln(1+\sqrt{x^3})}\sim\dfrac{x^{1/3}}{x^{3/2}}=\dfrac{1}{x^{7/6}}$, $\quad x\to+0$.

На основании предельного признака сходимости $\int\limits_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x}}{\ln(1+\sqrt{x^3})}dx$ расходится. $\blacktriangle$

Библиотека БГУИР

Пример 12

Найдите $V.P.\int_{-2}^{4}\frac{dx}{x}$.

$\triangle$ Особая точка $x=0$.

$$V.P.\int_{-2}^{4}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-2}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{4}\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-2}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{4}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon-\ln 2+\ln 4-\ln\varepsilon)=\ln 2.\quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}$; б) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt[7]{2+3x^2}}{\sqrt[5]{x^3+3}}dx$;

в) $\int_{0}^{+\infty}\sin(x^2)dx$.

Ответы: а) сходится; б) расходится; в) сходится.

2. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int_{0}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}dx$; б) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x-\sin x}$; в) $\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x})}{e^{\operatorname{tg}x}-1}dx$.

Ответы: а) сходится; б) расходится; в) сходится.

3. Найдите главные значения несобственных интегралов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$; б) $\int_{1/2}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

Ответы: а) π; б) 0.

Самостоятельная работа (1 час)

Вариант 1

1. Вычислите $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

Ответ: $2-\ln 2$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=6$ и $x+y-7=0$.

Ответ: $\frac{35}{2}-6\ln 6$.

Библиотека БГУИР

3. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=2$.

Ответ: $\frac{28}{3}\pi$.

4. Пластина, имеющая форму равнобедренного треугольника с основанием a и высотой b, вертикально погружена в жидкость плотностью ρ. Вершина треугольника находится на поверхности жидкости, основание – параллельно этой поверхности. Найдите силу давления жидкости на пластину.

Ответ: $\frac{\rho gcb^2}{3}$.

5. Найдите работу, затрачиваемую на выкачивание жидкости из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r. Плотность жидкости равна ρ.

Ответ: ρgar^2.

6. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{1+2x^3}}{\sqrt[5]{3+4x^3}}dx$.

Ответ: расходится.

7. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt{x+2x^2}}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}dx$.

Ответ: сходится.

Вариант 2

1. Вычислите $\int\limits_1^{9}x\sqrt[3]{1-x}dx$.

Ответ: $-\frac{468}{7}$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=1$ и $3x+4y=7$.

Ответ: $\frac{7}{24}-\ln\frac{4}{3}$.

3. Вычислите объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2+y^2+z^2=16$ плоскостями $x=2$ и $x=3$.

Ответ: $\frac{29}{3}\pi$.

Библиотека БГУИР

4. Пластина в форме прямоугольного треугольника с катетами a и b опущена вертикально в жидкость плотности ρ так, что катеты находятся на поверхности жидкости. Найдите силу давления жидкости на пластину.

Ответ: $\dfrac{\rho g a b^2}{b}$.

5. Вычислите работу, которую надо затратить при постройке пирамиды с квадратным основанием, если высота пирамиды H, сторона основания a, плотность материала ρ.

Ответ: $\dfrac{1}{12}\rho g a^2 H$.

6. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+5x^2}}{\sqrt[5]{3x^9+4}}dx$.

Ответ: сходится.

7. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_0^{1} \dfrac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{\sqrt[3]{x^5+x^7}}dx$.

Ответ: расходится.

Занятие 13
Основные понятия функции нескольких переменных. Частные производные, дифференциал

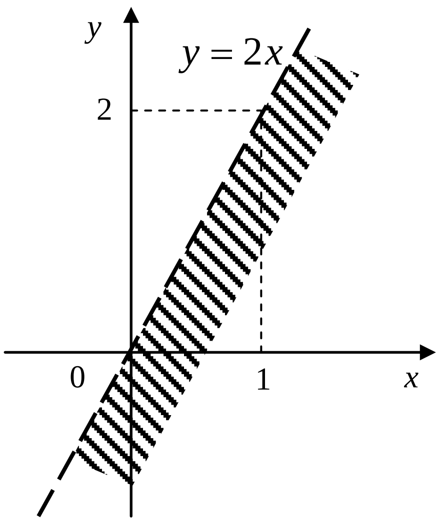
Пример 1

Найдите и изобразите область определения функции:

а) $z=\ln(2x-y)$; б) $z=y\sqrt{\sin x}$; в) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

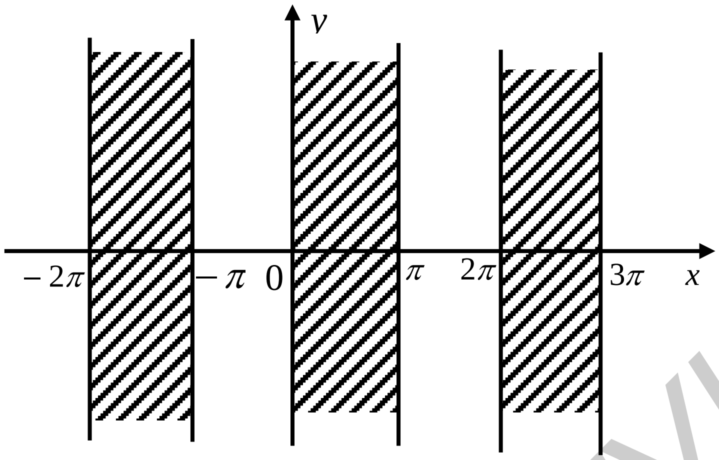
г) $z=\arccos\dfrac{1}{x+y}$; д) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arccos(1-y)$.

$\triangle$ а) область определения функции описывается неравенством $y<2x$;

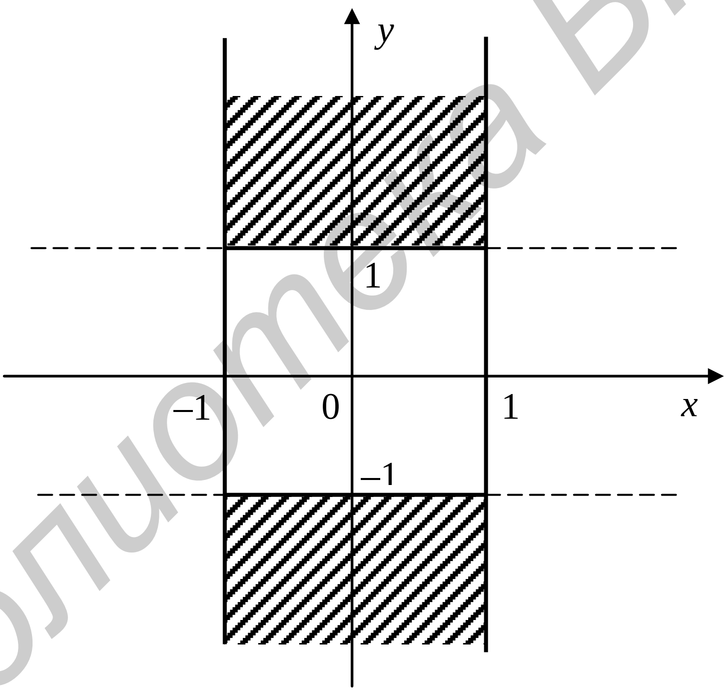


Библиотека БГУИР

б) областью определения функции является множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sin x \geq 0$. Это неравенство эквивалентно совокупности неравенств $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

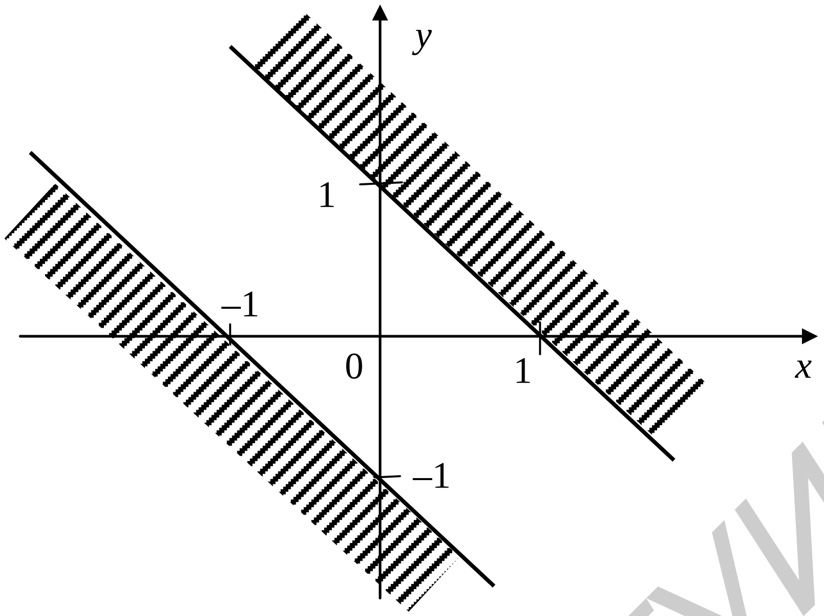


в) $\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \geq 1; \end{cases}$



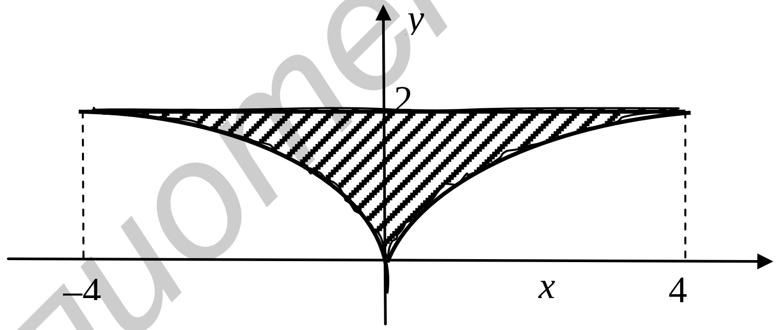
г) $\left[\begin{array}{l} y + x \geq 1 \\ y + x \leq -1 \end{array}\right. \sim \left[\begin{array}{l} y \geq 1 - x, \\ y \leq -1 - x; \end{array}\right.$

Библиотека БГУИР



д) $\begin{cases} 0 < y \geq 2, \\ -y^2 \leq x \leq y^2. \end{cases}$

Это криволинейный треугольник, ограниченный параболами $x = y^2$, $x = -y^2$ и прямой $y = 2$, исключая вершину $O(0;0)$.



Пример 2

Найдите линии уровня функции:

а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = x^2 - y^2$; в) $z = \ln(x^2 + y)$; г) $z = \sqrt{xy}$; д) $z = (x + y)^2$.

$\vartriangle$ Ответы: а) концентрические окружности $x^2 + y^2 = c,\ c \geq 0$; б) семейство равносторонних гипербол $x^2 - y^2 = c,\ c \neq 0$; при $c = 0$ – пара прямых $y = \pm x$; в) параболы $y = c - x^2,\ c > 0$; г) семейство равносторонних гипербол $xy = c,\ c > 0$; при $c = 0$ – оси координат; д) параллельные прямые $y = c - x,\ c \geq 0$. ▲

Библиотека БГУИР

Пример 3

Найдите поверхности уровня следующих функций:

а) $u = x + y + z$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2$; в) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

△ Ответы: а) плоскости $x + y + z = c$, параллельные плоскости $x + y + z = 0$; б) однополостные гиперболоиды $x^2 + y^2 - z^2 = c$, $c > 0$; двухполостные гиперболоиды при $c < 0$, конус при $c = 0$. ▲

Пример 4

Покажите, что следующие пределы: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ – не существуют.

△ а) исследуем предел этой функции по различным направлениям в точке (0; 0):

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Полученное значение зависит от k. Следовательно, указанный предел не существует;

б) поступим аналогичным способом:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = 0.$$

В то же время $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе хотя и существует, но отличен от общего значения пределов по направлениям. Тем самым мы показали, что предел в точке (0; 0) не существует. ▲

Пример 5

Вычислите следующие пределы: а) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ y\to \pi}} \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

Библиотека БГУИР

$\triangle$ а) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to\pi}} \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y} = \lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to\pi}} \dfrac{2\sin\dfrac{x-y}{2}\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}}{\dfrac{x-y}{2}\cdot 2} = \lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to\pi}} \cos\dfrac{x+y}{2} = -1;$

б) пусть $x \neq 0,\ \ y \neq 0,$ тогда

$$0 < \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \frac{x^2}{x^4+y^4} + \frac{y^2}{x^4+y^4} \le \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) = 0,$ то и $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0;$

в) имеем $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \frac{x}{x+y}} = e.$ ▲

Пример 6

Исследуйте функцию $z = \dfrac{\ln(xy+y)+y^2}{\sqrt{x}}$ на непрерывность.

$\triangle$ Область определения частного двух функций есть пересечение областей определения делимого и делителя, из которого удалены точки, в которых делитель обращается в нуль. В данном случае область определения описывается системой неравенств $\begin{cases} xy+y>0 \\ x>0 \end{cases} \sim \begin{cases} x>0; \\ y>0. \end{cases}$ ▲

Пример 7

Исследуйте функцию $z = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$ на непрерывность. Найдите предел функции в точках разрыва.

$\triangle$ Поскольку числитель и знаменатель – непрерывные функции, то функция имеет разрыв лишь в точках, где знаменатель x^3+y^3 обращается в нуль, т. е. на прямой $y=-x$.

Пусть $x_0 \neq 0,\ \ y_0 \neq 0,\ \ x_0+y_0=0,$ тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} = \frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}.$$

Библиотека БГУИР

Значит, точки прямой $y=-x,\ (x\neq 0)$ – точки устранимого разрыва функции z. Из соотношения $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{x+y}{x^3+y^3}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}=+\infty$ следует, что точка $O(0;\,0)$ – точка бесконечного разрыва. ▲

Пример 8

Пользуясь определением частных производных, найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=xy^2$.

$$\triangle\ \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x+\Delta x;\,y)-z(x;\,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)y^2-xy^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y^2(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(x;\,y+\Delta y)-z(x;\,y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x(y+\Delta y^2)-xy^2}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x(y^2+2y\cdot\Delta y+\Delta y^2-y^4)}{\Delta y}=2xy.\quad ▲$$

Пример 9

Найдите частные производные следующих функций:

а) $z=x^2+y^3+3x^2y^3$; б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{1+x^2}$; в) $u=e^{x/y}+e^{-y/z}$;

г) $z=\operatorname{tg}(x+2y)\cdot e^{x/y}$; д) $u=\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

$$\triangle\ \text{а)}\ \frac{\partial z}{\partial x}=2x+6xy^3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+9x^2y^2;$$

$$\text{б)}\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{(1+x^2)^2}}\cdot y(-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2x=\frac{-2xy}{x^4+2x^2+1+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{(1+x^2)^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2+1}{x^4+2x^2+1+y^2};$$

$$\text{в)}\ \frac{\partial u}{\partial x}=e^{x/y}\cdot\frac{1}{y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x/y}\cdot\frac{x}{y^2}+e^{-y/z}\left(-\frac{1}{z}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=e^{-y/z}\cdot\frac{y}{z^2};$$

Библиотека БГУИР

г) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\cos^2(x+2y)} \cdot e^{x/y} + \mathrm{tg}(x+2y) \cdot e^{x/y} \cdot \dfrac{1}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(x+2y)} \cdot 2e^{x/y} + \mathrm{tg}(x+2y) \cdot e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

д) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^{z-1} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = z \cdot \left(\dfrac{y}{x}\right)^{z-1} \cdot \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{z} \cdot \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$. ▲

Пример 10

Найдите полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = \ln \mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$; б) $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.

△ а) найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{2y}{x^2 \sin\frac{2y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x \sin\frac{2y}{x}}.$$

Следовательно,

$$d = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2}{x\sin\frac{2y}{x}}\left(dy - \frac{y}{x}dx\right);$$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + x \sin y) + e^x \sin y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^x(-\sin y + x\cos y)$,

$dz = e^x(x\cos y - \sin y)dy + (\sin y + \cos y + x\sin y)dx$. ▲

Дополнительные задачи

1. Определите область определения функций:

а) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; б) $z = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

Ответы: а) замкнутый угол, ограниченный лучами $y = x,\ x \ge 0$ и $y = -x,\ x \ge 0$; б) семейство концентрических колец $2\pi k \le x^2 + y^2 \le \pi(2k+1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

2. Найдите множество значений функции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3$.

Ответ: $[-4; +\infty)$.

Библиотека БГУИР

3. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-1/_{x^2+y^2}}$.

Ответ: $\sqrt{e}$.

4. Найдите частные производные функций:

а) $f=\dfrac{x(x-y)}{y^2}$; б) $f=e^x(\cos y+x\sin y)$.

Ответ: а) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2x-y}{y^2}$; б) $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{xy-2x^2}{y^3}$.

5. Найдите дифференциал функции $f=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$ в точке $M(3;\,2;\,1)$.

Ответ: $\dfrac{2dx+3dy-12dz}{37}$.

Занятие 14
Применение дифференциала. Производная сложной функции. Производная по направлению

Пример 1

Предполагая, что x и y малы по абсолютной величине, выведите формулу $(1+x)^m\cdot(1+y)^n\approx 1+mx+ny$.

$\triangle$ Рассмотрим функцию $z=(1+x)^m\cdot(1+y)^n$. При $x_0=y_0=0$ имеем $z_0=1$. Находим полный дифференциал функции $z=(1+x)^m\cdot(1+y)^n$ в любой точке:

$$dz=m(1+x)^{m-1}\cdot(1+y)^n\Delta x+n(1+y)^{n-1}(1+x)\Delta y.$$

Так как $z_0=1$, $\Delta x=x-x=x$, $\Delta y=y-y=y$, окончательно получаем

$$(1+x)^m\cdot(1+y)^n\approx z_0+dz\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}}\approx 1+mx+ny.\ \blacktriangle$$

Пример 2

Заменив приращение функции дифференциалом, приближенно вычислите $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$.

При $x_0=0,\ y_0=0$ имеем $z_0=3$. Находим полный дифференциал функции

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{2}((1+x)^3+(2+y)^3)^{-1/2}\cdot 3(1+x)^2dx+$$

$$+\frac{1}{2}((1+x)^3+(2+y)^3)^{-1/2}\cdot 3(2+y)^2\,dy.$$

В нашем случае $x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=3,\ \Delta x=dx=0{,}02,\ \Delta y=dy=-0{,}03.$

Таким образом, $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}\approx z_0+\dfrac{\Delta x}{2}-2\Delta y=3+0{,}01-0{,}06=2{,}95.$ ▲

Пример 3

Закрытый ящик, имеющий наружные размеры $x=10$ см, $y=8$ см, $z=6$ см, сделан из фанеры толщиной 0,2 см. Определите приближенно объем затраченного на ящик материала.

△ Найдем объем ящика $V=xyz.$ Объем затраченного на ящик материала приближенно равен $|dV|.$

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=yzdx+xzdy+xydz.$$

Так как $dx=dy=dz=-0{,}4,$ окончательно получим

$$dV=-8\cdot 6\cdot 0{,}4-10\cdot 6\cdot 0{,}4-10\cdot 8\cdot 0{,}4\approx -75.$$

Таким образом, внутренний объем ящика меньше внешнего объема на 75 см^3, т. е. объем затраченного на ящик материала приближенно равен 75 см^3. ▲

Пример 4

Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{x}{y},$

где $x=e^t,\ y=\ln t.$

△ $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{y}e^t-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{\ln t}e^t-\frac{e^t}{\ln^2 t}\cdot\frac{1}{t}=$$

$$=\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}.$$ ▲

Пример 5

Найдите $\dfrac{du}{dt}$, если $u=xyz,$

где $x=t^2+1,\ y=\ln t,\ z=\operatorname{tg} t.$

△ $$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=yz\cdot 2t+xz\cdot\frac{1}{t}+xy\cdot\frac{1}{\cos^2 t}=$$

$$=2t\ln t\cdot\operatorname{tg} t+\frac{(t^2+1)\operatorname{tg} t}{t}+\frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}.$$ ▲

Библиотека БГУИР

Пример 6

Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $y = x^2$.

$\triangle$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{2x}{x} = -\frac{x^2}{x^2+x^4} + \frac{2x^2}{x^2+x^4} = \frac{1}{1+x^2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 7

Найдите $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$, если $u = \ln(x^2+y^2)$,

где $x = \xi\eta$, $\quad y = \dfrac{\xi}{\eta}$.

$\triangle$ $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \xi} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot\eta + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{\eta} =$

$$= \frac{2\xi\eta^2}{\xi^2\eta^2+\dfrac{\xi^2}{\eta^2}} + \frac{2\dfrac{\xi}{\eta}}{\xi^2\eta^2+\dfrac{\xi^2}{\eta^2}}\cdot\frac{1}{\eta} = \frac{2\xi\eta^4+2\xi}{\xi^2\eta^4+\xi^2} = \frac{2}{\xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\xi + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) =$$

$$= \frac{2\xi^2\eta}{\xi^2\eta^2+\dfrac{\xi^2}{\eta^2}} - \frac{2\dfrac{\xi^2}{\eta^2}}{\xi^2\eta^2+\dfrac{\xi^2}{\eta^2}} = \frac{2(\eta^4-1)}{\eta(\eta^4+1)}. \quad \blacktriangle$$

Пример 8

Покажите, что функция $z = y\varphi(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению

$\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

$\triangle$ Пусть $x^2 - y^2 = t$ является промежуточным аргументом, тогда

Библиотека БГУИР

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(t)\cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(t) + y\cdot\varphi'(t)(-2y).$$

Подставляя частные производные в левую часть уравнения будем иметь

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}y\varphi'(t)\cdot 2x + \frac{1}{y}(\varphi(t) - 2y^2\varphi'(t)) =$$

$$= 2y\varphi'(t) + \frac{1}{y}\varphi(t) - 2y\varphi'(t) = \frac{y\varphi(t)}{y^2} = \frac{z}{y^2}. \quad ▲$$

Пример 9

Найдите производную функции $u = x^2yz$ в точке $M_0(2; -3; 1)$ по направлению $\bar{l} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 12\bar{k}$.

△ Находим частные производные функции u в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.2xyz\right|_{M_0} = -12; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.x^2z\right|_{M_0} = 4; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.x^2y\right|_{M_0} = -12.$$

Определим направляющие косинусы вектора $\bar{e}$:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = \frac{4}{13}; \quad \cos\beta = -\frac{3}{13}; \quad \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = -12\cdot\frac{4}{13} + 4\left(-\frac{3}{13}\right) + (-12)\cdot\frac{12}{13} = -15\frac{9}{13}. \quad ▲$$

Пример 10

Найдите производную функции $u = \ln(xy + yz + xz)$ в точке $M_0(0; 1; 1)$ по направлению окружности $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$

△ Запишем векторное уравнение окружности $\bar{r}(t) = \cos t\bar{i} + \sin t\bar{j} + \bar{k}$.

Найдем вектор $\bar{r}$, касательный к ней в любой точке M.

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -\sin t\bar{i} + \cos t\bar{j} + 0\bar{k}.$$

Точке $M_0(0; 1; 1)$ соответствует значение параметра $t = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\left.\bar{\tau}\right|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{2}\bar{i} + \cos\frac{\pi}{2}\bar{j} = -\bar{i}.$$

Отсюда следует, что направляющие косинусы касательной к окружности в точке M_0 равны $\cos\alpha = -1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$.

Библиотека БГУИР

Найдем значения частных производных в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{y+z}{xy+yz+xz}\right|_{M_0} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{x+z}{xy+yz+xz}\right|_{M_0} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\frac{y+x}{xy+yz+xz}\right|_{M_0} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{M_0} = 2\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 0 = -2. \quad \blacktriangle$$

Пример 11

Определите угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точках $A(a;\,0;\,0)$ и $B(0;\,b;\,0)$, $\quad (ab \neq 0)$.

△ Имеем

$$\operatorname{grad} u(A) = \left(\frac{\partial u(A)}{\partial x};\ \frac{\partial u(A)}{\partial y};\ \frac{\partial u(A)}{\partial z}\right) = (2a;\,0;\,0).$$

$$\operatorname{grad} u(B) = \left(\frac{\partial u(B)}{\partial x};\ \frac{\partial u(B)}{\partial y};\ \frac{\partial u(B)}{\partial z}\right) = (0;\,2b;\,0).$$

Так как скалярное произведение этих ненулевых векторов равно нулю, получаем, что $\cos\varphi = 0$ т. е. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. ▲

Пример 12

Найдите в точке $M_0(2;\,1)$ наибольшую скорость роста функции $z = x^2 y - 2y^3$.

△ Поскольку функция дифференцируема в точке M_0, то наибольшая скорость ее роста в этой точке равна модулю ее градиента в этой точке. Находим градиент данной функции в произвольной точке:

$$\operatorname{grad} z = (2xy;\, x^2 - 6y^2).$$

Выпишем значение градиента в заданной точке $M_0(2;\,1)$:

$$\operatorname{grad} z(2;1) = (4;\,-2).$$

Находим искомую скорость:

$$\left|\operatorname{grad} z(2;1)\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}. \quad \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Заменив приращение функции дифференциалом, приближенно вычислите $(1{,}02)^3\cdot 0{,}97^3$.

Ответ: 0,97.

2. Найдите полный дифференциал функции $z = x^2 - y^2$, где $x = u\cos v$, $\quad y = u\sin v$.

Библиотека БГУИР

Ответ: $dz = 2u(\cos 2v du - u \sin 2v dv)$.

3. Покажите, что функция $z = \varphi(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. Найдите угол между градиентами функций f_1 и f_2 в точке M, если $f_1 = \dfrac{y^2}{x}$, $f_2 = 2x^2 + y^2$, $M(x_0; y_0)$, $x \neq 0$.

Ответ: $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Занятие 15
Касательная плоскость и нормаль. Производные и дифференциалы высших порядков

Пример 1

Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ в точке $M_0(3; 1; 4)$.

△ Поверхность S запишем в виде $F(x; y; z) = \dfrac{x^2 - y^2}{2} - z = 0$. Построим плоскость, проходящую через точку $M_0(3; 1; 4)$ и имеющую нормальный вектор $\operatorname{grad} F(3;1;4)$:

$$\operatorname{grad} F(3;1;4) = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\bar{i} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\bar{j} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\bar{k} = x\Big|_{M_0}\bar{i} - y\Big|_{M_0}\bar{j} - 1\cdot\bar{k} =$$
$$= 3\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}.$$

Запишем уравнение касательной плоскости

$$3(x-3) - (y-1) - (z-4) = 0, \qquad 3x - y - z - 4 = 0.$$

Запишем уравнение нормали

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-1}. \quad ▲$$

Пример 2

Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\ln(e^{xy} + z) = 0$ в точке $M_0(0; 4; 0)$.

△ Найдем нормальный вектор плоскости в точке $M_0(0; 4; 0)$:

$$\operatorname{grad} F(0;4;0)=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\bar{i}+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\bar{j}+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\bar{k}=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{e^{xy}+z}\cdot ye^{xy}\right)\right|_{M_0}\bar{i}+\left.\frac{1}{e^{xy}+z}\cdot xe^{xy}\right|_{M_0}\bar{j}+\left.\frac{1}{e^{xy}+z}\right|_{M_0}\bar{k}=4\bar{i}+0\,\bar{j}+\bar{k}.$$

Уравнение касательной плоскости

$$4(x-0)+0(y-4)+1(z-0)=0,\qquad 4x+z=0.$$

Уравнение нормали

$$\frac{x}{4}=\frac{y-4}{0}=\frac{z}{1}.\quad \blacktriangle$$

Пример 3

Найдите точку на поверхности $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}$, нормаль в которой параллельна прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности в этой точке.

$\triangle$ Направляющий вектор нормали к поверхности в произвольной точке $(x;y;z)$ имеет вид: $\left(\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}\right)'_x;\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}\right)'_y;-1\right)=\left(x;\dfrac{y}{2};-1\right)$.

По условию нормаль в искомой точке параллельна заданной прямой. Записывая критерий коллинеарности двух векторов, получаем соотношения $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y/2}{-1}=\dfrac{-1}{1}$. Из этих соотношений находим координаты точки M_0, в которой нормаль параллельна заданной прямой: $x=-1$, $y=2$, $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Запишем уравнение касательной плоскости

$$(x+1)-(y-2)+\left(z-\frac{3}{2}\right)=0,\ \text{ или }\ 2x-2y+2z+3=0.\quad \blacktriangle$$

Пример 4

Найдите частные производные второго порядка функции $z=x^{y^2}$.

$\triangle$ Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\cdot x^{y^2-1};\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=x^{y^2}\ln x\cdot 2y.$$

Вычисляя частные производные от частных производных первого порядка, получаем частные производные второго порядка данной функции:

Библиотека БГУИР

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \cdot (y^2 - 1)x^{y^2 - 2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1} + y^2 x^{y^2-1} \ln x \cdot 2y = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y^{y^2} \cdot x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2} \cdot \frac{1}{x} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^{y^2} \ln x \cdot 2y \cdot \ln x \cdot 2y + 2x^{y^2} \ln x = 2x^{y^2} \ln x(1 + 2y^2 \ln x). \quad \blacktriangle$$

Замечание. Так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ являются непрерывными функциями, то они равны.

Пример 5

Покажите, что функция $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

$\triangle$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad \blacktriangle$$

Пример 6

Покажите, что функция $u = \varphi(x - \alpha t) + \psi(x + \alpha t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

$\triangle$ Введем обозначения: $x - \alpha t = \xi, \;\; x + \alpha t = \eta.$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2};$

Библиотека БГУИР

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(-\alpha)+\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\cdot\alpha;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\cdot\alpha^2+\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\cdot\alpha^2;$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$. ▲

Пример 7

Найдите $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8}$, если $u=e^{xy}$.

△ Указанная частная производная не зависит от порядка дифференцирования. Очевидно, $\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}=x^8e^{xy}$. Вычисляя теперь по формуле Лейбница вторую производную по x от $\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}$, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^8 \varphi}{\partial y^8}\right)=\frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8}=(x^8)''_{x^2}\,e^{xy}+2(x^8)'_x(e^{xy})'_x+x^8(e^{xy})''_{x^2}=$$

$$=56x^6e^{xy}+16x^7ye^{xy}+x^8y^2e^{xy}.\quad ▲$$

Пример 8

Найдите дифференциал второго порядка функции $z=e^{x-y^2}+\cos x$.

△ Воспользуемся формулой $d^2z=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2$.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-y^2}-\sin x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2ye^{x-y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x-y^2}-\cos x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2ye^{x-y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2e^{x-y^2}(1-2y^2).$$

В результате получаем

$$d^2z=(e^{x-y^2}-\cos x)dx^2-4ye^{x-y^2}dxdy+2e^{x-y^2}(2y^2-1)dy^2.\quad ▲$$

Пример 9

Найдите d^3z функции $z=x^3y$ в точке $M_0(1;\,1)$.

△ Найдем d^3z с помощью оператора:

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+$$

$$+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Библиотека БГУИР

Найдем частные производные третьего порядка в точке M_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 6x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0; \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{M_0} = 6; \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right|_{M_0} = 6.$$

В результате получаем $\left. d^3 z\right|_{M_0} = 6dx^3 + 18dx^2 dy$. ▲

Пример 10

Найдите второй дифференциал сложной функции $z = e^u + u$, $u = x^2 + y^2$ в точке $M_0(0; 0)$.

△ Первый дифференциал этой функции можно найти используя инвариантность формы записи дифференциала. Имеем

$$dz = d(e^u + u) = (e^u + 1)du,$$

где $du = d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy$.

Дальнейшее дифференцирование дает

$$d^2 z = d(e^u + 1)du + (e^u + 1)d^2 u = e^u du^2 + (e^u + 1)d(2xdx + 2ydy) =$$

$$= e^u (2xdx + 2ydy)^2 + (e^u + 1)(2dx^2 + 2dy^2) = (4e^u x^2 + 2e^u + 2)dx^2 +$$

$$+ 8e^u xydxdy + (4e^u y^2 + 2e^u + 2)dy^2,$$

где $u = x^2 + y^2$.

В точке $M_0(0; 0)$ $\left. d^2 z\right|_{M_0} = 4dx^2 + 4dy^2$. ▲

Дополнительные задачи

1. Найдите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

а) $z = (x - y)^2 - x + 2y$, $(1; 1; 1)$; б) $xy^2 + z^3 = 12$, $(1; 2; 2)$.

Ответ: а) $x - 2y + z = 0$, $x - 1 = \frac{y - 1}{-2} = z - 1$;

б) $x + y + 3z = 9$, $x - 1 = y - 2 = \frac{z - 2}{3}$.

2. Вычислите частные производные второго порядка функции $f(x, y)$ в заданной точке:

а) $f = \dfrac{x}{x+y}$, (1; 0); б) $f = \ln(x^2 + y)$, (0; 1).

Ответ: а) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$;

б) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1$;

3. Найдите $d^3 f$, если

а) $f = x^2 y$; б) $f = xyz$.

Ответ: а) $6dx^2dy$; б) $6dxdydz$.

4. Докажите, что функция $u = xf(x+y) + yf(x+y)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Занятие 16
Дифференцирование неявных функций. Формула Тейлора

Пример 1

Найдите производные $f'(t)$ и $f''(t)$ неявной функции $y = f(t)$, заданной уравнением $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ и удовлетворяющей условию $f(1) = 1$.

$\triangle$ Функция $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$ дифференцируема в любой окрестности точки (1; 1). Производная $F'_y = x + 2y$ непрерывна в точке (1; 1). Наконец, $F(1; 1) = 0$, $F'_y(1; 1) = 3 \neq 0$, т. е. выполнены все условия существования неявной функции в некоторой окрестности точки (1; 1). Уравнение $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ определяет единственную дифференциальную неявную функцию $y = f(x)$, причем $f(1) = 1$. Так как $F(x; y)$ дважды дифференцируема, то и $y = f(x)$ также дважды дифференцируема.

Пользуясь формулой $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$, получаем $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$, $(x \neq -2y)$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(x+2y)(2+y') - (2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2} = -\frac{18}{(x+2y)^2}, \quad (x \neq -2y).$$

Подставляя в эти равенства $x = 0$, $y = 1$, получаем

$y'(1) = -1$, $y''(1) = -2$. ▲

Библиотека БГУИР

Пример 2

Найдите y', y'', y''' при $x=0,\ \ y=1,$ если $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0.$

$\vartriangle$ Трижды продифференцируем неравенство $F(x;y)=0$:

$2x-y-xy'+4yy'+1-y'=0,$

$2-2y'-xy''+4y'^2+4yy''-y''=0,$

$-3y''-xy'''+12y'y''+4yy'''-y'''=0$

и, подставляя в результаты значения $x=0,\ \ y=1$, получаем систему уравнений

$3y'=0,$

$2+3y''=0$,

$2+3y'''=0,$

из которой находим $y'=0,\ \ y''=-\dfrac{2}{3},\ \ y'''=-\dfrac{2}{3}.$ ▲

Пример 3

Докажите, что уравнение $z^3-xyz+y^2-16=0$ определяет в некоторой окрестности точки (1; 4; 2) единственную неявную функцию вида $z=f(x,y).$

Найдите ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial x}(1;\ 4),\ \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1;4).$

$\vartriangle$ Функция $F(x;y;z)=z^3-xyz+y^2-16$ дифференцируема в любой окрестности точки $M_0(1;\ 4;\ 2)$. Производная $F'_z=3z^2-xy$ непрерывна в точке M_0. Наконец, $F(1;4;2)=0,\quad F'_z(1;4;2)=8\neq 0.$ Поэтому в некоторой окрестности точки M_0 уравнение $z^3-xyz+y^2-16=0$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $z=f(x;y),$ причем $f(1;4)=2.$

Для нахождения $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ воспользуемся формулой $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{yz}{3z^2-xy}.$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{yz'(3z^2-xy)-yz(6zz'-y)}{(3z^2-xy)^2}=$$

$$=\frac{y\dfrac{y^2}{3z^2-xy}(3z^2-xy)-yz\left(6z\dfrac{yz}{3z^2-xy}-y\right)}{(3z^2-xy)^2}=-\frac{2xy^3z}{(3z^2-xy)^3}.$$

Если в полученных равенствах положить $x=1,\ y=4,\ z=2,$ то получим $z'_x(1;4)=1,\ \ z''_{xx}(1;4)=0{,}5.$

Библиотека БГУИР

Рассмотрим другой способ решения задачи. Предполагая, что функция $z = f(x; y)$ подставлена в уравнение $z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0$, продифференцируем дважды полученное тождество по x:

$$3z^2 z'_x - yz - xyz'_x = 0,$$

$$6zz'^2_x + 3z^2 z''_{xx} - 2yz'_x - xyz''_{xx} = 0.$$

Решая эту систему, находим

$$z'_x = \frac{yz}{3z^2 - xy}; \quad z''_{xx} = -\frac{2xy^3 z}{(3z^2 - xy)^3}. \quad \blacktriangle$$

Пример 4

Найдите dz, если $\frac{x}{z} - \ln\frac{z}{y} - 1 = 0.$

$\triangle$ Воспользуемся формулой $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$

Найдем частные производные неявно заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}} = \frac{z}{x+z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}} = \frac{z}{y(x+z)}.$$

Отсюда $dz = \frac{z}{x+z}dz + \frac{z^2}{y(x+z)}dy, \quad (x \neq -z).$

Рассмотрим другой способ решения задачи. Считая, что $z = z(x; y)$, в результате дифференцирования получаем

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} - \frac{y}{z}\cdot\frac{ydz - zdy}{y^2} = 0, \quad yzdx - xydz - yzdz + z^2 dy = 0.$$

Отсюда $dz = \frac{z}{x+z}dz + \frac{z^2}{y(x+z)}dy. \quad \blacktriangle$

Пример 5

Функцию $f(x; y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ разложите по формуле Тейлора в окрестности точки (–2; 1).

$\triangle$ Данная функция имеет непрерывные частные производные любого порядка. Поскольку все частные производные выше второго порядка равны нулю,

Библиотека БГУИР

то остаточный член R_n при $n \geq 2$ обращается в нуль и формула Тейлора принимает следующий вид:

$$f(x;y) = f(-2;1) + \frac{\partial f(-2;1)}{\partial x}(x+2) + \frac{\partial f(-2;1)}{\partial y}(y-1) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial x^2}(x+2)^2 + 2\frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial x \partial y}(x+2)(y-1) + \frac{\partial^2 f(-2;1)}{\partial y^2}(y-1)^2 \right).$$

Находим значение функции и ее частные производные в точке $M_0(-2;1)$:

$$f(-2;1)=1; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = -2x+2y-6\Big|_{M_0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 2x+6y-2\Big|_{M_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = -2;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = 2; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 6;$$

Получаем $f(x;y) = 1-(x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$. ▲

Пример 6

Разложите функцию $f(x;y) = e^{x/y}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(0;1)$ до членов второго порядка включительно. Запишите остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано.

△ Найдем значение функции и ее частные производные до второго порядка включительно в точке $M_0(0;1)$:

$$f(M_0)=1; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = e^{x/y}\cdot\frac{1}{y}\Big|_{M_0} = 1;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = e^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\Big|_{M_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = e^{x/y}\cdot\frac{1}{y^2}\Big|_{M_0} = 1;$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = \left(e^{x/y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + e^{x/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)\Big|_{M_0} = -1;$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = \left(e^{x/y}\cdot\frac{x^2}{y^4} + e^{x/y}\cdot\frac{2x}{y^3}\right)\Big|_{M_0} = 0.$$

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получаем

$$e^{x/y} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_2.$$

В форме Пеано $R_2 = o(x^2 + (y-1)^2)$. ▲

Библиотека БГУИР

Пример 7

Пусть z – та неявная функция от x и y, определяемая уравнением $z^3 - 2xz + y = 0$, которая при $x = 1$ и $y = 1$ принимает значение $z = 1$. Разложите эту функцию в окрестности точки $M_0(1;\ 1)$ по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно.

△ Находим частные производные функции в точке $M_0(1;\ 1)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2z;\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1;\quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 2x;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{2z}{3z^2 - 2x}\right|_{M_0} = 2;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -\left.\frac{1}{3z^2 - 2x}\right|_{M_0} = -1;\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = \left.\frac{2z'_x(3z^2 - 2x) - 2z(6z\cdot z'_x - 2)}{(3z^2 - 2x)^2}\right|_{M_0} = -16;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = (3z^2 - 2x)^{-2}\cdot 6z\cdot \left.z'_y\right|_{M_0} = -6;\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{M_0} = (3z^2 - 2x)^{-2}\left.(6z\cdot z'_x - 2)\right|_{M_0} = 10;$$

Подставляя эти значения в формулу Тейлора, получаем

$$f(x;y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + \ldots\ .\quad ▲$$

Дополнительные задачи

1. Найдите производные $f'(0)$ и $f''(0)$ неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ и удовлетворяющей условию $f(0) = 1$.

Ответ: $f'(0) = 0,\quad f''(0) = -\dfrac{2}{3}$.

2. Для функции $z = z(x;y)$ найдите частные производные первого и второго порядков, если $z^3 - 3xyz = a^3$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{z^2 - xy};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{z^2 - xy};\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2xy^3 z}{(z^2 - xy)^3};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{z(z^4 - 2z^2 xy - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2yx^3 z}{(z^2 - xy)^3}.$$

3. Функцию $f(x;y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ разложите по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1;\ –2)$.

Ответ: $f(x;y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

4. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) до членов второго порядка включительно неявную функцию $z(x;y)$, определяемую уравнением $z^3 + 3yz - 4x = 0$, если $z(1;1) = 1$.

Ответ: $z = 1 + \dfrac{2}{3}(x-1) - \dfrac{1}{2}(y-1) - \dfrac{2}{9}(x-1)^2 - \dfrac{1}{8}(y-1)^2 + \ldots$.

Библиотека БГУИР

Занятия 17–18
Локальный экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

Пример 1

Найдите точки локального экстремума функции $z = x^2 - 2xy + 4y^3$.

$\triangle$ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2x + 12y^2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем две точки возможного экстремума $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{6}\right)$.

Далее находим производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y.$$

В точке M_1: $a_{11} = 2,\ a_{12} = -2,\ a_{22} = 0.\quad D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -4 < 0$ и экстремума нет.

В точке M_2: $a_{11} = 2,\ a_{12} = -2,\ a_{22} = 4.\quad D = 2 \cdot 4 - (-2)^2 = 4 > 0$ и так как $a_{11} = 2 > 0$, то в точке M_2 функция имеет локальный минимум. ▲

Пример 2

Найдите точки локального экстремума функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$.

$\triangle$ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 + 6xy = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума $M_1(0;0)$ и $M_2(6;3)$. Вычисляем частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x + 6y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2.$$

Библиотека БГУИР

В точке M_1: $a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = 0.$ Точка $M_1(0;0)$ требует дополнительного исследования.

Замечание. $z(0;0) = 0.$

Далее, при $x < 0,\ y = 0$ имеем $z(x;y) > 0,$ а при $x = 0,\ y \neq 0$ $z(x;y) = -y^4 < 0.$ Следовательно, в любой окрестности точки $M_1(0;0)$ функция $z(x;y)$ принимает значения как больше $z(0;\ 0),$ так и меньше $z(0;\ 0).$ Следовательно, в точке $M_1(0;0)$ функция $z(x;y)$ не имеет локального экстремума.

В точке M_2: $a_{11} = -18,\ a_{12} = 36,\ a_{22} = -108$ и, значит, $D = 648 > 0.$ Так как $a_{11} < 0$, то в точке M_2 функция имеет локальный максимум. ▲

Пример 3

Исследуйте на экстремум функцию $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

△ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \end{cases}$$

На всей плоскости, за исключением точки $O(0;\ 0)$, частные производные непрерывны и отличны от нуля:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(\Delta x; 0) - z(0;0)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Этот предел не существует. Аналогично не существует $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_0.$

Точка $O(0;\ 0)$ является критической, а значит подозрительной на экстремум. Значение $z(0;\ 0) = 1;$ $z(x;y) - z(0;\ 0) = -\sqrt{x^2 + y^2} < 0.$ Точка $O(0;\ 0)$ является точкой максимума $z_{\max} = 1.$ ▲

Пример 4

Исследуйте на локальный экстремум функцию

$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$

Библиотека БГУИР

$\triangle$ Из системы $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z - 6 = 0 \end{cases}$ определяем единственную стационарную точку M(–1; –2; 3). Находим вторые частные производные: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2,$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$

Таким образом, $\Delta_1 = 2 > 0,$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$

Второй дифференциал $d^2u,$ согласно критерию Сильвестра, представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Следовательно, в точке (–1; –2; 3) функция имеет минимум $u_{\min} = -14.$

Эту задачу можно решить методом выделения полных квадратов:

$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 14.$

Точка M(–1; –2; 3) является точкой минимума $u_{\min} = -14.$ ▲

Пример 5

Найдите точки локального экстремума функции

$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$

$\triangle$ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x - y + 2z = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума:

$M_1\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ и $M_2\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right).$

Далее воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2.$$

Матрица квадратичной формы $d^2u\Big|_{M_1}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Выделяя главные миноры матрицы *A*, получаем

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, $d^2u\Big|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный минимум.

Исследуем точку M_2. Матрица квадратичной формы $d^2u\Big|_{M_2}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = -13 < 0$, $\Delta_3 = -14 < 0$.

Следовательно, $d^2u\Big|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой от dx, dy, dz. Покажем, что эта квадратичная форма знакопеременная:

$$d^2u\Big|_{M_2} = 4dx^2 - 2dxdy + 4dxdz - 3dy^2 + 2dz^2.$$

Если положить $dx \neq 0, dy = dz = 0,$ то получим $d^2u\Big|_{M_2} = 4dx^2 > 0,$ а если положить $dx = dz = 0, dy \neq 0$, то получим $d^2u\Big|_{M_2} = -3dy^2 < 0.$

Следовательно, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума. ▲

Пример 6

Найдите экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2$ при условии $x + 2y = 1$.

△ Из уравнения связи $x + 2y = 1$ выразим x через y и подставим в выражение для данной функции:

Библиотека БГУИР

$$x = 1 - 2y,\ \ z = (1-2y)^2 + (1-2y)y + y^2 = 1 - 4y + 4y^2 + y - 2y^2 + y^2 =$$
$$= 3y^2 - 3y + 1.$$

Функция $z = 3y^2 - 3y + 1$ достигает локального минимума в точке $y = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$. Тогда условный минимум равен:

$$z_{\min} = 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, в точке $M\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$ функция $z = x^2 + xy + y^2$ имеет условный минимум равный $\dfrac{1}{4}$. ▲

Пример 7

Найдите условный экстремум функции $z = x = 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

△ Составим функцию Лагранжа $F(x; y; \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ и рассмотрим систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Она имеет два решения $\left(1;\ 2;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(-1;\ -2;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Следовательно, функция $z = x + 2y$ имеет две критические точки $P_1(1;\ 2)$ при $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $P_2(-1;\ -2)$ при $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$.

Найдем знак d^2F в каждой точке при соответствующем ей значении λ:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda,$ то $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

При $x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ $d^2F < 0$, следовательно, в точке P_1 функция z имеет максимум $z_{\max} = 5$.

Библиотека БГУИР

При $x_1 = -1,\ y_1 = -2,\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2}\ d^2F > 0,$ следовательно, в точке P_2 функция z имеет минимуму $z_{\min} = -5.$ ▲

Пример 8

Найдите экстремальные значения функции $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ при наличии связи $x + y + z + t + 1 = 0.$

△ Составим функцию Лагранжа:

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \lambda(x + y + z + t + 1).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = 2t + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z + t + 1 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{2} \\ y = -\dfrac{\lambda}{2} \\ z = -\dfrac{\lambda}{2} \\ t = -\dfrac{\lambda}{2} \\ -2\lambda + 1 = 0 \end{cases} \sim\ \lambda = \frac{1}{2},\ x = y = z = t = -\frac{1}{4}.$$

Функция $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ имеет единственную критическую точку $P_1\left(-\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{4}\right)$ при $\lambda = \dfrac{1}{2}.$

Поскольку второй дифференциал функции Лагранжа, равный

$$d^2F = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2),$$

всегда положительно определен, то функция $u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ при наличии связи $x + y + z + t + 1 = 0$ имеет в точке $P\left(-\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{4}\right)$ условный минимум. Подставляя координаты точки P в функцию u, мы получим $u_{\min} = \dfrac{1}{4}.$ ▲

Пример 9

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \text{ если } x^2 + y^2 \le 25.$$

△ Функция z непрерывна в замкнутой ограниченной области. Поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, она в этой области достигает наибольшее и наименьшее значения.

Библиотека БГУИР

Найдем критические точки функции z, принадлежащие области $x^2 + y^2 < 25$. Поскольку система уравнений $\begin{cases} z'_x = 2x - 12 = 0 \\ z'_y = 2y + 16 = 0 \end{cases}$ в указанной области не имеет решений, то своего наибольшего и наименьшего значений функция z достигает на окружности $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Составляя функцию Лагранжа

$$F = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25) = 0$$

и решая систему

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 12 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 2y + 16 + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}$$

находим две точки возможного условного экстремума $M_1(3; -4)$ и $M_2(-3; 4)$.

Вычисляя значения функции z в этих точках $z(M_1) = -75$, $z(M_2) = 125$, заключаем, что $z_{\text{наиб}} = 125$, $z_{\text{наим}} = -75$. ▲

Пример 10

При каких значениях радиуса основания R и высоты H цилиндрическая банка, объем которой равен 54π, имеет наименьшую поверхность?

△ Требуется исследовать на экстремум функцию $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$ при наличии связи $\pi R^2 H = 54\pi$.

Составим функцию Лагранжа $F = 2\pi R^2 + 2\pi RH + \lambda(R^2 H - 54)$ и рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial R} = 4\pi R + 2\pi H + 2RH\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial H} = 2\pi R + \lambda R^2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = R^2 H - 51 = 0. \end{cases}$

Так как $R \neq 0$, система имеет единственное решение $R = 3, H = 6$ при $\lambda = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Из геометрического смысла задачи следует, что она имеет хотя бы одно решение. Поэтому решение $R = 3, H = 6$ является искомым. ▲

Библиотека БГУИР

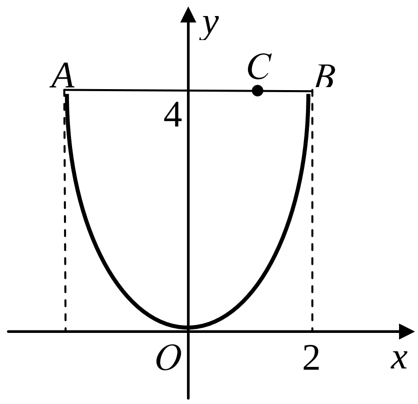
Пример 11

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

в замкнутой области, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$.

$\triangle$



Найдем критические точки функции z, лежащие внутри заданной области:

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0, \\ z'_y = 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем две критические точки $O(0;\ 0)$ и $M(-1;\ -1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области. Найдем $z(A)$ и $z(B)$:

$$z(A) = -16 + 16 + 16 + 16 = 32, \quad z(B) = 16 + 16 + 16 - 16 = 32.$$

Найдем критические точки, принадлежащие параболе *AOB*. Имеем: $y = x^2$, $z_1(x) = x^4 + 4x^2$, $x \in (-2;\ 2)$; $z_1' = 4x^3 + 8x$; $z_1' = 0$ при $x = 0$; $z_1(0) = z(0;\ 0) = 0$.

На участке *AB* имеем $y = 4$, $z_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$, $x \in (2;2)$. Найдем критические точки, принадлежащие этому участку: $z_2'(x) = 6x^2 + 8x - 8$. Внутри данного отрезка имеется одна критическая точка $x = \dfrac{2}{3}$, $y = 4$ (точка *C*).

$$z_2\left(\frac{2}{3}\right) = z\left(\frac{2}{3};4\right) = 16\frac{22}{27}.$$

Таким образом, наибольшее значение функции z равно 32 и достигается оно в точках $A(-2;\ 4)$ и $B(2;\ 4)$, а наименьшее значение равно нулю в точке $O(0;\ 0)$. ▲

Дополнительные задачи

1. Исследуйте на локальный экстремум функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Ответ: $z_{\min} = z(2;\ 1) = -28$, $z_{\max} = z(-2; -1) = 28$.

Библиотека БГУИР

2. Исследуйте на локальный экстремум функцию $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Ответ: $z_{\min} = z(5;\ 2) = 30$.

2. С помощью критерия Сильвестра исследуйте на экстремум функцию $u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$.

Ответ: $z_{\max} = z(-3;\ 2;\ -1) = 22$.

4. Найдите условные экстремумы функций при заданном уровне связи:

а) $z = x^2 - y^2,\ 2x - y - 3 = 0$;

б) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Ответ: а) $z_{\max} = z(2;\ 1) = 3$;

б) $z_{\max} = z(1;\ 2) = 5, \quad z_{\min} = z(-1;\ -2) = -5$.

5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$

в области, ограниченной прямыми $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$.

Ответ: $z_{\min} = z(0;\ 3) = -13,\ z_{\max} = z(0;\ 0) = 5$.

Занятие 19
Контрольная работа.
Функции нескольких переменных

Вариант 1

1. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}}$.

Ответ: –3.

3. Вычислите $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$, если $f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: 0.

3. Найдите дифференциал функции $f(x; y; z)$, если $f = (xy)^z$.

Ответ: $(xy)^{z-1}(yzdx + xzdy + xy\ln(xy)dz)$.

4. Найдите производную функции f в точке M_0 по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если $f = 5x + 10x^2y + y^5, \quad M_0(1;\ 2),\ M(5;\ -1)$.

Ответ: 18.

5. Найдите второй дифференциал функции $f(x; y) = \frac{x}{y}e^{x^2}$ в точке (0; 1).

Ответ: $-2dxdy$.

6. Для функции $u(x; y)$, заданной неявно уравнением

$$2x^2+2y^2+u^2-8xu-u+8=0,$$

найдите $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ в точке $M(2; 0; 1)$.

Ответ: 0.

7. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки $M(-2; 1)$ функцию $f(x; y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$.

Ответ: $1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$.

8. Исследуйте на экстремум функцию $u(x; y)=x^2+xy+y^2-12x-3y$.

Ответ: $u_{\min}=u(3;\ 4)=-20, \quad u_{\max}=u(-3;\ -4)=30$.

Вариант 2

1. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y+9}-3}$.

Ответ: 6.

2. Вычислите $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, если $f=\ln(x^2+xy+y^2)$.

Ответ: 2.

3. Найдите дифференциал функции $f(x; y; z)$, если $f=x^{y/z}$.

Ответ: $\dfrac{1}{z}x^{y/z}\left(\dfrac{ydx}{x}+\ln x dy-\dfrac{y\ln x dz}{z}\right)$.

4. Найдите единичный вектор $\overline{e^0}$, по направлению которого $\dfrac{\partial f}{\partial e^0}$ в точке M достигает наибольшего значения, если $f=x^2-xy+y^2, \quad M(-1;\ 2)$.

Ответ: $\dfrac{-4\bar{i}+5\bar{j}}{\sqrt{41}}$.

5. Найдите второй дифференциал функции $f(x; y)=e^{x^2/y}$ в точке (1; 1).

Ответ: $e(6dx^2-8dxdy+3dy^2)$.

6. Для функции $z(x; y)$, заданной неявно уравнением

$$x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0,$$

найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $M(1; –2; 1)$.

Ответ: $-\dfrac{1}{5}$.

7. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки $M(1; –2)$ функцию $f(x; y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y$.

Ответ: $2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

8. Исследуйте на экстремум функцию $u(x; y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$.

Ответ: $u_{\max} = u(1;\ 0) = 4$.

9. Найдите условные экстремумы функции $z = 6 - 4x - 3y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(\dfrac{4}{5};\ \dfrac{3}{5}\right) = 1$, $z_{\max} = z\left(-\dfrac{4}{5};\ -\dfrac{3}{5}\right) = 11$.

Библиотека БГУИР

Литература

1. Краснов, М. Л. Высшая математика. В 6 ч. Ч. 2 / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 184 с.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Д. Письменный. – М. : Айрис – Пресс, 2004. – 254 с.

3. Карпук, А. А. Высшая математика. В 10 ч. Ч. 2 / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк. – Минск : Выш. шк., 1985. – 221 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике. В 3 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко [и др.]; под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2011. – 396 с.

5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попонов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1999. – 304 с.

6. Сборник задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный. – М. : Айрис – Пресс, 2004. – 575 с.

Библиотека БГУИР

Св. план 2014, поз. 43

Учебное издание

Цегельник Владимир Владимирович
Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович и др.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоля*

Подписано в печать 06.11.2014. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,7. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 300 экз. Заказ 115.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6

Библиотека БГУИР