УДК 656.2-50: 519.8

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА

М.П. РЕВОТЮК, М.К. КАРОЛИ, О.В. КОТ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
ул. П. Бровки, 6, г. Минск, 220013, Республика Беларусь
rmp@bsuir.by

Задача коммивояжера возникает во многих случаях оптимизации управления дискретными процессами, легко формулируется, но трудно решается. Практика использования результатов ее решения в логистике порождает проблему оценки их устойчивости к изменениям элементов матрицы исходных данных. Предлагаемый рекуррентный алгоритм анализа устойчивости базируется на оценке устойчивости линейной задачи о назначении, соответствующей оптимальному решению задачи коммивояжера. Его вычислительная оказывается полиномиальной.

Ключевые слова: задача коммивояжера, устойчивость решения, вычислительная сложность.

В классической постановке формальная модель задачи коммивояжера имеет вид

$$Y_{\min} = \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\left|\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1;\ x_{ij}\ge 0,\ i,j=\overline{1,n};\\ u_i - v_j + nx_{ij} \le n-1,\ i=\overline{2,n},\ \ j=\overline{2,n},\ \ i\ne j\end{array}\right.\right\}. \qquad (1)$$

Ее решение обычно представлено отражающим необходимые условия оптимальности вектором $R=\{i\mid x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}\}=\{r(j)=i\mid c_{ij}=u_i+v_j,\ i,j=\overline{1,n}\}$. На практике часто дополнительно необходимо найти интервалы $(s_{ij},\ f_{ij})$, в которых изменение значений элементов $c_{ij}\in(s_{ij},\ f_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$, не нарушает оптимального решения.

Оценка интервалов устойчивости задачи коммивояжера в общем случае имеет экспоненциальную вычислительную сложность. Однако для частных случаев ее сложность оказывается полиномиальной. Далее обсуждается один из таких случаев, когда изменяются лишь элементы матрицы с индексами $(i,j)=(r_j,j),\ j=\overline{1,n}$.

Предлагаемая схема оценки интервалов устойчивости базируется на инвариантности вектора R от метода его формирования. Известно, что одним из точных методов решения (1) является метод ветвей и границ [1]. Схема алгоритма метода ветвей и границ может использовать разные способы порождения дерева вариантов. Наиболее успешный способ порождения базируется на решении линейных задач о назначении (ЛЗН), анализе получающихся замкнутых циклов и, если таких циклов более одного, последующем переборе вариантов разрыва циклов. Рекурсия обхода дерева ЛЗН строится на матрице расстояний, где разрывы циклов задаются назначением бесконечных значений длин запрещаемых дуг. В каждом узле дерева вариантов, включая и искомый оптимальный вариант, решается ЛЗН фиксированной размерности

$$Z_{\min} = \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c^{*}_{ij}x_{ij}\left|\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1;\ x_{ij}\ge 0,\ i,j=\overline{1,n}\right.\right\}, \qquad (2)$$

Библиотека БГУИР

где $(c_{ij}^*, i, j = \overline{1,n})$ – матрица текущей ЛЗН, в которой некоторые элементы исходной матрицы задачи (1) заменены бесконечными значениями. Очевидно, что элементы оптимального решения не меняются: $(c_{ij}^* = c_{ij}, i = r_j, j = \overline{1,n})$.

Отсюда следует, что задача анализа устойчивости задачи (1) может быть сведена к полиномиально сложной задаче оценки устойчивости решения задачи (2): для каждого элемента матрицы $(c_{ij}^*, i, j = \overline{1,n})$, используемой для формирования окончательного решения задачи (1), необходимо найти интервал $(s_{ij}, f_{ij}), i, j = \overline{1,n},$ в котором изменение значения таких элементов не нарушает оптимального назначения.

Используя элементы решения в виде (2), легко выделить ребра графа совершенного паросочетания: $E_m = \left\{(r_j, j) \middle| (r_j < m), j = \overline{1,n}\right\}$. Интервал значений веса любого ребра такого графа, когда назначение остается неизменным, может быть описан как $(s_{ij}, f_{ij})_m = (-\infty, c_{ij} + \Delta_{ij}^m], (i, j) \in E_m$. Последнее означает, что для задачи минимизации (1) существующий вес назначенных ребер можно увеличить без нарушения структуры текущего решения на величину $\Delta_{ij}^m, (i, j) \in E_m$. Превышение такой величины приведет к скрытию соответствующего ребра.

Пусть оценка оптимального назначения есть Z^0. Очевидно, что если $c_{xy} = \infty,$ то ребро $x \to y$ будет скрыто. Реоптимизация решения может быть проведена относительно строки $x,$ а изменение потенциалов строки x составит $u_x^m - u_x^0 = Z_{xy}^m - Z^0$ [1]. Здесь Z_{xy}^m – оценка нового решения без ребра $x \to y$. Действительно, скрытие ребра $x \to y$ не влияет на значения потенциалов других строк. Процесс реоптимизации, начинающийся в вершине $x,$ завершится в вершине y, потенциал которой тоже не изменится [1]. Меняется только потенциал u_x, поэтому $\Delta_{xy}^m = Z_{xy}^m - Z^0$.

Элементы $E_u = \left\{(i, j), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right\} \setminus E_m$ представляют множество скрытых ребер графа решения задачи (2). Интервал значений веса любого скрытого ребра, для которого назначение остается неизменным – $(s_{ij}, f_{ij})_u = [c_{ij} - \Delta_{ij}^u, +\infty), (i, j) \in E_u$. Последнее означает, что вес скрытых ребер можно увеличить без нарушения структуры текущего решения. Ребро открывается после назначения веса из интервала $(-\infty, c_{ij} - \Delta_{ij}^u)$. Таким образом, выполнив реоптимизацию решения ЛЗН после фиксации $c_{xy} = -\infty,$ получим значение Z_{xy}^u оценки решения с ребром $x \to y$. В результате получаем $\Delta_{xy}^u = Z_{xy}^u - Z^0$.

Таким образом, определение интервалов устойчивости задачи коммивояжера может проводиться посредством реоптимизации ЛЗН текущего оптимального решения, если инвертировать принадлежность дуг графа задачи соответствующему совершенному паросочетанию и учесть эту принадлежность направлением нумерации состояний. Вычислительная сложность оценок устойчивости на основе разности потенциалов изменяемых строк ЛЗН – $O(n^4)$. Дополнительная память для хранения наследуемых значений потенциалов строк не превышает объема $O(n^2)$.

Список литературы

1. *Ревотюк М.П., Батура П.М., Полоневич А.М.* // Докл. БГУИР. 2011. № 1(55). С. 55–62.

Библиотека БГУИР