

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

по физике

РАЗДЕЛ
МЕХАНИКА, КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

для студентов всех специальностей БГУИР

Под редакцией В.И. Мурзова

Минск 2003

УДК 535(075.8)
ББК 22. 2 я 73
Л 12

А в т о р ы :
Е.Ф. Андреев, З.А. Боброва, В.И. Мурзов,
П.А. Пупкевич, Е.В. Тарасевич

Лабораторный практикум по физике. Раздел «Механика, колебания и Л 12 волны» для студ. всех спец. БГУИР / Е.Ф. Андреев, З.А. Боброва, В.И. Мурзов и др.; Под ред. В.И. Мурзова. – Мн.: БГУИР, 2003. – 71 с.: ил.

ISBN 985-444-491-0.

Лабораторный практикум содержит описание лабораторных работ по разделу «Механика, колебания и волны» с кратким изложением теоретического материала, необходимого для их выполнения.

УДК 535(075.8)
ББК 22.2 я 73

Авторы выражают благодарность Д.Ю. Шуракову за работу по оформлению практикума.

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1	3
Лабораторная работа № 2	17
Лабораторная работа № 3	22
Лабораторная работа № 4	29
Лабораторная работа № 5	34
Лабораторная работа № 6	38
Лабораторная работа № 7	45
Лабораторная работа № 8	51
Лабораторная работа № 9	59
Лабораторная работа № 10.....	61
Список литературы	

Библиотека БГУИР

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИЗМЕРЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Цель работы:

1. Изучить основы обработки результатов прямых и косвенных измерений.
2. Измерение объема полого цилиндра.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные работы посвящены изучению ряда физических явлений. Это изучение состоит в экспериментальном измерении некоторых физических величин и проверке соотношений, связывающих их. Измерения физических величин разделяются на прямые и косвенные. К прямым измерениям относятся такие, результаты которых непосредственно считываются со шкалы прибора. Косвенные измерения производятся путем вычислений по формулам, связывающим результаты прямых измерений. При этом исходят из того, что существуют точные или “истинные” значения интересующих нас физических величин, и пытаются получить в результате измерений сведения о них. Пусть X – истинное значение величины; x_1, x_2, \dots, x_n – результаты n ее измерений. Тогда разности

$$\begin{aligned} X - x_1 &= \Delta x_1, \\ X - x_2 &= \Delta x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ X - x_n &= \Delta x_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

называются погрешностями или ошибками 1-го, 2-го, ..., n -го измерений. Погрешности сопровождают все измерения. Они делятся на систематические, случайные и промахи.

Систематические погрешности – это постоянные по величине и знаку погрешности, которые в каждом последующем измерении либо увеличивают, либо уменьшают результат на одну и ту же величину. Причинами их могут быть ошибки метода измерений, неисправности и неправильная установка приборов, их конструктивные возможности и взаимное влияние, неполный учет влияния всех внешних факторов при выполнении измерений. Иногда измерения сопровождаются погрешностями, изменяющимися по определенному закону (например, вследствие удлинения отдельных частей прибора в результате их нагревания в процессе работы). Они тоже относятся к систематическим. Систематические погрешности могут быть учтены или исключены, если измерения одних и тех же величин произвести различными методами и приборами с последующим анализом результатов. В учебных лабораториях, как правило, не ставится задача обнаружения и исключения систематических ошибок.

Случайные погрешности – неопределенные по величине и знаку погрешности, которые нельзя заранее предвидеть и от которых в принципе невозможно избавиться. Они сопровождают любой эксперимент. Причиной их является непостоянство физических условий, в которых производятся измерения, например, небольшие колебания температуры воздуха, незначительное сотрясение установки от проезжающих по улицам автомашин, хлопанья дверями в соседних помещениях и т.п., а также ошибки, которые вносит в результаты сам наблюдатель вследствие несовершенства наших органов чувств.

Изучением влияния случайных погрешностей на результаты измерений занимается теория ошибок, которая является разделом теории вероятностей и математической статистики. Приведенные ниже результаты этой теории покажут, как получить при достаточно большом числе измерений значения измеряемых величин, достаточно близкие к истинным значениям.

Промахи – это большие по величине погрешности, сильно искажающие результат. Они являются следствием неправильной записи, неверного отсчета. В теории разработаны приемы, с помощью которых можно подсчитать с определенной вероятностью, является ли данный результат промахом. Мы же будем просто отбрасывать сильно отличающиеся от остальных результаты как не внушающие доверия.

На особом месте стоят погрешности приборов. Это систематические погрешности, т.к. на определенном участке шкалы прибор либо постоянно завышает результат, либо занижает его. Причиной появления таких погрешностей могут быть конструктивные недостатки приборов, неточность в нанесении шкалы, изменения показаний в результате длительной непрерывной работы из-за нагревания прибора и т.п. Знак приборной погрешности обычно неизвестен, а максимальная величина ее задается либо в паспорте к прибору, либо с помощью указания класса точности прибора на его шкале. Класс точности электроизмерительных приборов, приборов теплового контроля равен в процентах отношению максимальной его погрешности к максимальному показанию и обозначается одним из чисел 0,05; 0,1; 0,2; ... 4,0. Например, если класс точности вольтметра 0,5,

то $\frac{\Delta U \cdot 100}{U_{\max}} = 0,5\%$, т.е. $\Delta U = 0,005U_{\max}$.

В случае весоизмерительных приборов класс точности обозначается цифрой и последующей за ней буквой. Цифра указывает, в каком разряде после запятой содержится ошибка в относительной погрешности, выраженной в процентах, а буква – какая цифра стоит в указанном разряде. Буквы а, б, в, г, ... соответствуют цифрам 1, 2, 3, 4, ... Например, если класс точности весов 2а, значит

$\frac{\Delta P \cdot 100}{P_{\max}} = 0,01\%$, для класса 1в – $\frac{\Delta P \cdot 100}{P_{\max}} = 0,3\%$. Если погрешность приборов не

указана, то в качестве нее берется половина цены наименьшего деления шкалы.

При отсчете по шкале прибора наблюдатель совершает ошибку отсчета. Если он производит отсчет до целых делений, то максимально возможная ошибка отсчета равна половине деления, при отсчете до четверти деления – восьмой его части и т.д. Есть ли надобность делить на глаз при отсчете наименьшее деление

шкалы прибора на мелкие части? Очевидно, нет. Отсчет нужно производить таким образом, чтобы ошибка, допущенная при отсчете, была той же величины или несколько меньше ошибки прибора. Ведь в конечном результате эти ошибки суммируются, и не имеет смысла намного усложнять измерительную работу, отсчитывая малые доли деления, т.к. сумму определит ошибка прибора, которая приблизительно равна половине цены наименьшего деления.

Случайные погрешности проявляют себя в том, что результаты измерений различаются последними цифрами. Однако при повторных измерениях мы иногда получаем один и тот же результат. Причина этого не в отсутствии случайных погрешностей, а в недостаточной чувствительности прибора. Погрешность прибора в этом случае значительно превышает погрешности случайные. Например, при измерении длины небольшого бруска обычной миллиметровой линейкой заведомо ясно, что каждый раз будет получаться один и тот же результат. При измерении этого же размера микрометром значения последующих измерений возможно будут уже различаться последними цифрами. Рекомендуется для измерений выбирать такие приборы, которые достаточно чувствительны, и производить возможно большее количество измерений. Используя методы теории ошибок, можем получить с определенной вероятностью тем более близкий к истинному значению результат, чем большее число измерений произведено.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Случайные погрешности обладают следующими свойствами.

1. При большом числе измерений одинаковые по величине, но противоположные по знаку погрешности встречаются одинаково часто.

2. Большие по величине погрешности встречаются с меньшей вероятностью, чем малые. Из соотношений (1.1), переписав их в виде

$$X = \Delta x_1 + x_1,$$

$$X = \Delta x_2 + x_2,$$

.....

$$X = \Delta x_n + x_n,$$

и сложив столбиком, можно определить истинное значение измеряемой величины следующим образом:

$$X = \frac{\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n \Delta x_k}{n}.$$

Если считать, что систематические ошибки устранены, то при бесконечно большом числе измерений вторая сумма в числителе обращается в нуль на основании 1-го свойства случайных погрешностей. Остается

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \bar{x}, \quad (1.2)$$

истинное значение измеряемой величины равно среднему арифметическому значению результатов измерений, если их бесконечно много. При ограниченном, а

тем более при небольшом числе измерений, с которым мы обычно имеем дело на практике, равенство (1.2) носит приближенный характер.

Пусть в результате нескольких измерений получены следующие значения измеряемой величины X : 13,4; 13,2; 13,3; 13,4; 13,3; 13,2; 13,1; 13,3; 13,3; 13,2; 13,3; 13,1. Построим диаграмму распределения этих результатов, откладывая по оси абсцисс показания прибора в порядке их возрастания. Расстояния между соседними точками по оси абсцисс равны удвоенной максимальной ошибке отсчета по прибору. В нашем случае отсчет произведен до 0,1. Этому и равно одно деление шкалы, нанесенной на ось абсцисс. По оси ординат откладываем величины, пропорциональные относительно числу результатов, соответствующих тому или иному показанию прибора. Относительное число, или относительную частоту результатов, равных x_k , будем обозначать $W(x_k)$. В нашем случае

$$W(13,1) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};$$

$$W(13,2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};$$

$$W(13,3) = \frac{5}{12} = \frac{5}{12};$$

$$W(13,4) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Каждому x_k ставим в соответствие

$$y_k = AW(x_k), \quad (1.3)$$

где A – коэффициент пропорциональности.

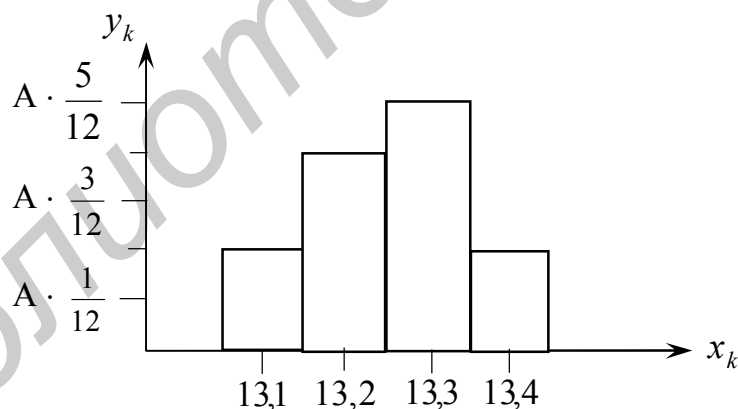


Рис. 1.1

Построенная диаграмма, которую называют гистограммой, отличается от обычного графика тем, что точки соединены не плавной кривой линией, а ступенчатой (рис. 1.1). Очевидно, что площадь ступеньки над некоторым значением x_k пропорциональна относительной частоте появления этого результата. Выбирая соответствующим образом коэффициент пропорциональности в выражении (1.3), можно эту площадь сделать равной относительной частоте появления результата x_k . Тогда сумма площадей всех ступенек, как сумма относительных частот всех результатов, должна быть равна единице:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0,1 \frac{2A}{12} + 0,1 \frac{3A}{12} + 0,1 \frac{5A}{12} + 0,1 \frac{2A}{12} = 0,1A = 1. \quad (1.4)$$

Отсюда находим: $A = 10$. Условие (1.4) называется условием нормировки функции (1.3).

Если производить серии измерений по n измерений в каждой серии, то при небольшом n относительные частоты одного и того же значения x_k , найденные из различных серий, могут значительно отличаться друг от друга. По мере увеличения числа измерений в сериях колебания в значениях $W(x_k)$ уменьшаются и эти значения приближаются к некоторому постоянному числу, которое называется вероятностью результата x_k и обозначается $P(x_k)$.

Допустим, что, производя опыт, мы не отсчитываем результат до целых делений шкалы или их долей, а можем фиксировать ту точку, где остановилась стрелка. Тогда при неограниченно большом числе измерений стрелка побывает в каждой точке шкалы. Распределение результатов измерений приобретает в этом случае непрерывный характер и вместо ступенчатой гистограммы описывается непрерывной кривой $y = f(x)$. На основании свойств случайных погрешностей можно заключить, что кривая должна быть симметрична и, следовательно, максимум ее приходится на среднее арифметическое значение результатов измерений, равное истинному значению измеряемой величины (рис. 1.2).

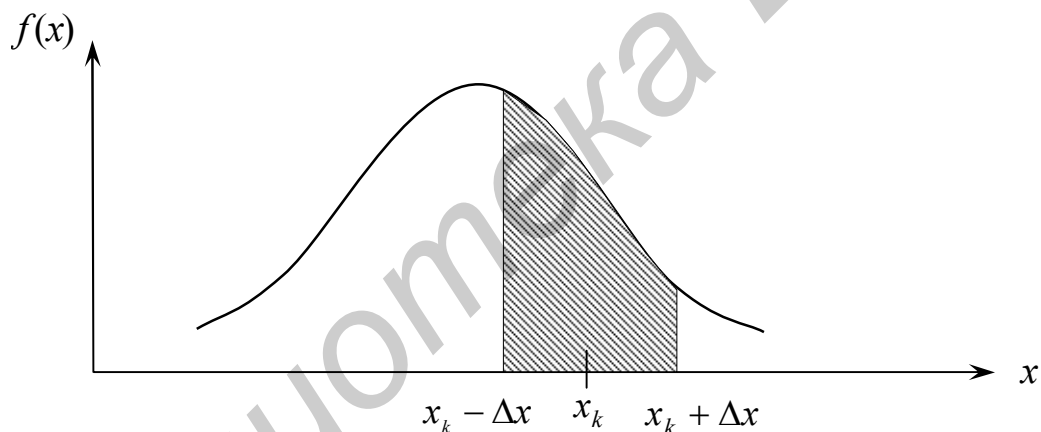


Рис. 1.2

В случае непрерывного распределения результатов измерений не имеет смысла говорить о вероятности какого-либо из их значений, т.к. имеются значения, сколь угодно близкие к рассматриваемому. Теперь уже следует ставить вопрос о вероятности встретить при измерениях результат в некотором интервале около значения x_k , равном $x_k - \Delta x, x_k + \Delta x$. Подобно тому как на гистограмме относительная частота результата x_k равнялась площади ступеньки, построенной над этим результатом, на графике для непрерывного распределения вероятность нахождения результата в интервале $(x_k - \Delta x, x_k + \Delta x)$ равна площади криволинейной трапеции, построенной над этим интервалом и ограниченной кривой $f(x)$. Математическая запись этого результата имеет вид

$$P(x_k - \Delta x \leq x \leq x_k + \Delta x) = \int_{x_k - \Delta x}^{x_k + \Delta x} f(x) dx.$$

Кривая распределения результатов измерений, полученная экспериментально для некоторого участка шкалы прибора, если ее продолжить, асимптотически приближая слева и справа к оси абсцисс, аналитически хорошо описывается функцией вида

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{-(x - X)^2}{2\sigma^2}. \quad (1.5)$$

Подобно тому как суммарная площадь всех ступенек на гистограмме равнялась единице, вся площадь между кривой $f(x)$ и осью абсцисс, имеющая смысл вероятности встретить при измерениях хоть какое-либо значение x , тоже равна единице. Распределение, описываемое этой функцией, называется нормальным распределением. Основным параметр нормального распределения – дисперсия σ^2 . Приближенное значение дисперсии может быть найдено из результатов измерений по формуле

$$\sigma^2 \approx S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2. \quad (1.6)$$

Эта формула дает близкое к действительному значение дисперсии только при большом числе измерений. Например, найденное по результатам 100 измерений σ^2 может иметь отклонение от действительного значения 15%, найденное по 10 измерениям – уже 40%. Дисперсия определяет вид кривой нормального распределения. Когда случайные погрешности малы, дисперсия, как следует из (1.6), невелика. Кривая $f(x)$ в этом случае уже и острее вблизи истинного значения X и быстрее стремится к нулю при удалении от него, чем при больших погрешностях. Следующий рисунок показывает, как меняется вид кривой $f(x)$ для нормального распределения в зависимости от σ .

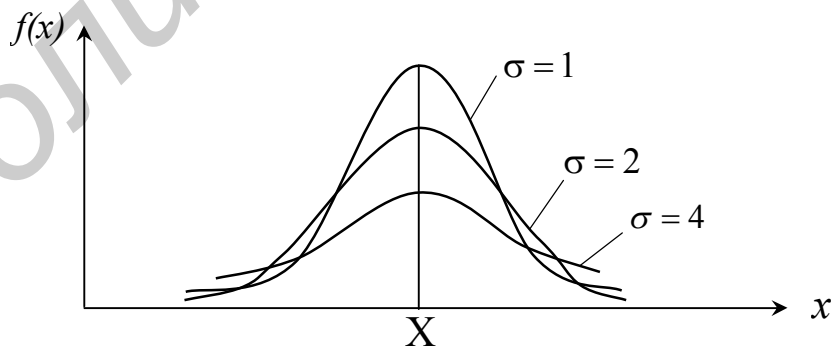


Рис. 1.3

В теории вероятностей доказывается, что если рассматривать не распределение результатов измерений, а распределение средних арифметических значений, найденных из серии по n измерений в каждой серии, то оно тоже подчиняется нормальному закону, но с дисперсией, в n раз меньшей.

Вероятность нахождения результата измерений в некотором интервале $(X - \Delta x, X + \Delta x)$ около истинного значения измеряемой величины $P(X - \Delta x \leq x \leq X + \Delta x)$ равна площади криволинейной трапеции, построенной над этим интервалом и ограниченной сверху кривой $f(x)$. Величину отрезка Δx принято измерять в единицах, пропорциональных корню квадратному из дисперсии $\Delta x = k\sigma$. В зависимости от величины k на интервал $k\sigma$ приходится криволинейная трапеция большей или меньшей площади, т.е.

$$P(X - k\sigma \leq x \leq X + k\sigma) = F(k), \quad (1.7)$$

где $F(k)$ – некоторая функция от k . Вычисления показывают, что при

$$k = 1 \quad F(k) \approx 0,68;$$

$$k = 2 \quad F(k) \approx 0,95;$$

$$k = 3 \quad F(k) \approx 0,998.$$

Отсюда видно, что на интервал $(X - 2\sigma, X + 2\sigma)$ приходится приблизительно 95% площади под кривой $f(x)$. Этот факт находится в полном соответствии со вторым свойством случайных погрешностей, которое утверждает, что большие по величине погрешности маловероятны. Погрешности, превышающие по величине 2σ , встречаются с вероятностью, меньшей 5%. Переписанное для распределения среднего арифметического значения n измерений выражение (1.7) принимает вид

$$P\left(X - \frac{k\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_n \leq X + \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) = F(k). \quad (1.8)$$

Величина σ в (1.7) и (1.8) может быть определена на основании результатов измерений только приближенно по формуле (1.6)

$$\sigma \approx S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2}.$$

Подставив это значение σ в выражение (1.8), мы получим справа уже не $F(k)$, а некоторую функцию, зависящую не только от величины рассматриваемого интервала значений x , но и от числа произведенных измерений $n - \Phi(t_n, n)$. Причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t_n, n) = F(k),$$

т.к. только при очень большом числе измерений формула (1.6) становится достаточно точной. Таким образом,

$$P\left(X - \frac{t_n S_n}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_n \leq X + \frac{t_n S_n}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(t_n, n).$$

Решив систему двух неравенств, стоящих в скобке в левой части этого выражения относительно истинного значения X , можем переписать его в виде

$$P\left(\bar{x}_n - \frac{t_n S_n}{\sqrt{n}} \leq X \leq \bar{x}_n + \frac{t_n S_n}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(t_n, n). \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) определяет вероятность, с которой истинное значение X находится в некотором интервале шириной $\frac{2t_n S_n}{\sqrt{n}}$ около значения \bar{x}_n . Эта вероятность в теории ошибок называется *надежностью*, а соответствующий ей интервал для

истинного значения – *доверительным интервалом*. Функция $\Phi(t_n, n)$ рассчитана в зависимости от t_n и n и для нее составлена подробная таблица (см. таблицу). Таблица имеет 2 входа: по t_n и по n . С ее помощью для данного числа измерений n можно найти, задаваясь определенной величиной надежности P , значения величины t_n , называемой *коэффициентом Стьюдента*.

Таблица коэффициентов Стьюдента

	t_n	t_n	t_n	t_n	t_n
$n \setminus P$	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999
2	1,00	6,3	12,7	63,7	636,6
3	0,82	2,9	4,3	9,9	31,6
4	0,77	2,4	3,2	5,8	12,9
5	0,74	2,1	2,8	4,6	8,6
6	0,73	2,0	2,6	4,0	6,9
7	0,72	1,9	2,4	3,7	6,0
8	0,71	1,9	2,4	3,5	5,4
9	0,71	1,9	2,3	3,4	5,0
10	0,70	1,8	2,3	3,3	4,8

Анализ таблицы показывает, что для определенного числа измерений с требованием роста надежности получаем растущие значения t_n , т.е. увеличение доверительного интервала. Надежности, равной единице, соответствовал бы доверительный интервал, равный бесконечности. Задаваясь определенной надежностью, мы можем сделать доверительный интервал для истинного значения более узким, увеличивая количество измерений, т.к. S_n при этом изменяется незначительно, а $\frac{t_n}{\sqrt{n}}$ убывает и за счет уменьшения числителя, и за счет увеличения знаменателя. Произведя достаточное количество опытов, можно сделать доверительный интервал любой малой величины. Но при большом n дальнейшее увеличение числа опытов очень медленно уменьшает доверительный интервал, а количество вычислительной работы намного возрастает. Иногда в практической работе удобно пользоваться приближенным правилом: чтобы уменьшить в несколько раз доверительный интервал, найденный по небольшому числу измерений, нужно увеличить число измерений во столько же раз.

ПРИМЕР ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Возьмем в качестве опытных данных три первых результата из 12, по которым строилась гистограмма: 13,4; 13,2; 13,3.

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{3}(13,4 + 13,2 + 13,3) = 13,3;$$

$$\frac{S_3}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 2}(0,1^2 + 0,1^2)} = \sqrt{\frac{0,01}{3}} = 0,058.$$

Зададимся надежностью, которая обычно принята в учебной лаборатории, $P = 95\%$. Из таблицы для $P = 0,95$ и $n = 3$ находим $t_n = 4,3$.

$$\Delta x = 4,3 \cdot 0,058 = 0,24 \approx 0,2;$$

$$13,3 - 0,2 \leq X \leq 13,3 + 0,2, \text{ или } 13,1 \leq X \leq 13,5$$

с надежностью 95%. Последнее неравенство принято записывать в виде символического равенства $X = 13,3 \pm 0,2$.

Если доверительный интервал такой величины не устраивает (например в случае, когда приборная погрешность равна 0,1), и мы хотим уменьшить его вдвое, следует увеличить число измерений вдвое.

Если взять, например, последние 6 значений из тех же 12 результатов (для первых шести предлагается проделать расчет самим): 13,1; 13,3; 13,3; 13,2; 13,3; 13,1, то $\bar{x}_6 = 13,22$, и, следовательно,

$$\frac{S_6}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 6} (2 \cdot 0,12^2 + 3 \cdot 0,08^2 + 0,02^2)} = \sqrt{\frac{0,0484}{30}} = 0,04.$$

Значение коэффициента t_n находим из таблицы для $P = 0,95$ и $n = 6$; $t_n = 2,6$. Тогда $\Delta x = 2,6 \cdot 0,04 = 0,1$.

В этом случае $X = 13,2 \pm 0,1$. Изобразим на числовой оси доверительный интервал для истинного значения в первом и во втором случаях (рис. 1.4).

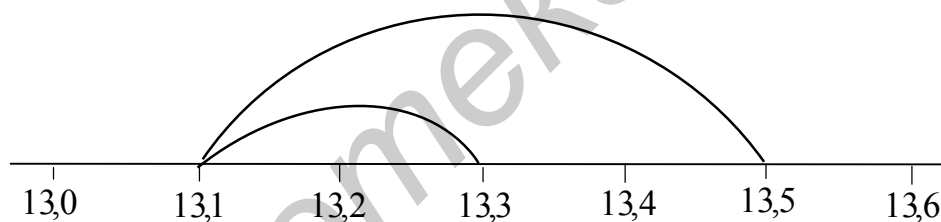


Рис. 1.4

Интервал, рассчитанный по 6 измерениям, находится, как и следовало ожидать, внутри интервала, найденного по трем измерениям.

Приборная погрешность вносит в результаты систематическую ошибку, которая расширяет изображенные на оси доверительные интервалы на 0,1. Поэтому записанные с учетом приборной погрешности результаты имеют вид

$$1) X = 13,3 \pm 0,3;$$

$$2) X = 13,2 \pm 0,2.$$

КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Пусть A, B, C, \dots – величины, измеряемые непосредственно (прямые измерения), а значение величины N – результат косвенного измерения, производимого по формуле

$$N = \varphi(A, B, C, \dots).$$

Задача ставится так: указать на числовой оси точку \bar{N} , в окрестности которой лежит истинное значение величины N и найти погрешность ΔN косвенного измерения, гарантирующую для принятой надежности прямых измерений величин A, B, C, \dots , доверительный интервал $(\bar{N} - \Delta N, \bar{N} + \Delta N)$ косвенного измерения, если $A = \bar{A} \pm \Delta A$, $B = \bar{B} \pm \Delta B$, $C = \bar{C} \pm \Delta C, \dots$

По определению, точка, в окрестности которой лежит истинное значение физической величины $N = \varphi(A, B, C, \dots)$, задается равенством

$$\bar{N} = \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots), \quad (1.10)$$

где $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ – средние арифметические значения величин A, B, C, \dots , найденные по результатам прямых измерений.

Линейная часть приращения функции $N = \varphi(A, B, C, \dots)$ около точки со значениями аргументов $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ в соответствии с ее разложением в ряд Тейлора имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta N &= \varphi(\bar{A} \pm \Delta A, \bar{B} \pm \Delta B, \bar{C} \pm \Delta C, \dots) - \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots) = \\ &= \pm \left(\frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial C} \Delta C + \dots \right), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где символы $\frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial A}$, $\frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial B}$, $\frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial C}$, ... обозначают *частные производные* функции $\varphi(A, B, C, \dots)$ по переменным A, B, C, \dots соответственно, вычисленные в точке со значениями аргументов $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$. Отметим, что частной производной функции нескольких переменных по какой-либо из них называют обыкновенную производную по этой переменной при фиксированных значениях всех остальных (т.е. при вычислении производной их следует считать константами).

Тогда из (1.11) следует, что

$$\begin{aligned} |\Delta N| &= \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial C} \Delta C + \dots \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial A} \Delta A \right| + \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial B} \Delta B \right| + \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial C} \Delta C \right| + \dots \end{aligned}$$

Введем величину

$$\Delta N_{\max} = \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial A} \Delta A \right| + \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial B} \Delta B \right| + \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial C} \Delta C \right| + \dots, \quad (1.12)$$

которая соответствует худшему для нас варианту оценки погрешности величины N , представляя собой *предельную абсолютную погрешность* косвенного измерения. Будем считать, что истинное значение величины N лежит в окрестности точки $\bar{N} = \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)$, внутри интервала шириной $2\Delta N_{\max}$, т.е.

$$\bar{N} - \Delta N_{\max} \leq N \leq \bar{N} + \Delta N_{\max},$$

или

$$N = \bar{N} \pm \Delta N_{\max}.$$

Разделив обе части равенства (1.12) на $|\bar{N}|$, получаем формулу предельной относительной погрешности косвенного измерения:

$$\varepsilon_N = \frac{\Delta N_{\max}}{\bar{N}} = \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial A} \cdot \frac{\Delta A}{\varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)} \right| + \left| \frac{\partial \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial B} \cdot \frac{\Delta B}{\varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)} \right| + \dots$$

Учитывая правило дифференцирования сложной функции, представим эту формулу в удобном для практического использования виде

$$\varepsilon_N = \left| \frac{\partial \ln \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial A} \Delta A \right| + \left| \frac{\partial \ln \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial B} \Delta B \right| + \left| \frac{\partial \ln \varphi(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)}{\partial C} \Delta C \right| + \dots \quad (1.13)$$

На практике, рассчитывая погрешность косвенного измерения, значок “max” обычно не пишут, однако всегда имеют в виду предельные погрешности, определяемые выражениями (1.12) и (1.13). Таким образом предельная абсолютная погрешность косвенного измерения $N = \varphi(A, B, C, \dots)$ вычисляется как полный дифференциал функции $\varphi(A, B, C, \dots)$ по переменным A, B, C, \dots , причем производные вычисляются в точке, где $A = \bar{A}, B = \bar{B}, C = \bar{C}, \dots$, частные дифференциалы берутся по абсолютной величине и роль дифференциалов dA, dB, dC, \dots играют погрешности прямых измерений $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots$. Аналогичное правило можно сформулировать для вычисления предельной относительной погрешности косвенного измерения с той лишь разницей, что дифференцировать следует не $\varphi(A, B, C, \dots)$, а $\ln \varphi(A, B, C, \dots)$.

Полученные нами формулы предельных абсолютной и относительной погрешностей косвенного измерения гарантируют для принятой надежности прямых измерений доверительный интервал $(\bar{N} - \Delta N, \bar{N} + \Delta N)$ для косвенного измерения. Но этот интервал является “предельным”, завышенным. В теории ошибок существует метод сужения доверительного интервала косвенного измерения. Однако для целей учебной лаборатории достаточно ограничиться вычислением его предельного значения.

Остается лишь дать рекомендации, какой из формул – (1.12) или (1.13) – выгоднее пользоваться в конкретных случаях. Если косвенное измерение является алгебраической суммой прямых измерений, то удобнее вычислять абсолютную погрешность ΔN . Однако в большинстве случаев приходится иметь дело с более сложными функциональными зависимостями N от A, B, C, \dots . Тогда удобнее вычислять сначала относительную погрешность величины N , а затем абсолютную, умножив среднее значение величины N на ее относительную погрешность (для записи окончательного результата нужна именно абсолютная погрешность).

Пример.

В качестве иллюстрации применения приведенных общих формул для расчета абсолютной и относительной погрешности косвенного измерения рассмотрим задачу экспериментального определения плотности вещества, из которого изготовлен параллелепипед.

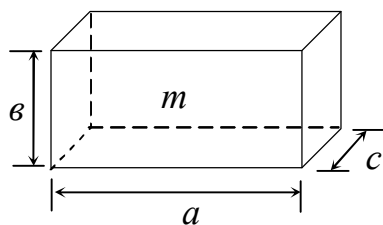


Рис. 1.5

В предположении однородности вещества параллелепипеда его плотность определяется формулой

$$\rho = \frac{m}{abc}, \quad (1.14)$$

где m – масса параллелепипеда, a , b , c – соответственно его длина, ширина и высота. Величины m , a , b , c определяются в прямых измерениях, тогда как ρ вычисляется по формуле (1.14), т.е. является результатом косвенного измерения. Аналитическая структура формулы (1.14) такова, что удобнее сначала вычислить относительную погрешность измерения, а затем абсолютную. Действительно, логарифмируя (1.14), получим

$$\ln \rho = \ln m - \ln a - \ln b - \ln c.$$

Тогда

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} = \frac{1}{m}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial a} = -\frac{1}{a}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial b} = -\frac{1}{b}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial c} = -\frac{1}{c}. \quad (1.15)$$

Подставляя выражения (1.15) в (1.13), находим

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta c}{\bar{c}}, \quad (1.16)$$

где Δm , Δa , Δb , Δc – абсолютные погрешности соответствующих величин. Тогда абсолютная погрешность косвенного измерения плотности вещества вычисляется по формуле

$$\Delta \rho = \varepsilon_\rho \cdot \bar{\rho}, \quad (1.17)$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}.$$

ПРАВИЛА ЗАПИСИ И ВЫЧИСЛЕНИЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Все верные цифры приближенного числа, начиная с первой, отличной от нуля, называются значащими. Верными являются цифры числа, стоящие в разрядах более высоких, чем разряд первой, отличной от нуля цифры его погрешности. Абсолютная погрешность не слишком ответственных измерений округляется до первой, отличной от нуля цифры. Если эта цифра единица, то ее часто

уточняют, указывая следующую за ней цифру. Относительная погрешность округляется до первых двух цифр. В конечных результатах указываются все значащие цифры и первая сомнительная. Окончательные результаты записываются в нормальном виде, т.е. в виде произведения двух сомножителей, первым из которых является рассматриваемый результат, причем первая значащая цифра его написана в разряде единиц, остальные – в разрядах десятых, сотых и т.д. долей; вторым сомножителем является 10 в соответствующей степени. Примеры правильно записанных приближенных чисел (значащие цифры в приведенных приближенных числах подчеркнуты):

$$\underline{2},\underline{75} \pm 0,08; (\underline{3},\underline{218} \pm 0.012) \cdot 10^{-3}; (\underline{7},\underline{8} \pm 0,4) \cdot 10^{11}.$$

Точность приближенных чисел находится в прямом соответствии с количеством значащих цифр в этих числах. Нетрудно проверить, что относительная погрешность приближенных чисел, имеющих одну значащую цифру, изменяется в пределах от нескольких процентов до нескольких десятков процентов, имеющих две значащие цифры – от нескольких десятков долей процента до нескольких процентов, имеющих три значащие цифры – от нескольких сотых долей процента до нескольких десятых долей процента и т.д. В учебной лаборатории мы имеем дело с результатами измерений, а которых только одна, две, редко три цифры является значащими.

Рассматривая формулы предельных погрешностей, мы установили, что почти во всех случаях (за редкими исключениями) относительная погрешность косвенного измерения оказывается больше, чем относительная погрешность наименее точного из прямых измерений. Следовательно, количество значащих цифр в косвенном измерении не может быть большим, чем количество значащих цифр в наименее точном прямом измерении. Поэтому результаты прямых измерений и промежуточных вычислений рекомендуется округлять так, чтобы в них было на одну цифру больше, чем в наименее точном прямом измерении. Конечный ответ округляется в соответствии с его погрешностью. Однако еще до его вычисления из грубого предварительного анализа результатов прямых измерений может быть ясно, сколько в нем будет цифр.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При построении графиков следует учитывать погрешности изображаемых величин, а также заботиться о том, чтобы их графическое представление не сообщило им дополнительных ошибок. Масштаб должен выбираться по возможности таким образом, чтобы:

1) самое малое деление шкалы было одного порядка с погрешностью наносимой величины,

2) линия графика в своей средней части должна быть расположена под углом к координатным осям, близким к 45° . Вследствие имеющихся погрешностей каждый результат на графике представляет собой не точку, а целую прямоугольную область, изображаемую символом \square (рис. 1.6), окружающим точку \bar{x} .

Поэтому линия графика должна быть

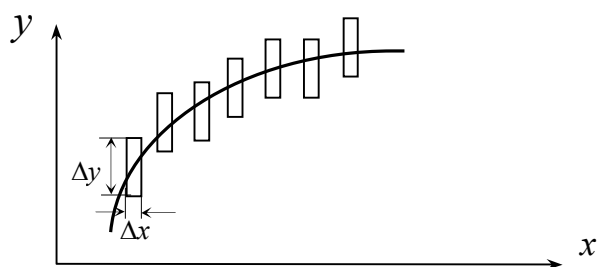


Рис. 1.6

плавной линией, проходящей в каком-либо месте через каждый такой прямоугольник. Примерный вид графика изображен на рисунке.

В некоторых случаях изобразить погрешность на графике нет возможности. Тогда она должна быть указана на соответствующей шкале.

Измерение объема полого цилиндра

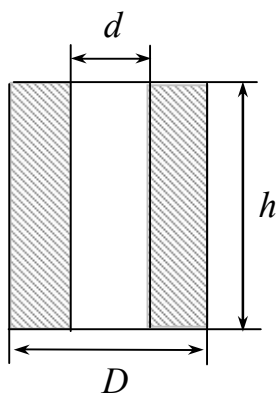


Рис. 1.7

1. Произвести по три измерения каждой из величин d , D , h с помощью штангенциркуля, определив предварительно его инструментальную погрешность.
2. Задав надежность $P = 0,95$, произвести обработку результатов $n = 3$ прямых измерений каждой из величин d , D , h .
3. Вычислить объем полого цилиндра по формуле

$$V = \frac{\pi h}{4}(D^2 - d^2).$$

4. Вывести формулы для абсолютной и относительной погрешностей измерения V и рассчитать их величины, используя результаты соответствующих прямых измерений.
5. Записать результат в стандартном виде $V = \bar{V} \pm \Delta V$ и сделать вывод о проделанной работе, отразив используемый метод измерений и полученные результаты.

Контрольные вопросы

1. Дать определение прямых и косвенных измерений.
2. Что такое погрешности измерения и как они классифицируются?
3. Что такое плотность вероятности распределения результатов измерений?
4. Что такое доверительный интервал прямых измерений и как он вычисляется?
5. Как вычисляются абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений по результатам прямых измерений?

Литература

1. Сотская Х.Н. Введение к физическому практикуму. Конспект лекций. – Мн.: МРТИ, 1973.
2. Касандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов измерений. – М.: Наука, 1970.
3. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971.

Библиотека БГУИР

**ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ
БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Цель работы:

1. Изучить законы изменения и сохранения момента импульса и полной механической энергии системы.
2. Измерить скорость пули с помощью баллистического маятника.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Баллистический маятник, являющийся разновидностью физического маятника, состоит из заполненного пластилином полого цилиндра, закрепленного на конце металлического стержня (рис. 2.1). На противоположном конце стержня имеются треугольные опорные призмы, уменьшающие силу трения в опоре. В маятник стреляют в горизонтальном направлении из пружинного пистолета пулей массой m . После неупругого соударения маятник с пулей начинает колебаться под действием силы тяжести. Установка содержит масштабную линейку L , предназначенную для определения пройденного свободным концом маятника пути, и секундомер C для определения периода колебаний маятника.

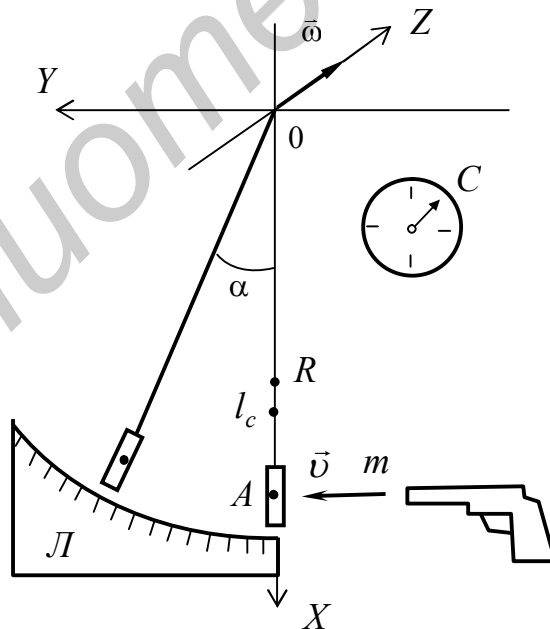


Рис. 2.1

Законы изменения и сохранения момента импульса и полной механической энергии системы

Для получения формулы для скорости пули, выраженной через величины, определяемые в прямых измерениях, воспользуемся законами сохранения момента импульса и полной механической энергии системы.

Моментом импульса системы n -материальных точек относительно точки O называют величину

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad (2.1)$$

где \vec{r}_i и \vec{p}_i – соответственно радиус-вектор i -й материальной точки, проведенный из точки O , и ее импульс в момент времени t . Квадратные скобки обозначают векторное произведение.

Если на систему действуют внешние силы \vec{F}_j , $0 \leq j \leq N$, то \vec{L} изменяется по закону

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{M}_j, \quad (2.2)$$

где $\vec{M}_j = [\vec{r}_j, \vec{F}_j]$ – момент j -й внешней силы относительно точки O .

Из (2.2) следует, что если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то ее момент импульса сохраняется, т.е. $\vec{L} = \text{const}$.

В случае твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OZ , проекция его момента импульса на эту ось дается формулой (см. лаб. работу № 3)

$$L_z = I\omega_z, \quad (2.3)$$

где I – момент инерции твердого тела относительно оси OZ , ω_z – проекция вектора угловой скорости на эту ось.

Кинетической энергией системы n -материальных точек называется величина

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (2.4)$$

где m_i – масса i -й материальной точки, v_i – величина ее скорости в момент времени t .

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг фиксированной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, задается формулой

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2, \quad (2.5)$$

где I – момент инерции твердого тела относительно этой оси.

Полной механической энергией системы n -материальных точек во внешнем поле называют величину

$$E = K + U_{\text{вз}} + U, \quad (2.6)$$

где $U_{\text{вз}}$ – потенциальная энергия взаимодействия частиц системы (собственная потенциальная энергия системы), U – потенциальная энергия частиц системы во внешнем поле.

Закон изменения E при переходе системы из одного механического состояния в другое можно записать в виде

$$\Delta E = A_{\text{внеш}}^{\text{нкс}} + A_{\text{внутр}}^{\text{нкс}}, \quad (2.7)$$

где $A_{\text{внеш}}^{\text{нкс}}$ – суммарная работа всех внешних неконсервативных сил, действующих на систему, $A_{\text{внутр}}^{\text{нкс}}$ – суммарная работа всех внутренних неконсервативных сил взаимодействия.

Из (2.7) вытекает, что если на систему не действуют внешние неконсервативные силы и отсутствуют внутренние неконсервативные, то полная механическая энергия системы сохраняется, т.е. $E = \text{const}$.

Вывод формулы для скорости пули

Обратимся теперь к выводу формулы для скорости пули. Рассмотрим систему маятник + пуля. На эту систему действуют внешние силы тяжести, сопротивления воздуха, реакции опоры и трения в опорных призмах маятника. Кроме того, в течение времени соударения пули с маятником τ (т.е. времени, в течение которого скорость пули относительно маятника станет равной нулю) между ними действуют силы внутреннего трения, не являющиеся консервативными. В дальнейшем будем считать, что сила сопротивления воздуха и силы трения в опорных призмах пренебрежимо малы.

Пусть T – период колебаний маятника с пулей, возникающих после соударения. Если предположить, что $\tau \ll T$, то за время τ отклонение маятника с пулей от положения равновесия незначительно, и момент силы тяжести относительно точки O (см. рис.2.1) в течение этого времени можно считать равным нулю. Поскольку момент силы реакции опоры относительно точки O всегда равен нулю, а другими внешними силами мы пренебрегаем, то согласно (2.2) в течение времени соударения $d\vec{L} / dt = \vec{0}$, т.е. момент импульса системы маятник + пуля сохраняется для всех $t \leq \tau$ ($t_0 = 0$).

Поскольку в соответствии с (2.1) и (2.3) $L_z(0) = mvl$, а $L_z(\tau) = I\omega$, где $l = |OA|$ (см. рис.2.1), v – скорость пули, I – момент инерции маятника с пулей относительно оси OZ , ω – угловая скорость вращения маятника в момент τ , то

$$I\omega = mvl. \quad (2.8)$$

Так как после соударения действие сил внутреннего трения прекращается, а силы сопротивления воздуха и трения в опорных призмах пренебрежимо малы, то для всех $t \geq \tau$ $A_{\text{внеш}}^{\text{нкс}} = A_{\text{внутр}}^{\text{нкс}} = 0$, и согласно (2.7)

$$\Delta E = 0, \quad (2.9)$$

т.е. полная механическая энергия системы маятник + пуля после соударения сохраняется.

Принимая во внимание (2.6), уравнение (2.9) переписывается в виде

$$\Delta K + \Delta U_{\text{вз}} + \Delta U = 0. \quad (2.10)$$

Поскольку после соударения мы рассматриваем маятник с пулей как недеформируемое целое (т.е. как твердое тело), то для всех $t \geq \tau$ $U_{\text{вз}} = \text{const}$, и поэтому при отклонении маятника на угол α

$$\Delta K = -\frac{1}{2} I \omega^2, \quad (2.11)$$

$$\Delta U_{\text{вз}} = 0, \quad (2.12)$$

$$\Delta U = (M + m)gh = (M + m)gl_c(1 - \cos \alpha), \quad (2.13)$$

где $h = l_c(1 - \cos \alpha)$ – модуль вертикального перемещения центра инерции маятника с пулей, l_c – расстояние от центра инерции маятника с пулей до точки подвеса 0 (см. рис. 2.1), M – масса маятника без пули.

Подставляя (2.11) – (2.13) в уравнение (2.10), получаем

$$I \omega^2 = 2(M + m)gl_c(1 - \cos \alpha) = 4(M + m)gl_c \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (2.14)$$

Согласно определению центра инерции

$$l_c = \frac{MR + ml}{M + m}, \quad (2.15)$$

где R – расстояние от точки 0 до центра инерции маятника без пули. Тогда уравнение (2.14) запишется так:

$$I \omega^2 = 4(MR + ml)g \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (2.16)$$

Выражая далее из (2.8) ω и подставляя его в (2.16), находим формулу для скорости пули:

$$v = \frac{2}{ml} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{(MR + ml)gl}. \quad (2.17)$$

Момент инерции I находится из формулы для периода колебаний физического маятника: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(M + m)gl_c}}$, (см. лаб. работу № 6),

$$I = \frac{T^2(M + m)gl_c}{4\pi^2} = \frac{T^2(MR + ml)g}{4\pi^2}. \quad (2.18)$$

С учетом выражения (2.18) формула (2.17) принимает весьма простой вид:

$$v = \frac{(MR + ml)gT}{\pi ml} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2.19)$$

Если теперь принять во внимание, что $\alpha = s/l$, где s – путь, пройденный свободным концом маятника при его максимальном отклонении от положения равновесия (см. рис. 2.1), $T = t/n$, где t – время n полных колебаний маятника с пулей, а отношение $s/2l$ мало, то заменяя $\sin(\alpha/2)$ его аргументом, получаем

$$v = \frac{(MR + ml)gst}{2\pi nml^2}. \quad (2.20)$$

В выражении (2.20) все величины, входящие в правую часть, могут быть непосредственно измерены (прямые измерения) и, следовательно, может быть определена скорость пули.

Порядок выполнения работы

1. Снять маятник с опоры и, поместив его на горизонтальную призму, расположенную на основании установки, найти его центр инерции.
2. Измерить расстояние R от опорных призм до найденного центра инерции.
3. Определить M и m , взвесив маятник и пулю на технических весах.
4. Произвести выстрел и измерить смещение конца маятника с пулей от положения равновесия s , время $n = (10-20)$ полных колебаний t , а также расстояние от оси вращения до точки удара пули l .
5. Рассчитать скорость пули по формуле (2.20).
6. Вычислить погрешности измерения скорости.
7. Произвести анализ полученных результатов и сделать вывод в соответствии с целью работы.

Контрольные вопросы

1. С какими физическими величинами вы познакомились при изучении теоретического обоснования работы? Дайте определение этих величин.
2. Чем определяется механическое состояние системы материальных точек в данный момент времени?
3. Какие физические законы необходимо знать для выполнения настоящей лабораторной работы? Сформулируйте эти законы и покажите, как они используются в работе.
4. Какие предположения были сделаны при выводе формулы для скорости пули?
5. Дайте определение центра инерции механической системы.
6. Выведите формулу для кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг фиксированной оси.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1987. §§ 18–24, 27–29.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т. 1. – М.: Наука, 1989. §§ 16, 19–24, 26, 27.

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ПРИБОРА ОБЕРБЕКА

Цель работы:

1. Изучить метод измерения момента инерции крестообразного маятника относительно оси вращения.
2. Проверить основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
3. Проверить свойство аддитивности момента инерции и изучить зависимость момента инерции крестообразного маятника от положения грузов на стержнях.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Тело, изменением формы которого в процессе движения можно пренебречь, называют *абсолютно твердым*. В дальнейшем для краткости мы будем называть такое тело просто *твердым*. Число степеней свободы твердого тела равно шести. Это означает, что требуется шесть независимых величин, однозначно определяющих в каждый момент времени положение тела в пространстве. В качестве таковых можно взять три декартовы координаты центра масс тела и три угла, определяющих его ориентацию в пространстве. В соответствии с этим для описания движения твердого тела в общем случае требуется шесть независимых уравнений движения. Их можно представить в виде двух независимых векторных уравнений:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (3.2)$$

где m – масса тела, \vec{v}_c – скорость его центра масс, \vec{F} – результирующая внешних сил, действующих на тело, \vec{L} – момент импульса тела относительно некоторой точки, \vec{M} – суммарный момент внешних сил относительно *той же точки*. Соотношение (3.1) представляет собой уравнение движения центра масс тела. Соотношение (3.2) называют уравнением моментов. Оно описывает изменение ориентации тела в пространстве, т.е. его вращение.

Зная законы действующих сил и начальные условия, можно с помощью этих уравнений полностью решить задачу о движении тела, т.е. найти как скорость, так и положение каждой точки твердого тела в любой момент времени. Однако решение уравнений (3.1) и (3.2) в общем случае представляет собой весьма сложную задачу. При ограничении свободы движения число независимых уравнений, требующихся для описания движения, уменьшается. Одним из частных случаев движения твердого тела является его вращение относительно

неподвижной оси. В этом случае изменение положения тела в пространстве описывается только одной величиной – углом поворота тела вокруг этой оси. Для описания такого движения достаточно использовать лишь одно скалярное уравнение – проекцию (3.2) на ось вращения Z :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (3.3)$$

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис 3.1). Найдем проекцию момента импульса тела на ось Z . Разбивая мысленно тело на элементарные массы Δm_i и учитывая, что скорость i -й элементарной массы при ее вращательном движении

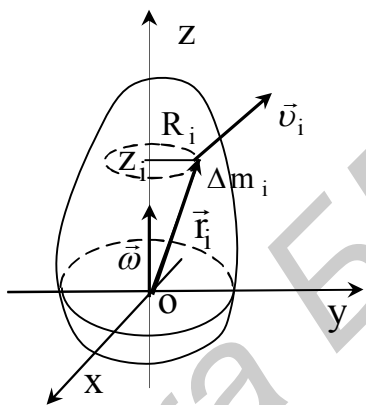


Рис. 3.1

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i],$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор i -й точки тела, для момента импульса тела \vec{L} относительно точки O получаем следующее выражение:

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i, \Delta m_i \cdot \vec{v}_i] = \sum_i \Delta m_i [\vec{r}_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i]], \quad (3.4)$$

где сумма берется по всем элементарным массам тела. Раскрывая двойное векторное произведение, перепишем (3.4) в виде

$$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega}, \vec{r}_i)). \quad (3.5)$$

Но поскольку $\vec{\omega}$ параллелен оси Z , то $(\vec{\omega}, \vec{r}_i) = \omega_z z_i$, где ω_z и z_i – проекции векторов $\vec{\omega}$ и \vec{r}_i на ось Z соответственно. Проектируя теперь уравнение (3.5) на ось Z почленно, находим

$$L_z = \sum_i \Delta m_i \omega_z (r_i^2 - z_i^2) = \sum_i (\Delta m_i R_i^2) \omega_z,$$

где $R_i^2 = r_i^2 - z_i^2$ – квадрат расстояния элементарной массы Δm_i от оси вращения.

Величину $I = \sum_i (\Delta m_i R_i^2)$ называют моментом инерции тела относительно оси Z (см. лаб. работу № 5.). Учитывая это, окончательно получим

$$L_z = I \omega_z. \quad (3.6)$$

С учетом (3.6) проекция уравнения моментов (3.3) на ось Z запишется так:

$$\frac{d(I\omega_z)}{dt} = M_z,$$

или, поскольку для твердого тела $I = \text{const}$,

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z. \quad (3.7)$$

Это и есть основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси Z . Проекции L_z и M_z называют соответственно моментами импульса и силы относительно оси Z . Интегрирование уравнений (3.7) с учетом начальных условий позволяет полностью решить задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси – найти зависимость от времени угловой скорости ω и угла поворота φ .

Уравнение (3.7) может быть экспериментально проверено на приборе Обербека.

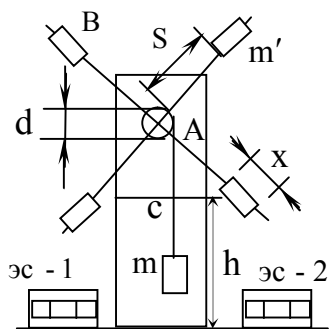


Рис. 3.2

Маятник Обербека (рис. 3.2) состоит из шкива A диаметром d , к которому прикреплены четыре одинаковых стержня B , расположенных под углом 90° друг к другу. На стержнях могут закрепляться одинаковые грузы массой m' каждый, которые можно перемещать вдоль стержней, изменяя таким образом момент инерции маятника. На стержни нанесены деления, позволяющие измерять расстояния от грузов m' до оси вращения.

Маятник выводится из состояния покоя при помощи груза массой m , подвешенного на нити, намотанной на шкив.

На поступательно движущийся груз действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости \vec{T} , приложенная со стороны нити (рис. 3.3.). На шкив маятника A действуют сила тяжести $M\vec{g}$ (M – масса маятника), сила реакции опоры \vec{N} , сила трения в опоре и сила упругости нити \vec{T}' . Моменты сил $M\vec{g}$ и \vec{N} относительно оси Z равны нулю, так обе силы при симметричном расположении грузов m' (и без них) на стержнях приложены в точке O , лежащей на оси Z . Модули моментов сил трения и упругости (до момента соприкосновения груза со столом) относительно оси Z равны соответственно $M_{тр}$ и rT' , где r – радиус шкива.

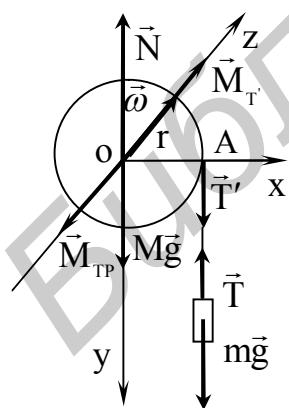


Рис. 3.3

Описание движения системы маятник + нить + груз значительно упростится, если пренебречь массой нити. В этом случае можно считать, что $T' = T$ и для описания движения системы достаточно двух уравнений:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - T, \quad (3.8)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = rT - M_{TP}, \quad (3.9)$$

где v и ω – модули скорости груза и угловой скорости маятника, I – момент инерции маятника относительно оси Z . Здесь учтено также, что $v_y = v, \omega_z = \omega, \vec{T}_y = -\vec{T}, M_{TPZ} = -M_{TP}, M_{TZ} = rT$.

Если теперь предположить, что нить нерастяжима и отсутствует ее проскальзывание при раскручивании шкива, то можно приравнять скорость груза линейной скорости точки шкива в месте касания нити:

$$v = \omega r, \quad (3.10)$$

установив, таким образом, связь между переменными v и ω , входящим в уравнение (3.8) и (3.9).

Сначала груз m удерживается на площадке C (см. рис. 3.2.), расположенной на высоте h от поверхности стола, причем h можно произвольно изменять. Если площадку убрать, груз m начнет двигаться вниз. Одновременно автоматически включается электросекундомер ЭС-1. В момент касания грузом стола секундомер отключается, зафиксировав время t_1 движения груза. Считая движение равноускоренным, находим, используя известный кинематический закон, ускорение груза:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2h}{t_1^2}. \quad (3.11)$$

Используя формулы (3.10) и (3.11), находим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt_1^2}. \quad (3.12)$$

После соприкосновения груза со столом сила упругости T обращается в нуль (нить должна в момент соприкосновения соскользнуть со шкива). Дальнейшее вращение маятника под действием сил трения в опоре становится замедленным и описывается уравнением

$$I \frac{d\omega}{dt} = -M'_{TP}. \quad (3.13)$$

Предполагая, что в течение всего времени вращения маятника момент сил трения в опоре не изменяется, т.е. $M'_{TP} = M_{TP} = const$, уравнение (3.13) можно проинтегрировать следующим образом:

$$I \int_{\omega(t_1)}^0 d\omega = -M_{TP} \int_{t_1}^{t_1+\tau} dt, \quad (3.14)$$

где $\omega(t_1)$ – угловая скорость в момент t_1 соприкосновения груза со столом, τ – промежуток времени от момента соприкосновения груза со столом до остановки маятника. Это время измеряется секундомером ЭС-2. Элементарное интегрирование приводит уравнение (3.14) к виду

$$I\omega(t_1) = M_{Tp}\tau. \quad (3.15)$$

Учитывая теперь, что $v(t) = at$, из (3.10) с помощью (3.11) находим

$$\omega(t_1) = \frac{at_1}{r} = \frac{2h}{rt_1}. \quad (3.16)$$

Подстановка в (3.15) дает

$$M_{Tp} = I \frac{2h}{rt_1\tau}. \quad (3.17)$$

Принимая во внимание соотношения (3.11), (3.12), (3.17) и вводя диаметр шкива $d = 2r$, систему уравнений (3.8), (3.9) можно представить в виде

$$m \frac{2h}{t_1^2} = mg - T, \quad (3.18)$$

$$I \frac{4h}{t_1^2 d} = \frac{Td}{2} - I \frac{4h}{t_1 \tau d}. \quad (3.19)$$

Уравнения (3.18) и (3.19) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными I и T . Все остальные входящие в них величины, за исключением $g=9,8 \text{ м/с}^2$, определяются экспериментально в прямых измерениях.

Исключая из (3.19) с помощью (3.18) неизвестную T , получаем формулу для измерения момента инерции крестообразного маятника относительно оси вращения

$$I = \frac{m\tau(gt_1^2 - 2h)d^2}{8h(t_1 + \tau)}. \quad (3.20)$$

Изменяя массу подвешенного к нити груза, можно изменять силы упругости нити и трения в опоре (а следовательно, и их моменты). Однако при этом, как следует из уравнения движения (3.9), при заданном расположении грузов m' на стержнях маятника или при их отсутствии отношение модулей суммарного момента сил и углового ускорения маятника $\beta = d\omega/dt$ должно оставаться неизменным, т.е.

$$\frac{rT - M_{Tp}}{\beta} = I = const.$$

Это следует из определения момента инерции как физической величины. Следовательно, если, проделав опыт с различными грузами m_1, m_2, m_3, \dots , мы получим в результате расчетов по формуле (3.20) одинаковые значения моментов инерции маятника I_1, I_2, I_3, \dots , то можно сделать заключение о справедливости уравнения вращательного движения маятника (3.9). При этом результаты косвенных измерений считаются одинаковыми в пределах погрешностей, т.е. $I_1 = I_2 = I_3 = \dots$, если пересекаются их доверительные интервалы. Практически это легко установить, отложив на вещественной оси в выбранном масштабе средние значения $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3, \dots$, окруженные соответствующими доверительными интервалами $(\bar{I}_1 - \Delta I, \bar{I}_1 + \Delta I_1), (\bar{I}_2 - \Delta I, \bar{I}_2 + \Delta I_2), (\bar{I}_3 - \Delta I, \bar{I}_3 + \Delta I_3), \dots$.

При проверке свойства аддитивности момента инерции (т.е. того, что момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерций

любых частей этого тела относительно той же оси) и изучении характера зависимости момента инерции крестообразного маятника от распределения масс относительно оси вращения, будем обозначать момент инерции маятника без грузов m' на стержнях (рис. 3.2) через I_0 , а с закрепленными на них четырьмя грузами – через I . Тогда, пренебрегая размерами грузов по сравнению с размерами стержней, в соответствии со свойством аддитивности момента инерции можно записать

$$I = I_0 + 4m'l^2, \quad (3.21)$$

где l – расстояние от центра закрепленного на стержне груза до оси вращения, m' – масса одного груза. Как видно из рис. 3.2,

$$l = \frac{d+x}{2} + S, \quad (3.22)$$

где d – диаметр шкива, x – длина закрепленного груза, S – расстояние до ближайшего торца этого груза.

Порядок выполнения работы

Упражнение 1. Измерение момента инерции крестообразного маятника без грузов и проверка основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

1. Снять со стержней маятника цилиндрические грузы.
2. Измерить диаметр шкива d штангенциркулем.
3. Измерить массу m_1 груза, подвешенного к нити.
4. Намотать на шкив нить с грузом так, чтобы, находясь на площадке, груз натягивал нить.
5. Включить секундомеры с помощью тумблеров “Сеть” на панелях и установить их на нуль.
6. Привести груз в движение, освободив площадку. Время t_1 движения груза до касания со столом измерить секундомером ЭС-1.
7. В момент касания грузом стола нажать кнопку “Пуск” секундомера ЭС-2 и измерить время τ вращения маятника до остановки.

Замечание. В момент касания нить должна соскользнуть со шкива.

8. Вычислить момент инерции крестообразного маятника без грузов m' по формуле (3.20).
9. Повторить действия по пп. 1–8 для груза m_2 , а затем – m_3 .
10. Убедиться в равенстве (в пределах погрешностей) моментов инерции I_1, I_2, I_3 , измеренных при проведении опытов с массами m_1, m_2, m_3 соответственно.

Упражнение 2. Изучение зависимости момента инерции крестообразного маятника от распределения его массы относительно оси вращения и проверка свойства аддитивности момента инерции.

1. Надеть грузы m' на стержни и расположить их на одинаковом расстоянии l от оси вращения. После закрепления убедиться, что маятник находится в состоянии безразличного равновесия (сбалансирован).
2. Подвесить к нити какой-либо груз m и провести все измерения, необходимые для определения момента инерции маятника, как в упражнении 1 (пп. 1–8), не менее чем для трех различных расстояний l_1, l_2, l_3 .
3. Рассчитать по формуле (3.20) момент инерции маятника с закрепленными на стержнях грузами m' для всех установленных расстояний.
4. Выбрав какое-либо измеренное значение момента инерции маятника без грузов I_0 и измерив массу m' , построить в удобном масштабе график функции $I(l)$ по формуле (3.21) (парабола с вершиной в точке I_0).
5. Изобразить на плоскости графика $I(l)$ точки, соответствующие результатам расчета момента инерции маятника по формуле (3.20) для всех установленных расстояний, и по их расположению относительно построенной кривой сделать вывод о справедливости соотношения (3.21).

Контрольные вопросы

1. С какими физическими величинами вы познакомились при изучении теории и в процессе выполнения работы? Дайте определение этих величин.
2. Какие физические законы необходимо знать для понимания настоящей лабораторной работы? Сформулируйте эти законы в математической и словесной формах.
3. Обоснуйте вывод расчетной формулы (3.20), сформулировав все необходимые для него упрощающие предположения.
4. Каким образом на приборе Обербека можно проверить уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси? Какие экспериментальные данные подтверждают справедливость этого уравнения?
5. Является ли момент инерции аддитивной величиной? Ответ подтвердите с помощью полученных экспериментальных данных.
6. Как зависит момент инерции тела от характера распределения его массы относительно оси? Как эта зависимость устанавливается в настоящей работе?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1988. Т. 1. §§ 2, 5, 36–43.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. Т. 1. §§ 5–8, 11–14, 28–34.

ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И МОДУЛЯ СДВИГА ТВЕРДЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы:

1. Изучить динамику и кинематику крутильных колебаний.
2. Измерить моменты инерции твердых тел методом крутильных колебаний.
3. Измерить модуль сдвига проволоки.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Деформации кручения и сдвига

Кручением называют вид деформации, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений стержня (проволоки) под действием внешних сил с отличным от нуля моментом относительно его оси. Наиболее часто встречающимся на практике является кручение круглого прямого стержня, один из концов которого закреплен (рис. 4.1). В результате действия вращательного момента внешних сил \vec{M} в поперечных сечениях стержня вследствие молекулярного

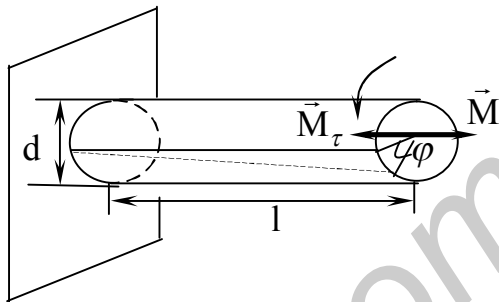


Рис. 4.1

взаимодействия возникают касательные напряжения, создающие противодействующий момент сил \vec{M}_τ , а сечения стержня, расстояние между которыми равно l , поворачиваются одно относительно другого на угол φ . В упругой стадии деформации угол φ мал.

В физике достаточно малый поворот принято характеризовать вектором $\vec{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота φ , а направление совпадает с осью поворота (причем так, что направление поворота отвечает правилу правого винта по отношению к направлению $\vec{\varphi}$). Как показывает опыт, в упругой стадии кручения угол поворота φ пропорционален моменту приложенных сил M . В векторном виде это запишем так:

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{f} \vec{M}, \quad (4.1)$$

где f – положительная постоянная, связанная с модулем сдвига N стержня (см. ниже), его диаметром d и длиной l следующей формулой:

$$f = \frac{\pi d^4 N}{32l}. \quad (4.2)$$

В статическом случае момент внешних сил \vec{M} компенсируется моментом упругости \vec{M}_τ , т.е. $\vec{M}_\tau = -\vec{M}$, и поэтому соотношение (4.1) можно представить в виде

$$\vec{M}_\tau = -f\vec{\varphi}. \quad (4.3)$$

Соотношение (3.3) можно рассматривать как закон Гука для кручения в стадии упругой деформации.

Модуль сдвига N характеризует сопротивление материала изменению формы при сохранении его объема.

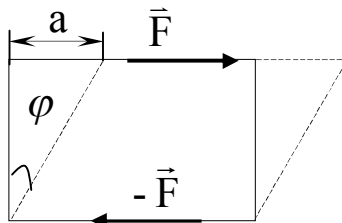


Рис.4.2

Деформация сдвига тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 4.2), возникает под действием сил \vec{F} и $-\vec{F}$, приложенных по касательным к его противоположным граням. Если действие сил будет равномерно распределено по всей поверхности соответствующей грани, то в любом сечении, параллельном этим граням, возникает тангенциальное напряжение

$$\tau = \frac{F}{S}, \quad (4.4)$$

где S – площадь грани. Под действием приложенных сил тело деформируется так, что одна грань сместится относительно другой на некоторое расстояние a . Если тело мысленно разбить на тонкие параллельные рассматриваемым граням слои, то каждый слой окажется сдвинутым относительно соседних с ним слоев. По этой причине деформация такого вида получила название сдвига. При деформации сдвига любая прямая, первоначально перпендикулярная слоям, повернется на некоторый угол φ . При упругих деформациях угол φ очень мал и оказывается, как показывает опыт, пропорциональным тангенциальному напряжению τ :

$$\varphi = \frac{1}{N}\tau, \quad (4.5)$$

где коэффициент N зависит только от свойств материала и называется *модулем сдвига*. В СИ N измеряется в паскалях (Па).

Крутильные колебания

Рассмотрим теперь явление, называемое крутильными колебаниями.

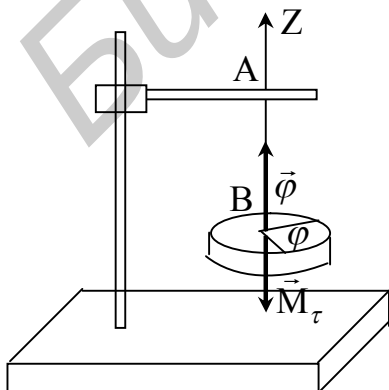


Рис.4.3

Установка, позволяющая создавать крутильные колебания, состоит из штатива с зажимом для закрепления тонкой металлической проволоки, на нижнем конце которой можно подвешивать различные твердые тела (рис. 4.3). Жестко закрепив концы проволоки в точках А и В, повернем тело на малый угол φ вокруг оси проволоки Z и отпустим его. Под действием сил упругости, возникающих при кручении проволоки, тело начнет совершать колебания вокруг оси Z . Их и называют крутильными колебаниями.

Так как это один из видов движения твердого тела вокруг фиксированной оси, то его уравнение движения запишется так (см. лаб. работу № 3):

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_{\tau z}, \quad (4.6)$$

где I – момент инерции подвешенного тела относительно оси проволоки Z , а $M_{\tau z}$ – момент сил упругости, действующих на тело со стороны проволоки, относительно той же оси. Но в соответствии с уравнением (4.3) $M_{\phi z} = -f\varphi_z$. Тогда, учитывая, что $\omega_z = d\varphi_z / dt$, уравнение (4.6) можно представить в виде

$$I \frac{d^2\varphi_z}{dt^2} + f\varphi_z = 0. \quad (4.7)$$

Это уравнение гармонических колебаний (см. лаб. работу № 6). Его общее решение можно записать в виде

$$\varphi_z = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (4.8)$$

где φ_m – максимальный угол закручивания проволоки (амплитуда колебаний), α_0 – начальная фаза колебаний, ω_0 – циклическая частота колебаний, определяемая формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{I}}. \quad (4.9)$$

Тогда период крутильных гармонических колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \quad (4.10)$$

Формулу (4.10) можно использовать для косвенного измерения как момента инерции тела относительно произвольной оси (ее выбор определяется точкой подвеса тела), так и (с учетом формулы (4.2)) модуля сдвига материала проволоки.

Измерение момента инерции и модуля сдвига

Момент инерции твердого тела в ряде случаев можно легко рассчитать теоретически. В частности, момент инерции однородного диска (цилиндра), используемого в работе в качестве эталонного тела, относительно оси симметрии Z (см. рис. 4.3) задается формулой

$$I_0 = \frac{mD^2}{8}, \quad (4.11)$$

где m и D – соответственно масса и диаметр диска.

Подвешивая на одной и той же проволоке эталонное тело с известным I_0 , а затем тело с неизвестным моментом инерции I , можно экспериментально определить промежутки времени t_0 и t , в течение которых совершаются n_0 и n колебаний эталонным телом и телом с неизвестным моментом инерции. Тогда в соответствии с (4.10)

$$T_9 = \frac{t_9}{n_9} = 2\pi \sqrt{\frac{I_9}{f}}, \quad (4.12)$$

$$T = \frac{t}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}. \quad (4.13)$$

Разделив почленно (4.13) на (4.12), после возведения полученного равенства в квадрат находим:

$$I = I_9 \frac{t^2 n_9^2}{n^2 t_9^2}. \quad (4.14)$$

В процессе проведения эксперимента целесообразно выбрать $n = n_9$. Тогда с учетом (4.11) для неизвестного момента инерции получаем следующую расчетную формулу:

$$I = \frac{1}{8} m D^2 \frac{t^2}{t_9^2}. \quad (4.15)$$

Для измерения модуля сдвига материала проволоки используется только эталонное тело. В этом случае из (4.11) и (4.12) с учетом (4.2) получаем

$$N = \frac{16 \pi l m D^2 n_9^2}{d^4 t_9^2}. \quad (4.16)$$

Порядок выполнения работы

1. Измерить диаметр и длину проволоки.
2. Измерить массу и диаметр эталонного диска.
3. Подвесить к проволоке эталонный диск и измерить время t_9 некоторого числа n_9 крутильных колебаний (угол закручивания не должен превышать 30°).
4. Подвесить к проволоке за одну из его точек тело с неизвестным моментом инерции (прямоугольная пластина) и измерить время t такого же как для эталонного диска числа колебаний. По формуле (4.15) рассчитать момент инерции этого тела.
5. Действия по п. 4 проделать еще раз для двух других точек подвеса (определив таким образом моменты инерции прямоугольной пластины относительно трех взаимно перпендикулярных осей).
6. По известному времени t_9 и соответствующему числу n_9 колебаний эталонного диска рассчитать по формуле (4.16) модуль сдвига материала проволоки.

Контрольные вопросы

1. С какими физическими величинами вы познакомились при изучении теории и в процессе выполнения работы? Дайте определения этих величин.

2. Какие физические законы необходимо знать для понимания настоящей лабораторной работы? Сформулируйте эти законы и объясните, как они применяются в работе.

3. Изобразите графически зависимость от времени φ_z , $\dot{\varphi}_z$, $\ddot{\varphi}_z$ и проекции момента сил упругости на ось Z .

4. Рассчитайте теоретически моменты инерции ряда тел (диск, цилиндр, шар, конус, прямоугольный параллелепипед относительно разных осей (задача конкретизируется преподавателем)). Сравните полученные результаты с экспериментальными.

5. Получите формулу для расчета момента инерции (4.15) и формулу для расчета модуля сдвига (4.16).

6. Справедливо ли следующее утверждение: “Если масса и радиусы шара и диска равны, то момент инерции шара меньше момента инерции диска?”

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1988. Т. 1. §§ 13, 26, 28–33.

2. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. Т. 1. §§ 38, 39, 41, 43, 53.

**ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО
КОЛЕСА И СИЛЫ ТРЕНИЯ В ОПОРЕ**

Цель работы:

1. Определить момент инерции махового колеса относительно оси вращения.
2. Определить силу трения в опорных стойках оси.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

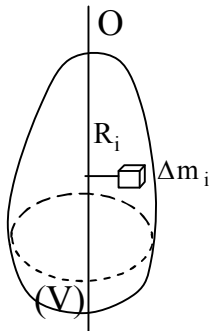


Рис. 5.1

Моментом инерции твердого тела относительно некоторой оси OO' (рис. 5.1) называют величину

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2, \quad (5.1)$$

где Δm_i – масса i -й материальной точки, на которые мысленно разбито тело ($1 \leq i \leq n$), R_i – ее расстояние до выбранной оси. Если масса Δm_i сосредоточена в элементарном объеме ΔV_i , а плотность вещества в окрестности рассматриваемой точки тела ρ_i , то $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$ и вместо (5.1) можно записать

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho_i R_i^2 \Delta V_i \equiv \int_{(V)} \rho R^2 dV. \quad (5.2)$$

Предлагаемый метод экспериментального определения момента инерции твердого тела основан на законе изменения механической энергии системы $K + U_{\text{вз}}$ в процессе изучаемого движения:

$$\Delta(K + U_{\text{вз}}) = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}^{\text{нkc}}, \quad (5.3)$$

где K – кинетическая энергия системы, $U_{\text{вз}}$ – ее собственная потенциальная энергия (энергия взаимодействия частиц системы друг с другом), $A_{\text{внеш}}$ – суммарная работа всех внешних сил, действующих на систему, $A_{\text{внутр}}^{\text{нkc}}$ – суммарная работа всех внутренних неконсервативных сил.

Если среди внешних сил имеются как консервативные, так и неконсервативные, то суммарная работа консервативных сил, если она не равна тождественно нулю, может быть представлена как убыль некоторой функции координат материальных точек системы $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$, называемой потенци-

альной энергией системы во внешнем силовом поле. Например, система n материальных точек, находящихся вне однородного шара массой M , обладает в его гравитационном поле потенциальной энергией вида

$$U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = -GM \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\vec{r}_i|} + C, \quad (5.4)$$

где m_i и \vec{r}_i – соответственно масса i -й материальной точки и ее радиус-вектор, проведенный из центра шара, C – произвольная постоянная. С помощью выражения (5.4) легко показать, что в пределах небольших высот потенциальная энергия тела массой m у поверхности Земли равна

$$U(h) = mgh, \quad (5.5)$$

где g – ускорение свободного падения у поверхности Земли, h – высота центра инерции тела над произвольно выбранным у поверхности Земли нулевым уровнем потенциальной энергии (это достигается фиксацией в (5.4) численного значения константы C).

Представляя теперь $A_{\text{внеш}}$ в виде

$$A_{\text{внеш}} = -\Delta U + A_{\text{внутр}}^{\text{нkc}}, \quad (5.6)$$

где ΔU – убыль потенциальной энергии системы во внешнем поле, $A_{\text{внутр}}^{\text{нkc}}$ – суммарная работа внешних неконсервативных сил, вместо (5.3) получаем

$$\Delta(K + U_{\text{вз}} + U) = A_{\text{внеш}}^{\text{нkc}} + A_{\text{внутр}}^{\text{нkc}}, \quad (5.7)$$

величину

$$E = K + U_{\text{вз}} + U \quad (5.8)$$

называют полной механической энергией системы во внешнем поле.

Предлагаемый в данной работе метод определения момента инерции махового колеса основан на использовании закона изменения полной механической энергии системы в поле силы тяжести. В рассматриваемом случае на систему груз + маховик действуют внешние консервативные силы тяжести и реакции опоры, а также неконсервативные силы сопротивления воздуха и трения в опорных стойках махового колеса. Пренебрегая работой силы сопротивления воздуха и работой внутренних неконсервативных сил, пользуясь уравнением (5.7), запишем

$$\Delta E = A_{\text{тр}}, \quad (5.9)$$

где $A_{\text{тр}}$ – работа силы трения в опоре.

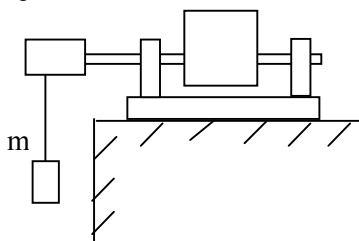


Рис. 5.2

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ подвешенный груз массой m (рис. 5.2) находится на высоте h от наиболее низкого положения, до которого может опуститься груз. Тогда, учитывая возможность произвольного выбора нулевого

уровня потенциальной энергии, начальная энергия рассматриваемой системы, в пренебрежении массой нити, будет равна

$$E_0 = mgh_i + \Pi, \quad (5.10)$$

где Π – сумма потенциальной энергии махового колеса со шкивом в поле силы тяжести и собственной потенциальной энергии системы. Считая, что изменение последней в процессе движения пренебрежимо мало, в нижней точке для полной энергии получаем

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \Pi, \quad (5.11)$$

где v – скорость подвешенного тела в нижней точке, ω – угловая скорость вращения шкива в соответствующий момент времени, I – момент инерции махового колеса относительно оси вращения. Тогда согласно (5.9) для $\Delta E = E - E_0$ получим

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mgh_i = -fh_1, \quad (5.12)$$

где f – сила трения в опоре (предполагается, что в процессе движения $f = \text{const}$).

Силу трения можно вычислить, снова используя уравнение (5.9). Вращаясь по инерции, маховое колесо поднимает груз на высоту $h_2 < h_1$. При этом согласно (5.9)

$$mgh_2 - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \right) = -fh_2. \quad (5.13)$$

Складывая (5.12) и (5.13), получаем

$$mgh_2 - mgh_1 = -f(h_1 + h_2), \quad (5.14)$$

откуда

$$f = mg \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}. \quad (5.15)$$

Так как по предположению движение груза равноускоренное, то в нижней точке

$$v = \frac{2h_1}{t}, \quad (5.16)$$

где t – время опускания груза. Поскольку нить сматывается со шкива без проскальзывания, то для угловой скорости в момент t имеем

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2h_1}{rt}, \quad (5.17)$$

где r – радиус шкива.

Подставляя (5.15)–(5.17) в уравнение (5.12), и учитывая, что $r = \frac{d}{2}$, где d – диаметр шкива, после преобразований получаем искомую формулу для момента инерции:

$$I = \frac{md^2}{4} \left[\frac{gt^2 h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - 1 \right]. \quad (5.18)$$

Порядок выполнения работы

1. Определить при помощи технических весов массу подвешиваемого груза m .
2. Измерить штангенциркулем диаметр шкива d .
3. Намотать на шкив нить с прикрепленным к свободному концу грузом. Установить груз на высоте h_1 . Высоту h_1 отсчитать от наиболее низкого положения, на которое может опускаться груз.
4. По секундомеру определить время движения груза от верхней точки до нижнего положения.
5. Определить высоту h_2 , на которую поднимется груз за счет инерции маховика.
6. По формулам (5.15) и (5.18) рассчитать силу трения в опоре и момент инерции махового колеса.
7. Провести измерения для трех различных подвешенных грузов.
8. Вычислить погрешности измерений величин f и I .

Контрольные вопросы

1. Какие физические понятия используются в данной работе? Дайте их определение.
2. Сформулируйте закон изменения полной механической энергии системы во внешнем поле.
3. Какие силы называются консервативными? Эквивалентны ли понятия консервативных и потенциальных сил?
4. Запишите кинематические законы равноускоренного движения материальной точки по прямой и окружности, а также формулу, связывающую линейную и угловую скорости частицы при ее движении по окружности.
5. Получить, пользуясь выражением (5.4), формулу (5.5), приняв за нулевой уровень потенциальной энергии поверхность Земли.
6. Обосновать вывод формулы для f и I . Сформулировать все необходимые для этого предположения.

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1989. §§ 19–22, 38, 39, 41, 45, 46.

ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Цель работы:

1. Ознакомиться с теорией механических гармонических колебаний.
2. Измерить ускорение свободного падения тел с помощью обратного маятника.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени, называются колебаниями. Описывающие их функции времени обладают свойством периодичности. В частности, для механических колебаний таким свойством обладают обобщенные координаты системы, т.е. величины, однозначно определяющие в каждый момент времени положение системы в пространстве, но не обязательно являющиеся декартовыми координатами.

Различают *свободные и вынужденные* колебания. Свободными называются колебания, которые совершает система, предоставленная самой себе после какого-либо внешнего воздействия. Вынужденными называются колебания, происходящие под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Простейшими колебаниями являются *гармонические* колебания, при которых обобщенные координаты системы изменяются по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен, во-первых, потому, что реальные колебания часто имеют характер, близкий к гармоническим, а во-вторых, периодические процессы с другой зависимостью от времени могут быть представлены в виде суперпозиции гармонических колебаний.

Гармонические колебания

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки (частицы) массой m под действием упругой силы $\vec{F} = -k\vec{r}$, где $k = const > 0$, \vec{r} – радиус-вектор частицы относительно положения равновесия.

Уравнение движения частицы в соответствии со вторым законом Ньютона запишется в виде

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r},$$

или

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = \vec{0}. \quad (6.1)$$

Поскольку момент упругой силы относительно точки $\vec{r} = \vec{0}$ $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = -k[\vec{r}, \vec{r}] = \vec{0}$, то момент импульса частицы относительно той же точки $\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] = const$. Поэтому движение будет происходить в фиксированной

плоскости, перпендикулярной вектору \vec{L} . Введем в этой плоскости систему координат ХОУ с началом в положении равновесия частицы. Тогда, проектируя уравнение (6.1) на координатные оси, приходим к системе двух независимых дифференциальных уравнений

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (6.2)$$

$$m\ddot{y} + ky = 0. \quad (6.3)$$

Будем искать решение уравнения (6.2) в виде

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.4)$$

где A, ω_0, φ_0 – некоторые константы. Дважды дифференцируя функцию (6.3) по времени, находим

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) и (6.4) в (6.2), получаем

$$(-m\omega_0^2 + k)A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0.$$

Поскольку $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ не является тождественным нулем, то функция (6.4) будет решением уравнения (6.2) при произвольных A и φ_0 , но с

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.6)$$

Движение частицы, описываемое законом (6.4), называют *гармоническими колебаниями*.

Постоянную (6.6) называют *циклической, или круговой частотой* колебаний. Промежуток времени $T = 2\pi / \omega_0$ называют *периодом колебаний*. Функцию $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ называют *фазой колебаний*. Константу $A = x_{\max}$ называют *амплитудой колебаний*. Значения постоянных A и φ_0 определяются из начальных условий \vec{r}_0 и \vec{v}_0 , задающих соответственно начальное положение и начальную скорость частицы.

Совершенно аналогично решение уравнения (6.3) запишется в виде

$$y = B \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (6.7)$$

Функции (6.4) и (6.7) определяют кинематический закон движения частицы под действием упругой силы. Вид траектории движения в плоскости ХОУ зависит от начальных условий, а следовательно, от значений констант A, B, φ_0, ψ_0 .

В частности, если $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ и $A \neq 0$, то уравнение траектории имеет вид

$y = \frac{B}{A}x$, и частица совершает гармонические колебания с частотой ω_0 и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$ вдоль диагонали прямоугольника со сторонами $2A$ и $2B$

(рис. 6.1). Если же $\varphi_0 = 0$, а $\psi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$, то уравнение траектории имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

т.е. частица движется по эллипсу с полуосями A и B (рис. 6.2)

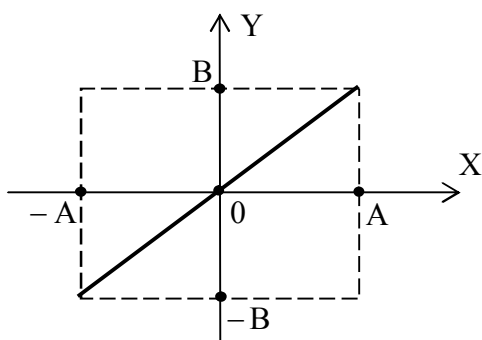


Рис. 6.1

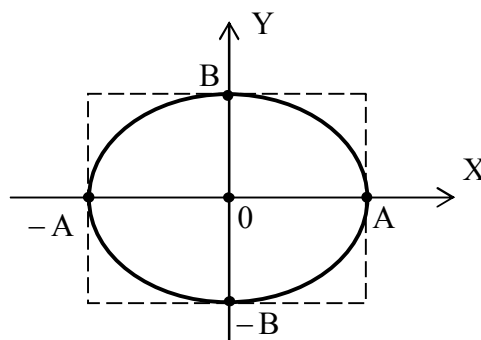


Рис. 6.2

Таким образом, в данном случае периодическое движение по замкнутой кривой может рассматриваться как суперпозиция двух гармонических взаимно перпендикулярных колебаний.

Физический маятник

Рассмотрим теорию колебаний физического маятника. Физическим маятником называют твердое тело, совершающее колебания вокруг оси, проходящей через любую его точку, не совпадающую с центром инерции (тяжести) тела. Это механическая система с одной степенью свободы. В качестве обобщенной

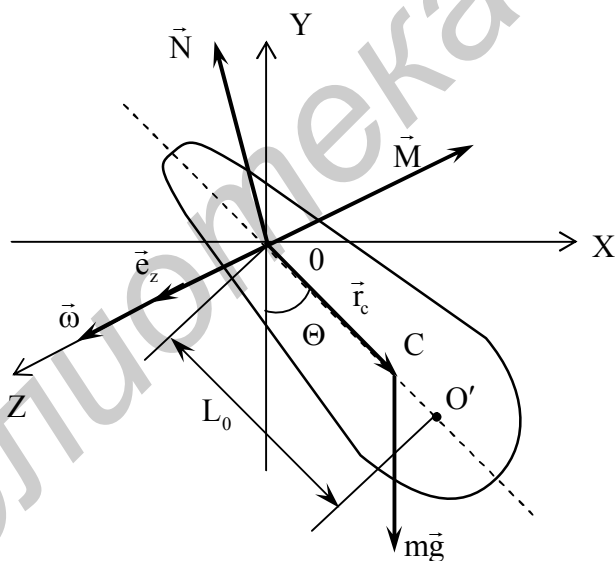


Рис. 6.3

координаты выберем угол отклонения Θ прямой, проходящей через точку подвеса O и центр инерции C (рис. 6.3), от вертикали (положения равновесия). Будем считать также, что $\Theta > 0$ при $x > 0$ и $\Theta < 0$ при $x < 0$. Допустим, что в рассматриваемый момент времени маятник движется от положения равновесия, т.е. $d\Theta > 0$, а угловая скорость $\vec{\omega} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$. Момент силы тяжести \vec{M} относительно точки O в этом положении противоположен вектору \vec{e}_z (см. рис. 6.3). Поскольку момент силы реакции оси относительно точки O равен нулю, то уравнение движения физического маятника запишется в виде

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad (6.8)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси Z . Но $\omega_z = \omega = \frac{d\Theta}{dt}$, $M_z = -mgl \sin \Theta$, где $l = |\vec{r}_c|$ – расстояние от точки подвеса до центра инерции маятника. Следовательно, вместо (6.8) получаем

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} = -mgl \sin \Theta,$$

или

$$I\ddot{\Theta} + mgl \sin \Theta = 0. \quad (6.9)$$

Если ограничиться случаем малых колебаний, т.е. углов отклонения, удовлетворяющих в радианной мере приближенному равенству $\sin \Theta \approx \Theta$, то уравнение (6.9) переписывается так:

$$I\ddot{\Theta} + mgl\Theta = 0. \quad (6.10)$$

Сравнивая (6.10) с (6.2), заключаем, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Theta = \Theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.11)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}, \quad (6.12)$$

Θ_m – угол наибольшего отклонения маятника от положения равновесия. Из (6.12) вытекает, что период малых колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (6.13)$$

Таким образом, малые колебания физического маятника являются *гармоническими*.

Далее замечаем, что отношение I/ml имеет размерность длины:

$[I/(ml)] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м}$. Учитывая это обстоятельство, введем понятие *приведенной длины* физического маятника:

$$L_0 = \frac{I}{ml}. \quad (6.14)$$

Тогда формула (6.13) приобретает особенно простой вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}}. \quad (6.15)$$

Приведенная длина физического маятника всегда больше l . Действительно, согласно теореме Штейнера

$$I = I_c + ml^2, \quad (6.16)$$

где I_c – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси Z (см. рис. 6.3).

Разделив (6.16) почленно на ml , находим

$$\frac{I}{ml} = \frac{I_c}{ml} + l.$$

Но по определению $I/(ml) = L_0$. Поэтому $L_0 = I_c/(ml) + l$ и, следовательно, $L_0 > l$. Точку O' , лежащую на прямой, проходящей через точку подвеса O и центр масс C , на расстоянии приведенной длины от точки O , называют *центром качания* физического маятника. Точка подвеса и центр качания обладают замечательным *свойством взаимности*: если точку подвеса O и центр качания O' поменять местами, то период малых колебаний физического маятника не изменится. Действительно, новый период колебаний будет равен

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mg(L_0 - l)}}, \quad (6.17)$$

где I' – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O' , $(L_0 - l)$ – расстояние от O' до центра масс C . Но согласно теореме Штейнера

$$I' = I_c + m(L_0 - l)^2. \quad (6.18)$$

Вычитая из (6.18) (6.16), получаем

$$I' - I = m(L_0 - l)^2 - ml^2 = mL_0(L_0 - 2l),$$

откуда с учетом (6.14)

$$I' = I + mL_0(L_0 - 2l) = \frac{I}{l}(L_0 - l). \quad (6.19)$$

Подставляя (6.19) в (6.17), находим

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I(L_0 - l)}{mgl(L_0 - l)}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = T.$$

Измерение ускорения свободного падения

На свойстве взаимности точки подвеса и центра качания основано определение ускорения свободного падения с помощью так называемого *оборотного маятника*. Обратным называется физический маятник, у которого имеются две параллельные друг другу закрепленные на осевом стержне маятника опорные призмы, за которые он может поочередно подвешиваться (рис. 6.4). Вдоль того же стержня могут закрепляться и перемещаться тяжелые грузы. Перемещением призм (или грузов) добиваются того, чтобы

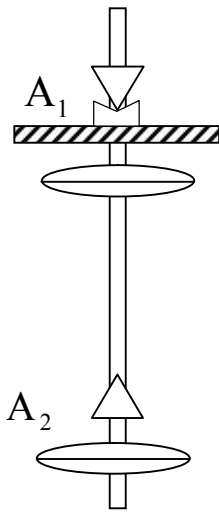


Рис. 6.4

где t – время n полных колебаний маятника. Таким образом, главная задача прямых измерений, с помощью которых определяется значение ускорения свободного падения, сводится к измерению приведенной длины физического маятника.

Порядок выполнения работы

1. Измерив расстояние L между опорными ребрами призм, подвесить маятник за призму A_1 (см. рис. 6.4). Отклонить маятник на угол не более 20° и по секундомеру измерить время t $n = 20$ полных колебаний.

2. Подвесить маятник за призму A_2 и измерить время t' того же числа полных колебаний.

3. Передвинуть внутреннюю призму A_2 на одно деление и снова измерив расстояние L между опорными ребрами призм, проделать пп. 1–2. Далее проделать пп. 1–3 не менее пяти раз.

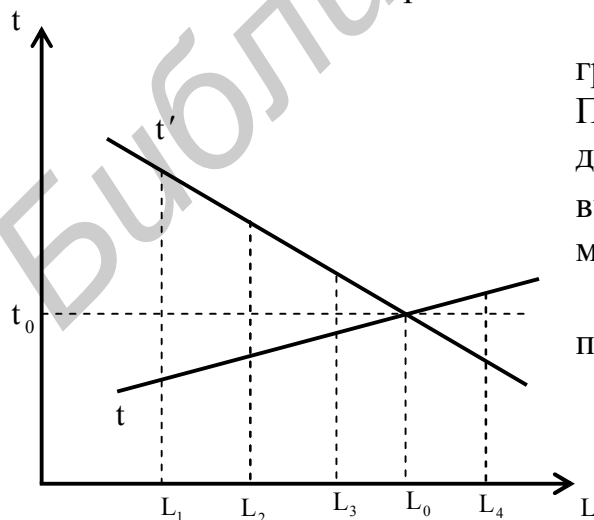


Рис. 6.5

4. По полученным данным построить графики зависимостей t и t' от L (рис. 6.5). По точке пересечения этих графиков определить приведенную длину L_0 и соответствующее ей время $n = 20$ полных колебаний маятника t_0 .

5. Рассчитать ускорение свободного падения по формуле (6.20):

$$g = \frac{4\pi^2 n^2 L_0}{t_0^2}.$$

при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно приведенной длине L_0 . Измерив период колебаний маятника $T = \frac{t}{n}$ и L_0 , можно по формуле (6.15) найти ускорение свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 n^2 L_0}{t^2}, \quad (6.20)$$

Контрольные вопросы

1. Какие физические процессы называются колебаниями? Дайте определение свободных и вынужденных колебаний.
2. Какие колебания называют гармоническими? Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его общее решение. Дайте определение амплитуды, частоты и фазы гармонических колебаний.
3. Вычислите значение момента импульса частицы относительно точки O и ее полной механической энергии в случаях, изображенных на рис. 6.1 и 6.2. Проведите сравнительный анализ полученных результатов.
4. Чем отличаются движения материальной точки по траектории, изображенной на рис. 6.2, в случаях $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ и $\psi_0 = -\frac{\pi}{2}$?
5. Что собой представляет физический маятник? Запишите дифференциальное уравнение колебаний физического маятника и его общее решение в случае малых колебаний.
6. Дайте определение приведенной длины и центра качания физического маятника.
7. Сформулируйте и докажите теорему взаимности точек подвеса и центра качания. Как утверждение этой теоремы используется в работе?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1987. §§ 49–54, 57.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2. – М.: Наука, 1989. §§ 63–65, 69.

**ИЗУЧЕНИЕ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ
НАКЛОННОГО МАЯТНИКА**

Цель работы:

Измерить коэффициент трения качения с помощью наклонного маятника.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

В технике и физике уделяется особое внимание неконсервативным силам, возникающим при качении шара, колеса, цилиндра по плоскости. Эти силы называют силами трения, различают 3 рода сил: *трения качения*, *трения скольжения* и *трения сцепления*. В настоящей работе уделяется внимание силам трения качения. Они возникают при движении шаров, цилиндров, колес по поверхности других тел без скольжения, при этом относительная скорость соприкасающихся точек равна 0. Эмпирически Кулон установил, что сила трения качения определяется формулой

$$f_k = \mu \frac{N}{R}, \quad (7.1)$$

где N – сила нормального давления, R – радиус катящегося тела (цилиндр, шар), μ – коэффициент трения качения.

Из формулы (7.1) следует, что коэффициент трения качения – размерная величина в отличие от коэффициента трения скольжения. Этот коэффициент не зависит от скорости качения и радиуса тела, а зависит от материала и состояния поверхности соприкасающихся тел. Так, например, при качении дерева по дереву μ изменяется в пределах от 0,5 до 0,8 мм; стали по стали – от 0,01 до 0,05 мм.

Возникновение сил трения качения обуславливается наличием неупругих деформаций, возникающих при движении шаров и цилиндров по поверхности других тел. Чтобы упростить рассуждения, предположим, что движение происходит по плоскости и только она деформируется.

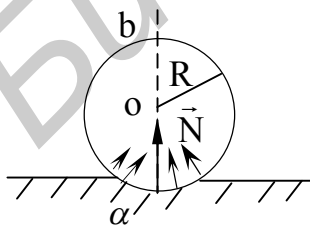


Рис. 7.1

Если цилиндр неподвижен, силы упругости, действующие на каждый малый его элемент со стороны плоскости, будут симметричны относительно вертикальной плоскости ab , проходящей через ось цилиндра (рис. 7.1). Результирующая сила \vec{N} реакции опоры проходит через ось цилиндра и уравнивает силу тяжести.

При качении цилиндра рассмотрим два случая: а) упругой деформации; б) неупругой деформации.

В случае упругой деформации (рис. 7.2) силы взаимодействия между цилиндром и плоскостью будут совершенно симметричны относительно вертикаль-

ной плоскости ab , проходящей через ось цилиндра: каждой силе \vec{f} соответствует равная ей сила \vec{f}' на симметрично расположенном участке площади соприкосновения.

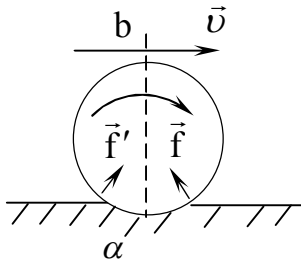


Рис. 7.2

Результирующая всех сил упругой деформации поверхности будет вертикальна и ее момент относительно оси цилиндра также будет равен нулю. Поэтому силы упругих деформаций цилиндра и плоскости при качении не скажутся на скорости качения, и движение будет происходить так, как будто никаких деформаций не было и сил трения качения в этом случае не возникает.

Случай неупругой деформации (что фактически всегда имеет место) дает объяснение возникновению сил трения качения.

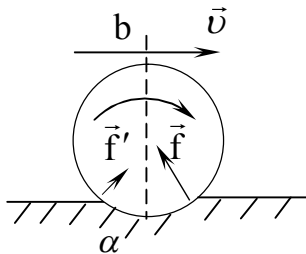


Рис. 7.3

В этом случае силы, действующие на цилиндр со стороны плоскости качения, уже не будут симметричны относительно плоскости ab (рис. 7.3). Поэтому равнодействующая всех элементарных сил реакции плоскости наклонена к поверхности качения (рис. 7.4). Момент этой силы не равен нулю относительно оси цилиндра.

При этом возникает неравная нулю горизонтальная составляющая, направленная в сторону, противоположную движению цилиндра.

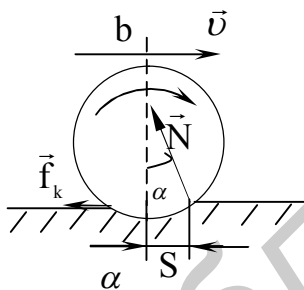


Рис. 7.4

Точка приложения силы \vec{N} находится впереди плоскости ab (см. рис. 7.4), кроме этого линия действия силы \vec{N} проходит выше центра цилиндра. Горизонтальная составляющая силы представляет силу трения качения:

$$f_k = N \sin \alpha, \quad (7.2)$$

вертикальная составляющая — $N_g = N \cos \alpha$. Расстояние S (см. рис. 7.4.) между точкой приложения силы \vec{N} и вертикальной плоскостью мало по сравнению с радиусом цилиндра R и угол наклона α также мал, следовательно, абсолютная величина N почти равна силе нормального давления цилиндра на плоскость, т.е. весу цилиндра P . То есть соотношение (7.2) можно переписать так:

$$f_k \approx N \alpha \approx N \frac{S}{R}. \quad (7.3)$$

Величину S называют “коэффициентом момента силы трения качения”, иногда — плечом трения качения, которое согласно выражению (7.1) совпадает с коэффициентом трения μ .

В данной работе коэффициент трения качения определяется методом наклонного маятника по уменьшению со временем амплитуды качений шара на наклонной плоскости.

Общий вид наклонного маятника представлен на рис. 7.5. На основании маятника 2, снабженном четырьмя ножками с регулируемой высотой, установлен миллисекундомер 1. Изменением высоты ножек устанавливают основание 2 в горизонтальной плоскости. В основании закреплена стойка 3, на которой смонтирована червячная передача 4, последняя соединена с кронштейном 5 и воротком 11.

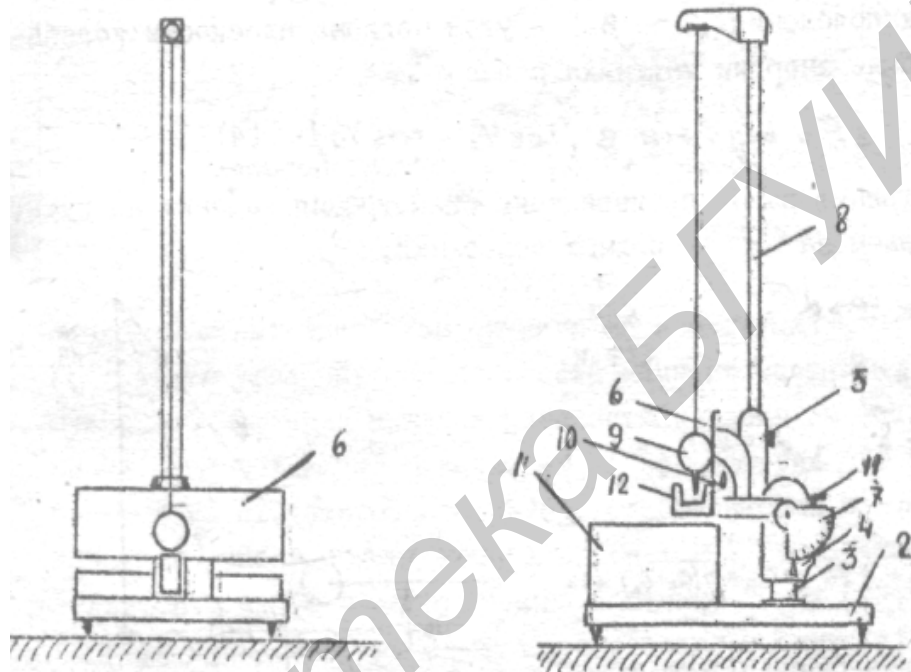


Рис. 7.5

Вращая вороток, можно менять наклон маятника. Отсчет угла наклона маятника производится по шкале 7, а углов качения маятника – по шкале 6. В кронштейне закреплена стойка 8, на которой подвешивается шар 9 с оськой-держателем. В кронштейне 5 вмонтирован фотоэлектрический датчик 12 и держатель образцов 10. Замена шара производится вывинчиванием оськи-держателя из одного шара и ввинчиванием ее в другой. Управление миллисекундомером производится кнопками СТОП и СБРОС. Качения шара являются затухающими вследствие действия силы трения качения. Закон убывания амплитуды определяется силой, вызывающей затухание. Сила трения качения в широких пределах не зависит от скорости, и можно предположить, что амплитуда убывает со временем по арифметической прогрессии. Если пренебречь другими видами диссипативных сил, кроме трения качения, рабочую формулу для определения μ можно получить, приравняв изменение энергии маятника ΔE работе A , совершаемой силой трения f_k .

Пусть E_0 и E_n – потенциальные энергии маятника в крайних положениях, отстоящих друг от друга на n полных колебаний, h_0 и h_n высоты центра тяжести шара в соответствующих положениях относительно положения равновесия

(рис. 7.6). Изменение энергии равно $\Delta E = E - E_0 = mg(h_n - h_0)$, где $h_n - h_0 = l(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_n) \cdot \sin \beta$, φ_0 и φ_n – углы отклонения маятника от положения равновесия в соответствующих положениях, β – угол наклона плоскости колебаний. Тогда убыль энергии маятника равна

$$\Delta E = mgl \sin \beta (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_n). \quad (7.4)$$

Работа силы трения равна произведению силы трения качения на путь, пройденный телом за n полных колебаний,

$$A = -f_{TP} S,$$

т.к. сила трения направлена в каждой точке противоположно скорости. Путь S равен

$$S = a_0 + 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n = n(a_0 + a_n), \quad (7.5)$$

но амплитуда колебаний может быть выражена как длина дуги, опирающаяся на угол φ , т.е. $a = l\varphi$,

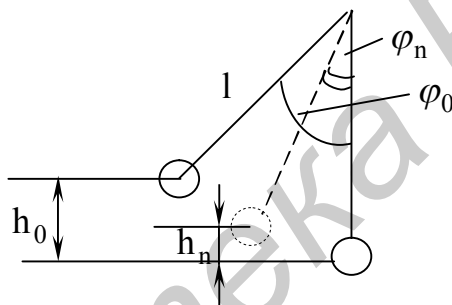


Рис. 7.6

тогда

$$S = nl(\varphi_0 + \varphi_n), \quad (7.6)$$

(Углы φ_0 и φ_n выражаются в радианах).

С учетом формулы (7.6) работа силы трения равна

$$A = -f_{TP} \cdot nl(\varphi_0 + \varphi_n). \quad (7.7)$$

Подставив в (7.7) выражение (7.1), имеем

$$A = -\mu \frac{N}{R} \cdot nl(\varphi_0 + \varphi_n),$$

а так как

$$N_g = mg \cos \beta \quad (\text{рис. 7.7}), \text{ то}$$

$$A = -\mu \frac{mg \cos \beta}{R} \cdot nl(\varphi_0 + \varphi_n).$$

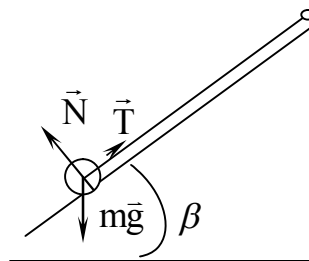


Рис. 7.7

Приравняв изменение энергии маятника ΔE и работу силы трения A , получим

$$-\mu \frac{mg \cos \beta}{R} \cdot nl(\varphi_0 + \varphi_n) = mgl \sin \beta (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_n).$$

Откуда

$$\mu = R \operatorname{tg} \beta \frac{\cos \varphi_n - \cos \varphi_0}{n(\varphi_0 + \varphi_n)}. \quad (7.8)$$

Формула (7.8) является рабочей для расчета коэффициента трения качения.

Порядок выполнения измерений

1. Измерьте штангенциркулем диаметр шара маятника и рассчитайте R .
2. Установите угол наклона плоскости качания маятника $\beta = 5\text{--}45^\circ$.
3. При выбранном угле наклона плоскости качания выведите маятник на $10\text{--}15^\circ$ от положения равновесия (φ_0), измеряя его по шкале, и без толчка отпустите. Измерьте угол отклонения маятника после нечетного числа полных колебаний ($n > 20$). Число колебаний определяется с помощью электронного счетчика. Пуск счетчика производится кнопкой СЕТЬ на лицевой панели прибора. Отсчет полных колебаний снимите с транспаранта ПЕРИОДЫ.
4. Проведите опыт не менее трех раз при заданном наклоне плоскости и рассчитайте μ .
5. Поверните другой стороной плоскость качания (полированной или шероховатой), повторите опыт, рассчитайте μ .
6. Измените угол наклона β и повторите опыт снова.
7. Сопоставьте результаты измерений μ для различных углов наклона маятника β и различных сторон образца (плоскости качания), сделайте выводы.
8. Повторите опыт для других материалов плоскости качения и шара.
9. Сравните результаты, полученные для различных материалов.
10. Рассчитайте абсолютную ошибку коэффициента μ для одной пары материалов.
11. Сделайте общие выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Какие примеры сил трения качения, трения скольжения и трения сцепления вы знаете?
2. Какие силы называются неконсервативными?
3. Какую размерность имеет коэффициент трения качения и трения скольжения?
4. Как объяснить наличие сил трения качения?
5. В каком случае при качении силы трения отсутствуют?
6. Как зависит коэффициент трения качения от качества обработки плоскости качения?
7. При каком предположении относительно закона убывания амплитуды маятника можно получить формулу (7.5).

8. Какими диссипативными силами пренебрегают и какие учитывают при выводе формулы для определения коэффициента трения качения?

9. Как используется теорема об изменении механической энергии в данной лабораторной работе?

10. Почему не рекомендуется в данной работе производить измерения при углах наклона плоскости качения маятника $\beta > 75^\circ$?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1988. §§ 15, 19, 21, 24.

2. Стрелков С.П. Механика. – М. Наука, 1965. §§ 38, 41, 42, 75.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. – М.: Наука, 1974. §§ 17, 24, 27.

Библиотека БГУИР

ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы:

1. Изучить явление резонанса, используя аналогию между механическими и электрическими колебаниями.
2. Исследовать зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты и построить амплитудно-резонансные кривые.
3. Исследовать зависимость сдвига фазы вынужденных колебаний от частоты и построить фазово-резонансные кривые.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Динамические системы, в которых могут существовать периодические процессы, принято называть колебательными системами. Колебания, происходящие в таких системах, представленных самим себе после некоторого внешнего воздействия, называются свободными. Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, приводящие к уменьшению ее энергии. Если убыль энергии не компенсируется работой внешних сил, то свободные колебания будут затухать. Колебания, возникающие и происходящие в таких системах под действием периодически изменяющейся внешней силы, получили название *вынужденных колебаний*.

При рассмотрении внешнего воздействия, возбуждающего колебания в системе, различают силовые и параметрические воздействия. Силовым называют воздействие, при котором остаются неизменными параметры колебательной системы. Напротив, параметрическое воздействие возбуждает колебания в системе при периодическом изменении ее параметров (например, периодическое изменение длины математического маятника). В случае реальных колебательных систем эти воздействия строго разделить нельзя. Поэтому чисто силовые воздействия на колебательную систему имеют место только при определенных условиях, идеализирующих реальную ситуацию.

Рассмотрим незатухающие колебания материальной точки массой m , возбужденные и поддерживаемые периодически изменяющейся силой с амплитудой F_0 и циклической частотой ω ,

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t, \quad (8.1)$$

при которой не будет проявляться изменение параметров собственных колебаний материальной точки κ и χ , определяющих соответственно действующие на нее силы упругости и сопротивления:

$$\vec{F}_{упр} = -\kappa \vec{r}, \quad (8.2)$$

$$\vec{F}_{сопр} = -\chi \dot{\vec{r}}, \quad (8.3)$$

где \vec{r} – радиус-вектор частицы относительно положения равновесия, $\dot{\vec{r}}$ – ее скорость, κ и χ – некоторые положительные константы.

Уравнение движения материальной точки под действием сил (8.1)–(8.3) запишется следующим образом:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0 \cos \omega t - \kappa \vec{r} - \chi \dot{\vec{r}}. \quad (8.4)$$

Выбирая ось x в направлении вектора \vec{F}_0 и проецируя уравнение (8.4) на эту ось, после очевидного преобразования получим

$$m\ddot{x} + \chi\dot{x} + \kappa x = F_0 \cos \omega t, \quad (8.5)$$

или, после почленного деления (8.5) на m ,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (8.6)$$

где положено $\beta = \frac{\chi}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Параметры β и ω_0 называют соответственно *коэффициентом затухания* и *собственной циклической частотой колебаний*.

Решением уравнения (8.6) называют такую функцию $x(t)$, которая обращает его в тождество, т.е. в равенство, справедливое при любом значении аргумента t из области определения функции $x(t)$. Будем искать решение уравнения (8.6) в виде

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (8.7)$$

где A и φ – некоторые константы, выбор значений которых должен обеспечить обращение уравнения (8.6) в тождество. Для их определения дважды продифференцируем функцию (8.7) по времени:

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi), \quad (8.8)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi). \quad (8.9)$$

Подставляя (8.7), (8.8) и (8.9) в (8.6), получим

$$(A_3 - A_1) \cos(\omega t - \varphi) - A_2 \sin(\omega t - \varphi) = f_0 \cos \omega t, \quad (8.10)$$

где для краткости введены

$$A_1 = A\omega^2, \quad A_2 = 2\beta\omega A, \quad A_3 = A\omega_0^2. \quad (8.11)$$

Раскрывая далее $\cos(\omega t - \varphi)$ и $\sin(\omega t - \varphi)$ с помощью известных тригонометрических формул, преобразуем (10) к виду

$$((A_3 - A_1) \cos \varphi + A_2 \sin \varphi) \cos \omega t + ((A_3 - A_1) \sin \varphi - A_2 \cos \varphi) \sin \omega t = f_0 \cos \omega t.$$

Ясно, что это уравнение будет справедливо при любых значениях аргумента t , если положить

$$(A_3 - A_1) \cos \varphi + A_2 \sin \varphi = f_0, \quad (8.12)$$

$$(A_3 - A_1) \sin \varphi - A_2 \cos \varphi = 0. \quad (8.13)$$

Возводя уравнения (8.12) и (8.13) в квадрат и складывая их, очевидно получаем

$$(A_3 - A_1)^2 + A_2^2 = f_0^2,$$

или с учетом (8.11)

$$A^2 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2) = f_0^2,$$

откуда следует, что

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2))^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)}}. \quad (8.14)$$

Из (8.14) очевидно вытекает, что если $\omega_0 > \beta\sqrt{2}$, то при частоте $\omega = \omega_p$, где

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (8.15)$$

амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума, определяемого формулой

$$A_{\max} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (8.16)$$

Таким образом, зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний становится максимальной. Это явление называется *резонансом*, а частота (8.15) и амплитуда (8.16) – соответственно *резонансной частотой* и *резонансной амплитудой*.

Далее из (8.13) следует, что

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{A_3 - A_1}{A_2},$$

откуда с учетом (8.11) получаем

$$\varphi = \operatorname{arccctg} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (8.17)$$

Формулы (8.14) и (8.17) определяют именно те константы A и φ , при которых функция (8.7) является решением уравнения (8.6).

Следует, однако, отметить, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка должно содержать две произвольные константы, поскольку определение функции по ее второй производной требует двукратного интегрирования. Найденное же нами решение вида (8.7) с A и φ , определяемых формулами (8.14) и (8.17), такого произвола не содержит. Такое решение дифференциального уравнения называют *частным*. Частное решение описывает некоторый конкретный процесс из числа всех возможных. Для того чтобы выяснить, какой процесс описывается найденным нами решением, необходимо исходить из общего решения уравнения (8.6). В математике уравнение вида

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \quad (8.18)$$

где a и b – константы, $f(t)$ – заданная функция t , называют линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Если функция $f(t)$ тождественно равна нулю ($f(t) \equiv 0$), то уравнение (8.18) называется *однородным*. В противном случае – *неоднородным*. При этом доказывается, что общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения со-

ответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного.

В нашем случае однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (8.6), является уравнение вида

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.19)$$

Если $\beta < \omega_0$, то легко проверить, что его общее решение имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha_0), \quad (8.20)$$

где A_0 и α_0 – некоторые произвольные постоянные, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Поскольку $\beta > 0$, то функция (8.20) описывает затухающие колебания с частотой ω' , т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Таким образом, общее решение уравнения (8.6) запишется в виде суммы функции (8.20) и (8.7), т.е.

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha_0) + A \cos(\omega t - \varphi), \quad (8.21)$$

где A_0 и α_0 определяются из начальных условий $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, а A и φ задаются равенствами (8.14) и (8.17).

Первое слагаемое в (8.21) играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний. С ростом t из-за экспоненциального множителя $e^{-\beta t}$ вклад первого слагаемого в сумму все более уменьшается, и по истечении достаточного промежутка времени им можно пренебречь, сохраняя в решении лишь слагаемое (8.7). Если считать, что $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = 0$ (т.е. покоящаяся материальная точка начинает колебаться под действием вынуждающей силы), то график функции (8.21) можно изобразить примерно так (рис. 8.1).

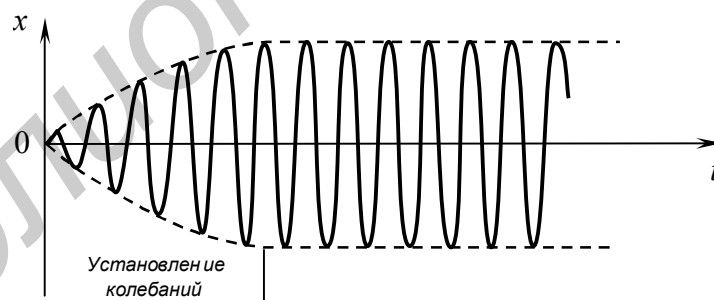


Рис. 8.1

Таким образом, найденное нами решение уравнения (8.6) в виде функции (8.7) с A и φ , задаваемыми формулами (8.14) и (8.17) описывает *установившиеся вынужденные колебания*. Они представляют собой гармонические колебания с частотой вынуждающей силы. Для данной колебательной системы (т.е. с заданными ω_0 и β) их амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы ω . При этом вынужденные колебания отличаются по фазе от частоты вынуждающей силы на величину φ , также зависящую от ω .

Графики функций $A = A(\omega)$ и $\varphi = \varphi(\omega)$, задаваемых соответственно формулами (8.14) и (8.17), для коэффициентов затухания $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ выглядят примерно так (рис. 8.2. и 8.3).

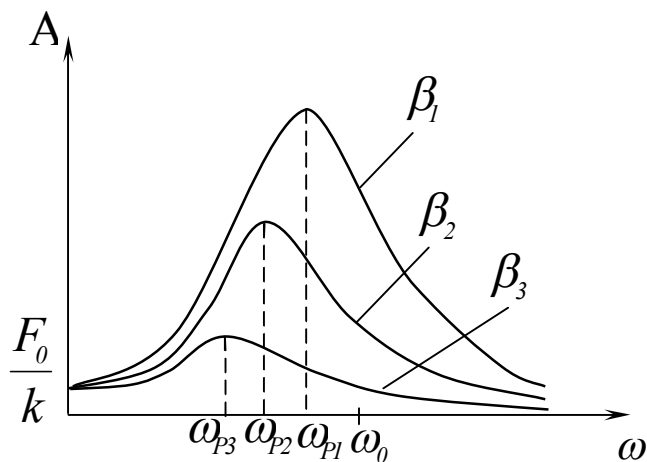


Рис. 8.2

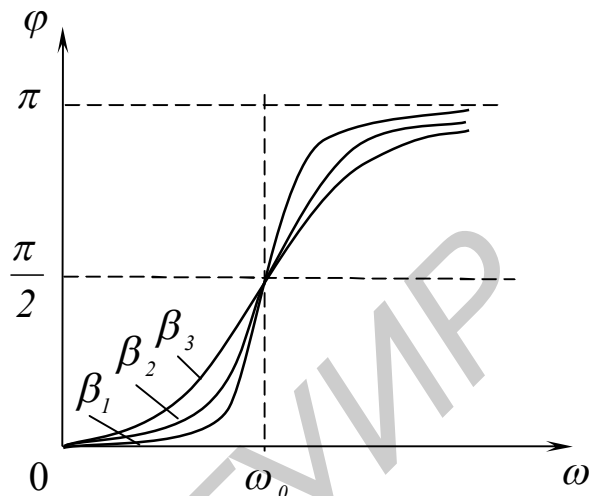


Рис. 8.3

Совокупность кривых, изображающих зависимость амплитуды и фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы называются соответственно *амплитудно-резонансными* (рис. 8.2) и *фазово-резонансными* (рис. 8.3) кривыми.

В основу настоящей работы положена аналогия между вынужденными колебаниями в механической и электрической колебательных системах. В качестве последней используется последовательный RLC-контур, принципиальная схема которого представлена на рис. 8.4

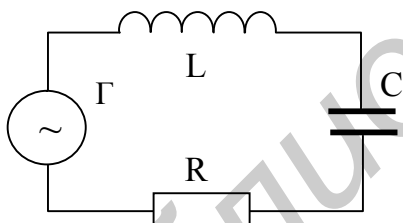


Рис. 8.4

Колебательный процесс в контуре возбуждается и поддерживается с помощью генератора звуковой частоты Γ , ЭДС которого изменяется с течением времени по гармоническому закону

$$E = E_0 \cos \omega t, \quad (8.22)$$

где E_0 – амплитуда ЭДС, ω – частота генератора.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний заряда q на обкладках конденсатора C можно, используя закон Ома или правило Кирхгофа, представить в форме, аналогичной уравнению вынужденных колебаний в механической системе:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t, \quad (8.23)$$

где коэффициент затухания

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad (8.24)$$

собственная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (8.25)$$

а

$$f_0 = \frac{E_0}{L}. \quad (8.26)$$

Для установившихся колебаний заряда решение уравнения (8.23) имеет вид

$$q = q_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (8.27)$$

где q_0 и φ задаются формулами (8.14) и (8.17), в которых β , ω_0 и f_0 определяются формулами (8.24)–(8.26).

Разделив формулу (8.27) почленно на емкость конденсатора C , найдем напряжение $U_c = \frac{q}{C}$ на его обкладках, которое подается на вертикальные отклоняющие пластины кинескопа осциллографа O (рис. 8.5):

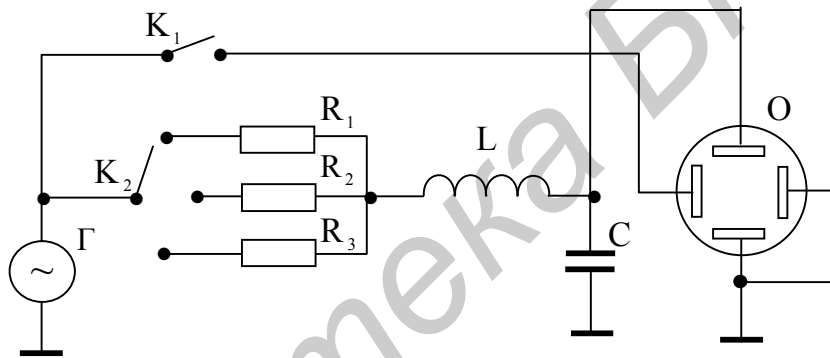


Рис. 8.5

$$U_c = U_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (8.28)$$

где $U_0 = \frac{q_0}{C}$.

На горизонтальные отклоняющие пластины подается напряжение с генератора Γ .

$$E = E_0 \cos \omega t. \quad (8.29)$$

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний (8.28) и (8.29) (см. лаб. работу № 6) на экране осциллографа появляется эллипс, уравнение которого для произвольной разности фаз φ запишется так:

$$\frac{E^2}{E_0^2} + \frac{U_c^2}{U_0^2} - 2 \frac{EU_c}{E_0U_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (8.30)$$

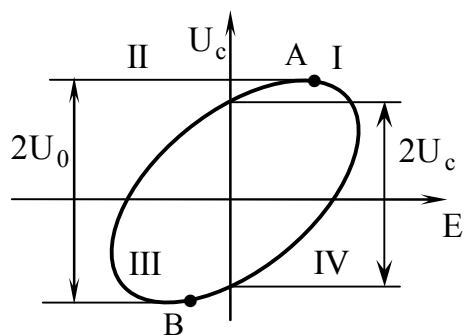


Рис. 8.6

Ориентация осей эллипса в координатной сетке экрана осциллографа зависит от разности фаз складываемых колебаний φ , зависящей в соответствии с (8.17) от частоты вынужденных колебаний (рис. 8.6). Это обстоятельство позволяет построить фазово-резонансные кривые (см. рис. 8.3). Действительно, для момента времени, когда $E = 0$, из (8.30) вытекает, что

$$\frac{U_c^2}{U_0^2} = \sin^2 \varphi, \quad (8.31)$$

где U_0 – амплитуда напряжения на конденсаторе, U_c – напряжение на конденсаторе, когда выходное напряжение звукового генератора Γ равно нулю. Принимая теперь во внимание, что

$$\frac{U_0^2}{U_c^2} - 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 = \operatorname{ctg}^2 \varphi = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right),$$

получим удобную формулу для расчета фазового сдвига φ при каждой установленной частоте генератора ω :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\pm \sqrt{\left(\frac{U_0}{U_c} \right)^2 - 1} \right), \quad (8.32)$$

где знак “+” берется при расположении точек эллипса А и В в I и III квадрантах, и “-” – при их расположении во II и IV квадрантах (рис. 8.6).

Значения напряжений U_0 и U_c снимаются с экрана осциллографа, как показано на рис. 8.6.

Порядок выполнения работы

1. Включить звуковой генератор и осциллограф.
2. Ручками РЕГ. ВХОДА звукового генератора и УСИЛЕНИЕ осциллографа установить необходимую амплитуду сигнала и поддерживать ее неизменной в процессе измерений.

Примечание. Надо иметь в виду, что при резонансе амплитуда самая большая у самого малого сопротивления. Поэтому необходимую амплитуду сигнала требуется устанавливать при частоте, равной резонансной, так чтобы изображение не выходило за пределы экрана. При резонансной

частоте эллипс на экране расположен симметрично относительно вертикальной оси U_c .

3. Для трех различных сопротивлений исследовать зависимость амплитуды $U_0(\omega)$ напряжения на конденсаторе от частоты. Построить амплитудно-резонансные кривые. При измерении этой зависимости необходимо выключить K_1 или при его отсутствии вынуть шнур, идущий ко входу усилителя X (вход расположен на правой боковой стороне осциллографа).

4. Исследовать для каждого из трех сопротивлений зависимость сдвига фаз $\varphi(\omega)$ между напряжениями на конденсаторе и на выходе звукового генератора, т.е. между U_c и E . При этом сдвиг фаз рассчитывается по формуле (8.32). Построить фазово-резонансные кривые (количество экспериментальных точек не менее 10).

Контрольные вопросы

1. С какими новыми для вас понятиями вы встретились в данной работе.
2. В чем заключается аналогия между электрическими и механическими вынужденными колебаниями?
3. Как может выглядеть механическая система для исследования вынужденных колебаний?
4. В каком случае вынужденные колебания в механической системе не возникают?
5. Что такое резонанс? Как его обнаружить в механической или электрической колебательной системе?
6. Как будут выглядеть амплитудно-резонансная и фазово-резонансная кривые для колебательной системы, в которой отсутствует затухание?
7. Как на экране осциллографа получается эллипс и от чего зависит его форма?

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М. Наука, 1988. §§ 60–61.

**ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА МЕТОДОМ
СТОЯЧИХ ВОЛН В СТЕРЖНЕ**

Цель работы:

1. Изучить условия возникновения продольной стоячей волны в упругой среде.
2. Измерить скорость распространения упругих продольных волн в стержнях из различных материалов.
3. Измерить модуль Юнга различных материалов.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной. Волны, возникающие в упругой среде (твёрдой, жидкой или газообразной), называются упругими волнами. При распространении упругой волны частицы среды не вовлекаются в поступательное движение, а только совершают колебания около своих положений равновесия. *Уравнением волны* называют функцию $\xi = \xi(x, y, z, t)$, определяющую смещение частицы среды из положения равновесия с координатами (x, y, z) , в момент времени t . В случае, если направление колебаний частиц среды совпадает с направлением распространения волны, волны называются *продольными*, если направление колебаний частиц перпендикулярно направлению распространения волны – *поперечными*.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется *волновым фронтом*. В случае, если волновой фронт имеет форму плоскости, волна называется *плоской*, сферы – *сферической*.

Получим уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x . Предположим, что ее источник находится в начале координат и совершает гармонические колебания с частотой ω по закону $\xi(0, t) = a \cos(\omega t + \alpha)$, где a и α – соответственно амплитуда и начальная фаза колебаний.

При распространении колебаний от источника вдоль оси x отклонение ξ частицы среды от положения равновесия с координатой x определяется уравнением

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega(t - \tau) + \alpha), \quad (9.1)$$

где τ – время, в течение которого колебания от источника дойдут до точки среды с координатой x .

Если v – скорость распространения колебаний (волны), то $\tau = \pm \frac{x}{v}$, где знак “+”

отвечает волне, распространяющейся в *положительном* направлении оси x , а знак “–” – в *отрицательном*. Тогда, принимая во внимание, что

$$\omega\tau = \pm \frac{2\pi}{T} \frac{x}{v} = \pm \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm kx,$$

где T – период колебаний, $\lambda = Tv$ – длина волны, $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, перепишем (9.1) в виде

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t \mp kx + \alpha). \quad (9.2)$$

Функция (9.2) и представляет собой искомое уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , причем знак “–” соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси x , знак “+” – в отрицательном.

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы среды при распространении каждой из волн в отдельности. Это справедливо для волн любой природы и получило название *принципа суперпозиции волн*. В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами, в каждой точке среды обладают постоянной разностью фаз, такие волны называют *когерентными*. В случае наложения двух и более когерентных волн с одинаковыми направлениями колебаний частиц наблюдается явление перераспределения колебаний в пространстве с образованием устойчивой картины чередования минимумов и максимумов амплитуд колебаний. Такое явление называется *интерференцией волн*.

При наложении двух плоских когерентных волн с одинаковыми амплитудами, направленными навстречу друг к другу, в результате их интерференции возникает колебательный процесс, называемый *стоячей волной*.

Найдем уравнение плоской стоячей волны в однородном стержне длиной l , закрепленном в середине, а также спектр его собственных частот.

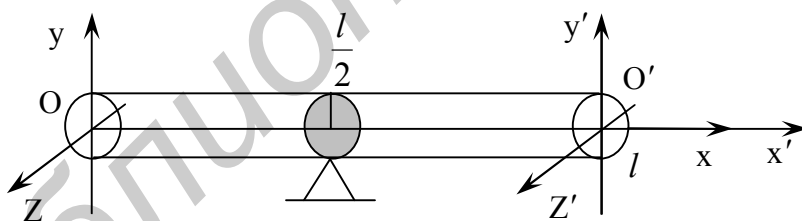


Рис. 9.1

Пусть на торце стержня с координатой $x=0$ созданы гармонические колебания $\xi_1(0, t) = a \cos \omega t$ (источник колебаний). Тогда вдоль стержня, лежащего на оси x (рис. 9.1), будет распространяться упругая плоская волна

$$\xi_1(x, t) = a \cos(\omega t - kx), \quad (9.3)$$

которая затем отражается от свободного торца стержня с абсциссой $x=l$, так что в каждой точке волнового поля между торцами будут складываться колебания в падающей и отраженной волнах. Уравнение отраженной волны, распространяющейся от торца O' противоположно направлению оси x' , имеет вид

$$\xi_2(x, t) = a \cos(\omega t + kx' + \alpha), \quad (9.4)$$

где $x' = x - l$, α – константа, значение которой должно обеспечивать условие закрепленности стержня в его середине.

Складывая уравнения (9.3) и (9.4) с учетом того, что $x' = x - l$, находим уравнение волнового процесса в стержне

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = 2a \cos\left(kx - \frac{kl - \alpha}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{kl - \alpha}{2}\right). \quad (9.5)$$

Функция (9.5), так же как (9.3) и (9.4), имеет смысл смещения частицы среды от ее равновесного положения с абсциссой x в момент времени t . Однако в отличие от волновых процессов, описываемых функциями (9.3) и (9.4), в которых каждая точка среды колеблется с одинаковой амплитудой a , функция (9.5) описывает процесс в котором каждая частица среды колеблется с амплитудой, зависящей от координаты x :

$$A(x) = 2a \left| \cos\left(kx - \frac{kl - \alpha}{2}\right) \right|. \quad (9.6)$$

Такой колебательный процесс частиц среды называют *стоячей волной*. Функцию (9.5) называют уравнением плоской стоячей волны.

Используя выражение (9.6), мы можем теперь выразить условие закрепленности стержня в его середине равенством

$$A\left(\frac{l}{2}\right) = 0, \quad (9.7)$$

означающим неподвижность частиц поперечного сечения стержня с абсциссой $x = \frac{l}{2}$. Тогда из (9.6) с учетом (9.7) вытекает, что

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

и, следовательно, для выполнения условия закрепленности стержня в его середине достаточно положить

$$\alpha = -\pi. \quad (9.8)$$

Подберем теперь частоту колебаний источника так, чтобы отраженная волна вызывала в точке с абсциссой $x=0$, где расположен источник, колебания в фазе с ним, т.е.

$$\delta\varphi|_{x=0} = [(\omega t - kx) - (\omega t + kx' + \alpha)]_{x=0} = 2\pi(n + 1), \quad (9.9)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Учитывая (9.8) и то, что $x' = x - l$, из (9.9) получаем

$$kl + \pi = 2\pi(n + 1). \quad (9.10)$$

Ясно, что при заданной длине стержня l уравнение (9.10) выполняется лишь для определенного набора частот ν_n , называемых *собственными частотами стержня*, закрепленного посередине. Учитывая, что $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v}$, из (9.10) получаем формулу для набора (спектра) собственных частот

$$\nu_n = \frac{(2n + 1)v}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (9.11)$$

Из (9.11) вытекает, что собственные частоты кратны частоте

$$v_0 = \frac{v}{2l}, \quad (9.12)$$

называемой *основной частотой*. В акустике частоту v_0 называют также *частотой основного тона*, тогда как v_n , при $n \geq 1$ – *частотами обертонов*.

Легко видеть, что при выполнении равенств (9.8) и (9.10), приводящих к частоте (9.11), уравнения (9.5) и (9.6) переписутся в простом виде:

$$\xi(x, t) = 2a \cos \frac{2\pi v_n}{v} x \cos 2\pi v_n t, \quad (9.13)$$

$$A(x) = 2a \left| \cos \frac{2\pi v_n}{v} x \right|. \quad (9.14)$$

Точки, в которых амплитуда стоячей волны $A(x)$ обращается в нуль, называются *узлами* стоячей волны. Точки, колеблющиеся с максимальной амплитудой $A_{\max} = 2a$, называются *пучностями* стоячей волны. Тогда из (9.14) с учетом (9.11) вытекает, что в середине стержня реализуется узел ($A(\frac{l}{2}) = 0$), а на обоих торцах стержня – пучности ($A(0) = A(l) = 2a$).

Таким образом, при совпадении частоты источника с любой из собственных частот стержня (9.11), амплитуда колебаний точек его торцов увеличивается в два раза по сравнению с амплитудой колебаний источника. Это явление по аналогии со случаем вынужденных колебаний называют *резонансом*.

Измерение модуля Юнга

Измерительная установка (рис. 9.2) состоит из звукового генератора (ЗГ), трех стержней из стали, бронзы и алюминия, закрепленных посередине, электромагнитного возбудителя колебаний (телефон Т), приемника (микрофон М), сигнал которого подается на вход осциллографа (ОСЦ). Переменное напряжение от звукового генератора подводится к телефону, вследствие чего на один из торцов стержня действует периодически изменяющаяся сила.

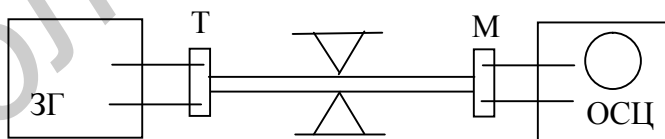


Рис. 9.2

В стержне возбуждаются продольные волны. К другому торцу стержня подведен электромагнитный приемник, преобразующий звуковые колебания в электрические. Сигнал с приемника подается на вход усилителя осциллографа, длина полосы на экране которого пропорциональна амплитуде колебаний конца стержня. Плавно изменяя частоту звукового генератора, при некотором ее значении v_0 обнаруживаем резкое возрастание амплитуды колебаний. Стержни начинают при этом звучать, а длина полосы на экране становится максимальной, т.е. наблюдается описанный выше резонанс, обусловленный возникновением в

стержне стоячей звуковой волны с пучностями на обоих его торцах. Наблюдая это явление, мы можем установить основную собственную частоту колебаний стержня ν_0 и по формуле (9.12) вычислить, измерив длину стержня l , скорость распространения в нем продольной волны

$$\nu = 2l\nu_0. \quad (9.15)$$

При распространении в упругой твердой среде плоской продольной волны среда деформируется (растягивается или сжимается) в направлении распространения. Поэтому скорость волны должна зависеть от величины, характеризующей упругие свойства среды при ее растяжении или сжатии. Такой величиной является *модуль Юнга*, смысл которого устанавливается законом Гука, утверждающим, что абсолютное удлинение (укорочение) Δl цилиндрического однородного стержня в упругой стадии деформации прямо пропорционально растягивающей (сжимающей) силе F , т.е. $\Delta l = \kappa^{-1}F$, или для компенсирующей F силы упругости

$$F_{\text{упр}} = \kappa \Delta l. \quad (9.16)$$

Коэффициент пропорциональности

$$\kappa = \frac{ES}{l}, \quad (9.17)$$

где E – *модуль Юнга*, зависящий только от материала стержня и являющейся характеристикой его упругих свойств, S и l – соответственно площадь поперечного сечения и длина недеформированного стержня.

Найдем связь между скоростью распространения упругой продольной волны в среде и ее модулем Юнга.

В стержне, в котором установилась стоячая волна, все его частицы совершают гармонические колебания, одновременно проходя положения равновесия и одновременно достигая крайних точек. При этом их полная механическая энергия остается постоянной во времени.

Вычислим полную механическую энергию колеблющихся частиц в стоячей волне с определяемой формулой (9.15) частотой основного тона ν_0 .

Из (9.13) с учетом (9.12) следует, что уравнение этой волны имеет вид

$$\xi = 2a \cos \frac{\pi}{l} x \cos \omega_0 t, \quad (9.18)$$

где

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{\pi\nu}{l}. \quad (9.19)$$

Выделим теперь в стержне элементарный цилиндр, объемом $\Delta V = S\Delta x$, заключенный между его сечениями с координатами x и $x + \Delta x$ (рис. 9.3), столь малый, что все его частицы имеют в рассматриваемый момент времени t приблизительно одинаковую скорость, проекция которой на ось x равна $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, а относи-

тельное удлинение $\frac{\Delta \xi}{\Delta x} \approx \frac{\partial \xi}{\partial x}$ (это равенство тем точнее, чем меньше Δx). Здесь

$\Delta\xi$ – удлинение элементарного цилиндра, обусловленное смещением его частиц относительно положений равновесия к моменту времени t .

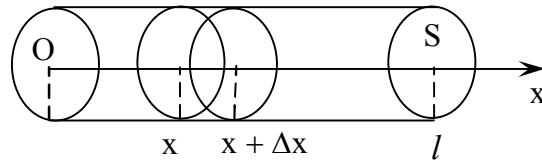


Рис. 9.3

Тогда кинетическая энергия частиц этого цилиндра

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} \Delta m \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 S \Delta x, \quad (9.20)$$

где ρ – плотность материала стержня, невозмущенного волновым процессом, а потенциальная энергия их взаимодействия

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} \kappa (\Delta \xi)^2. \quad (9.21)$$

Учитывая, что согласно (9.17) $\kappa = \frac{ES}{\Delta x}$, формула (9.21) переписывается так:

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta \xi}{\Delta x} \right)^2 S \Delta x = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 S \Delta x. \quad (9.22)$$

Таким образом, полная механическая энергия частиц выделенного цилиндра

$$\Delta W = \frac{1}{2} \left(\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) S \Delta x. \quad (9.23)$$

Тогда полная механическая энергия частиц стержня, в котором установилась стоячая волна (9.18), определяется интегралом

$$W = \frac{S}{2} \int_0^l \left(\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) dx. \quad (9.24)$$

Подставляя в (9.24) следующие из (9.18) и (9.19) выражения для производных

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{2a\pi\nu}{l} \cos \frac{\pi}{l} x \sin \omega_0 t,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{2a\pi}{l} \sin \frac{\pi}{l} x \cos \omega_0 t$$

и учитывая, что

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{l} x dx = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = \frac{l}{2},$$

получаем

$$W = \frac{\pi^2 a^2 S}{l} (\rho \nu^2 \sin^2 \omega_0 t + E \cos^2 \omega_0 t) = \frac{\pi^2 a^2 S}{l} ((\rho \nu^2 - E) \sin^2 \omega_0 t + E). \quad (9.25)$$

Из (9.25) очевидно следует, что $W = const$ только при выполнении равенства

$$E = \rho v^2, \quad (9.26)$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Таким образом, скорость распространения продольной волны в упругой среде определяется как ее плотностью ρ , так и характеристикой ее упругих свойств – модулем Юнга E . Формула (9.26) является теоретическим основанием для измерения модуля Юнга *методом стоячих волн* (его называют также методом измерения модуля Юнга в динамическом режиме). Действительно, подставляя (9.15) в (9.26), получим формулу для косвенного измерения модуля Юнга:

$$E = 4\rho l^2 v_0^2. \quad (9.27)$$

Порядок выполнения работы

1. Включить в сеть звуковой генератор и осциллограф.
2. Ручкой “Выход” установить на выходе генератора напряжение 20–25 В.
3. Плавно изменяя частоту сигнала в области от 2000 до 4000 Гц, найти частоты основного тона для трех стержней.
4. Измерив длину стержня, вычислить скорость упругих волн для различных материалов по формуле (9.15).
5. Вычислить по формуле (9.27) модули Юнга для материалов стержней и сравнить результаты с табличными данными.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение плоской, сферической, продольной и поперечной волн. Что такое уравнение волны?
2. Дайте определение стоячей волны и запишите уравнение плоской стоячей волны. Что такое узлы и пучности стоячей волны?
3. Нарисуйте примерные графики функций $\xi = \xi(x, t)$ для стоячей волны в моменты t и $t + \Delta t$ в области, заключенной между двумя соседними пучностями.
4. Что такое собственные частоты стержня? Какая частота из спектра собственных частот называется основной?
5. От каких параметров среды зависит скорость распространения в ней продольных упругих волн? Дайте их определения.
6. Чему равна полная механическая энергия колеблющихся частиц стержня, в котором установилась стоячая волна его основной частоты?

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. – М: Наука, 1988. § 93–101.

ИЗУЧЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ СТОЯЧИХ ВОЛН

Цель работы:

1. Изучить волновые процессы в упругих средах.
2. Измерить скорость распространения в струне поперечных волн звуковой частоты (звуковых волн).
3. Изучить зависимость скорости распространения звуковых волн от силы натяжения струны.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Если упругие волны, распространяющиеся в воздухе, имеют частоту в пределах от 16 до 20000 Гц, то достигнув человеческого уха, они вызывают ощущение звука. В соответствии с этим упругие волны в любой среде, имеющие частоту, заключенную в указанных пределах, называют *звуковыми волнами*.

В настоящей работе изучаются поперечные волны звуковой частоты, распространяющиеся в натянутой струне.

В закрепленной с обоих концов натянутой струне при возбуждении поперечных колебаний устанавливаются стоячие волны, причем в местах закрепления струны должны располагаться узлы. Из выражения для амплитуды стоячей волны (см. лаб. работу № 9) следует, что расстояние между двумя соседними узлами равно половине длины волны. Поэтому в струне возбуждаются с заметной амплитудой только такие волны, для которых на длине струны укладывается целое число полуволен (рис. 10.1), т.е.

$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{l}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Длинам волны λ_n соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{\nu}{\lambda_n} = \frac{\nu}{2l}(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.1)$$

где ν – скорость распространения волны, определяемая силой натяжения струны и массой единицы длины (т.е. линейной плотностью струны).

Частоты, определяемые формулой (10.1), называются *собственными частотами* струны. Собственные частоты ν_n кратны частоте

$$\nu_0 = \frac{\nu}{2l}, \quad (10.2)$$

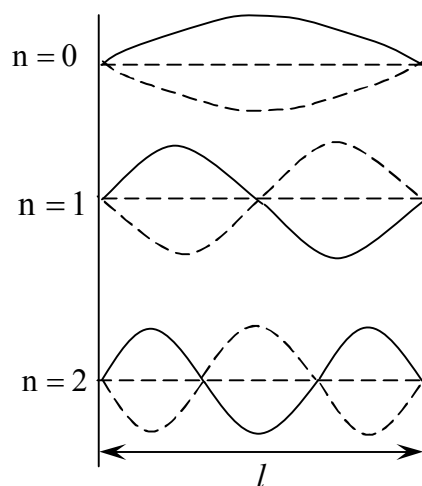


Рис. 10.1

которая называется *основной частотой*. В случае звуковых волн частоту ν_0 называют также частотой *основного тона*, а кратные ей частоты (т.е. ν_n с $n \geq 1$) – частотами *обертонов*.

Гармонические колебания с частотами (10.1) называются *собственными или нормальными* колебаниями. Их называют также *гармониками*. В общем случае колебание струны представляет собой наложение различных гармоник.

Лабораторная установка (рис. 10.2) состоит из струны 1, натянутой между полюсами электромагнита 2. Натяжение проволоки можно изменять, подвешивая к одному ее концу грузы различной массы. Электромагнит может перемещаться вдоль струны. Питается электромагнит от сети через выпрямитель. Малый участок струны Δl находится в постоянном магнитном поле с индукцией B , создаваемом электромагнитом. По проволоке протекает переменный ток звуковой частоты $I(t) = I_m \cos \omega t$, источником которого служит звуковой генератор.

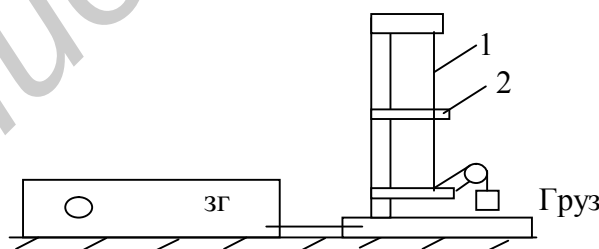


Рис. 10.2

На участке струны, находящейся в поле постоянного магнита, действует сила Ампера

$$\Delta F(t) = I(t)B\Delta l.$$

Участок Δl при этом совершает вынужденные колебания, распространяющиеся вдоль струны. То есть вдоль струны распространяется плоская поперечная волна, которая доходит до мест крепления струны, отражается от них и распространяется в обратном направлении.

В случае если электромагнит расположить в середине струны и подобрать частоту, удовлетворяющую условию (10.2), то падающая и отраженная волны

создают видимую стоячую волну с узлами, расположенными в местах крепления струны, и пучностью, находящейся в середине струны между полюсами электромагнита.

Экспериментально подобрав частоту, при которой образуется стоячая волна, можно, измерив расстояние между двумя узлами, вычислить скорость распространения поперечных звуковых волн в струне

$$v = 2lv_0. \quad (10.3)$$

Порядок выполнения работы

1. Установить электромагнит в середине струны.
2. Ручкой ЧАСТОТА на ЗГ плавно изменять частоту до возникновения видимой стоячей волны. Зафиксировать ее частоту ν_0 .
3. Измерить длину струны l .
4. По результатам измерений вычислить скорость распространения поперечных колебаний в струне.
5. Изменяя с помощью грузов натяжение струны, определить характер зависимости этой скорости от силы натяжения.
6. Построить график зависимости скорости распространения колебаний от силы натяжения струны.
Примечание. Погрешность генератора оценить по формуле $\Delta\nu = (0,02\nu + 1)$, Гц.
7. Установить электромагнит на четверть длины струны от любого из ее концов и возбудить в ней стоячую волну с частотой первого обертона ν_1 .
8. Провести измерения по пп. 2–6 и сравнить результаты с полученными для основного тона.

Контрольные вопросы

1. С какими новыми понятиями вы познакомились в данной работе?
2. При каких условиях возникают стоячие волны в струне?
3. В каком случае при отражении волны ее фаза меняется на π ?
4. Какой вид имеет стоячая волна основной частоты в струне с закрепленными концами?
5. Как рассчитать местоположение узлов и пучностей для стоячей волны?
6. Изобразите стоячую волну в струне с закрепленными концами для частот, соответствующих основному тону и гармоникам 1, 2, 3 порядков. Где в таких случаях должен быть расположен электромагнит?
7. Каким образом с помощью стоячей волны измерить скорость распространения колебаний?

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. – М. Наука, 1988. §§ 93–101.

Библиотека БГУИР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов измерений. – М.: Наука, 1970.
2. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971.
3. Сотская Х.Н. Введение к физическому практикуму. Конспект лекций. – Мн.: МРТИ, 1973.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1988. Т. 1.
5. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. Т. 1.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. Т. 2.
7. Петровский И.И. Механика. – Мн.: БГУ, 1973.
8. Стрелков С.П. Механика. – М.: Наука, 1965.
9. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: Наука, 1974. Т. 1.
10. Киттель Ч., Найт У., Рудеман М. Курс физики. – М.: Мир, 1971. Т. 1.
11. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1988. Т. 2.
12. Иродов И.Е. Основные законы механики. – М.: Высш. шк., 1985.

Учебное издание

Авторы:
Андреев Евгений Федорович,
Боброва Зоя Александровна,
Мурзов Виктор Иванович и др.

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

по физике

Раздел

МЕХАНИКА, КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

для студентов всех специальностей БГУИР

Редактор Т.Н. Крюкова
Корректор Е.Н. Батурчик
Компьютерная верстка Д.Ю. Шураков

Подписано в печать 30.06.2003.
Печать ризографическая.
Уч-изд. л. 3,8.

Формат 60x84 1/16.
Гарнитура «Таймс».
Тираж 100 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 4,3.
Заказ 100.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Лицензия ЛП № 156 от 30.12.2002.
Лицензия ЛВ № 509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки, 6.