СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО РЕШЕНИЮ ОДНОЙ СЕТЕВОЙ ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Лагуто А. А., Копейко В. С.
Кафедра компьютерных технологий и систем, Факультет прикладной математики и информатики,
Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: lagutoa@yahoo.com, volodyakopeyko@gmail.com

Рассматривается задача потокового программирования с дробно-линейной целевой функцией и линейными ограничениями. Приводятся результаты вычислительного эксперимента по решению тестовых задач различной размерности, показывающие эффективность применения рекуррентных формул преобразования элементов обратной матрицы детерминантов на итерациях метода, а также зависимость числа итераций, необходимых для нахождения оптимального решения, от количества выбранных циклических дуг.

Введение

Исследования экстремальных потоковых задач, создание специальных алгоритмов, учитывающих особенности и свойства задачи, и современные достижения потокового программирования позволяют создавать эффективные методы решения экстремальных потоковых задач с большим числом переменных и ограничений.

I. Математическая модель

Пусть $S = (I, U)$ – конечная ориентированная связная сеть без кратных дуг и петель. I – множество узлов, U – множество дуг сети S, определенных на прямом произведении $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Рассмотрим математическую модель задачи дробно-линейного потокового программирования с взаимосвязью дуговых потоков:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum\limits_{(i,j)\in U} p_{ij}x_{ij} + \beta}{\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}x_{ij} + \gamma} \to max, \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ji} = b_i, i \in I, \qquad (2)$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^t x_{ij} = \alpha_t, t = \overline{1,l}, \qquad (3)$$

$$d_{*ij} \le x_{ij} \le d_{ij}^*, \qquad (4)$$

где $x = (x_{ij}, (i,j) \in U)$ – поток задачи (1)-(4), X – множество потоков, $x \in X$, $p_{ij}, q_{ij}, \beta, \gamma, b_i, \lambda_{ij}^t, \alpha_t$ – параметры задачи (1)-(4), $I_i^+(U) = \{j : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j : (j,i) \in U\}$, $|U| > |I| + l$. Полагаем, что знаменатель целевой функции $q(x)$ не меняет знак на множестве потоков X. Без ограничения общности предполагаем, что $q(x) > 0, \forall x \in X$.

Опорой связной сети $S = (I, U)$ для системы (2) является покрывающее дерево (I, U_t) сети S с множеством дуг U_t [1]. Опора сети S для системы (2)-(3) определяется согласно [1,2]. Пусть множество дуг $U_k = U_t \cup U_c$, $U_t \cap U_c = \emptyset$ – опора сети S для системы (2)-(3). Множество дуг U_c – множество циклических дуг.

II. Преобразование множеств опоры

Для создания эффективного метода решения дробно-линейной сетевой задачи (1)-(4) исследованы свойства разреженной матрицы системы (2), проведена декомпозиция системы ограничений (2)-(3) на сетевую и общую части с применением теории графов, алгоритмов и технологий потокового программирования. В результате для решения задачи (1)-(4) разработан прямой опорный релаксационный метод [3], применены рекуррентные формулы преобразования элементов обратной матрицы детерминантов на итерациях метода [4]. Структуры данных, алгоритмы и технологии для численной реализации метода описаны в [2,5].

Предположим, что для опорного потока $\{x, U_k\}$ нарушаются условия критерия оптимальности [3], тогда строится новый опорный поток $\{\overline{x}, \overline{U}_k\}, \overline{U}_k = \overline{U}_t \cup \overline{U}_c$, $\overline{U}_t \cap \overline{U}_c = \emptyset$: $\overline{x} = x + \theta^0 l_0$, где θ^0 – максимально допустимый шаг, l_0 – подходящее направление. Пусть $(\tau_0, \rho_0) \in U \setminus U_k$ – дуга, на которой достигается максимальное значение производной целевой функции (1) по допустимому направлению при симплексном нормировочном условии, $(i_0, j_0) \in U_k \cup (\tau_0, \rho_0)$ – дуга, на которой достигается максимально допустимый шаг θ^0 вдоль подходящего направления l_0. Пусть $L(\tau_0, \rho_0)$ – базисный цикл, порожденный дугой (τ_0, ρ_0) [3]. Если $(i_0, j_0) = (\tau_0, \rho_0)$, то опора U_k не изменяется, т.е. $\overline{U}_k = U_k$, в противном случае происходит замена опоры:

- если $(i_0, j_0) \in U_c$, то $\overline{U}_t = U_t, \overline{U}_c = (U_c \setminus (i_0, j_0)) \cup (\tau_0, \rho_0)$;
- если $(i_0, j_0) \in U_t$ и $(i_0, j_0) \in L(\tau_0, \rho_0)$, то $\overline{U}_c = U_c, \overline{U}_t = (U_t \setminus (i_0, j_0)) \cup (\tau_0, \rho_0)$;

– если $(i_0, j_0) \in U_t$ и $(i_0, j_0) \notin L(\tau_0, \rho_0)$, то $\overline{U}_c = (U_c \setminus (i_1, j_1)) \cup (\tau_0, \rho_0)$, $\overline{U}_t = (U_t \setminus (i_0, j_0)) \cup (i_1, j_1)$, где дуга $(i_1, j_1) \in U_c$ такая, что $(i_0, j_0) \in L(i_1, j_1)$.

III. Вычислительный эксперимент

Для проведения численных экспериментов использовались задачи, полученные при помощи дополнительно написанной программы генерации сети и параметров задачи в системе Wolfram Mathematica. Вычисление оптимального потока для тестовых задач производилось прямым опорным релаксационным методом, в котором вычисление элементов матрицы детерминантов и ее обращение производится на каждой итерации метода, и его модификацией. В модификации метода обращение матрицы детерминантов осуществляется только на первой итерации. На последующих итерациях для пересчета элементов обратной матрицы детерминантов применяются рекуррентные формулы, а детерминанты циклов пересчитываются только для дуг фундаментального разреза, порожденного дугой (i_0, j_0), на которой достигается максимально допустимый шаг θ^0 изменения потока. Далее, для краткости, прямой опорный релаксационный метод будем называть вариант A, а его модификацию – вариант B.

Для каждого теста вычислялись количество итераций It, время работы метода tA и его модификации tB в секундах и отношение tA/tB.

Для первого эксперимента в тестах изменялось только число циклических дуг. Результаты вычислений приведены в таблице 1 и показывают уменьшение числа итераций и времени работы метода при увеличении числа циклических дуг для одной и той же сети.

Таблица 1 – Вычислительный эксперимент №1

№	$\|I\|$	$\|U\|$	$\|U_c\|$	It	tA	tB	tA/tB
1	50	200	30	287	860.80	94.60	9.10
2	50	200	40	263	754.49	89.00	8.48
3	50	200	50	244	663.80	84.12	7.90
4	50	200	60	239	543.10	79.43	6.84
5	50	200	70	206	484.38	75.03	6.46
6	50	200	80	147	351.30	70.72	4.97
7	50	200	90	136	320.60	61.40	5.22
8	50	200	100	113	209.40	57.20	3.66
9	50	200	110	106	184.20	54.73	3.36
10	50	200	120	97	171.50	52.51	3.26

Второй вычислительный эксперимент проводился на сетях различной степени разреженности. Число циклических дуг не изменялось. Число итераций и время получения оптимального решения для тестовых задач приведены в таблице 2. На рис. 1 изображена зависимость отношения времен tA/tB к коэффициенту разреженности тестовых сетей, т.е. к отношению $|U|/|I|$. Можно заметить, что с увеличением степени разреженности графа, а, следовательно, и разреженности матрицы ограничений, увеличивается эффективность варианта B прямого опорного метода решения дробно-линейной задачи (1)-(4).

Таблица 2 – Вычислительный эксперимент №2

№	$\|I\|$	$\|U\|$	$\|U_c\|$	It	tA	tB	tA/tB
1	50	100	50	113	128.5	42.2	3.05
2	50	150	50	203	312.8	62.4	5.01
3	50	200	50	244	693.8	94.1	7.37
4	50	250	50	361	1783.2	113.3	15.74
5	50	300	50	693	6129.3	218.4	28.06
6	50	350	50	892	16893.1	345.3	48.92
7	50	400	50	1136	78342.0	645.2	121.42
8	50	450	50	1324	198123.3	1202.2	164.80
9	50	500	50	1606	373349.2	1583.7	235.74

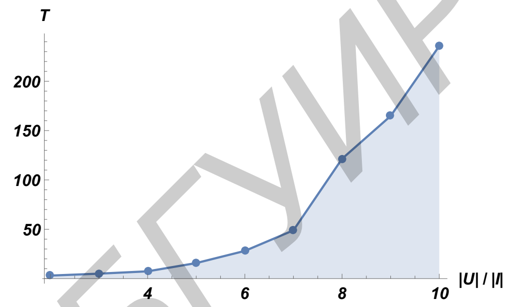

Рис. 1 – Изменение tA/tB в зависимости от разреженности сети $S = (I, U)$

Проведенные эксперименты на примере тестовых задач показывают преимущества декомпозиционного подхода к построению решений задачи дробно-линейного потокового программирования с взаимосвязью дуговых потоков. Методы декомпозиции в наибольшей степени учитывают априорную информацию о математической модели, ее свойствах и типе разреженности. Теоретико-графовый подход позволяет применить эффективные алгоритмы и технологии построения численных решений экстремальных задач линейного и нелинейного программирования.

1. Pilipchuk, L. A. Sparse Linear Systems and Their Applications / L. A. Pilipchuk –Minsk: BSU, 2013. – 235 p.
2. Пилипчук, Л. А. Теоретико-графовые свойства декомпозиции разреженных недоопределенных систем специального вида / Л. А Пилипчук, А. А. Лагуто // Материалы Международного конгресса по информатике: Информационные системы и технологии. – Минск: БГУ.– 2016. – с.1061-1067.
3. Лагуто, А. А. Экстремальная сетевая задача дробно-линейного программирования / А. А. Лагуто, Л. А. Пилипчук // Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике. – Минск: БГУ. – 2004, с.109-117.
4. Пилипчук, Л. А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования: учеб.-метод. пособие / Л. А. Пилипчук. - Минск: БГУ, 2009. - 222 с.
5. Пилипчук, Л. А. Алгоритмы и технологии построения решений разреженных недоопределенных линейных систем в Wolfram Mathematica / Л. А. Пилипчук, А.А. Лагуто // Материалы III Международной научно-практической конференции "Технологии информатизации и управления". – Гродно, Беларусь.– 2016. – 9 с.