# ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКОВ

Дайняк В. В.
Кафедра компьютерных технологий и систем, Факультет прикладной математики и информатики,
Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: dainyak@bsu.by

*Данная работа посвящена изучению задачи типа Дирихле для уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами, которые нельзя классифицировать с помощью характеристического полинома и его корней. Методами функционального анализа с помощью операторов осреднения переменного шага доказано существование и единственность обобщенного решения. Получены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи. В случае постоянных коэффициентов эта задача была рассмотрена в [1–2].*

В настоящее время хорошо разработана теория задач, корректно поставленных по Адамару, для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов. В связи с расширением сферы приложени математических методов часто возникают задачи. связанные с исследованием уравнений в частных производных, которые не принадлежат ни к одному из классических типов.

Пусть линейные дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, x^{'})$ имеют вид

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_k}\left(a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \mathcal{L}_1(x, D)\, u = f(x), \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_1(x, D)\, u = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \lambda(x)u.$$

Здесь $a_k(x)$, $b_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – достаточно гладкие функции, $p_k(x)$ и $\partial p_k/\partial x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ измеримы и ограничены.

Пусть $\mathcal{L}_0(\nu) = \nu_0^3 + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k\nu_0\nu_k^2 + b_k\nu_k^3\right)$ при $x \in \partial\Omega$. В $\Omega$ рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям типа Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \quad (2)$$

где $\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega | \mathcal{L}_0(\nu) < 0\}$.

Наряду с задачей (1)–(2) будем рассматривать и сопряженную

$$\mathcal{L}^*\upsilon = g(x), \quad (3)$$

$$\upsilon\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad (4)$$

$\partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega | \mathcal{L}_0(\nu) > 0\}$, где

$$\mathcal{L}^* = -\frac{\partial^3}{\partial x_0^3} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_k(x)\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_k}\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(b_k(x)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right) + \mathcal{L}_1^*(x, D),$$

где $\mathcal{L}_1^*$ – оператор первого порядка, формально сопряженный к $\mathcal{L}_1$.

Обозначим через $M$ множество индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть

$$Q = \{k \in M | a_k(x) < 0\}, \quad P = \{k \in M | a_k(x) > 0\},$$

$$A = 3 + \frac{4}{9}\sum_{k \in Q}\frac{a_k^3(x^{'})}{b_k^2(x^{'})}, \quad B = \frac{4}{9}\sum_{k \in Q}\frac{a_k^2(x^{'})\frac{\partial b_k(x^{'})}{\partial x_k}}{b_k^2(x^{'})}.$$

Предположим, что коэффициенты $a_k(x)$, $b_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют следующим условиям:

Условие I. а) $\frac{\partial a_k(x)}{\partial x_0} \equiv \frac{\partial b_k(x)}{\partial x_0} \equiv 0, \quad k \in M$;

б $b_k(x^{'}) \neq 0$ при $k \in Q$;

в) если $a_k^2(x') + b_k^2(x') = 0$ при $k \in M$, то

$$\frac{\partial b_k(x')}{\partial x_k} > 0;$$

г) $$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{a_j(x')\beta_0 + \partial b_j(x')/\partial x_j}{b_j(x')}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{a_i(x')\beta_0 + \partial b_i(x')/\partial x_i}{b_i(x')}\right),$$

если $i, j \in Q$, $\beta_0 = C > 0$;

д) $A > 0$.

Условие II. а) Считаем, что выполняются требования а) – г) условия I;

б) если $A < 0$, то $B > 0$ и

$$\max_{k \in P\cup Q, x \in \overline{\Omega}}\left\{-\frac{\partial b_k/\partial x_k}{a_k}\right\} < -\frac{B}{A}.$$

Условие III. а) Считаем, что выполняются требования а) – г) условия I;

б) если $A = 0$, то $B > 0$.

У с л о в и е IV. Для любого $x \in \overline{\Omega}$

$$\frac{\partial a_k(x)}{\partial x_0} + \frac{\partial b_k(x)}{\partial x_k} > 0$$

при всех $k \in M$.

У с л о в и е V. Для любого $x \in \overline{\Omega}$

$$\frac{\partial a_k(x)}{\partial x_0} + \frac{\partial b_k(x)}{\partial x_k} < 0$$

при всех $k \in M$.

Пусть $H_0^\ell(\Omega)(\mathring{H}^\ell(\Omega))$, $\ell = 1, 2, 3$, – подпространство пространства Соболева $H^\ell(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют однородным граничным условиям (2) ((4)).

Задачу (1)–(2) будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = f \tag{5}$$

с областью определения $D(\mathcal{L}) = H_0^3(\Omega)$, а задачу (3)–(4) – как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}^* v = g \tag{6}$$

с областью определения $D(\mathcal{L}^*) = \mathring{H}^3(\Omega)$.

Для доказательства разрешимости уравнения (5) при любых $f \in H_0^{-1}$ строим расширение $L$ оператора $\mathcal{L}$ такое, что множество его значений $\mathcal{R}(L)$ совпадает с пространством $H_0^{-1}$. Аналогично для оператора $\mathcal{L}^*$ строим расширение $L^*$ [см. 1].

Докажем энергетические неравенства для операторов $L$ и $\mathcal{L}^*$.

**Теорема 1.** *При выполнении одного из условий I–IV для любых $u, v \in H_0^1(\Omega)$ при достаточно большом $\lambda(x)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C\|Lu\|_{H_0^{-1}}, \qquad 7$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le C^*\|L^*v\|_{H_0^{-1}}, \qquad 8$$

*где постоянные $C$ и $C^*$ положительны и не зависят от функций $u$ .*

**Теорема 2.** *При выполнении одного из условий I–IV и достаточно большом $\lambda(x)$ для любых $f \in H_0^{-1}(g \in H_0^{-1})$ существует и единственно обощенное решение $u \in H_0^1(\Omega)(v \in H_0^1(\Omega))$ задачи (1)–(2) ((3)–(4)).*

Доказательство. Единственность обобщенных решений следует из неравенств (7) и (8).

При доказательстве существования обобщенного решения задачи (1)–(2) заметим, что оператор $L$ является замкнутым. Следовательно, область значений этого оператора является замкнутым множеством. Поэтому достаточно установить плотность множества значений $\{Lu\}$, когда $u$ пробегает $H_0^1(\Omega)$.

Пусть

$$< Lu, v >= (Lu, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{9}$$

для любого $u \in H_0^3(\Omega)$ и некоторого $v \in H_0^1(\Omega)$. В равенстве (9) вместо $u$ возьмем $J_k u$. Тогда будем иметь

$$< LJ_k u, v >=$$
$$= (LJ_k u, v)_{L_2(\Omega)} = (J_k Lu, v)_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ (LJ_k u - J_k Lu, v)_{L_2(\Omega)} =$$
$$= (Lu, J_k^* v)_{L_2(\Omega)} + (Ku, v)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Обозначим $(Ku, v)_{L_2(Omega)} = K(u, v; k)$. Тогда получим равенство

$$< LJ_k u, v >= (Lu, J_k^* v)_{L_2(\Omega)} + K(u, v; k) = 0.$$

По свойству операторов осреднения, если $v \in H_0^1(\Omega)$, то и $J_k^* v \in H_0^1(\Omega)$. Поэтому в оценке (8) заменим $v$ на $J_k^* v$. Будем иметь

$$\|J_k^* v\|_{H_0^1(\Omega)} \le C^*\|L^* J_k^* v\|_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= C^* \sup_{u \in H_0^3(\Omega)} \frac{|(u, L^* J_k^* v)_{L_2(\Omega)}|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} =$$

$$= C^* \sup_{u \in H_0^3(\Omega)} \frac{|(Lu, J_k^* v)_{L_2(\Omega)}|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \le$$

$$\le C^* \sup_{u \in H_0^3(\Omega)} \frac{|K(u, v; k)|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \le C_7 \frac{1}{k}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

где постоянная $C_7 > 0$. Отсюда после перехода к пределу при $k \to \infty$ следует, что $\|J_k^* v\| \to \|v\| \le 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $v = 0$ $H_0^1(\Omega)$.

Вторая часть теоремы 2 доказывается аналогично.

*Замечание.* Если коэффициенты $a_k(x), b_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условию V, то в этом случае рассматривается задача (1), (4) (условие (4) для функции $u$) и сопряжeння к ней задача (2), (3) (условие (2) для функции $v$). Тогда задача (1), (4) рассматривается как решение операторного уравнения

$$\widetilde{\mathcal{L}}u \equiv u = f \tag{10}$$

с областью определения $D(\widetilde{\mathcal{L}} = \overset{0}{H}{}^3(\Omega)$, а задача (2), (3) – как решение операторного уравнения

$$\widetilde{\mathcal{L}}^* v \equiv \mathcal{L}^* v = g \tag{11}$$

с областью определения $D(\widetilde{\mathcal{L}}^*) = H_0^3(\Omega)$.

Справедливы следующая теорема, которая вытекают из доказательств теорем 1 и 2.

**Теорема 3.** *При выполнении условий V для любых $u$ и $v$ из $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ при достаточно большом $\lambda(x)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} \le C\|\widetilde{L}u\|_{\overset{0}{H}{}^{-1}},$$

$$\|v\|_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} \le C^*\|\widetilde{L}^* v\|_{\overset{0}{H}{}^{-1}},$$

*где постоянные $C$ и $C^*$ положительны и не зависят от $u$ и $v$.*

1. Дайняк, В. В. Задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка/ В.В. Дайняк, В.И. Корзюк// Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 6. – С. 1056–1061.
2. Корзюк, В. И. Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка/ В.И. Корзюк, В.В. Дайняк, А.А. Протько// Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 116–121.