УДК 539.12

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 И КВАДРУПОЛЬНЫМ МОМЕНТОМ ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.В. Кисель[1], Е.М. Овсиюк[2], Я.А. Войнова[3], В.М. Редьков[4]

[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*, *Минск*
[2]*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина*
[3]*Кочищанская средняя школа Ельского района*
[4]*Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси*, *Минск*

QUANTUM MECHANICS FOR A VECTOR PARTICLE WITH QUADRUPOLE MOMENT IN THE EXTERNAL UNIFORM MAGNETIC FIELD

V.V. Kisel[1], E.M. Ovsiyuk[2], Y.A. Voynova[3], V.M. Red'kov[4]

[1]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*, *Minsk*
[2]*I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University*
[3]*Kochishchansky secondary school*
[4]*B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus*, *Minsk*

На основе матричного 10-мерного формализма исследована задача о векторной частице с квадрупольным моментом во внешнем однородном магнитном поле. Найдено три серии уровней энергии, отвечающих связанным состояниям частицы в магнитном поле. Если требовать, чтобы найденные уровни энергии имели физический смысл при всех значениях главного квантового числа ($n = 0,1,2,\ldots$), то на описывающий квадрупольный момент параметр необходимо накладывать ограничения – они найдены в явном виде. Также рассмотрен случай нейтральной векторной частицы с квадрупольным моментом в магнитном поле. При этом радиальные решения трех типов строятся в функциях Бесселя, в каждом случае влияние квадрупольного момента сводится к присутствию в аргументе $x = \mu r$ функций масштабного фактора μ, который зависит от параметра квадрупольного момента и величины магнитного поля B.

Ключевые слова: *частица со спином* 1, *квадрупольный момент*, *магнитное поле*, *формализм Даффина – Кеммера*, *разделение переменных*, *точные решения.*

On the base of the matrix 10-dimensional formalism, behavior of a vector particle with a quadrupole moment is studied in presence of external uniform magnetic field. Three series of the energy levels related to bound states of the particle are found. To assign them physical sense for all values of the main quantum number $n = 0,1,2,\ldots$ one must impose special restrictions on quadrupole moment – they are formulated explicitly. Also, the problem of a neutral vector particle with quadrupole moment in presence of magnetic field is studied. At this, solutions of three types are constructed in terms of Bessel functions, in each case the influence of the quadrupole moment consists in presence of a scale factor μ in the argument $x = \mu r$ of the functions, which depends on the quadrupole moment parameter and magnitude of the uniform magnetic field.

Keywords: *vector particle*, *quadrupole moment*, *magnetic field*, *Duffin – Kemmer formalism*, *separation of the variables*, *exact solutions.*

Введение

Работа посвящена нахождению точных решений уравнения для векторной частицы с квадрупольным моментом [1] во внешнем магнитном поле (похожий анализ для частицы с аномальным магнитным моментом выполнен в работах [2], [3]).

1 Исходные обозначения

Волновое уравнение для частицы со спином 1 и квадрупольным моментом [1] может быть задано в виде

$$\left(\beta_\mu D_\mu + \frac{ie}{2}\alpha F_{[\mu\nu]}\bar{P}J_{[\mu\nu]} + M\right)\Psi = 0, \qquad (1.1)$$

где использованы 10-мерные волновые функции и матрицы Даффина – Кеммера

$$\Psi = \begin{vmatrix} \Psi_\mu \\ \Psi_{[\mu\nu]} \end{vmatrix}, \quad J_{[\mu\nu]} = \beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu;$$

$\bar{P}$ – проективный оператор, выделяющий из Ψ тензорную составляющую $\Psi_{[\mu\nu]}$; $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$; α – параметр, характеризующий квадрупольный момент частицы. В тензорной форме уравнения имеют вид (используется метрика с мнимой единицей, $x_4 = ict$)

$$D_\nu\Psi_\mu - D_\mu\Psi_\nu + ie\alpha\{F_{[\mu\rho]}\Psi_{[\rho\nu]} - F_{[\nu\rho]}\Psi_{[\rho\mu]}\} +$$
$$+M\Psi_{[\mu\nu]} = 0,$$
$$D_\nu\Psi_{[\mu\nu]} + M\Psi_\mu = 0.$$

Матрицы Даффина – Кеммера и оператор $\bar{P}$ заданы с помощью элементов полной матричной алгебры, определяемых с помощью обобщенных символов Кронеккера [2], [3]:

$$\beta_\mu = e^{\nu,[\nu\mu]} + e^{[\nu\mu],\nu}, \quad \bar{P} = e^{[\mu\nu],[\mu\nu]},$$
$$(e^{A,B})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD}, \quad e^{A,B}e^{C,D} = \delta_{BC}e^{A,D},$$

$$\delta_{[\mu\nu],[\rho\sigma]} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}),$$

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\rho + \delta_{\rho\nu}\beta_\mu,$$

$$[\beta_\lambda, J_{\rho\sigma]}]_- = \delta_{\lambda\rho}\beta_\sigma - \delta_{\lambda\sigma}\beta_\rho;$$

индекс A принимает значения

$\mu,\ [\rho\sigma]$: 1, 2, 3, 4; [23], [31], [12], [14], [24], [34].

При этом матрицы Даффина – Кеммера задаются в виде:

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\beta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\beta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Магнитное поле описывается соотношениями

$$A_1 = -\frac{1}{2}Bx_2,\ A_2 = \frac{1}{2}Bx_1,\ A_3 = 0,\ A_4 = 0,\ \vec{B} = (0, 0, B),$$

$$F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\ F_{[12} = -F_{[21]} = B.$$

Уравнение (1.1) принимает вид

$$\left[\beta_1\left(\partial_1 + \frac{ie}{2}Bx_2\right) + \beta_2\left(\partial_2 - \frac{ie}{2}Bx_1\right) + \right.$$
$$\left. + \beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + ie\alpha B\bar{P}J_{[12]} + M\right]\Psi = 0. \tag{1.2}$$

2 Разделение переменных

Вводим обозначение

$$Y = iJ_{[12]} = i(\beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1);$$

матрица Y удовлетворяет минимальному уравнению $Y(Y-1)(Y+1) = 0$, что позволяет ввести три проективных оператора:

$$P_0 = 1 - Y^2,\ P_+ = \frac{1}{2}Y(Y+1),\ P_- = \frac{1}{2}Y(Y-1)$$

и разбить волновую функцию на три части: $\Psi = \Psi_0 + \Psi_- + \Psi_+$.

Преобразуем уравнение (1.2) к цилиндрическим координатам:

$$\left[\beta_1\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + iB_0 r\sin\phi\right) + \right.$$
$$+ \beta_2\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} - iB_0 r\cos\phi\right) +$$
$$\left. + (\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + \Gamma\bar{P}Y + M)\right]\Psi = 0, \tag{2.1}$$

где введены обозначения

$$\frac{eB}{2} = B_0,\ 2\alpha B_0 = \Gamma. \tag{2.2}$$

Действуем на уравнение (2.1) оператором P_0, учитывая равенства

$$P_0\beta_3 = \beta_3 P_0,\ P_0\beta_4 = \beta_4 P_0,\ P_0 Y = YP_0,$$
$$P_0\beta_1 = \beta_1(1 - P_0) = \beta_1(P_+ + P_-),$$
$$P_0\beta_2 = \beta_2(1 - P_0) = \beta_2(P_+ + P_-),$$
$$\Psi_0 = P_0\Psi,\ \Psi_+ = P_+\Psi,\ \Psi_- = P_-\Psi,$$

получим

$$\left[\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + M\right]\Psi_0 +$$
$$+\left[\beta_1\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \beta_2\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \right.$$
$$\left. + iB_0 r\sin\phi\beta_1 - iB_0 r\cos\phi\beta_2\right]\psi_+ +$$
$$+\left[\beta_1\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \beta_2\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \right.$$
$$\left. + iB_0 r\sin\phi\beta_1 - iB_0 r\cos\phi\beta_2\right]\psi_- = 0;$$

учтено равенство

$$YP_0 \equiv 0 \Rightarrow \Gamma Y\Psi_0 = \Gamma(YP_0)\Psi = 0.$$

Вводя обозначения

$$\beta_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1 + i\beta_2),\ \beta_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1 - i\beta_2),$$

записываем уравнение так:

$$\left[\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + M\right]\Psi_0 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{+i\phi}\beta_-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + B_0 r\right) + \right. \\ \left. + e^{-i\phi}\beta_+\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} - B_0 r\right)\right]\Psi_+ + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{+i\phi}\beta_-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + B_0 r\right) + \right. \\ \left. + e^{-i\phi}\beta_+\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} - B_0 r\right)\right]\Psi_- = 0.$$

Учитывая явный вид проективных операторов

$$P_+ = \frac{1}{2}[\beta_1\beta_1 - 2\beta_1\beta_1\beta_2\beta_2 + i(\beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1)],$$

$$P_- = \frac{1}{2}[\beta_1\beta_1 - 2\beta_1\beta_1\beta_2\beta_2 - i(\beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1)]$$

и перестановочные соотношения для матриц Даффина – Кеммера, можно убедиться в справедливости равенств $\beta_- P_+ = \beta_+ P_- = 0$; вследствие чего уравнение упрощается:

$$\left[\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + M\right]\Psi_0 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi}\beta_+\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} - B_0 r\right)\Psi_+ + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\phi}\beta_-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + B_0 r\right)\Psi_- = 0. \quad (2.3)$$

Теперь на уравнение (2.1) действуем оператором $1 - P_0 = P_+ + P_-$. Получаем

$$(1 - P_0)\beta_1\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + iB_0 r\sin\phi\right)\Psi + \\ + (1 - P_0)\beta_2\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} - iB_0 r\cos\phi\right)\Psi + \\ + \left(\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + \Gamma\bar{P}Y + M\right)(\Psi_+ + \Psi_-) = 0.$$

С учетом равенств

$$(1 - P_0)\beta_1 = \beta_1 P_0,\ (1 - P_0)\beta_2 = \beta_2 P_0$$

преобразуем уравнение к виду

$$\beta_1\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Psi_0 + iB_0 r\sin\phi\beta_1\Psi_0 + \\ + \beta_2\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Psi_0 - iB_0 r\cos\phi\beta_2\Psi_0 + \\ + \left(\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + \Gamma\bar{P}Y + M\right)(\Psi_+ + \Psi_-) = 0.$$

Отсюда дальше находим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\phi}\beta_+\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} - B_0 r\right) + \right. \\ \left. + e^{+i\phi}\beta_-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} + B_0 r\right)\right]\Psi_0 + \\ + \left(\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + \Gamma\bar{P}Y + M\right)(\Psi_+ + \Psi_-) = 0. \quad (2.4)$$

На уравнение (2.4) действуем оператором $\frac{1}{2}(1+Y)$. С учетом

$$\frac{1}{2}(1+Y)P_+ = P_+,\ \frac{1}{2}(1+Y)P_- = 0,$$
$$Y\beta_- = \beta_- P_0,\ Y\beta_+ = -\beta_+ P_0$$

получим

$$\left(\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + \Gamma\bar{P}Y + M\right)\Psi_+ + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\phi}\beta_-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} + B_0 r\right)\Psi_0 = 0. \quad (2.5)$$

Аналогично, домножая уравнение (2.4) на оператор $\frac{1}{2}(1-Y)$ и учитывая соотношения

$$\frac{1}{2}(1-Y)P_+ = 0,\ \frac{1}{2}(1-Y)P_- = P_-,$$
$$Y\beta_- = \beta_- P_0,\ Y\beta_+ = -\beta_+ P_0,$$

находим

$$\left(\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + \Gamma\bar{P}Y + M\right)\Psi_- + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi}\beta_+\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} - B_0 r\right)\Psi_0 = 0. \quad (2.6)$$

С учетом равенств

$$YP_+ = \frac{1}{2}(Y^3 + Y^2) = \frac{1}{2}(Y + Y^2) = P_+,$$
$$YP_- = \frac{1}{2}(Y^3 - Y^2) = \frac{1}{2}(Y - Y^2) = -P_-$$

уравнения (2.3), (2.5), (2.6) записываем так:

$$\left[\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + M\right]\Psi_0 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi}\beta_+\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} - B_0 r\right)\Psi_+ + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\phi}\beta_-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + B_0 r\right)\Psi_- = 0,$$

$$\left(\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 + \Gamma\bar{P} + M\right)\Psi_+ + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\phi}\beta_-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} + B_0 r\right)\Psi_0 = 0,$$

$$\left(\beta_3\partial_3 + \beta_4\partial_4 - \Gamma\bar{P} + M\right)\Psi_- + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi}\beta_+\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} - B_0 r\right)\Psi_0 = 0.$$

Для составляющих волновой функции будем использовать подстановки:

$$\Psi_0 = e^{ip_4x_4}e^{ip_3x_3}e^{im\phi}f_0(r),$$
$$\Psi_\pm = e^{ip_4x_4}e^{ip_3x_3}e^{i(m\pm1)\phi}f_\pm(r).$$

Радиальные уравнения имеют вид:

$$\left(ip_3\beta_3 + ip_4\beta_4 + M\right)f_0 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_+\left(\frac{d}{dr} + \frac{m+1}{r} - B_0 r\right)f_+ + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_-\left(\frac{d}{dr} - \frac{m-1}{r} + B_0 r\right)f_- = 0,$$

$$\left(ip_3\beta_3 + ip_4\beta_4 + \Gamma\bar{P} + M\right) f_+ +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_-\left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} + B_0 r\right) f_0 = 0,$$
$$\left(ip_3\beta_3 + ip_4\beta_4 - \Gamma\bar{P} + M\right) f_- +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_+\left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} - B_0 r\right) f_0 = 0. \qquad (2.7)$$

3 Анализ системы радиальных уравнений

С использованием обозначений

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(+\frac{d}{dr} + \frac{m - B_0 r^2}{r}\right),$$
$$b_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr} + \frac{m - B_0 r^2}{r}\right),$$
$$ip_3\beta_3 + ip_4\beta_4 = i\hat{p}$$

уравнения (2.7) запишутся так:

$$\left(i\hat{p} + M\right) f_0 + \beta_+ a_{m+1} f_+ - \beta_- b_{m-1} f_- = 0,$$
$$\left(i\hat{p} + \Gamma\bar{P} + M\right) f_+ - \beta_- b_m f_0 = 0, \qquad (3.1)$$
$$\left(i\hat{p} - \Gamma\bar{P} + M\right) f_- + \beta_+ a_m f_0 = 0. \qquad (3.2)$$

На уравнение (3.1) подействуем оператором

$$\frac{1}{M+\Gamma}(M + \Gamma P), \; P = 1 - \bar{P};$$

получим

$$\left[\frac{1}{M+\Gamma}(M+\Gamma P) i\hat{p} + \frac{1}{M+\Gamma}(M+\Gamma P)(M+\Gamma\bar{P})\right] f_+ -$$
$$-\frac{1}{M+\Gamma}(M+\Gamma P)\beta_- b_m f_0 = 0.$$

Учтем равенство

$$\frac{(M+\Gamma P)(M+\Gamma\bar{P})}{M+\Gamma} = \frac{M^2 + M\Gamma P + M\Gamma\bar{P} + \Gamma^2 P\bar{P}}{M+\Gamma} =$$
$$= \frac{M^2 + M\Gamma}{M+\Gamma} = M,$$

его выполнимость обеспечивается соотношениями $P + \bar{P} = 1$, $P\bar{P} = \bar{P}P = 0$. Введем обозначения

$$\frac{M+\Gamma P}{M+\Gamma} i\hat{p} = A, \; \frac{M+\Gamma P}{M+\Gamma}\beta_- = \beta'_-,$$

тогда уравнение преобразуем к виду

$$(A + M) f_+ - \beta'_- b_m f_0 = 0.$$

Теперь на уравнение (3.2) подействуем оператором

$$\frac{1}{M-\Gamma}(M - \Gamma P), \; P = 1 - \bar{P};$$

получим

$$\left[\frac{1}{M-\Gamma}(M-\Gamma P) i\hat{p} + \frac{1}{M-\Gamma}(M-\Gamma P)(M-\Gamma\bar{P})\right] f_- +$$
$$+\frac{1}{M-\Gamma}(M-\Gamma P)\beta_+ a_m f_0 = 0.$$

Учтем равенство

$$\frac{(M-\Gamma P)(M-\Gamma\bar{P})}{M-\Gamma} = \frac{M^2 - M\Gamma P - M\Gamma\bar{P} + \Gamma^2 P\bar{P}}{M-\Gamma} =$$
$$= \frac{M^2 - M\Gamma}{M-\Gamma} = M$$

и введем обозначения

$$\frac{(M-\Gamma\bar{P})}{M-\Gamma} i\hat{p} = C, \; \frac{M-\Gamma\bar{P}}{M-\Gamma}\beta_+ = \beta'_+,$$

тогда уравнение преобразуем к виду

$$(C + M) f_- + \beta'_+ a_m f_0 = 0.$$

Таким образом, система радиальных уравнений представляется так:

$$\left(i\hat{p} + M\right) f_0 + \beta_+ a_{m+1} f_+ - \beta_- b_{m-1} f_- = 0,$$
$$(A + M) f_+ - \beta'_- b_m f_0 = 0,$$
$$(C + M) f_- + \beta'_+ a_m f_0 = 0.$$

Введем в рассмотрение операторы со свойствами (используем обозначение $p^2 = p_3^2 + p_4^2$)

$$\overline{(i\hat{p} + M)}(i\hat{p} + M) = p^2 + M^2,$$
$$\overline{(A + M)}(A + M) = p^2 + M^2,$$
$$\overline{(C + M)}(C + M) = p^2 + M^2;$$

фактически с точностью до нормировки эти формулы определяют обратные матрицы. Тогда систему уравнений можно переписать так:

$$\left(i\hat{p} + M\right)(p^2 + M^2) f_0 +$$
$$+\beta_+ a_{m+1}(p^2 + M^2) f_+ - \beta_- b_{m-1}(p^2 + M^2) f_- = 0,$$
$$(p^2 + M^2) f_+ - \overline{(A + M)}\beta'_- b_m f_0 = 0,$$
$$(p^2 + M^2) f_- + \overline{(C + M)}\beta'_+ a_m f_0 = 0. \qquad (3.3)$$

Первое уравнение в (3.3) с использованием второго и третьего преобразуется к виду уравнения относительно компоненты f_0:

$$(i\hat{p} + M)(p^2 + M^2) f_0 +$$
$$+\beta_+ a_{m+1}\overline{(A + M)}\beta'_- b_m f_0 +$$
$$+\beta_- b_{m-1}\overline{(C + M)}\beta'_+ a_m f_0 = 0; \qquad (3.4)$$

два других остаются теми же:

$$(p^2 + M^2) f_+ - \overline{(A + M)}\beta'_- b_m f_0 = 0,$$
$$(p^2 + M^2) f_- + \overline{(C + M)}\beta'_+ a_m f_0 = 0. \qquad (3.5)$$

Достаточно решить уравнение (3.4) относительно f_0; две другие компоненты f_+, f_+ вычисляются по f_0 спомощью (3.5).

Нужно знать явный вид введенных выше обратных операторов. Для этого достаточно установить вид минимальных полиномов соответствующих матриц. Минимальный полином для $i\hat{p}$ имеет вид

$$i\hat{p}[(i\hat{p})^2 + p^2] = 0.$$

Рассмотрим степени оператора A (результаты для оператора C можно будет получить формальной заменой $\Gamma \Rightarrow -\Gamma$):

$$A^2 = \frac{1}{(M+\Gamma)^2}(iM\hat{p} + i\Gamma P\hat{p})(iM\hat{p} + i\Gamma P\hat{p}) =$$

$$= \frac{1}{(M+\Gamma)^2}[-M^2\hat{p}^{\,2} - M\Gamma\hat{p}P\hat{p} - M\Gamma P\hat{p}^{\,2} - \Gamma^2 P\hat{p}P\hat{p}].$$

Так как (учитываем алгебру матриц Даффина – Кеммера)

$$\beta_\mu = P\beta_\mu + \beta_\mu P = \bar{P}\beta_\mu + \beta_\mu \bar{P},$$

$$\beta_\mu \bar{P} = P\beta_\mu,\ \bar{P}\beta_\mu = \beta_\mu P,$$

$$P\beta_\mu P = \bar{P}\beta_\mu\bar{P} = 0,\ \beta_\mu\beta_\nu P = P\beta_\mu\beta_\nu,$$

$$\beta_\mu\beta_\nu\bar{P} = \bar{P}\beta_\mu\beta_\nu,\ P + \bar{P} = 1,\ P\bar{P} = \bar{P}P = 0,$$

то $A^2 = \dfrac{1}{(M+\Gamma)^2}\left(-M^2\hat{p}^{\,2} - M\Gamma\hat{p}^{\,2}\right) = -\dfrac{M\hat{p}^{\,2}}{M+\Gamma}$.

Тогда

$$A^3 = -\frac{M}{(M+\Gamma)^2}(M + \Gamma\bar{P})(i\hat{p})\hat{p}^{\,2} =$$

$$= -\frac{Mp^2}{(M+\Gamma)}\frac{(M+\Gamma\bar{P})}{M+\Gamma}(i\hat{p}) = -\frac{Mp^2}{M+\Gamma}A.$$

Минимальный полином для матрицы C равен:

$$C^3 = -\frac{M\hat{p}^{\,2}}{M-\Gamma}C.$$

С учетом этих кубических полиномов заключаем, что требуемые (обратные) операторы должны быть квадратичными по соответствующим матрицам. Эти операторы задаются соотношениями:

$$\overline{(M+i\hat{p})} = \frac{1}{M}\left[(i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2)\right],$$

$$\overline{(A+M)} = \frac{p^2+M^2}{M}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{M+\Gamma}{p^2+M^2+M\Gamma}A + \frac{M+\Gamma}{M(p^2+M^2+M\Gamma)}A^2\right],$$

$$\overline{(C+M)} = \frac{p^2+M^2}{M}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{M-\Gamma}{p^2+M^2-M\Gamma}C + \frac{M-\Gamma}{M(p^2+M^2-M\Gamma)}C^2\right],$$

напоминаем

$$A = \frac{M+\Gamma\bar{P}}{M+\Gamma}i\hat{p},\ C = \frac{M-\Gamma\bar{P}}{M-\Gamma}i\hat{p}.$$

Приведем явный вид оператора $i\hat{p}$:

$$i\hat{p} = i\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_3 & 0 & p_4 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_3\\
0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & p_4 & -p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}.$$

Возвращаемся к уравнению для f_0, переписанному в виде

$$(p^2+M^2)^2 f_0 +$$

$$+\overline{(M+i\hat{p})}\,\beta_+\, a_{m+1}\overline{(A+M)}\,\beta'_-\, b_m f_0 +$$

$$+\overline{(M+i\hat{p})}\,\beta_-\, b_{m-1}\overline{(C+M)}\,\beta'_+\, a_m f_0 = 0\,.$$

Учитывая здесь явный вид обратных операторов, получим

$$(p^2+M^2)f_0 +$$

$$+\frac{1}{M^2}\left[(i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2)\right]\beta_+\, a_{m+1}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{M+\Gamma}{p^2+M^2+M\Gamma}A + \frac{M+\Gamma}{M(p^2+M^2+M\Gamma)}A^2\right]\times$$

$$\times\beta'_- b_m f_0 + \frac{1}{M^2}\left[(i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2)\right]\beta_- b_{m-1}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{M-\Gamma}{p^2+M^2-M\Gamma}C + \frac{M-\Gamma}{M(p^2+M^2-M\Gamma)}C^2\right]\times$$

$$\times\beta'_+ a_m f_0 = 0.$$

Учитываем явный вид операторов

$$A = \frac{M+\Gamma P}{M+\Gamma}i\hat{p},\ A^2 = -\frac{M\hat{p}^{\,2}}{M+\Gamma},$$

$$C = \frac{M-\Gamma P}{M-\Gamma}i\hat{p},\ C^2 = -\frac{M\hat{p}^{\,2}}{M-\Gamma},$$

$$\beta'_- = \frac{M+\Gamma P}{M+\Gamma}\beta_-,\ \beta'_+ = \frac{M-\Gamma P}{M-\Gamma}\beta_+,$$

преобразуем это уравнение к виду

$$(p^2+M^2)f_0 + \frac{1}{M^2}\left[(i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2)\right]\beta_+\times$$

$$\times\left[1 - \frac{M+\Gamma P}{p^2+M^2+M\Gamma}i\hat{p} + \frac{(i\hat{p})^2}{p^2+M^2+M\Gamma}\right]\times$$

$$\times\frac{M+\Gamma P}{M+\Gamma}\beta_-\, a_{m+1}b_m f_0 +$$

$$+\frac{1}{M^2}\left[(i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2)\right]\beta_-\times$$

$$\times\left[1 - \frac{M-\Gamma P}{p^2+M^2-M\Gamma}i\hat{p} + \frac{(i\hat{p})^2}{p^2+M^2-M\Gamma}\right]\times$$

$$\times\frac{M-\Gamma P}{M-\Gamma}\beta_+ b_{m-1}a_m f_0 = 0.$$

После элементарного преобразования оно принимает вид

$$\Big\{(p^2+M^2) + a_{m+1}b_m\frac{1}{M^2(p^2+M^2+M\Gamma)}\frac{1}{M+\Gamma}\times$$

$$\times\left[(i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2)\right]\beta_+\times$$

$$\times\left[(p^2+M^2+M\Gamma) - (M+\Gamma P)i\hat{p} + (i\hat{p})^2\right](M+\Gamma P)\beta_- +$$

$$+b_{m-1}a_m\frac{1}{M^2(p^2+M^2-M\Gamma)}\frac{1}{M-\Gamma}\times$$

$$\times\left[(i\hat{p})^2 - M(i\hat{p}) + (p^2+M^2)\right]\beta_-\times$$

$$\times\Big[(p^2+M^2-M\Gamma)-(M-\Gamma P)i\hat{p}+(i\hat{p})^2\Big]\times$$
$$\times(M-\Gamma P)\beta_+\Big\}f_0=0$$

или

$$\begin{aligned}&\Big\{(p^2+M^2)+a_{m+1}b_m\frac{1}{M^2(p^2+M^2+M\Gamma)}\frac{1}{M+\Gamma}\times\\&\times\Big[(i\hat{p})^2-M(i\hat{p})+(p^2+M^2)\Big]\beta_+\times\\&\times\Big[(p^2+M^2+M\Gamma)-i\hat{p}(M+\Gamma\bar{P})+(i\hat{p})^2\Big](M+\Gamma P)\beta_-+\\&+b_{m-1}a_m\frac{1}{M^2(p^2+M^2-M\Gamma)}\frac{1}{M-\Gamma}\times\\&\times\Big[(i\hat{p})^2-M(i\hat{p})+(p^2+M^2)\Big]\beta_-\times\\&\times\Big[(p^2+M^2-M\Gamma)-i\hat{p}(M-\Gamma\bar{P})+(i\hat{p})^2\Big]\times\\&\times(M-\Gamma P)\beta_+\Big\}f_0=0.\end{aligned}$$

Так как

$$\hat{p}\beta_+\hat{p}=\hat{p}\beta_-\hat{p}=0,$$

то уравнение можно переписать так:

$$\begin{aligned}&\Big\{(p^2+M^2)+a_{m+1}b_m\frac{1}{M^2(p^2+M^2+M\Gamma)}\frac{1}{M+\Gamma}\times\\&\times\Big[(p^2+M^2+M\Gamma)(i\hat{p})^2\beta_+-\\&-M(p^2+M^2+M\Gamma)i\hat{p}\beta_++\\&+(p^2+M^2)(p^2+M^2+M\Gamma)\beta_+-\\&-(p^2+M^2)\beta_+i\hat{p}(M+\Gamma\bar{P})+\\&+(p^2+M^2)\beta_+(i\hat{p})^2\Big](M+\Gamma P)\beta_-+\\&+b_{m-1}a_m\frac{1}{M^2(p^2+M^2-M\Gamma)}\frac{1}{M-\Gamma}\times\\&\times\Big[(p^2+M^2-M\Gamma)(i\hat{p})^2\beta_--\\&-M(p^2+M^2-M\Gamma)i\hat{p}\beta_-+\\&+(p^2+M^2)(p^2+M^2-M\Gamma)\beta_--\\&-(p^2+M^2)\beta_-i\hat{p}(M-\Gamma\bar{P})+\\&+(p^2+M^2)\beta_-(i\hat{p})^2\Big](M-\Gamma P)\beta_+\Big\}f_0=0.\end{aligned}$$

Дальше предстоит учесть состав компоненты f_0, явный вид оператора $i\hat{p}$ и явное представление для матриц $\beta_+,\beta_-,\bar{P}$. После необходимых вычислений получаем четыре уравнения:

$$\begin{aligned}&(p^2+M^2)f_3+a_{m+1}b_m\frac{1}{M(p^2+M^2+M\Gamma)}\frac{1}{M+\Gamma}\times\\&\times\{(p^2+M^2)(p^2+M^2+M\Gamma)f_3-\\&-p_4(p^2+M^2+M\Gamma)(p_4f_3-p_3f_4)-\\&-p_3(p^2+M^2)(p_3f_3+p_4f_4)+\\&+p_3(M+\Gamma)(p^2+M^2)f_{12}\}+\\&+b_{m-1}a_m\frac{1}{M(p^2+M^2-M\Gamma)}\frac{1}{M-\Gamma}\times\\&\times\{(p^2+M^2)(p^2+M^2-M\Gamma)f_3-\\&-p_4(p^2+M^2-M\Gamma)(p_4f_3-p_3f_4)-\\&-p_3(p^2+M^2)(p_3f_3+p_4f_4)-\\&-p_3(M-\Gamma)(p^2+M^2)f_{12}\}=0,\end{aligned}\qquad(3.6)$$

$$\begin{aligned}&(p^2+M^2)f_4+a_{m+1}b_m\frac{1}{M(p^2+M^2+M\Gamma)}\frac{1}{M+\Gamma}\times\\&\times\{(p^2+M^2)(p^2+M^2+M\Gamma)f_4+\\&+p_3(p^2+M^2+M\Gamma)(p_4f_3-p_3f_4)-\\&-p_4(p^2+M^2)(p_3f_3+p_4f_4)+\\&+p_4(M+\Gamma)(p^2+M^2)f_{12}\}+\\&+b_{m-1}a_m\frac{1}{M(p^2+M^2-M\Gamma)}\frac{1}{M-\Gamma}\times\\&\times\{(p^2+M^2)(p^2+M^2-M\Gamma)f_4+\\&+p_3(p^2+M^2-M\Gamma)(p_4f_3-p_3f_4)-\\&-p_4(p^2+M^2)(p_3f_3+p_4f_4)-\\&-p_4(M-\Gamma)(p^2+M^2)f_{12}\}=0,\end{aligned}\qquad(3.7)$$

$$\begin{aligned}&f_{12}+a_{m+1}b_m\frac{1}{M(p^2+M^2+M\Gamma)}\times\\&\times\{(M+\Gamma)f_{12}-(p_3f_3+p_4f_4)\}+\\&+b_{m-1}a_m\frac{1}{M(p^2+M^2-M\Gamma)}\times\\&\times\{(M-\Gamma)f_{12}+(p_3f_3+p_4f_4)\}=0,\end{aligned}\qquad(3.8)$$

$$\begin{aligned}&(p^2+M^2)f_{34}-ia_{m+1}b_m\frac{1}{M+\Gamma}(p_4f_3-p_3f_4)-\\&-ib_{m-1}a_m\frac{1}{M-\Gamma}(p_4f_3-p_3f_4)=0.\end{aligned}\qquad(3.9)$$

Рассмотрим уравнения (3.6) и (3.7) – представим их в виде:

$$\begin{aligned}&(p^2+M^2)f_3+\frac{a_{m+1}b_m}{M(M+\Gamma)}\times\\&\times\Big\{(p^2+M^2)f_3-p_4(p_4f_3-p_3f_4)-\\&-\frac{(p^2+M^2)}{p^2+M^2+M\Gamma}p_3(p_3f_3+p_4f_4)+\\&+\frac{(M+\Gamma)(p^2+M^2)}{p^2+M^2+M\Gamma}p_3f_{12}\Big\}+\\&+\frac{b_{m-1}a_m}{M(M-\Gamma)}\Big\{(p^2+M^2)f_3-p_4(p_4f_3-p_3f_4)-\\&-\frac{(p^2+M^2)}{p^2+M^2-M\Gamma}p_3(p_3f_3+p_4f_4)-\\&-\frac{(M-\Gamma)(p^2+M^2)}{p^2+M^2-M\Gamma}p_3f_{12}\Big\}=0,\end{aligned}$$

$$(p^2+M^2)f_4+\frac{a_{m+1}b_m}{M(M+\Gamma)}\times$$

$$\times\left\{(p^2+M^2)f_4+p_3(p_4f_3-p_3f_4)-\right.$$

$$-\frac{(p^2+M^2)}{p^2+M^2+M\Gamma}p_4(p_3f_3+p_4f_4)+$$

$$\left.+\frac{(M+\Gamma)(p^2+M^2)}{p^2+M^2+M\Gamma}p_4f_{12}\right\}+$$

$$+\frac{b_{m-1}a_m}{M(M-\Gamma)}\left\{(p^2+M^2)f_4+p_3(p_4f_3-p_3f_4)-\right.$$

$$-\frac{(p^2+M^2)}{p^2+M^2-M\Gamma}p_4(p_3f_3+p_4f_4)-$$

$$\left.-\frac{(M-\Gamma)(p^2+M^2)}{p^2+M^2-M\Gamma}p_4f_{12}\right\}=0.$$

Умножаем первое уравнение на p_4, а второе уравнение умножаем на $-p_3$, затем складываем результаты, в итоге получим

$$\left\{\frac{M^2}{M^2-\Gamma^2}(a_{m+1}b_m+b_{m-1}a_m)-\right.$$

$$\left.-\frac{M\Gamma}{M^2-\Gamma^2}(a_{m+1}b_m+b_{m-1}a_m)+p^2+M^2\right\}\times$$

$$\times(p_4f_3-p_3f_4)=0.$$

Учитывая уравнение (3.9), представленное в форме

$$-i\frac{M}{M^2-\Gamma^2}(a_{m+1}b_m+b_{m-1}a_m)(p_4f_3-p_3f_4)+$$

$$+i\frac{\Gamma}{M^2-\Gamma^2}(a_{m+1}b_m-b_{m-1}a_m)(p_4f_3-p_3f_4)+$$

$$+(p^2+M^2)f_{34}=0,$$

находим соотношение

$$f_{34}=-\frac{i}{M}(p_4f_3-p_3f_4).$$

Обращаемся к уравнению (3.8) – его можно представить в виде

$$f_{12}+\frac{a_{m+1}b_m}{M[(p^2+M^2)^2-M^2\Gamma^2]}\times$$

$$\times\left\{(M+\Gamma)(p^2+M^2-M\Gamma)f_{12}-\right.$$

$$\left.-(p^2+M^2-M\Gamma)(p_3f_3+p_4f_4)\right\}+$$

$$+\frac{b_{m-1}a_m}{M[(p^2+M^2)^2-M^2\Gamma^2]}\times$$

$$\times\left\{(M-\Gamma)(p^2+M^2+M\Gamma)f_{12}+\right.$$

$$\left.+(p^2+M^2+M\Gamma)(p_3f_3+p_4f_4)\right\}=0.$$

Отсюда после элементарного преобразования получим

$$\left\{1+\frac{1}{(p^2+M^2)^2-M^2\Gamma^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(p^2+M^2-\Gamma^2)(a_{m+1}b_m+b_{m-1}a_m)-\frac{2\Gamma B_0p^2}{M}\right]\right\}f_{12}+$$

$$+\frac{1}{(p^2+M^2)^2-M^2\Gamma^2}\left[\Gamma(a_{m+1}b_m+b_{m-1}a_m)+\right.$$

$$\left.+\frac{2B_0(p^2+M^2)}{M}\right](p_3f_3+p_4f_4)=0;$$

здесь учтено соотношение

$$a_{m+1}b_m-b_{m-1}a_m=-2B_0.$$

Обратимся еще раз к уравнениям (3.6), (3.7):

$$(p^2+M^2)f_3+\frac{a_{m+1}b_m}{M(M+\Gamma)}\times$$

$$\times\left\{(p^2+M^2)f_3-p_4(p_4f_3-p_3f_4)-\right.$$

$$-\frac{(p^2+M^2)}{p^2+M^2+M\Gamma}p_3(p_3f_3+p_4f_4)+$$

$$\left.+\frac{(M+\Gamma)(p^2+M^2)}{p^2+M^2+M\Gamma}p_3f_{12}\right\}+$$

$$+\frac{b_{m-1}a_m}{M(M+\Gamma)}\left\{(p^2+M^2)f_3-p_4(p_4f_3-p_3f_4)-\right.$$

$$-\frac{(p^2+M^2)}{p^2+M^2-M\Gamma}p_3(p_3f_3+p_4f_4)-$$

$$\left.-\frac{(M-\Gamma)(p^2+M^2)}{p^2+M^2-M\Gamma}p_3f_{12}\right\}=0,$$

$$(p^2+M^2)f_4+\frac{a_{m+1}b_m}{M(M+\Gamma)}\times$$

$$\times\left\{(p^2+M^2)f_4+p_3(p_4f_3-p_3f_4)-\right.$$

$$-\frac{(p^2+M^2)}{p^2+M^2+M\Gamma}p_4(p_3f_3+p_4f_4)+$$

$$\left.+\frac{(M+\Gamma)(p^2+M^2)}{p^2+M^2+M\Gamma}p_4f_{12}\right\}+$$

$$+\frac{b_{m-1}a_m}{M(M-\Gamma)}\left\{(p^2+M^2)f_4+p_3(p_4f_3-p_3f_4)-\right.$$

$$-\frac{(p^2+M^2)}{p^2+M^2-M\Gamma}p_4(p_3f_3+p_4f_4)-$$

$$\left.-\frac{(M-\Gamma)(p^2+M^2)}{p^2+M^2-M\Gamma}p_4f_{12}\right\}=0.$$

Умножаем первое уравнение на p_3, а второе уравнение умножаем на p_4, затем складываем результаты, получим

$$(p_3f_3+p_4f_4)+a_{m+1}b_m\frac{1}{M(p^2+M^2+M\Gamma)}\times$$

$$\times[M(p_3f_3+p_4f_4)+p^2f_{12}]+$$

$$+b_{m-1}a_m\frac{1}{M(p^2+M^2-M\Gamma)}\times$$

$$\times[M(p_3 f_3 + p_4 f_4)] - p^2 f_{12}] = 0.$$

Таким образом, приходим к системе уравнений относительно функций $(p_3 f_3 + p_4 f_4)$, f_{12}:

$$\Big\{\Big[(p^2+M^2)^2 - M^2\Gamma^2\Big] +$$

$$+(p^2+M^2-\Gamma^2)(a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m) - \frac{2B_0\Gamma p^2}{M}\Big\} f_{12} +$$

$$\Big\{\Gamma(a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m) + \frac{2B_0}{M}(p^2+M^2)\Big\}\times$$

$$\times(p_3 f_3 + p_4 f_4) = 0,$$

$$\Big\{(p^2+M^2)^2 - M^2\Gamma^2\Big\}(p_3 f_3 + p_4 f_4) +$$

$$+(p^2+M^2)(a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m)(p_3 f_3 + p_4 f_4) +$$

$$+2B_0 M\Gamma(p_3 f_3 + p_4 f_4) -$$

$$-p^2\Big\{\Gamma(a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m) - \frac{2B_0(p^2+M^2)}{M}\Big\} f_{12} = 0.$$

Приведем данную систему к виду, когда в каждом из ее уравнений оператор $(a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m)$ действует лишь на одну из указанных функций. После необходимых вычислений находим:

$$\left(\frac{2B_9}{M} - \Gamma\right)(p_3 f_3 + p_4 f_4) +$$

$$+[a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + p^2 + M^2] f_{12} = 0,$$

$$\left\{a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + p^2 + M^2 + \Gamma\left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma\right)\right\}\times$$

$$\times(p_3 f_3 + p_4 f_4) - p^2\left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma\right) f_{12} = 0.$$

Таким образом, уравнения относительно компонент f_3, f_4, f_{12}, f_{34} имеют следующий вид:

$$f_{34} = -\frac{i}{M}(p_4 f_3 - p_3 f_4), \tag{3.10}$$

$$\left[a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + \frac{M^2-\Gamma^2}{M^2}(p^2+M^2) + \frac{2B_0\Gamma}{M}\right]\times$$

$$\times(p_4 f_3 - p_3 f_4) = 0, \tag{3.11}$$

$$\left[a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + p^2 + M^2\right](p_3 f_3 + p_4 f_4) =$$

$$= -\left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma\right)\left\{\Gamma(p_3 f_3 + p_4 f_4) - p^2 f_{12}\right\},$$

$$\left[a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + p^2 + M^2\right] f_{12} =$$

$$= -\left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma\right)(p_3 f_3 + p_4 f_4). \tag{3.12}$$

Анализ уравнений (3.10) и (3.11) очевиден. Система (3.12) решается через диагонализацию матрицы смешивания. Для этого введем функции

$$\Phi_1 = -\lambda_1(p_3 f_3 + p_4 f_4) + p^2 f_{12},$$

$$\Phi_2 = -\lambda_2(p_3 f_3 + p_4 f_4) + p^2 f_{12},$$

где λ_1, λ_2 – решения уравнения

$$\lambda^2 - \lambda\Gamma + p^2 = 0:$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2}\right),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4p^2}\right).$$

Для функций Φ_1, Φ_2 получаем раздельные уравнения:

$$\left(a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + p^2 + M^2 + \lambda'_1\right)\Phi_1 = 0,$$

$$\left(a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + p^2 + M^2 + \lambda'_2\right)\Phi_2 = 0,$$

где

$$\lambda'_1 = \left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma\right)\lambda_1,\ \lambda'_2 = \left(\frac{2B_0}{M} - \Gamma\right)\lambda_2.$$

4 Получение спектров энергии

В явном виде два последних уравнения записываются так:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1 - \frac{(m - B_0 r^2)^2}{r^2}\right)\Phi_1 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_2 - \frac{(m - B_0 r^2)^2}{r^2}\right)\Phi_2 = 0.$$

Вводим переменную $x = |B_0| r^2$, уравнение для Φ_1 примет вид

$$\left[4|B_0|\left(x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\right) - \frac{|B_0|\left(m - xB_0/|B_0|\right)^2}{x} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1\right]\Phi_1 = 0.$$

Для определенности полагаем $B_0 = -|B_0|$:

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{(m+x)^2}{4x} + \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|}\right]\Phi_1 = 0.$$

Используем подстановку

$$\Phi_1 = x^A e^{-Cx}\bar{\Phi}_1,\ A = \frac{|m|}{2},\ c = \frac{1}{2},$$

приходим к

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (|m| + 1 - x)\frac{d}{dx} - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{|m| + m + 1}{2} - \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|}\right)\right]\bar{\Phi}_1 = 0.$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение; условие обрыва ряда до полинома

$$\frac{|m| + m + 1}{2} - \frac{\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 - \lambda'_1}{4|B_0|} = -n$$

дает правило квантования

$$\Phi_1,\quad \varepsilon_1^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m + |m| + 1 + 2n) + \lambda'_1;$$

для решений Φ_2 имеем спектр с похожей структурой:

$$\Phi_2,\quad \varepsilon_2^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(m + |m| + 1 + 2n) + \lambda'_2.$$

Введем упрощающие обозначения:

$$2|B_0|(|m + |m| + 1 + 2n) = N,$$

$$-p^2 = \varepsilon^2 - p_3^2 = E > 0,$$

$$\frac{2B_0}{M} - \Gamma = x,$$

$$\lambda'_1 = \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}), \lambda'_2 = \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}).$$

Тогда формулы квантования представляются так:

$$\Phi_1, \quad B_0 = -|B_0|, E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E});$$

$$\Phi_2, \quad B_0 = -|B_0|, E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E}).$$

Эти формулы легко разрешаются относительно E. Действительно, имеем (следим одновременно за двумя возможностями)

$$2E - 2M^2 - 2N - x\Gamma = \pm x\sqrt{\Gamma^2 + 4E},$$

тогда

$$z \equiv 2N + 2M^2 + x\Gamma, E^2 - E(z + x^2) + \frac{z^2 - x^2\Gamma^2}{4} = 0,$$

$$E_1 = \frac{z + x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)},$$

$$E_2 = \frac{z + x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}.$$

Чтобы оба корня E_1, E_2 были вещественными и положительными (это отвечает физическим спектрам), нужно требовать

$$(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2) > 0, \quad z + x^2 > 0, z^2 - x^2\Gamma^2 > 0. \qquad (4.1)$$

Рассматриваем третье неравенство в (4.1):

$$z^2 - x^2\Gamma^2 = (z - x\Gamma)(z + x\Gamma) > 0 \Rightarrow$$

$$(2N + 2M^2)(2N + 2M^2 + 2x\Gamma) > 0.$$

Для его выполнения при всех значениях N достаточно требовать положительности параметра $x\Gamma > 0$ (напоминаем, что сейчас рассматривается случай $B_0 = -|B_0| < 0$)

$$x\Gamma > 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{2|B_0|}{M} + \Gamma\right)\Gamma < 0 \Longleftrightarrow -\frac{2|B_0|}{M} < \Gamma < 0. \qquad (4.2)$$

Второе неравенство из (4.1)

$$z + x^2 = (2N + 2M^2) + x\Gamma + x^2 > 0$$

с учетом (4.2) выполняется автоматически. Первое неравенство $2zx^2 + x^4 + x^2\Gamma^2 > 0$ выполняется в силу положительности z:

$$z = 2N + 2M^2 + x\Gamma, \ x\Gamma > 0.$$

Таким образом, получено простое ограничение на связанный с квадрупольным электрическим моментом параметр Γ, при выполнении которого оба спектра энергии будут вещественными и положительными при всех значениях квантовых чисел:

$$B_0 = -|B_0|, -\frac{2|B_0|}{M} < \Gamma < 0. \qquad (4.3)$$

Поскольку в рассмотренном случае $B_0 = -|B_0| < 0$ и (см. (2.2)) имеем равенство

$$\Gamma = -2|B_0|\alpha,$$

то, согласно (4.3), можно использовать только возможность, когда $\alpha > 0$.

Легко получить аналогичные результаты в случае противоположной ориентации магнитного поля

$$B_0 = +|B_0|,$$

$$\Phi_1, \quad \varepsilon_1^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n) + \lambda'_1,$$

$$\Phi_2, \quad \varepsilon_2^2 - M^2 - p_3^2 = 2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n) + \lambda'_2.$$

Используя прежние обозначения

$$2|B_0|(-m + |m| + 1 + 2n) = N,$$

$$-p^2 = \varepsilon^2 - p_3^2 = E > 0, \frac{2B_0}{M} - \Gamma = x,$$

$$\lambda'_1 = \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}), \lambda'_2 = \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E});$$

формулы квантования представляются так:

$$\Phi_1, \quad B_0 = -|B_0|, E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 4E}),$$

$$\Phi_2, \quad B_0 = -|B_0|, E - M^2 = N + \frac{x}{2}(\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 + 4E});$$

эти формулы разрешаются относительно E:

$$E_1 = \frac{z + x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)},$$

$$E_2 = \frac{z + x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2)}.$$

Чтобы оба корня E_1, E_2 были вещественными и положительными (такие значения могут отвечать физическим спектрам), нужно, как и прежде, требовать

$$(z + x^2)^2 - (z^2 - x^2\Gamma^2) > 0, z + x^2 > 0, z^2 - x^2\Gamma^2 > 0.$$

Первое неравенство

$$z^2 - x^2\Gamma^2 = (z - x\Gamma)(z + x\Gamma) > 0 \Rightarrow$$

$$(2N + 2M^2)(2N + 2M^2 + 2x\Gamma) > 0$$

выполняется при (напоминаем, что рассматривается случай $B_0 = +|B_0| > 0$)

$$x\Gamma > 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{2|B_0|}{M} - \Gamma\right)\Gamma > 0 \Longleftrightarrow$$

$$0 < \Gamma < \frac{2|B_0|}{M} \Longleftrightarrow \alpha > 0.$$

Два оставшихся неравенства выполняются автоматически:

$$z + x^2 = (2N + 2M^2) + x\Gamma + x^2 > 0;$$

$$2zx^2 + x^4 + x^2\Gamma^2 > 0,$$

$$(z = 2N + 2M^2 + x\Gamma, x\Gamma > 0).$$

Заметим, что спектр энергии, отвечающий уравнению (3.11) для функции $(p_4 f_3 - p_3 f_4)$, имеет вид

$$B_0 = -|B_0|,$$

$$\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 = \frac{2M^2}{M^2 - \Gamma^2}|B_0|\left(m + |m| + 1 + \frac{\Gamma}{M} + 2n\right),$$

$$B_0 = +|B_0|, \qquad (4.4)$$

$$\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2 = \frac{2M^2}{M^2-\Gamma^2}|B_0|\left(-m+|m|+1-\frac{\Gamma}{M}+2n\right).$$

5 Случай электрически нейтральной частицы

Примем во внимание введенные выше обозначения:

$$\frac{eB}{2} \Rightarrow B_0,\ e\alpha B = \Gamma.$$

Эти соотношения позволяют совершить формальный предельный переход к ситуации, когда заряд частицы стремится к нулю, свободный параметр α стремится к бесконечности, так что их произведение остается конечным. Другими словами, возможна формальная замена

$$B_0 \Rightarrow 0,\ \Gamma \Rightarrow \sigma B.$$

В соответствие с этим полученную выше систему уравнений (3.11), (3.12) относительно компонент f_3, f_4, f_{12}, f_{34} следует заменить на следующую:

$$f_{34} = -\frac{i}{M}(p_4 f_3 - p_3 f_4),$$

$$\left[a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + \left(1-\frac{\sigma^2B^2}{M^2}\right)(p^2+M^2)\right]\times$$

$$\times(p_4 f_3 - p_3 f_4) = 0,$$

$$\left[a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + p^2 + M^2\right](p_3 f_3 + p_4 f_4) =$$

$$= \sigma B\left\{\sigma B(p_3 f_3 + p_4 f_4) - p^2 f_{12}\right\},$$

$$\left[a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m + p^2 + M^2\right] f_{12} = \sigma B(p_3 f_3 + p_4 f_4).$$

С учетом

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{m}{r}\right),\ b_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr}+\frac{m}{r}\right)$$

находим выражение для оператора второго порядка:

$$a_{m+1}b_m + b_{m-1}a_m = -\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m^2}{r^2}\right) \equiv -\Delta.$$

Систему уравнений можно переписать так (учитываем $p^2 = -\varepsilon^2 + p_3^2$):

$$f_{34} = -\frac{i}{M}(p_4 f_3 - p_3 f_4),$$

$$\left[\Delta + (\varepsilon^2 - M^2 - p_3^2)(1-\sigma^2B^2/M^2)\right](p_4 f_3 - p_3 f_4) = 0,$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\sigma B}(\Delta + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2)(p_3 f_3 + p_4 f_4) = \\ \quad = \sigma B(p_3 f_3 + p_4 f_4) - p^2 f_{12}, \\ -\dfrac{1}{\sigma B}(\Delta + \varepsilon^2 - M^2 - p_3^2) f_{12} = \\ \quad = 1\cdot(p_3 f_3 + p_4 f_4) + 0\cdot f_{12}. \end{cases}$$

Последняя система из двух уравнений незначительно отличается от решенной выше (3.12), поэтому применяем тот же способ анализа – вводим новые функции:

$$\Phi_1 = -\lambda_1(p_3 f_3 + p_4 f_4) + p^2 f_{12},$$

$$\Phi_2 = -\lambda_2(p_3 f_3 + p_4 f_4) + p^2 f_{12}.$$

В результате получаем раздельные уравнения для функций Φ_1, Φ_2

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m^2}{r^2}+\varepsilon^2-M^2-p_3^2+\lambda'_{1,2}\right)\Phi_{1,2} = 0,$$

$$\lambda'_1 = \frac{\sigma B}{2}\left[\sigma B + \sqrt{\sigma^2B^2 + 4(\varepsilon^2 - p_3^2)}\right],$$

$$\lambda'_2 = \frac{\sigma B}{2}\left[\sigma B - \sqrt{\sigma^2B^2 + 4(\varepsilon^2 - p_3^2)}\right].$$

Можно ввести обозначения: $E = \varepsilon^2 - p_3^2 > 0$, $x = \sigma B$; тогда предыдущие соотношения записываются короче:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m^2}{r^2}+E-M^2+\lambda'_{1,2}\right)\Phi_{1,2} = 0,$$

$$\lambda'_1 = \frac{x}{2}[x+\sqrt{x^2+4E}],\ \lambda'_2 = \frac{x}{2}[x-\sqrt{x^2+4E}].$$

Воспользовавшись заменой переменной (следим одновременно за обоими вариантами)

$$x = \mu r,\ \mu = \sqrt{E - M^2 + \lambda'_{1,2}},$$

предыдущее уравнение приводим к виду уравнения Бесселя

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}+1-\frac{m^2}{x^2}\right)\Phi(x) = 0.$$

Отмечаем, что влияние квадрупольного момента сводится к присутствию в аргументе x масштабного фактора μ, который зависит от параметра квадрупольного момента σ и величины магнитного поля B:

$$\mu = \sqrt{\varepsilon^2 - p_3^2 - M^2 + \frac{\sigma B}{2}\left(\sigma B + \sqrt{\sigma^2B^2 + 4(\varepsilon^2 - p_3^2)}\right)}.$$

Это замечание также относится и к решениям уравнения третьего типа (4.4).

Авторы благодарят участников семинара лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за обсуждение работы и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богуш, А.А.* Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск: Наука и техника, 1968. – 386 с.

2. *Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field* / E.M. Ovsiyuk, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V. Balan, V.M. Red'kov // Chapter in: Quaternions: Theory and Applications / Editor: Sandra Griffin. – Nova Science Publishers, Inc. USA, 2017. – P. 47–84.

3. *Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field* / V. Kisel, Ya. Voynova, E. Ovsiyuk, V. Balan, V. Red'kov // NPCS. – 2017. – Vol. 20, № 1. – P. 21–39.

Поступила в редакцию 07.03.17.