ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПОВЫШЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ А. М. ЛЯПУНОВА

Бейсенби М. А.[1],Сулейменова С. Т.[2]
[1] д.т.н., проф.,[2] докторант, кафедра системного анализа и управления, Евразийский национальный университет,
[2] стажер, кафедра систем управления, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
[1]Астана, Республика Казахстан, [2] Минск, Республика Беларусь
E-mail: s.t.suleimenova@gmail.com

В статье излагается исследование систем управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости, построенных в классе трехпараметрических структурно – устойчивых отображений (катастрофа эллиптическая омбилика), для объектов с 1 входом и 1 выходом. Исследование робастной устойчивости систем управления базируется на построении функции Ляпунова. Функция Ляпунова строится в форме вектор – функции, антиградиент которой задается компонентами вектора скорости системы. Область устойчивости установившихся состояний системы получена в виде простейших неравенств по неопределенным параметрам объекта управления и выбираемым параметрам устройства управления.

Введение

Настоящее исследование посвящено актуальным проблемам построения робастно устойчивых систем управления динамическими объектами, с неопределёнными параметрами, с подходом к построению систем управления в классе структурно – устойчивых отображений, позволяющих увеличить потенциал робастной устойчивости. Исследование робастной устойчивости базируется на новом подходе, полученном из геометрической интерпретации теоремы Ляпунова [1, 2]. Функция Ляпунова синтезируется в форме вектор – функции, антиградиент которой задается компонентами вектора скорости системы в форме тензора.

I. Анализ устойчивости системы управления

Рассмотрим систему управления с одним входом и одним выходом, описываемую уравнением состояния.

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t). \qquad (1)$$

Закон управления задан в форме суммы трехпараметрических структурно – устойчивых отображений (катастрофа эллиптическая омбилика).

$$u(t) = -x_2^3 + 3x_2x_1^2 - k_{12}(x_1^2 + x_2^2) + k_2x_2 + k_1x_1 -$$
$$-x_4^3 + 3x_4x_3^2 - k_{34}(x_3^2 + x_4^2) + k_4x_4 + k_3x_3 -, \ldots, -$$
$$-x_n^3 + 3x_nx_{n-1}^2 - k_{n-1,n}(x_{n-1}^2 + x_n^2) + k_nx_n +$$
$$+k_{n-1}x_{n-1}. \qquad (2)$$

В развернутой форме система (1) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ \cdots = \cdots \\ \dot{x_{n-1}} = x_n \\ \dot{x_n} = b_n[3x_2x_1^2 - x_2^3 - k_{12}(x_1^2 + x_2^2) + \\ +(k_1 - a_n)x_1 + (k_2 - a_{n-1})x_2 + \\ +3x_4x_3^2 - x_4^3 - k_{34}(x_3^2 + x_4^2) + \\ +(k_3 - a_{n-2})x_3 + (k_4 - a_{n-3})x_4 +, \\ \cdots, +3x_nx_{n-1}^2 \\ -x_n^3 - k_{n-1,n}(x_{n-1}^2 + x_n^2) \\ +(k_{n-1} - a_2)x_{n-1} + (k_n - a_1)x_n]. \end{cases} \qquad (3)$$

Установившиеся состояния системы (3) будут определены решением уравнений:

$$\begin{cases} x_{2s} = 0, x_{3s} = 0, \cdots, x_{ns} = 0 \\ 3x_{2s}x_{1s}^2 - x_{2s}^3 - k_{12}(x_{1s}^2 + x_{2s}^2) + \\ +(k_1 - a_n)x_{1s} + (k_2 - a_{n-1})x_{2s} + \\ +3x_{4s}x_{3s}^2 - x_{4s}^3 - k_{34}(x_{3s}^2 + x_{4s}^2) + \\ +(k_3 - a_{n-2})x_{3s} + (k_4 - a_{n-3})x_{4s} +, \\ \cdots, +3x_{ns}x_{n-1,s}^2 - k_{n-1,n}(x_{n-1,s}^2 + x_{ns}^2) - \\ -x_{ns}^3 + (k_{n-1} - a_2)x_{n-1,s} + \\ +(k_n - a_1)x_{ns} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Из (4) можно получить стационарное состояние, определяемое тривиальным решением системы (3):

$$x_{1,s} = 0, x_{2,s} = 0, \cdots, x_{n,s} = 0. \qquad (5)$$

Устойчивости стационарных состояний (5) системы (3) будем исследовать на основе предложенного подхода методом функции Ляпунова. Рассмотрим устойчивость стационарного состояния (5). Для этого обозначим компоненты вектора антиградиента компонентами вектор – функции Ляпунова.

Полная производная по времени от вектор – функции Ляпунова будет равна:

$$\frac{dV}{dt} = -x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_n^2 -$$
$$-b_n^2[k_{12}x_1^2 - 3x_2x_1^2 - (k_1 - a_n)x_1]^2 -$$
$$-b_n^2[x_2^3 + k_{12}x_2^2 - (k_2 - a_{n-1})x_2]^2 -$$
$$-, \cdots, -$$
$$-b_n^2[k_{n-1,n}x_{n-1}^2 - 3x_nx_{n-1}^2 - (k_{n-1} - a_2)x_{n-1}]^2 -$$
$$-b_n^2[x_n^3 + k_{n-1,n}x_n^2 - (k_n - a_1)x_n]^2. \qquad (6)$$

Из (6) получаем, что полная производная по времени от вектор – функции Ляпунова будет знакоотрицательной функцией, следовательно, достаточное условие асимптотической устойчивости системы (3) относительно стационарного состояния (5) выполняется. По компонентам вектора градиента вектор – функции Ляпунова строим компоненты вектор – функции Ляпунова. Функцию Ляпунова в скалярной форме можно представить в виде:

$$V(x) = \frac{1}{3}b_nk_{12}x_1^3 - b_nx_2x_1^3 - \frac{1}{2}b_n(k_1 - a_n)x_1^2 +$$
$$+\frac{1}{4}b_nx_2^4 + \frac{1}{3}b_nk_{12}x_2^3 - \frac{1}{2}b_n(k_2 - a_{n-1} + \frac{1}{b_n})x_2^2 +$$
$$+ \cdots + \frac{1}{3}b_nk_{n-1,n}x_{n-1}^3 - b_nx_nx_{n-1}^3 -$$
$$-\frac{1}{2}b_n(k_{n-1} - a_2 + \frac{1}{b_n})x_{n-1}^2 + \frac{1}{4}b_nx_n^4 +$$
$$+\frac{1}{3}b_nk_{n-1,n}x_n^3 - \frac{1}{2}b_n(k_n - a_1 + \frac{1}{b_n})x_n^2. (7)$$

Условия положительной или отрицательной определенности функций (7) не очевидны, поэтому воспользуемся леммой Морса из теорий катастроф [3, 4] для ее представления в квадратичной форме. По лемме Морса функцию Ляпунова (7) локально в окрестности стационарного состояния можем представить в виде квадратичной формы:

$$V(x) = -b_n(k_1 - a_n)x_1^2 - b_n(k_2 - a_{n-1} + \frac{1}{b_n})x_2^2 -$$
$$-b_n(k_3 - a_{n-2} + \frac{1}{b_n})x_3^2 - \cdots -$$
$$-b_n(k_{n-1} - a_2 + \frac{1}{b_n})x_{n-1}^2 - b_n(k_n - a_1 + \frac{1}{b_n})x_n^2. \quad (8)$$

Необходимое условие устойчивости стационарного состояния (5) будет определяться системой неравенств при $b_n > 0$:

$$\begin{cases} k_1 - a_n < 0, \\ k_2 - a_{n-1} + \frac{1}{b_n} < 0, \\ k_3 - a_{n-2} + \frac{1}{b_n} < 0, \\ \cdots, \\ k_{n-1} - a_2 + \frac{1}{b_n} < 0, \\ k_n - a_1 + \frac{1}{b_n} < 0. \end{cases} \qquad (9)$$

II. Заключение

Система управления, построенная в классе трехпараметрических структурно – устойчивых отображений, для которого истинно существование стационарного состояния (5), является устойчивым при изменении неопределенных параметров объекта в области (9). Концепция построения системы управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости является новым научным направлением и базируется на результатах теории катастроф. Уравнения состояния системы путем выбора закона управления представляется в форме структурно – устойчивых отображений, который имеет несколько устойчивых стационарных состояний. Они одновременно не существуют. При потере устойчивости одного стационарного состояния появляются другие устойчивые состояния, в зависимости от изменения неопределенных параметров системы. При этом нелинейная функция катастроф распознает и переключает систему из одной структуры на другую. Для исследования робастной устойчивости этих систем разрабатывается новый градиентно – скоростной метод вектор – функции Ляпунова.

1. Beisenbi M. A., Abdrakhmanova L. G. Research of dynamic properties of parameter structurally stable maps by Lyapunov function. //International Conference on Computer, Network and Communication Engineering (ICCNCE 2013). – Published by Atlantis Press, 2013. – P. 201–203.
2. Барбашин, Е. А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 225 с.
3. Гилмор Р., Прикладная теория катастроф. В 2 – х томах, Т.1. – М.: Мир, 1984.
4. Томпсон Дж., Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.