

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра сетей и устройств телекоммуникаций

А.А. Борискевич, О.В. Холев, В.Ю. Цветков

СЖАТИЕ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТНОГО И ФРАКТАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
к лабораторной работе по дисциплине
«Цифровая обработка речи и изображений»
для студентов специальности «Сети телекоммуникаций»
дневной формы обучения

Минск 2004

УДК 621.391.23 (075.8)

ББК 32.811.3 я 73

Б 82

Борискевич А.А.

Б 82 Сжатие речевых сигналов на основе вейвлетного и фрактального преобразований: Метод. пособие к лаб. работе по дисц. «Цифровая обработка речи и изображений» для студ. спец. «Сети телекоммуникаций» дневн. формы обуч. / А.А. Борискевич, О.В. Холев, В.Ю. Цветков. – Мн.: БГУИР, 2004. – 35 с.: ил.
ISBN 985-444-701-4

В данном методическом пособии рассмотрены вопросы спектрального анализа и сжатия речевых сигналов на основе дискретного вейвлет-преобразования и фрактального преобразования. При сжатии речевого сигнала используются вейвлеты Добеши с 4-го по 40-й порядок и доменно-ранговое сопоставление. Сведения, представленные в настоящем пособии, могут быть использованы для решения задач обработки и защиты речевых сигналов.

УДК 621.391.23 (075.8)

ББК 32.811.3 я 73

ISBN 985-444-701-4

© Борискевич А.А., Холев О.В.,
Цветков В.Ю., 2004
© БГУИР, 2004

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучение вопросов спектрального анализа и сжатия речевых сигналов на основе вейвлет-преобразования и фрактального преобразования.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Введение

Поскольку речевой сигнал представляет собой нестационарный случайный процесс, то для его обработки целесообразно применять методы вейвлет-анализа, позволяющие разложить сигнал по функциям, локализованным как в частотной, так и во временной области. В силу этого алгоритмы вейвлет-анализа могут эффективно выделять временные и частотные особенности речевого сигнала.

Вейвлетом называется некоторая функция, хорошо локализованная (т.е. сосредоточенная в небольшой окрестности некоторой точки и резко убывающая до нуля по мере удаления от нее) как во временной, так и в частотной области. Эти функции могут быть симметричными и несимметричными. Некоторые функции имеют аналитическое выражение, другие – быстрый алгоритм вычисления связанного с ними вейвлет-преобразования. Термин вейвлет (wavelet), введенный впервые Морле (J. Morlet), образован из двух частей – корня wave (волна) и уменьшительного суффикса – let. Таким образом, непосредственный перевод звучит как маленькая, или короткая волна. Малость относится к условию, что эта функция имеет конечную длину (компактный носитель). Волна относится к условию, что функция колебательная (осциллирующая). К вейвлету можно применить две операции: сдвиг, т.е. перемещение области его локализации во времени; масштабирование (растяжение или сжатие), т.е. перемещение области его локализации по частоте. Использование этих операций, с учетом свойства локальности вейвлета в частотно-временной области, позволяет анализировать данные на различных масштабах и точно определять положение их характерных особенностей во времени.

Вейвлеты обладают существенными преимуществами по сравнению с преобразованием Фурье, потому что с их помощью можно анализировать кратковременные локальные особенности сигналов, например, короткие всплески или провалы, разрывы и ступеньки и т.д. Уникальные свойства вейвлетов позволяют сконструировать базис, в котором представление данных может выражаться небольшим количеством ненулевых коэффициентов. Это свойство делает вейвлеты привлекательными для сжатия данных, в том числе видео- и аудиоинформации. Вейвлет-преобразование можно представить как один из методов первичной обработки сигнала для повышения эффективности его сжатия. Непосредственно сжатие выполняется после этой предобработки классическими методами. При этом сжатие выполняется для коэффициентов вейвлет-разложения сигнала, а его реконструкция по этим коэффициентам производится на этапе восстановления (декомпрессии). Сжатие вейвлет-разложения сигнала более эффективно, чем сжатие исходного сигнала.

Один из перспективных методов сжатия речевых сигналов основан на использовании дискретного вейвлет-преобразования и фрактального преобразования. Фрактально-вейвлетное преобразование пытается объединить самое лучшее из двух подходов: вейвлет-представления сигналов и фрактального преобразования.

Слово фрактал образовано от латинского *fractus*, от которого происходят английские термины *fraction*, *fractional* - дробь, дробный. Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Фрактал - это грубая или фрагментированная геометрическая форма, которая может быть разделена на части, каждая из которых, по крайней мере приблизительно, уменьшенная копия целого. Одним из основных свойств фракталов является самоподобие, т.е. когда форма фрактальных объектов не изменяется в геометрическом или статистическом смысле при изменении масштаба. Это свойство резко отличает фракталы от объектов классической геометрии, которые упрощаются при увеличении их изображения. В то время как фракталам присуща внутренняя бесконечность, т.е. при увеличении масштаба изображения фрактала увеличивается число невидимых деталей.

1.2. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

1.2.1. Интегральное вейвлет-преобразование

Важнейшим средством спектрального анализа непериодических сигналов является интегральное преобразование Фурье, которое вычисляется как скалярное произведение сигнала $s(t)$ с комплексными экспонентами или синусоидами $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1)$$

где $S(\omega)$ – преобразование Фурье или спектральная функция сигнала $s(t)$.

Из (1) видно, что спектральный коэффициент вычисляется путем умножения временного сигнала $s(t)$ на комплексную синусоиду с частотой ω и интегрирования в пределах всего времени. Чтобы преобразование было применимо, сигнал $s(t)$ должен удовлетворять следующим требованиям: должны выполняться условия Дирихле и сигнал должен быть абсолютно интегрируемым, т.е. существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$. Подобные условия значительно сужают класс допустимых сигналов.

С практической точки зрения непрерывное преобразование Фурье имеет ряд недостатков. Во-первых, для получения преобразования требуется вся временная информация. Поскольку частота сигнала обратно пропорциональна его продолжительности, то для получения высокочастотной информации с достаточной точностью важно извлекать ее из относительно малых временных интервалов, а не из всего сигнала, и наоборот, низкочастотную спектральную информацию – извлекать из относительно широких временных интервалов сигнала. Во-вторых, частотное наполнение сигнала известно, но появление частотных составляющих во времени не известно. Таким образом, данное

преобразование позволяет увидеть частотное наполнение сигналов, но не позволяет определить, в какой момент времени существует та или иная частота. Поэтому преобразование Фурье непригодно для анализа нестационарных сигналов, в которых в разные моменты времени присутствуют различные частотные компоненты. В стационарных же сигналах все частотные компоненты присутствуют в течение всего времени, т.е. различные частоты имеются на всем временном интервале. Преобразование Фурье может использоваться для анализа нестационарных сигналов, когда важна лишь частотная информация, а время существования спектральных составляющих неважно.

Для частотно-временной локализации структурных элементов сигнала используется кратковременное, или оконное, преобразование Фурье:

$$S(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} w(t-b) dt, \quad (2)$$

где $S(\omega, b)$ – преобразование Фурье сигнала $s(t)$, умноженного на оконную (локальную) функцию $w(t-b)$.

Таким образом, $S(\omega, b)$ – разложение сигнала по семейству функций $w(t-b)e^{i\omega t}$, образованному из единственной функции с помощью переносов b по времени и переносов ω по частоте. Преобразование становится зависимым от времени, и в результате получается частотно-временное представление сигнала. Данный подход позволяет определить факт присутствия в сигнале любой частоты и интервал ее присутствия. Это значительно расширяет возможности метода по сравнению с классическим преобразованием Фурье, но существуют и определенные недостатки. Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, при использовании данного преобразования нельзя утверждать факт наличия частоты ω_0 в сигнале в момент времени t_0 – можно лишь определить, что определенный спектр частот (ω_1, ω_2) присутствует в интервале (t_1, t_2). Таким образом, в результате спектрального анализа можно определить только временные интервалы, в течение которых в сигнале существуют полосы частот. Эта проблема называется проблемой разрешения. Данная проблема связана с шириной используемой оконной функции. Эта ширина называется еще носителем функции. Если окно достаточно узкое, то говорят о компактном носителе. Узкое окно обеспечивает лучшее временное разрешение, а широкое – лучшее частотное. Проблема состоит в том, что приходится выбирать окно с фиксированной шириной для анализа всего сигнала, тогда как разные его участки могут требовать применения разных окон.

Интегральное вейвлет-преобразование дает сходное частотно-временное описание с некоторыми существенными отличиями и представляет собой скалярное произведение сигнала $s(t)$ и двухпараметрической вейвлет-функции $\psi_{a,b}(t)$ заданного вида. Причем любая вейвлет-функция $\psi_{a,b}(t)$ данного семейства получается из единственной материнской функции ψ путем растяжения/сжатия и сдвига $\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Термин «материнский»

означает, что функции с различной шириной носителя, используемые в преобразовании, порождаются одной базовой функцией – материнским вейвлетом. Интегральное вейвлет-преобразование функции $s(t)$ имеет вид

$$S_{\psi}(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi_{a,b}(t)dt, \quad (3)$$

где a – параметр временного масштаба, определяемый как (*1/частота*) и отвечающий за ширину вейвлета, b – параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси времени.

Нормализация ψ на множитель $|a|^{-1/2}$ гарантирует, что интегральная энергия каждого вейвлета $\psi_{a,b}(t)$ не зависит от a . Для вейвлет-преобразования анализирующая функция $\psi_{a,b}(t)$ получается из одной материнской (или порождающей) функции $\psi(t)$, причем большие значения a соответствуют низким частотам, малые – высоким. Двухпараметрическая функция $S_{\psi}(a,b)$ дает информацию об изменении относительного вклада компонент разного масштаба во времени и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования. Масштаб является в определенном смысле аналогом частоты в Фурье-преобразовании. Однако в отличие от него каждому значению масштаба соответствует бесконечное количество сдвинутых друг относительно друга локализованных во времени вейвлет-функций. Довольно грубо можно представить вейвлеты как некоторые волновые функции (модулированные импульсами синусоиды), способные осуществлять преобразование Фурье не по всей временной оси, а локально по месту своего расположения. Для этого, кроме изменения средней частоты, маленькие волны должны перемещаться к тому месту сигнала, в котором должно осуществляться локальное преобразование Фурье.

Сущность интегрального вейвлет-преобразования заключается в разбиении сигнала $s(t)$ на масштабированные и сдвинутые по оси времени версии материнского вейвлета и вычислении коэффициентов корреляции участков исходного сигнала $s(t)$ и версий вейвлета $\psi_{a,b}(t)$ на заданном масштабе. В результате получается набор коэффициентов, показывающих, насколько поведение сигнала в данный момент времени похоже на поведение вейвлета на данном масштабе, т.е. вейвлет-коэффициенты отражают близость сигнала к вейвлету данного масштаба. Чем ближе вид анализируемого сигнала в окрестности данного момента времени к виду вейвлета, тем большую абсолютную величину имеет соответствующий коэффициент. Отрицательные коэффициенты показывают, что сигнал похож на зеркальное отражение вейвлета. Таким образом, данное представление зависит от параметра масштаба a и вида функции $\psi_{a,b}(t)$, причем вейвлет-коэффициенты содержат информацию об анализирующем вейвлете и анализируемом сигнале.

На рис.1,б представлено разбиение частотно-временной плоскости для оконного преобразования Фурье, а на рис.2,б – для интегрального вейвлет-преобразования.

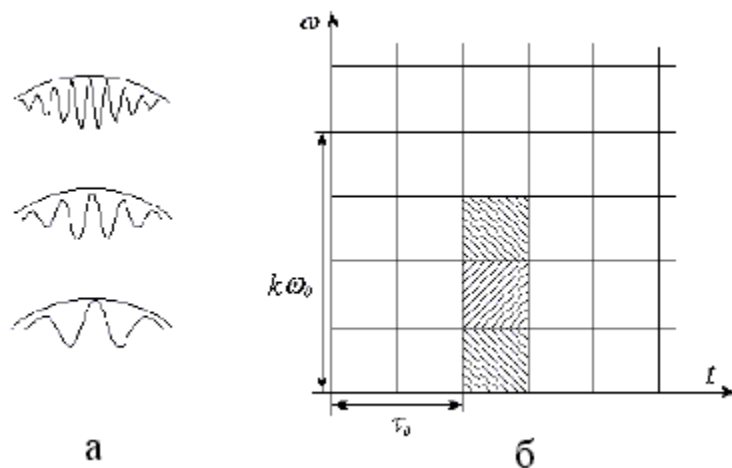


Рис.1. Оконное преобразование Фурье в плоскости время-частота:
 а – пример базисных функций $e^{jk\omega_0 t} w(t - \tau_0)$ при сдвиге τ_0 и $k=1,2,3$ (действительная часть); б – условное изображение базисных функций при заданных k (заштрихованные прямоугольники)

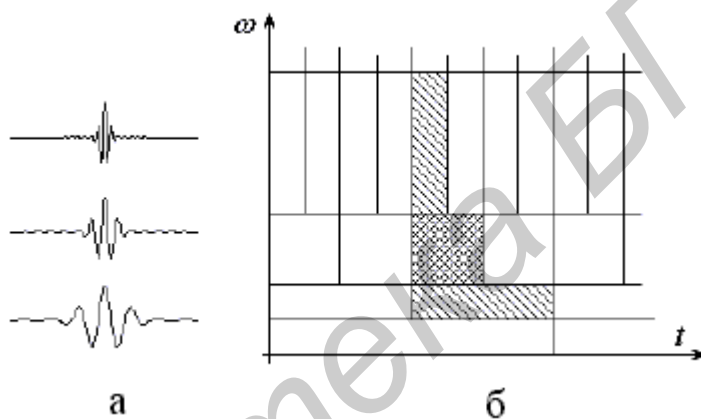


Рис.2. Вейвлет-преобразование в плоскости время-частота:
 а – пример базисных вейвлет-функций при различных масштабах: $(a=2^k, k=0,1,2)$;
 б – условное изображение вейвлет-функций на заданном масштабе (заштрихованные прямоугольники)

В соответствии с принципом неопределенности сужение окна анализа во временной области вызывает расширение его в частотной. Таким образом, площадь окна (прямоугольника) остается постоянной. При оконном преобразовании Фурье окно анализа строго локализовано по времени и частоте, а при непрерывном вейвлет-преобразовании локализация изменяется в зависимости от масштаба. Деление t и b на масштабный коэффициент позволяет сохранить относительную плотность расположения базисных функций по оси t при расширении/сжатии самой функции и при $b/a=const$. Каждый прямоугольник (рис.2) соответствует значению вейвлет-преобразования на частотно-временной плоскости. Все точки, принадлежащие одному прямоугольнику, представляются одним значением вейвлет-преобразования. Прямоугольники разной ширины и высоты имеют одинаковую площадь. На нижних частотах высота прямоугольников меньше (что соответствует лучшему разрешению по частоте), а ширина прямоугольников больше (что соответствует худшему разрешению по времени). На высоких частотах разрешение по времени улучшается, а по частоте - ухудшается. Таким образом, вейвлет-

преобразование позволяет получить хорошее разрешение по времени (плохое по частоте) на высоких частотах и хорошее разрешение по частоте (плохое по времени) на низких частотах. Этот подход становится особенно эффективным, когда сигнал имеет высокочастотные компоненты короткой длительности и протяженные низкочастотные компоненты. В случае оконного преобразования Фурье частотно-временная плоскость состоит из прямоугольников одинакового размера.

Из (2) и (3) видно, что оба преобразования представляют скалярное произведение $s(t)$ и семейства функций, снабженных двумя индексами, $w(t-b)e^{i\omega t}$ и $\psi_{a,b}(t)$. Когда a меняет свои значения, то $\psi_{a,0}(t)$ меняет свою частоту. Причем большие значения параметра $|a|$ соответствуют малым частотам или большому масштабу, а малые параметры $|a|$ соответствуют высоким частотам или мелкому масштабу. Различие между вейвлет-преобразованием и оконным преобразованием Фурье состоит в форме анализирующих функций $\psi_{a,b}(t)$ и $w_{\omega,b}(t) = w(t-b)e^{i\omega t}$. Все функции $w_{\omega,b}(t)$, вне зависимости от значения ω , имеют одну и ту же ширину во времени. Наоборот, все $\psi_{a,b}(t)$ имеют ширину во времени, соответствующую частоте ω : высокочастотные $\psi_{a,b}(t)$ являются узкими, низкочастотные $\psi_{a,b}(t)$ – широкими.

Важным различием является то, что в случае вейвлет-преобразования в наиболее общей постановке не конкретизируется не только сам порождающий вейвлет, но и то, какие его копии участвуют в разложении. Таким образом, термин вейвлет-преобразование является обозначением целого класса разложений. Преобразование Фурье является разложением по фиксированной системе функций.

При базисных параметрах (a,b) обратное вейвлет-преобразование имеет вид

$$s(t) = C_{\psi}^{-1} \iint S_{\psi}(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2}, \quad (4)$$

где $C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \exp(-i\omega t) dt |\omega|^{-1} d\omega < \infty$ – нормализующий коэффициент (аналогичный коэффициенту $(2\pi)^{1/2}$, нормализующему преобразование Фурье), зависящий от используемой вейвлет-функции.

Условие конечности константы C_{ψ} ограничивает класс функций $\psi(t)$, которые могут быть использованы в качестве базисных вейвлетов. Из определения C_{ψ} следует, что Фурье-образ $\psi(\omega)$ должен быть равен нулю в начале координат $\omega=0$ и, следовательно, должен быть равен нулю по крайней мере нулевой момент:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (5)$$

Условие (5) не накладывает много ограничений, так как может быть найдено множество вейвлет-функций, удовлетворяющих (5).

Признаками, которыми обязательно должна обладать функция, чтобы быть вейвлетом, являются следующие.

Локализация. Вейвлет-преобразование в отличие от преобразования Фурье использует локализованную базисную функцию. Вейвлет должен быть локализован и во времени, и по частоте. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия $|\psi(t)| \leq C(1 + |t|)^{-1-\varepsilon}$ и $|\psi(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1-\omega}$, где $\varepsilon > 0$.

Нулевое среднее. Среднее значение вейвлета должно быть равным нулю (5), т.е. значения функции быстро сходятся к нулю при увеличении абсолютного значения аргумента. Это условие является общим для всех вейвлетов. Оно называется условием осцилляций, или знакопеременности. Налагаемое на функцию $\psi(t)$ условие (5) означает, что $\psi(\omega = 0) = 0$. В силу чего Фурье-образ смещен по оси времени и будет расположен вокруг некоторой ненулевой частоты ω_0 , которую можно рассматривать как среднюю круговую или центральную частоту вейвлета, которая определяет положение пика Фурье-образа вейвлета на оси частот.

В частотной области спектры многих вейвлетов напоминают всплеск, пик которого приходится на частоту ω_0 . Если приближенно трактовать вейвлет как модулированную синусоиду, то ее частота и будет средней частотой вейвлета.

Часто для практических приложений оказывается необходимым, чтобы не только нулевой, но и все первые p моментов были равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t) dt = 0, \quad (6)$$

где $p = 0, 1, \dots, M-1$ (M – число нулевых моментов). Это условие ортогональности вейвлета полиномам до степени $M-1$, определяющее его гладкость и знакопеременность. Такой вейвлет называется вейвлетом p -го порядка. Он позволяет анализировать более тонкую структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся (полиномиальные) его составляющие сигнала вида $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{M-1} t^{M-1}$. Порядок применяемых вейвлетов зависит от формы исходного сигнала: в случае наличия сильных флуктуаций лучше брать низкий порядок вейвлета, для более гладких сигналов следует применять вейвлеты высокого порядка. Выбор порядка вейвлета определяется гладкостью сигнала, требуемым уровнем сжатия и стоимостью вычислений, которая растет с ростом порядка.

Ограниченность. Вейвлет должен быть достаточно быстро убывающей функцией временной переменной:

$$\int |\psi(t)|^2 dt < \infty. \quad (7)$$

Автомодельность базиса. Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования является его самоподобие. Все вейвлеты данного семейства $\psi_{a,b}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и базисный вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и сдвигов.

Основной при работе с вейвлет-преобразованием является проблема выбора наиболее подходящего вейвлета. Выбор конкретного семейства вейвлетов диктуется прикладными задачами и типом информации о сигнале, который требуется максимально проявить (распознать). Не существует каких-то жёстких правил, но лучше всего выбирать вейвлет таким образом, чтобы он принадлежал такому же классу функций, что и анализируемый сигнал. Если исходную функцию можно аппроксимировать полиномом, то количество нулевых моментов вейвлета должно примерно равняться степени полинома. В качестве возможных критериев для выбора конкретного вейвлета можно использовать число нулевых моментов вейвлета и число вейвлет-коэффициентов, превышающих некоторое пороговое значение.

Число нулевых моментов более важно для достижения более высокого коэффициента сжатия сигнала, который при большом числе нулевых моментов увеличивается. Гладкость вейвлета становится важнее при обратном преобразовании, когда необходимо сгладить ошибки, вызванные сжатием (отбрасыванием малых вейвлет-коэффициентов).

Располагая вейвлет-спектром, можно рассчитать полную энергию сигнала

$$E_s = \int s^2(t)dt = \iint S_\psi^2(a,b) \frac{dad b}{a^2} \quad (8)$$

и глобальный спектр энергии - распределение полной энергии по масштабам (скейлограмму вейвлет-преобразования)

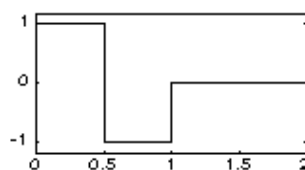
$$E_s(a) = \int S_\psi^2(a,b)db \quad (9)$$

Скейлограмма соответствует спектру мощности Фурье-преобразования сигнала, сглаженному на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета: $E_s(a) = \int |\hat{s}(\omega)\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega$, где знак ^ обозначает Фурье-образ функции.

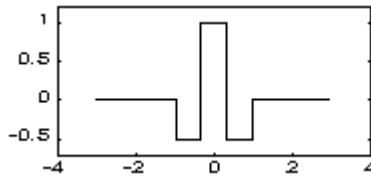
Интегральное вейвлет-преобразование обладает следующими недостатками. Во-первых, оно дает избыточную информацию при анализе сигналов из-за перекрытия носителей вейвлета, во-вторых, оно может быть проведено аналитически лишь для простейших функций, а его компьютерное вычисление требует больших временных и вычислительных ресурсов. Поэтому в приложениях обычно используется дискретный вариант, который при специальном выборе базисных функций может быть выполнен достаточно эффективно и без дополнительных затрат памяти.

Примеры часто используемых материнских вейвлетов

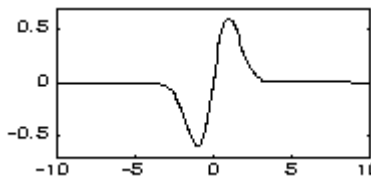
$$1. \text{ HAAR-вейвлет: } \psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$$



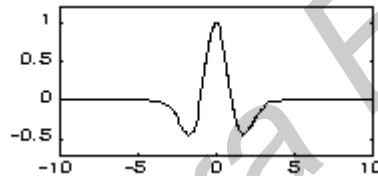
2. FHAT-вейвлет (French hat):
$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



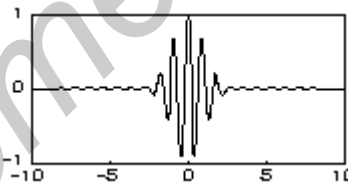
3. Wave-вейвлет: $\psi(t) = t \exp(-t^2/2)$



4. МНАТ-вейвлет (Mexican hat): $\psi(t) = (1-t^2) \exp(-t^2/2)$



5. Вейвлет Морле (комплексный базис): $\psi(t) = \exp\left(ik_0 r - \frac{r^2}{2}\right)$



1.2.2. Дискретизированное (дискретное избыточное) вейвлет-преобразование

Для лучшей частотно-временной локализации $\psi(t)$ должен быть отличен от нуля только в конечном интервале, называемом компактным носителем. Параметры масштаба a и сдвига b меняются непрерывно, и поэтому множество базисных функций избыточно. Для устранения этого недостатка необходима дискретизация значений a и b при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. В связи с этим для a берутся целые (отрицательные и положительные) степени фиксированного параметра $a_0 > 1$, т.е. $a = a_0^m$, причем разные значения m соответствуют разной ширине вейвлетов. В этом случае дискретизация параметра сдвига b должна зависеть от m : узкие (высокие частоты) вейвлеты сдвигаются малыми шагами, чтобы покрыть весь временной спектр, в то время как более широкие (низкие частоты) вейвлеты сдвигаются большими шагами. Следовательно, $b = nb_0 a_0^m$, где $b_0 > 0$; m, n -

целые. Возможен произвольный выбор параметра b_0 , например, $b_0 = 1$. С увеличением масштаба увеличивается размер шага сдвига, так как при анализе с большим масштабом детали не так важны.

Для дискретных значений a и b вейвлет-функции представляются в виде

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - n) \quad (10)$$

и образуют ортонормированный базис для квадратично интегрируемых функций на действительной оси. Свойство ортогональности позволяет получать независимую информацию на разных масштабах. Нормируемость обеспечивает сохранение величины информации на разных этапах преобразования.

Прямое дискретизированное вейвлет-преобразование сводится к вычислению коэффициентов $S_{\psi_{m,n}}$ на основе дискретизации непрерывного вейвлет-преобразования (4):

$$S_{\psi_{m,n}} = d_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m/2} t - n) s(t) dt. \quad (11)$$

Здесь $S_{\psi_{m,n}} = d_{m,n}$ – детализирующие коэффициенты для вейвлет-декомпозиции сигнала уровня m . Восстановление $s(t)$ из последовательности $S_{\psi_{m,n}}$ возможно в том случае, если существуют числа $A > 0$ и $B < \infty$ такие, что

$$A \|s(t)\|^2 \leq \sum_{m \in Z} \sum_{n \in Z} |d_{m,n}|^2 \leq B \|s(t)\|^2 \quad (12)$$

для всех $s(t) \in L^2(R)$, где $L^2(R)$ означает множество функций, интегрируемых с квадратом в интервале R ; $R = (-\infty, +\infty)$ – бесконечный интервал определения значений независимой переменной; $Z = (\dots -1, 0, 1, 2, \dots)$ – множество целых чисел. Из (12) следует, что хотя реконструкция $s(t)$ из ее вейвлет-коэффициентов может не совпадать точно с $s(t)$, она будет близка к ней в смысле обеспечения минимума средней квадратической погрешности восстановления. Из (4) и (11) следует выражение для обратного дискретизированного вейвлет-преобразования

$$s(t) = C_{\psi}^{-1} \sum_{m \in Z} \sum_{n \in Z} d_{m,n} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m/2} t - n). \quad (13)$$

Если базисные функции нормализованы таким образом, что $C_{\psi} = 1$, то окончательная формула реконструкции сигнала записывается в виде $s(t) = \sum_{m \in Z} \sum_{n \in Z} d_{m,n} \psi_{m,n}(t)$.

Дискретизированное вейвлет-преобразование наиболее эффективно в задачах сжатия сигналов и изображений, задаче очистки сигнала от шумов. Непрерывное вейвлет-преобразование в основном используется для анализа переходных процессов, обнаружения резких изменений в сигнале и исследования нестационарностей.

Особой разновидностью непрерывного вейвлет-преобразования является диадное (dyadic) вейвлет-преобразование ($a_0 = 2$), которое часто называют дискретным и с помощью которого согласно (13) при $j = -m/2$; и $n = k$ любой квадратично-интегрируемый сигнал $s(t) \in L^2(R)$ может быть представлен в виде суммы

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k). \quad (14)$$

Важной особенностью подобной дискретизации является исключение перекрытия носителей вейвлетов, т.е. устранение избыточности в ходе вейвлет-преобразования. Выбор знака + или – при степени a_0 зависит от выбора исходного размера вейвлета – растянутый или сжатый. Если растягиваем (сжимаем) материнский вейвлет $\psi(t)$ относительно сигнала в процессе преобразования, то выбирается + (–) при степени a_0 . Индекс j является параметром масштаба и называется уровнем разрешения, индекс k является параметром сдвига. В частности, коэффициенты d_{jk} несут информацию о $s(t)$ в окрестности частоты $1/2^j$ и моменты времени $2^{-j}k$.

Частичную сумму ряда (14)

$$s^{j_0}(t) = \sum_{j=-\infty}^{j_0-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$$

называют приближением сигнала $s(t)$ с разрешением j_0 . Сигнал можно представить в виде суммы начального приближения (т.е. приближение с некоторым начальным разрешением j_0) и оставшихся членов ряда (14):

$$s(t) = s^{j_0}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k). \quad (15)$$

Такое разложение обеспечивает многомасштабный анализ $s(t)$. Первый член ряда является грубым представлением сигнала. При добавлении к нему членов ряда степень детализации увеличивается, т.е. увеличивается разрешение, с которым представлен сигнал.

Основной задачей теории вейвлет-преобразования является доказательство того, что прямое и обратное вейвлет-преобразование способно обеспечивать реконструкцию сигнала, причем точную или хотя бы приближенную, локальную или для сигнала в целом на заданном промежутке времени. В общем случае вейвлет-преобразование на основе детализирующей ортогональной вейвлет-функции $\psi(t)$ способно восстановить, по крайней мере, тонкие детали временной структуры сигнала $s(t)$. Для восстановления полной формы сигнала необходимо прибегать к применению еще одной временной функции $\varphi(t)$, называемой масштабирующей (аппроксимирующей) или скейлинг-функцией (отцовским вейвлетом) с единичным значением интеграла ($\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$), определяющей грубое приближение (аппроксимацию) и порождающей коэффициенты аппроксимации. Функции $\varphi(t)$ присущи далеко не всем вейвлетам, а только тем, которые относятся к ортогональным.

1.2.3. Кратномасштабное (многомасштабное) представление сигналов

Одна из основных идей вейвлет-представления сигналов заключается в разбивке приближения к сигналу на две составляющие: грубую (аппроксимирующую) и уточненную (детализирующую) с последующим их

уточнением итерационным методом. Каждый шаг такого уточнения соответствует определенному уровню декомпозиции и реставрации сигнала. Процесс декомпозиции дискретной последовательности значений в средние значения и детализирующие значения при различных масштабах называется кратномасштабным анализом. Вейвлет-преобразование является средством многомасштабного анализа, позволяющим рассматривать исследуемый сигнал с различными масштабами: через микроскоп, невооруженным взглядом, через бинокль. Подобное представление сигнала позволяет анализировать динамику изменения сигнала в зависимости от масштаба и взаимодействия событий на мелких масштабах, перерастающие в крупномасштабные. Кратномасштабное представление лежит в основе многих применений вейвлет-анализа и вейвлет-преобразований. Например, применительно к сигналам изображений оно означает представление изображений последовательностью образов с разной степенью их детализации.

Согласно теории многомасштабного анализа в качестве ортонормированного вейвлет-базиса $\{\phi_{j,k}, \psi_{j,k}\}$ используются вейвлет-функция $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ и скейлинг-функция $\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$. В этом случае материнский вейвлет $\psi(t)$ и скейлинг-функция $\phi(t)$ удовлетворяют соотношениям $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g(k) \rho(2t - k)$ и $\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h(k) \rho(2t - k)$, где $g(k)$ и $h(k)$ – коэффициенты, соответствующие импульсным характеристикам низкочастотного и высокочастотного фильтров, $2M$ – число, называемое компактным носителем и характеризующее ширину временного интервала, на котором скейлинг- и вейвлет-функции отличны от нуля, и имеют следующие нормировочные условия: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$.

В этом случае любая функция $s(t) \in L^2(R)$ полностью характеризуется ее коэффициентами аппроксимации $c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \phi_{j,k}(t) dt$ и детализирующими коэффициентами $d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{j,k}(t) dt$ и может быть представлена в виде суперпозиции вейвлетов и скейлинг-функций:

$$s(t) = s_{j_0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=j_0}^{\infty} d_{j,k} \psi(t), \quad (16)$$

где $s_{j_0}(t)$ и $s_k(t)$ – низкочастотная и высокочастотные компоненты сигнала соответственно; $j_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – выбранный начальный масштаб, который выбирается исходя из априорной информации о сигнале, а именно его продолжительности; $k = N/2^j$ – значения сдвига для сигнала, состоящего из $N = 2^n$ значений отсчетов.

Из (16) следует, что

$$s_{j_0}(t) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t), \quad (17a)$$

$$s_j(t) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (17б)$$

где $s_j(t)$ – высокочастотная компонента сигнала для произвольного разрешения j .

Коэффициенты разложения (вейвлет-коэффициенты) (17,а,б) определяются из условия ортогональности базисных функций с помощью следующих выражений:

$$c_{j_0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \phi_{j_0,k}(t) dt, \quad (18а)$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (18б)$$

Эти коэффициенты часто называют суммами (c) и разностями (d), связывая их со средними значениями и флуктуациями соответственно. Преобразование сигнала по формулам (18,а,б) называется анализом, а восстановление по формулам (17,а,б) – синтезом, который приводит к вычислению спектральных компонент в (16).

Сумма по k в (16) ограничена интервалом задания функции $s(t)$. Первая сумма в (16) со скейлинг-функцией $\phi_{j,k}$ содержит средние значения $s(t)$ по диадным интервалам $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. Второй член содержит все флуктуации $s(t)$ на данном интервале. Эти флуктуации проистекают из всех меньших интервалов, заключенных внутри данного и соответствующих большим значениям параметра масштабирования j . На низшем уровне разрешения j_0 с широкими интервалами первая сумма содержит всего один член, дающий общее усредненное взвешенное значение сигнала $\langle s(t) \rangle = c_{j_0,k_0}$, где k_0 обозначает центр интервала. Вторая сумма в (16) показывает флуктуации на всех без исключения уровнях. На следующем уровне с более мелким разбиением $j_1 > j_0$ в первой сумме содержатся два члена, отвечающих за средние значения s в полуинтервалах с центрами, расположенными в k_1 и k_2 . Число членов во второй сумме уменьшается на единицу – исчезает член, который раньше показывал величину флуктуаций на половинном масштабе. Таким образом, число членов в каждой сумме зависит от выбранного уровня разрешения. На любом уровне детализации общее число членов в разложении остается неизменным и равным 2^J , где J – стартовое значение начала итерационного процесса приближения, задающее направление роста разрешения. Если J задает уровень детализации с наименьшими интервалами, тогда за наивысший уровень точной реконструкции сигнала принят сам сигнал. Чем больше номера коэффициентов, тем ближе реконструированный сигнал к оригиналу. Внизу на плоскости масштаб-время расположены коэффициенты с малыми номерами, дающие огрубленную картину сигнала, а вверху – с большими номерами, дающие детальную картину сигнала. На j -м уровне имеется (2^{J-j}) коэффициентов аппроксимации c и $(2^J - 2^{J-j})$ детализирующих коэффициентов d . Например, если $s(t)=1$, то все коэффициенты $d_{j,k}$ равны нулю, и остается только первая

сумма. Таким образом, форма функции задается ее флуктуациями вокруг среднего на всевозможных уровнях разрешения.

Подставляя выражения (18,а,б) в (17,а,б), получим следующие выражения:

$$s_{j_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \Phi_{j_0}(t-\tau) d\tau, \quad (19a)$$

$$s_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \Psi_j(t-\tau) d\tau, \quad (19б)$$

где $\Phi_{j_0}(t) = \sum_m \phi_{j_0}(m) \phi_{j_0}(m-t)$ и $\Psi_j(t) = \sum_m \psi_j(m) \psi_j(m-t)$ – ядра Дирихле

интегральных преобразований (18). Из (19,а,б) видно, что ядра Дирихле представляют собой импульсные отклики соответствующих фильтров: низкой частоты, выделяющего из сигнала $s(t)$ компоненту $s_{j_0}(t)$, и полосовых фильтров, выделяющих из сигнала высокочастотные компоненты. Выполняя преобразование Фурье этих ядер, получим $\hat{\Phi}_{j_0}(\omega) \approx |\phi_{j_0}(\omega)|^2$ и $\hat{\Psi}_j(\omega) \approx |\psi_j(\omega)|^2$.

Данные соотношения показывают, что форма частотной характеристики фильтров полностью определяется спектральными свойствами базисных функций. Как известно, в спектральном анализе для оценки интенсивности спектральных компонент важно, чтобы соседние частотные полосы не перекрывались. Этого можно достичь только тогда, когда частотные характеристики имеют форму прямоугольника. В наибольшей степени для этой цели подходят базисные функции, заданные на ограниченном множестве точек (базисы с компактным носителем) и многократно дифференцируемые. При этом компактность базисов минимизирует число вычислительных операций, а k -кратное дифференцирование гарантирует затухание частотной характеристики как $1/\omega^k$, т.е. степень дифференцируемости определяет крутизну фронтов полосовых фильтров спектрального анализа. Чем больше порядок вейвлетов, тем большее число раз они дифференцируемы. Вейвлеты Добеши с M нулевыми моментами имеют μM непрерывных производных, где при больших M имеем $\mu \approx 0.2$.

Метод вычисления вейвлет-коэффициентов на основе (18,а,б) требует провести большое количество операций (N^2). Коэффициенты вейвлет-разложения $d_{j,k}$ и $c_{j,k}$ могут быть посчитаны рекурсивно быстрее, чем с помощью вычисления интегралов (18,а,б). Если известны коэффициенты $c_{j,k}$ на масштабе j , тогда вейвлет-коэффициенты на масштабе $j+1$ могут быть вычислены по формулам быстрого вейвлет-преобразования

$$\begin{aligned} c_{j+1,k} &= \sum_n h_{n-2k} c_{j,n}, \\ d_{j+1,k} &= \sum_n g_{n-2k} c_{j,n}. \end{aligned} \quad (20)$$

Обычно предполагается, что значения исходного сигнала равняются коэффициентам $c_{0,k}$ на масштабе $j=0$: $s(t_k) = c_{0,k}$. Восстановить исходный сигнал можно с помощью следующей итерационной процедуры

$$s_{j,k} = \sum_n h_{k-2n} c_{j+1,n} + \sum_n g_{k-2n} d_{j+1,n}. \quad (21)$$

Для семейства ортонормальных вейвлетов коэффициенты h_k и g_k связаны между собой соотношением $g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}$, где $L = 2M$ – область определения базисных функций. Таким образом, коэффициенты g_k для вейвлетов получаются из коэффициентов h_k для скейлинг-функции путем перестановки их в обратном порядке и изменения знака у нечетных коэффициентов.

1.2.4. Дискретное вейвлет-преобразование

Вейвлеты, будучи функциями времени, имеют свое частотное представление или Фурье-образ. Частотное представление вейвлетов имеет важное значение и в определении фильтрующих свойств вейвлет-преобразований, и быстрого вейвлет-преобразования, основанного на пирамидальном алгоритме Малла (Mallat algorithm) и прореживании спектра вейвлетов по частоте. В соответствии с частотным подходом к вейвлет-преобразованиям частотная область вейвлетов может быть разбита на две составляющие – низкочастотную и высокочастотную. Таким образом, Фурье-образ $\psi(\omega)$ можно представить реализацией двух фильтров: низкочастотного и согласованного с ним высокочастотного фильтра. Их частота раздела равна половине частоты дискретизации сигнала. Низкочастотный фильтр дает частотный образ для аппроксимации (грубого приближения) сигнала, а высокочастотный фильтр – для его детализации.

Быстрое вейвлет-преобразование может быть реализовано в виде каскадного соединения низкочастотных и высокочастотных фильтров или пирамидального алгоритма Малла. В этом случае полосовой фильтр для каждого масштаба состоит из пары дополняющих друг друга фильтров низких и высоких частот, относящихся к классу квадратурных зеркальных фильтров. Особенностью этого класса фильтров является то, что фильтр высоких частот получается из соответствующего фильтра низких частот простой перестановкой его коэффициентов в обратном порядке и изменением знака половины из них (только четных или только нечетных).

Процесс субполосовой фильтрации исходного сигнала $s(n)$, состоящего из N отсчетов ($N = 2^J$, где J – число масштабов или число каскадирования фильтров), может быть представлен в матричной форме дискретного вейвлет-преобразования:

$$\vec{c}_j = H_j \vec{c}_{j-1}, \quad (22)$$

$$\vec{d}_j = G_j \vec{c}_{j-1}, \quad (23)$$

где $\vec{c}_j = (c_j(0), c_j(1), \dots, c_j(N/2^j - 1))$ и $\vec{d}_j = (d_j(0), d_j(1), \dots, d_j(N/2^j - 1))$ – векторы-столбцы выходов скейлинг-фильтра и вейвлет-фильтра для некоторого

j , состоящие из коэффициентов, характеризующих спектр сигнала $s(t)$ и

прореженных в два раза; $H_j = \begin{bmatrix} \vec{h}^T(1) \\ \vec{h}^T(2) \\ \vdots \\ \vec{h}^T(N/2^j) \end{bmatrix}_{(N/2^j)(N/2^{j-1})}$ и $G_j = \begin{bmatrix} \vec{g}^T(1) \\ \vec{g}^T(2) \\ \vdots \\ \vec{g}^T(N/2^j) \end{bmatrix}_{(N/2^j)(N/2^{j-1})}$

– матрицы преобразования размером $(N/2^j)(N/2^{j-1})$ на j -й итерации, представляющие собой наборы векторов-строк $\vec{h}^T(n)$ и $\vec{g}^T(n)$ и описывающие скейлинг- и вейвлет-фильтры соответственно; $\vec{h}^T(n)$ и $\vec{g}^T(n)$ – векторы-строки, состоящие из коэффициентов, дополненных нулевыми коэффициентами, для вейвлет-фильтров и скейлинговых фильтров соответственно; $j = 1, 2, \dots, J$. В качестве коэффициентов $c_j(n)$ на начальном значении масштаба $j = 0$ принимаются временные отсчеты исходного сигнала, т.е. $\vec{c}_0 = (c_0(0), \dots, c_0(N-1)) = (s(0), s(1), \dots, s(N-1))$ или $\{c_0(n)\}_{n=0}^{N-1} = \{s(kn)\}_{n=0}^{N-1}$. Итерационная процедура, описываемая выражениями (22) и (23), заканчивается при некотором значении $j = J$, которое выбирается исходя из априорной информации о сигнале, т.е. из его продолжительности. На первом шаге многошаговой итерационной процедуры производится обработка временных отсчетов сигнала $\{s(n)\}_{n=0}^{N-1}$, а на каждом последующем – соответствующих коэффициентов c_j . На первом шаге вейвлетные коэффициенты $\{d_1(n)\}_{n=1}^{N/2}$ сохраняются как конечный результат, а скейлинговые коэффициенты $\{c_1(n)\}_{n=1}^{N/2}$ используются в качестве исходных данных и рекурсивно обрабатываются вплоть до конечного масштаба J . В результате рекурсивного выполнения процедуры будем иметь один вектор коэффициентов $\{c_j(n)\}$, вычисленный на последнем масштабе, и набор векторов коэффициентов $\{d_j(n)\}_1^J$, вычисленных на предыдущих масштабах.

В качестве иллюстрации приведем следующий пример. Возьмем фильтр длиной $L = 4$, исходный сигнал длиной $N = 8$, а в качестве начального значения – $j=1$. Последовательность значений g_n получаем из h_n по формуле $g_n = (-1)^n h_{L-1-n}$, где L – длина вейвлет-фильтра.

Тогда операция матрично-векторного умножения может быть представлена в виде

$$\begin{bmatrix} c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \vec{c}_0 = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ c_{0,3} \\ c_{0,4} \\ c_{0,5} \\ c_{0,6} \\ c_{0,7} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = G_1 \vec{c}_0 = \begin{bmatrix} h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\ h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & -h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ c_{0,3} \\ c_{0,4} \\ c_{0,5} \\ c_{0,6} \\ c_{0,7} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где H_1 и G_1 – матрицы субполосной низкочастотной и высокочастотной фильтрации размером 4×8 ; $\{h(n)\}_{n=1}^4$ и $\{g(n)\}_{n=1}^4$ – коэффициенты скейлинг- и вейвлет-фильтров длиной 4; $\{c_0(n)\}_{n=0}^{N-1} = \{s(n)\}_{n=0}^{N-1}$ – значения отсчетов исходного сигнала.

Таким образом, выражения (24) и (25) – это один шаг дискретного вейвлет-преобразования. Эта процедура может повторяться J раз, пока длина вектора \vec{c}_j не станет равна 1. Заметим, что в четвертых строках матриц (24) и (25) последовательность h_n циркулярно сдвинута: коэффициенты, выходящие за пределы матрицы справа, помещены в ту же строку слева. Это означает, что в общем случае сигнал $\{c_{0,n}\}$ продолжается на всю числовую прямую периодическим образом. Так что дискретное вейвлет-преобразование, определенное таким образом, использует периодичность сигнала, как и в случае с дискретным преобразованием Фурье.

В результате применения дискретного вейвлет-преобразования (24) и (25) получаем два вектора вдвое меньшей длины, один из которых содержит сглаженную версию сигнала, а другой – набор локальных особенностей на данном уровне детализации. Данная декомпозиция исходного сигнала имеет ряд преимуществ. Во-первых, анализ сглаженного сигнала упрощает выявление его характерных свойств. Во-вторых, анализ локальных особенностей сигнала позволяет не только определить характер и параметры помех, но и четко локализовать особые точки сигнала, такие, как выбросы, резкие скачки уровня и т.д. Более того, если полученный сигнал все еще недостаточно очищен от помех, можно повторно применить к нему вейвлет-преобразование и получить еще более гладкую версию сигнала (уже в четыре раза короче, чем исходный) и локальные особенности сигнала уже на следующем уровне детализации.

Для выполнения обратного преобразования достаточно вычислить произведение транспонированных матриц коэффициентов на сглаженный вектор и вектор деталей соответственно и выполнить покомпонентное сложение результатов

$$\vec{c}_{j-1} = \sqrt{2} E_j^T \vec{c}_j + \sqrt{2} F_j^T \vec{d}_j, \quad (26)$$

где $E = H_j^T$ и $F = G_j^T$.

На рис.3. представлена блок-схема одного шага итерационной процедуры субполосового вейвлет-анализа и синтеза сигнала по его коэффициентам разложения. Согласно рис.3 сигнал уровня $j = 0$ разлагается на два сигнала

уровня $j = 1$. Разрешение сигнала, являющееся мерой количества детальной информации в сигнале, изменяется за счет фильтрации сигнала, а масштаб изменяется за счет децимации и интерполяции. Децимация соответствует снижению частоты дискретизации, или удалению некоторых отсчетов из сигнала. Например, децимация в два раза означает удаление половины отсчетов, т.е. из сигнала удаляется каждый второй отсчет. Интерполяция соответствует увеличению частоты дискретизации сигнала путем добавления новых отсчетов между существующими. Обычно в качестве новых отсчетов используется нуль. Например, интерполяция в два раза означает вставку нулей между каждыми отсчетами. Следует заметить, что операции децимации (прореживания) сигнала и интерполяция в 2 раза, обозначенные символами \downarrow и \uparrow соответственно, выполняются в матрицах H , G , E и F . В нижней части схемы (рис.3) выполняется низкочастотная фильтрация. В результате получается некоторая аппроксимация сигнала, лишенная деталей – низкочастотная субполоса. В верхней части схемы выделяется высокочастотная субполоса. Далее, дискретное вейвлет-преобразование получается путем рекурсивного применения данной процедуры к низкочастотной части. Последовательное деление субполос только низкочастотных фильтров обусловлено тем фактом, что именно низкочастотная область несет больше информации, чем высокочастотная (уточняющая) область. Дискретное вейвлет-преобразование исходного сигнала получается путем объединения вейвлетных коэффициентов всех уровней преобразования и присоединения к ним скейлинговых коэффициентов последнего уровня. В этом случае число коэффициентов равно числу отсчетов в исходном сигнале. Общее число доступных масштабов равно $\log_2 N$.

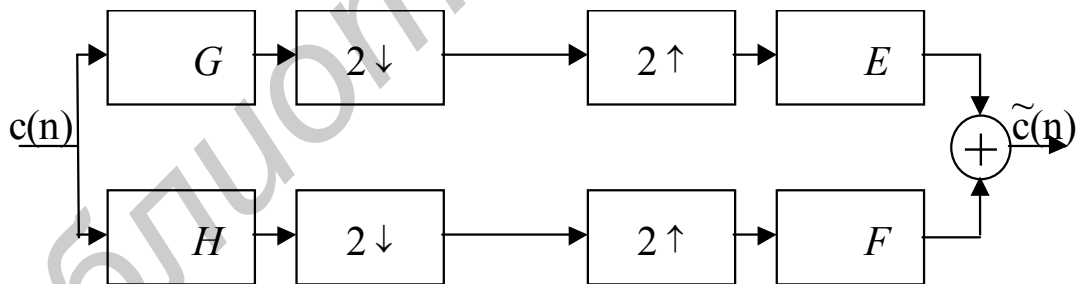


Рис.3. Блок-схема одного шага итерационной процедуры полосового вейвлет-анализа и синтеза сигнала на основе вейвлет-фильтрации

Число операций умножения, необходимое для вычисления всех коэффициентов дискретного вейвлет-преобразования для массива данных N и длины векторов h и g , равной L , будет $2LN$. Столько же операций нужно выполнить, чтобы восстановить или вычислить все спектральные компоненты. Следовательно, для анализа–синтеза сигнала $s(t)$ в вейвлетном базисе необходимо выполнить $4LN$ операций. Число же операций комплексного умножения для БПФ равно $N \log_2 N$, что сравнимо или даже больше, чем в случае дискретного вейвлет-преобразования.

Интерпретация коэффициентов дискретного вейвлет-преобразования несколько сложнее, чем коэффициентов Фурье. Если анализируемый сигнал

дискретизирован на частоте 8 кГц и состоит из 256 отсчетов, то верхняя частота сигнала 4 кГц. Тогда коэффициенты первого уровня разложения (128) занимают полосу частот [2,0, 4,0] кГц. Вейвлет-коэффициенты второго уровня (64) «отвечают» за полосу частот [1,0, 2,0] кГц. Они отображаются перед вейвлет-коэффициентами первого уровня. Процедура повторяется до тех пор, пока не останется 1 вейвлет-коэффициент и 1 скейлинг-коэффициент на 9 уровне. Всего получается $(1+1+2+4+8+16+32+64+128) = 256$ коэффициентов. То есть число коэффициентов равно числу отсчетов в исходном сигнале. Если основная энергия сигнала была сосредоточена возле частоты 1,0 кГц, то вейвлет-коэффициенты второго уровня будут большими, а вейвлет-коэффициентами первого уровня можно пренебречь.

1.2.5. Расчет коэффициентов вейвлет-фильтров Добеши

Свойства вейвлет-функций Добеши. Обычно в качестве параметра, определяющего выбор вида материнского вейвлета, выступает внешнее сходство вида исследуемого сигнала и функции преобразования. Исходя из этого в качестве материнской вейвлет-функции использованы вейвлеты Добеши. Это один из самых известных вейвлетов и его основные свойства таковы: 1) функции имеют конечное число нулевых значений, т.е. система вейвлетов Добеши обладает свойствами гладкости и исключения моментов; 2) функции обладают свойствами компактности носителя (т.е. быстро нарастают и быстро спадают) и ортогональности, что обуславливает возможность точного восстановления произвольного сигнала; 3) вейвлеты имеют как вейвлет-функцию, так и скейлинг-функцию, что делает возможным кратномасштабный и быстрый вейвлет-анализ. То, что вейвлеты Добеши обладают свойством исключать моменты, означает, что они хорошо подойдут для сжатия сигналов, которые имеют большие гладкие области. Скейлинг-функции $\phi_{k,j}$ и вейвлет-функции $\psi_{k,j}$ семейства Добеши удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} (\phi_{k,j}, \phi_{k,l}) = 0, \\ (\psi_{k,j}, \psi_{k,l}) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

при $j \neq l$, где $(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt$ – скалярное произведение двух функций $u(t)$ и $v(t)$. Это означает, что функции в одноименном масштабе и в разных масштабах являются ортогональными. Кроме того, эти функции также удовлетворяют равенству

$$(\phi_{k,j}, \psi_{k,j}) = 0 \quad (28)$$

при всех j, l . Заметим, что свойство ортогональности позволяет получать независимую информацию на разных масштабах, а нормируемость обеспечивает сохранение величины информации на разных этапах преобразования.

Среди недостатков можно отметить несимметричность вейвлета Добеши. В задачах обработки речи и звука в силу особенностей слухового восприятия

человека требования, накладываемые на форму спектров вейвлет-функции, достаточно высокие, что обуславливает использование большого числа нулевых моментов (15-20). Вейвлеты Добеши длиной L имеют $M=L/2$ нулевых моментов. Однако следует помнить, что число нулевых моментов определяет длительность вейвлет-функций и, значит, быстродействие алгоритма вычисления вейвлет-преобразования. Следует отметить, что в отличие от вейвлет-функций Добеши, вырожденные моменты скейлинг-функций Добеши не имеют нулевых значений.

В классической конструкции Добеши длина фильтров $L=2M$, а количество нулевых моментов M . Вейвлеты семейства Добеши обозначаются как dbp , где $p=M$ – порядок; db – Daubechies (Ингрид Добеши, впервые предложившей ортогональные вейвлеты, сосредоточенные на конечном интервале времени). Все вейвлет-функции Добеши имеют компактный носитель. Примерами вейвлетов Добеши с одним и двумя нулевыми моментами являются функции Добеши 1-го порядка $db1$ ($M=1$) и 2-го порядка $db2$ ($M=2$), т.е. $\int \psi(t)dt = 0$ и $\int t\psi(t)dt = 0$. Среди вейвлетов с компактным носителем свойством симметричности обладают лишь функции Хаара (функции Добеши $db1$).

Вычисление значений коэффициентов, составляющих матрицы H и G , основано на использовании условия ортогональности и уравнения нулевых моментов соответственно:

$$\sum_l h_l h_{l+k} = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \text{ и } \sum_l s_l^p h_l = 0, \quad 0 \leq p \leq M, \quad (29)$$

где $2M$ – длина скейлинг-фильтра и вейвлет-фильтра.

Сдвиги масштабирующих и вейвлетных функций образуют ортонормированный базис пространства, т.е. при попарном перемножении строк матрицы преобразования получаем нуль, а при умножении строки на саму себя – единицу. Свойство ортонормированности базиса означает, что матрица обратного преобразования представляет собой просто транспонированную матрицу прямого преобразования, т.е. $H_j = H_j^T$ и $G_j = G_j^T$.

Таким образом, для нахождения значений коэффициентов вейвлет-фильтра длиной $L=4$ необходимо решить систему из четырех алгебраических уравнений: два уравнения, полученные из условия ортогональности, и два уравнения нулевых моментов.

$$\left. \begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1, \\ h_2 h_0 + h_3 h_1 = 0, \end{cases} \right\} \text{ условия ортонормальности} \quad (30)$$

$$\left. \begin{cases} h_3 - h_2 + h_1 - h_0 = 0, \\ 0h_3 - 1h_2 + 2h_1 - 3h_0 = 0. \end{cases} \right\} \text{ нулевые моменты}$$

Решением этой системы являются следующие значения:

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \text{ или } h_0 = 0,4829629131445341;$$

$$h_1 = 0,8365163037378097; \quad h_2 = 0,2241438680420134; \quad h_3 = -0,1294095225512604.$$

Эти коэффициенты определяют вейвлеты, называемые вейвлетами Добеши $db2$. Исключение высших моментов приводит к системам вейвлетов Добеши с большим количеством коэффициентов. Например, $db3$ Добеши получаются при исключении не только нулевых и первых моментов, но и вторых.

Коэффициенты для вейвлетов Добеши более высокого порядка получаются аналогичным способом, однако их точные значения могут быть получены только численно – алгебраические уравнения высокого порядка аналитически неразрешимы. Однако при увеличении числа нулевых моментов (M) растет длина фильтра ($L = 2M$), что приводит к возрастанию вычислительной сложности, которая равна LN , где N – длина блока данных.

Для фильтра Добеши длиной $L = 2M$ необходимо M равенств относительно нулевых моментов для получения единственного решения. В общем случае решения могут быть получены численно. На рис.4 приведены вейвлет-функции 1-, 2-, 3-, 4-, 8-го порядка семейства вейвлетов Добеши. Для данных вейвлетов dbM число коэффициентов всех фильтров равно $2M$. С повышением порядка (числа нулевых моментов) повышается гладкость функций. Таким образом, подбором порядка материнского вейвлета можно добиться наилучшего приближения заданного сигнала.

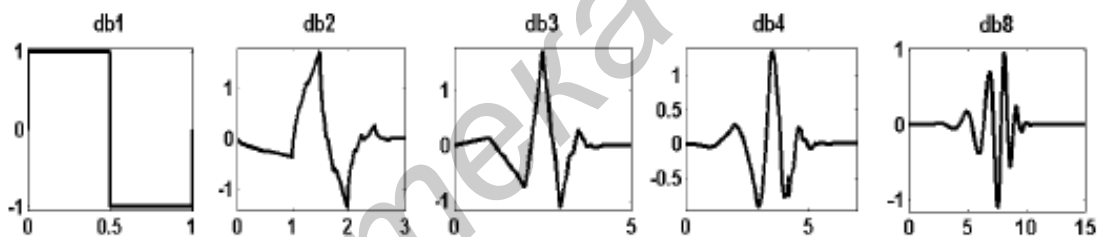


Рис.4. Вейвлет-функции 1-, 2-, 3-, 4-, 8-го порядков семейства вейвлетов Добеши

Вейвлет-функция $db2$, представленная на рис.6, имеет ряд интересных свойств. Она непрерывная, но не дифференцируемая. Она фактически является фракталом в том смысле, что точки, где она не дифференцируема, не зависят от масштаба. Функция равна нулю вне интервала $[0, 3]$. Нетрудно заметить, что гладкость вейвлетов возрастает по мере увеличения их номера. Одновременно растет и частота осцилляций. Эти вейвлеты имеют характерную асимметрию – нарастание функции растянуто по сравнению со спадом.

1.3. ФРАКТАЛЬНО-ВЕЙВЛЕТНОЕ СЖАТИЕ СИГНАЛОВ

Понятие фрактал было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 г. для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Суть фрактальной геометрии в том, что структуры возникают в результате повторного приложения одних и тех же преобразований (или одной и той же функции) к некоторым точкам. Например, если в классическом случае значения функции зависят от изменяющихся значений переменных: $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \dots$, то во фрактальном случае значение переменной фиксировано, а итерируется сама функция: $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))) \dots$ и т.д. Самоподобие при любом

масштабе – это определяющее свойство фракталов. Это означает, что когда вы смотрите на фрактал, вы видите некоторый набор элементов, который остается одним и тем же независимо от масштаба. Таким образом, настоящие фракталы являются результатом некоторого бесконечно повторяемого процесса, такого как итерационный процесс.

С математической точки зрения фрактал - это прежде всего множество с дробной размерностью. Мандельброт дает математическое описание фрактала как множества, размерность которого строго превышает топологическую размерность и является дробной. Топологическая размерность - это та нормальная размерность, которую обычно используют. Точка имеет топологическую размерность 0, линия - топологическую размерность 1, поверхность - топологическую размерность 2. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о всем фрактале.

В общем случае базовый алгоритм фрактального сжатия двухмерного образа состоит в следующем. Исходный образ разбивается на неперекрывающиеся ранговые блоки. Для этого существуют методы построения множества ранговых блоков. Ранговые блоки могут быть одинакового размера, но чаще используется адаптивное разбиение с переменным размером блока. Кроме того, исходный образ покрывается последовательностью доменных блоков, в общем случае перекрывающихся. Домены могут быть разных размеров. Для каждого рангового блока алгоритм ищет доменный блок и соответствующее преобразование, которое эффективно отображает домен в выбранный ранговый блок. Для того чтобы отображение было сжимающим, домен должен быть больше рангового блока. Поиск соответствия между доменными и ранговыми областями называется доменно-ранговым сопоставлением. Оно представляет собой в общем случае трехшаговый процесс: поворот выбранного доменного блока, сжатие размера доменного блока до размера рангового блока и подгонка доменного блока к ранговому блоку (вычисление коэффициентов для наилучшего совпадения контрастности и яркости). Эффективное сжатие зависит от возможности найти наилучшее соответствие между доменными и ранговыми блоками без необходимости дополнительного разбиения ранговых блоков. Задача определения системы доменов и параметров для ее описания – это компромисс между необходимостью, чтобы множество доменов было достаточно большим для обеспечения возможности подбора наилучшего соответствия ранговому блоку и в то же время достаточно маленьким, чтобы процесс поиска мог быть осуществлен за приемлемое время. Если в алгоритме имеется процедура поиска наилучшего домена, то поиск будет продолжаться, даже если соответствие между доменной и ранговой областями окажется в пределах допустимой погрешности. Если эта процедура отсутствует, то поиск доменов прекращается, как только соответствие оказывается в пределах допустимой погрешности. Сжатие без этой процедуры происходит быстрее при небольшой потере качества восстановленного сигнала. Большое количество ранговых блоков обеспечивает высокое качество восстановленного образа, но за счет степени сжатия. Таким образом, одна из главных проблем фрактального сжатия

заключается в том, что большое количество доменных и ранговых областей замедляет процесс сжатия. Общее время сжатия является произведением количества доменно-ранговых сопоставлений и времени, требуемого на выполнение каждого сопоставления.

Смешанные вейвлетно-фрактальные методы сжатия используют идею доменно-ранговых преобразований применительно к плоскости вейвлет-коэффициентов. Вейвлеты с их способностью выделять информацию, зависящую от масштаба, являются эффективным средством анализа фракталов. Метод фрактального сжатия вейвлет-коэффициентов основан на разбиении плоскости вейвлет-коэффициентов на ранговые и доменные области, связанные определенными геометрическими соотношениями, на поиске для каждой ранговой области соответствующей ей доменной области путем минимизации расстояния между ними, а также на вычислении коэффициентов подобия между каждой ранговой и соответствующей ей доменной.

По аналогии с (16) при замене обозначений c_{jk} на b_{ij} , а d_{jk} на c_{ij} , произвольный сигнал $s(t) \in L^2(R)$ может быть представлен с помощью полного дискретного вейвлет-разложения

$$s(n) = b_{00}\phi(n) + \sum_{i,j} c_{ij}\psi_{ij}(n), \quad (31)$$

где $\psi_{i,j}(n) = 2^{i/2}\psi(2^i n - j)$; $j = 0, \dots, 2^i - 1$; $b_{00} = \langle s(n), \phi_{0,0} \rangle$; $c_{ij} = \langle s(n), \psi_{ij} \rangle$. Интервал, на котором функция $\psi_{i,j}$ не равна нулю, называется носителем (support) этой функции. Величина носителя функции $\psi_{i,j}$ уменьшается, когда i увеличивается. Фактически величина носителя $\psi_{i+1,j}$ составляет половину величины носителя $\psi_{i,j}$. Таким образом, масштаб или разрешение определяются значением i в $\psi_{i,j}$. Это означает, что если требуется увеличить разрешение, то используется большее значение i . Коэффициенты вейвлет-разложения (30) можно расположить на двухмерной плоскости (рис.5).

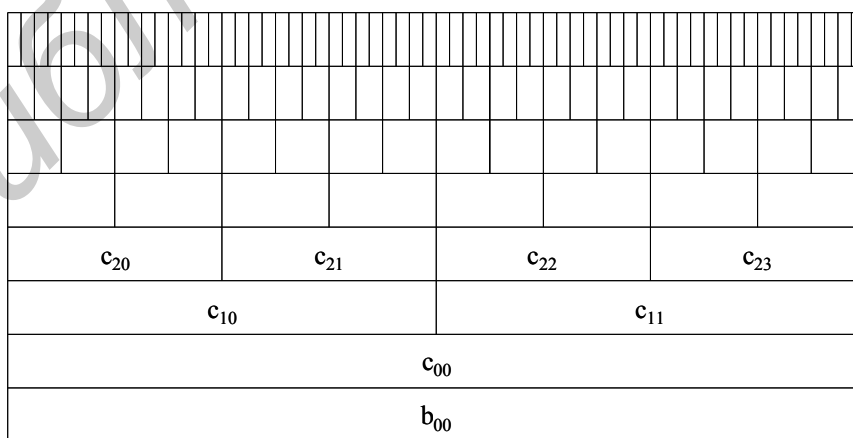


Рис. 5. Частотно-временная плоскость вейвлет-коэффициентов

Предполагается, что на рис. 5 и рис.6 площади всех прямоугольников частотно-временной плоскости равны и имеют разные геометрические размеры.

Рассмотрим доменно-ранговые преобразования на плоскости вейвлет-коэффициентов. Эти преобразования отображают доменные блоки, включающие в себя вейвлеты низкого разрешения, в ранговые блоки, включающие в себя вейвлеты высокого разрешения, т.е. $I_j \rightarrow J_l$, где I_j – j -й доменный блок, который преобразуется в l -й ранговый блок J_l .

На плоскости вейвлет-коэффициентов можно выделить доменные блоки $I_{i^*,j}$ ($0 \leq j < 2^{i^*}$), где $I_{i^*,j} = \left[\frac{j}{2^{i^*}}, \frac{j+1}{2^{i^*}} \right]$, и ранговые блоки $J_{k^*,l}$ ($0 \leq l < 2^{k^*}$), где $J_{k^*,l} = \left[\frac{l}{2^{k^*}}, \frac{l+1}{2^{k^*}} \right]$; i^* и k^* – индексы, задающие начало доменного и рангового блоков. Для каждого рангового блока $J_{k^*,l}$ ($0 \leq l < 2^{k^*}$) существует связанный с ним доменный блок $I_{i^*,j}$ с $k^* > i^*$ и отображение между ними будет иметь коэффициент сжатия $2^{i^*-k^*}$. Выбор i^* определяет количество доменных блоков и влияет на время выполнения алгоритма сжатия, а также на качество восстановленного сигнала, так как аппроксимация ранговых блоков осуществляется с различной погрешностью.

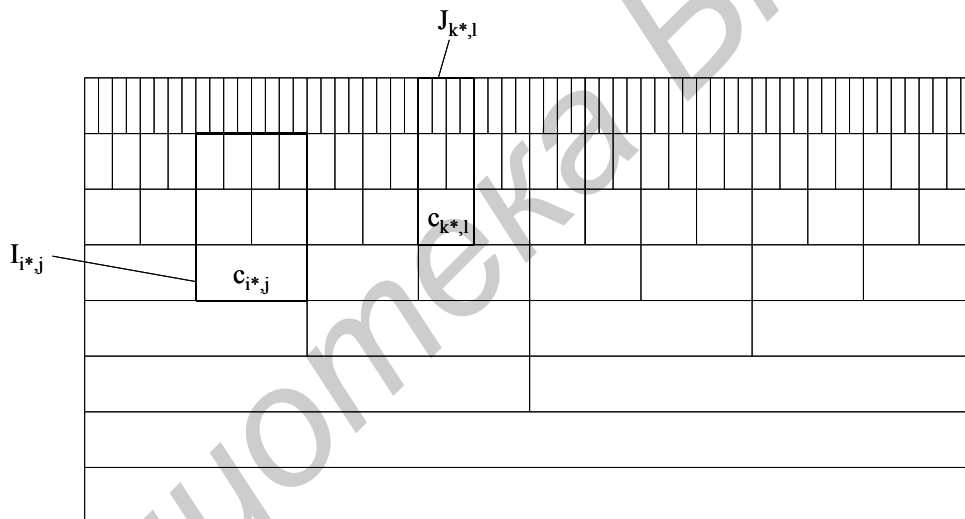


Рис. 6. Выделение доменных $I_{i^*,j}$ и ранговых $J_{k^*,l}$ блоков на плоскости вейвлет-коэффициентов $c_{i,j}$

Значения вейвлет-коэффициентов, отбрасываемых на этапе фрактального сжатия, будут восстанавливаться по формуле $\tilde{J}_{k^*,l} = \alpha_l I_{i^*,j(l)}$ (восстанавливающее преобразование), которая применительно к вейвлет-коэффициентам может быть модифицирована в следующее выражение

$$d_{k^*+k', 2^{k'} \cdot l + l'} = \alpha_l c_{i^*+k', 2^{k'} \cdot j(l) + l'}, \quad (32)$$

где α_l – коэффициент пропорциональности или подобия ранговой и доменной областей, k' и l' – индексы, задающие нумерацию коэффициентов внутри доменных и ранговых областей, $k' \geq 0$, $0 \leq l' < 2^{k'}$. Коэффициенты $b_{0,0}$ и $c_{i,j}$ с индексами $0 \leq i < k^*$ и $0 \leq j < 2^i$, т.е. расположенные ниже уровня k^* , сохраняются без изменений. Из (32) видно, что вейвлет-коэффициенты каждого

доменного блока $I_{i^*,j(l)}$, которые могут быть представлены в виде поддерева с корнем $c_{i^*,j(l)}$, умножаются на α_l . После вычисления результирующего доменного блока, оптимального по определенному критерию, преобразованный доменный блок $\alpha_l \cdot I_{i^*,j(l)}$ заменяет ранговый блок $J_{k^*,l}$.

Таким образом, для вейвлет-разложения сигнала ищется сжимающее преобразование, которое отбрасывает некоторые вейвлет-коэффициенты и вычисляет параметры, позволяющее восстановить это разложение с минимальной погрешностью. Коэффициент пропорциональности α_l находится методом наименьших квадратов, который минимизирует расстояние между доменными и ранговыми блоками. Функция расстояния, связанная с каждым ранговым блоком, задается в следующем виде:

$$\Delta_l^2 = \sum_{k'=0}^{M-k^*-1} \sum_{l'=0}^{2^{k'}-1} \left(c_{k^*+k',2^{k'}l+l'} - \alpha_l 2^{(i^*-k^*)/2} c_{i^*+k',2^{k'}j(l)+l'} \right)^2, \quad (33)$$

где $M = \log_2 N$ – число уровней (количество масштабов) вейвлет-преобразования, N – число отсчетов блока исходного сигнала, равное общему числу вейвлет-коэффициентов.

Коэффициент пропорциональности α_l вычисляется для каждого рангового блока и всех доменных блоков по формуле

$$\alpha_l = \frac{S_{k^*,l,i^*,j}}{S_{i^*,j,i^*,j}}, \quad (34)$$

где

$$S_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \sum_{k'=0}^{M-k^*-1} \sum_{l'=0}^{2^{k'}-1} c_{\alpha+k',2^{k'}\beta+l'} c_{\gamma+k',2^{k'}\delta+l'}. \quad (35)$$

С учетом (34) квадрат минимизированного расстояния, связанного с α_l и служащего для аппроксимации рангового блока $J_{k^*,l}$ с помощью заданного доменного блока $I_{i^*,j}$, определяется по следующей формуле:

$$\Delta_{l,\min}^2 = S_{k^*,l,k^*,l} - \frac{S_{k^*,l,i^*,j}^2}{S_{i^*,j,i^*,j}}. \quad (36)$$

Здесь параметр $S_{k^*,l,k^*,l}$ представляет собой энергию вейвлет-коэффициентов рангового блока $J_{k^*,l}$, параметр $S_{i^*,j,i^*,j}$ – энергию доменного блока $I_{i^*,j}$, а числитель $S_{k^*,l,i^*,j} = \sum_{k',l'} c_{k^*+k',2^{k'}l+l'} c_{i^*+k',2^{k'}j+l'}$ – сумму произведений соответствующих вейвлет-коэффициентов рангового и доменного блоков.

Затем выполняется поиск наилучшего доменного блока, т.е. блока $I_{i^*,j(l)}$, который обеспечивает наименьшее расстояние Δ_l , где $j(l)$ – табличная функция, учитывающая соответствие ранговых и доменных блоков и используемая на этапе восстановления. После выполнения данной операции для всех ранговых блоков задается сжимающее преобразование, состоящее из набора вейвлет-коэффициентов $c_{i,j}$ ($j < k^*$), коэффициентов пропорциональности α_l и значений функции $j(l)$.

Таким образом, сжатый сигнал состоит из оптимальных коэффициентов пропорциональности α_l , значений функции $j(l)$ и коэффициентов вейвлет-разложения, которые были не затронуты преобразованием, т.е. $b_{0,0}$ и $c_{i,j}$, $0 \leq i < k^*$, $0 \leq j < 2^i$. Следует отметить, что значение k^* выбирается перед фрактально-вейвлетном преобразовании, причем вейвлет-коэффициенты ниже уровня k^* сохраняются без изменений, в то время как коэффициенты этого уровня и выше его подвергаются фрактальному сжатию.

Поскольку без изменений сохраняются 2^{k^*} вейвлет-коэффициента и дополнительно для каждого l -го рангового блока, количество которых равно 2^{k^*} , требуется сохранение α_l и $j(l)$, то приблизительно оценить значение коэффициента сжатия можно по формуле

$$Ratio = \frac{N}{3 \cdot 2^{k^*}}, \quad (37)$$

где $3 \cdot 2^{k^*}$ – количество сохраняемых параметров сжимающего преобразования, N – число отсчетов блока исходного сигнала. Данная оценка не учитывает численное представление параметров.

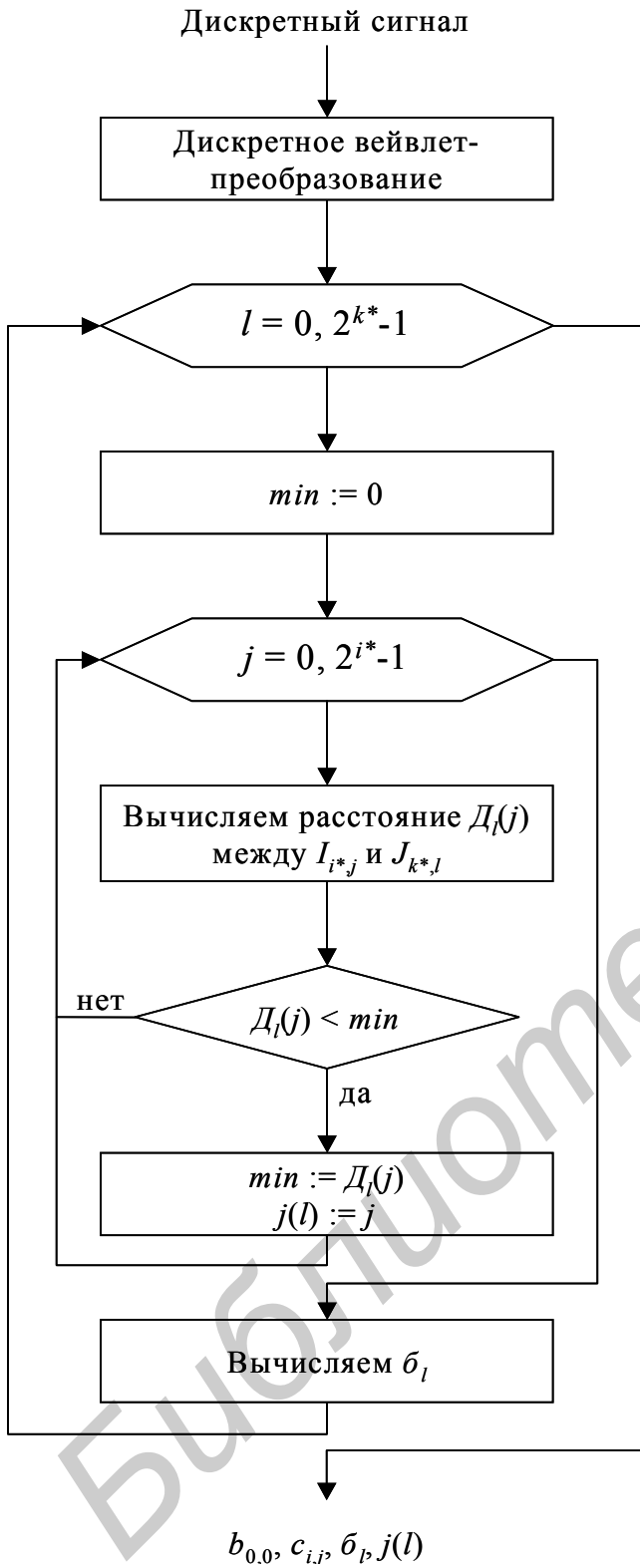
Процесс сжатия является итерационной процедурой. Для каждого рангового блока $J_{k^*,l}$ перебираются все доменные блоки $I_{i^*,j}$ и для каждого варианта вычисляется расстояние с помощью (36), где вместо $j(l)$ подставляются все возможные значения j от 0 до $2^{i^*}-1$, и выбирается минимальное значение расстояния. Это эквивалентно тому, что l -му ранговому блоку ставится в соответствие j -й доменный блок, т.е. $j(l) = j$. Из (34) определяется значение α_l . После нахождения необходимых параметров сжимающего преобразования вейвлет-коэффициенты, начиная с уровня k^* и выше, отбрасываются. Данную процедуру для дискретного сигнала можно представить в виде блок-схемы (рис. 7).

На рис. 8 представлен пример преобразования вейвлет-коэффициентов для кадра длиной 16 отсчетов при $k^* = 2$ и $i^* = 1$. В данном случае доменный блок I_{10} отображается в ранговый блок J_{23} , т.е. $j(3) = 0$ (рис.8,а). В связи с этим вейвлет-коэффициенты ниже уровня $k^*=2$ не отбрасываются (рис.8,б). Количество доменных блоков равно $2^{i^*} = 2$, а ранговых – $2^{k^*} = 4$.

Ошибка восстановления или количественная оценка искажений, вносимых фрактально-вейвлетным преобразованием, может быть вычислена по формуле

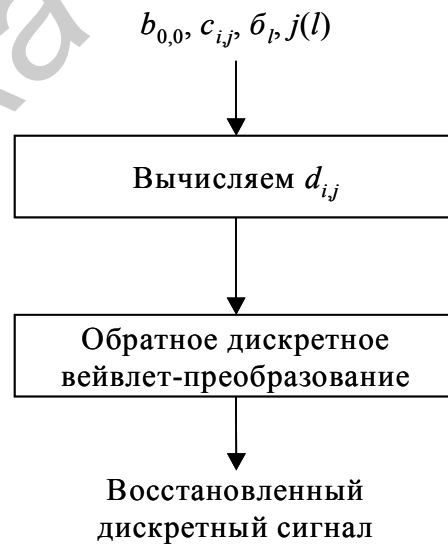
$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (s(i) - \hat{s}(i))^2}}{T}, \quad (38)$$

где $s(i)$ и $\hat{s}(i)$ – значения i -х отсчетов исходного и восстановленного сигналов соответственно; N и T – число отсчетов и длительность сигнала соответственно.



а

Рис. 7. Блок-схема алгоритма сжатия (а) и восстановления (б) сигнала



б

c_{30}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}	c_{37}
c_{20}		c_{21}		c_{22}		c_{23}	
c_{10}				c_{11}			
c_{00}							
b_{00}							

c_{10}	c_{11}
c_{00}	
b_{00}	

а
б

Рис. 8. Плоскость вейвлет-коэффициентов до сжатия (а) и после сжатия (б)

Для фрактально-вейвлетного сжатия речевого сигнала с длиной блока 256 отсчетов (32 мс) полученные значения ошибки восстановления в значениях уровней квантования на секунду в зависимости от длины L вейвлета Добеши и степени сжатия сведены в следующую таблицу:

Степень сжатия	k^*	Ошибка восстановления (число уровней квантования/с)			
		Добеши $L=4$	Добеши $L=6$	Добеши $L=20$	Добеши $L=40$
1,33	7	7129	6566	7341	7755
2,67	6	22590	21676	23730	24042
5,33	5	37502	37559	37918	38129

Из таблицы видно, что искажения речевого сигнала минимальны при малой длине вейвлета. Это обусловлено тем, что крутизна среза амплитудно-частотной характеристики вейвлет-фильтра меньше при малых длинах, вследствие чего высокочастотные компоненты могут появляться в крупномасштабных значениях вейвлет-коэффициентов. Это приводит к более высокому линейному сходству вейвлет-коэффициентов в ранговых и доменных областях.

2. ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ

2.1. Изучите теоретическую часть.

2.2. Лабораторная работа выполняется в среде объектно-ориентированного программирования Delphi версии 7.0 с использованием графического интерфейса пользователя. Текст основной программы находится в файле main.pas, используемые процедуры и функции вынесены в модуль unit1.pas.

2.3. Порядок выполнения лабораторной работы следующий:

2.3.1. В меню «Вейвлет» производится выбор вейвлета.

2.3.2. При выборе вейвлета становится активной кнопка «АЧХ фильтров». Нажатием кнопки «Открыть» вызывается диалоговое окно, в

котором необходимо выбрать звуковой файл с расширением wav. Файл должен быть монофоническим формата РСМ с использованием 16 бит на отсчет. После этого становятся активными кнопки воспроизведения и остановки медиаплеера, а также кнопка «Выполнить».

2.3.3. При запуске программы устанавливается длина блока, равная 512. Этот параметр может изменяться пошагово в 2 раза в сторону увеличения или уменьшения. Максимальное значение – 4096, минимальное – 32. Длина блоков устанавливает размер кадров, на которые затем разбивается исходный файл. Эти фрагменты последовательно подвергаются прямому и обратному преобразованию и далее сохраняются в файл temp.wav.

2.3.4. При отмене пункта «Сжатие» помимо вейвлетного преобразования сигнала будет производиться фрактальное сжатие и восстановление вейвлет-коэффициентов с параметрами k^* и i^* . Первый параметр может принимать значения в диапазоне от 2 до $\log_2 N - 2$, где N – длина блока сигнала. Второй параметр изменяется в пределах от 1 до $k^* - 1$. По умолчанию установлены значения 7 и 6 соответственно.

2.3.5. Кнопка «Выполнить» запускает преобразование с предварительно заданными параметрами, после чего становятся активными кнопки «Сигнал», «Спектр» и «Вейвлет-спектр». Степень завершенности преобразования отображается внизу в виде полоски.

2.3.6. При нажатии на кнопку «Сигнал» выводятся графики последнего блока исходного и восстановленного сигнала (сверху и посередине), а также график ошибки (внизу), определяемой как разность между исходным и восстановленным сигналами.

2.3.7. Нажатием кнопки «Спектр» осуществляется вывод спектров для последнего блока исходного сигнала, восстановленного сигнала и ошибки. Кнопка «Вейвлет-спектр» выводит графики исходного вейвлет-преобразования и восстановленного после фрактального сжатия. Медиаплеер позволяет последовательно воспроизводить исходный и восстановленный звуковой файл, чтобы можно было качественно оценить искажения, внесенные преобразованием.

2.3.8. Нажатием кнопки «Выход» завершается работа с программой.

2.3.9. Получите и сравните результаты сжатия речевого сигнала.

2.4. Оформите отчет и сделайте выводы.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

3.1. Выполнение задания.

3.2. Результаты выполнения работы.

3.3. Анализ результатов и выводы.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

4.1. Какими характерными свойствами должен обладать сигнал, для того чтобы его можно было использовать в качестве вейвлета? При каких условиях

вейвлет-преобразование нечувствительно к гладким полиномиальным зависимостям и подчеркивает флуктуационную структуру сигнала? Какие вейвлеты гарантируют точную реконструкцию сигналов?

4.2. Почему суммирование в вейвлет-преобразовании проводится не по одному, а по двум индексам? Перечислите критерии выбора типа вейвлета. Что важнее – свойство гладкости или число нулевых моментов вейвлета?

4.3. Перечислите вейвлеты, не допускающие реконструкцию сигналов, но используемые для вейвлет-анализа сигналов и построения вейвлет-спектрограмм в плоскости масштаб (номера коэффициентов) – время (сдвиг)?

4.4. Чем отличается диадное вейвлет-преобразование от дискретизированного вейвлет-преобразования? Чем, с точки зрения затрат времени на вычисления, быстрое вейвлет-преобразование лучше быстрого преобразования Фурье?

4.5. Какое важное свойство материнского вейвлета обеспечивает возможность представления исходного сигнала с различными уровнями разрешения от крупномасштабных до мелкомасштабных деталей?

4.6. Чему равно общее число членов в разложении речевого сигнала на любом уровне детализации? От чего зависит число членов в каждой сумме вейвлет-разложения речевого сигнала?

4.7. Чем обусловлен существенный разброс по величине вейвлет-коэффициентов по сравнению со значениями отсчетов исходного сигнала?

4.8. Перечислите структурные особенности исходного сигнала, эффективно обнаруживаемые с помощью вейвлет-преобразования? Что обеспечивает свойство ортогональности и нормируемости вейвлет-функций и скейлинговых функций?

4.9. Какова связь между длительностью вейвлета и шириной его спектра? Сформулируйте принцип неопределенности Гейзенберга? Справедлив ли он при использовании ДВП?

4.10. Почему в дискретном вейвлет-преобразовании в отличие от преобразования Фурье время появления частот не утеряно? От чего зависит точность временной локализации этих частот? Почему вейвлет-преобразование обеспечивает высокое временное и низкое частотное разрешения для высоких частот и низкое временное и высокое частотное разрешения для низких частот?

4.11. Почему именно низкочастотный фильтр, а не высокочастотный фильтр, удостоен деления полосы пропускания?

4.12. Что такое фрактал? Назовите его ключевые свойства? В чем сущность фрактального сжатия двумерного образа? Перечислите базовые операции фрактального преобразования двумерного образа.

4.13. В чем состоит основная идея фрактального преобразования вейвлет-образа речевого сигнала? Есть ли различия в быстродействии алгоритма фрактально-вейвлетного сжатия на этапе компрессии и декомпрессии.

4.14. За счет чего можно добиться большего коэффициента сжатия речевого сигнала при неизменных искажениях?

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
2. Дьяконов В.П. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
3. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – М.: Триумф, 2003. – 320 с.
4. Ватолин Д., Ратушник А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002.– 384 с.
5. Секунов Н. Обработка звука на РС. – СПб: Питер, 2002. – 864 с.
6. Шелухин О.И., Лукьянцев Н.Ф. Цифровая обработка и передача речи. – М.: Радио и связь, 2000.
7. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000.
8. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб: ВУС, 1999. – 204 с.

Учебное издание

Борискевич Анатолий Антонович,
Холев Олег Валерьянович,
Цветков Виктор Юрьевич

**СЖАТИЕ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТНОГО
И ФРАКТАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
к лабораторной работе по дисциплине
«Цифровая обработка речи и изображений»
для студентов специальности «Сети телекоммуникаций»
дневной формы обучения

Редактор Т.Н. Крюкова
Корректор Е.Н. Батурчик
Компьютерная верстка М.В. Шишло

Подписано в печать 26.10.2004.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 2,33.
Уч.-изд. л. 1,8.	Тираж 70 экз.	Заказ 175.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6