Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра экономической информатики

С.А. Поттосина, В.А. Журавлев

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

Учебное пособие

для студентов экономических специальностей БГУИР
всех форм обучения

Минск 2003

УДК 519.95 (075)
ББК 65 я 7
П 66

Рецензент:
зав. отделом НИЭИ Минэкономики Республики Беларусь,
д-р физ.-мат. наук, проф. М.К. Кравцов

Поттосина С.А.
П 66 Экономико-математические модели и методы: Учеб. пособие для студ. экон. спец. БГУИР всех форм обуч. / С.А. Поттосина, В.А. Журавлев. – Мн.: БГУИР, 2003. – 94 с.: ил.

ISBN 985-444-484-8.

В учебном пособии представлены основные математические модели и методы для решения широкого класса прикладных задач экономического анализа. Теоретический материал сопровождается конкретными числовыми примерами.

Предназначено для студентов и преподавателей экономических специальностей.

УДК 519.95 (075)
ББК 65 я 7

ISBN 985-444-484-8

Содержание

Введение

Данное учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей технических университетов, специализирующихся в области разработки и использования информационных технологий для решения широкого круга экономических задач, в том числе – связанных с моделированием экономических процессов.

В пособии представлены разделы, посвященные построению математических моделей для решения ряда экономических задач. В результате изучения данного пособия студенты приобретают навыки построения экономико-математических моделей, их использования для объяснения поведения исследуемых экономических показателей, их взаимосвязи.

В учебном пособии представлены следующие разделы одноименной учебной дисциплины: линейные регрессионные модели, балансовые модели, модели сетевого планирования и управления, модели статистического многомерного анализа, модели линейного программирования.

1. Основные понятия математического моделирования социально-экономических систем

Социально-экономическая система – сложная вероятностная динамическая система, которая охватывает процессы производства, обмена и потребления материальных и других благ. Она относится к классу кибернетических систем, т.е. систем управления с обратной связью.

Система – это комплекс взаимосвязанных подсистем и их элементов вместе с отношениями между ними. Перечислим основные свойства системы:

- целостность системы (принципиальная несводимость свойств системы к сумме свойств ее элементов);
- наличие цели и критерия исследования множества элементов;
- наличие внешней по отношению к системе среды;
- возможность выделения в системе взаимосвязанных частей (подсистем).

Моделирование – один из способов исследования систем. Модель – образ реальной системы (объекта, процесса) в материальной или теоретической форме. Этот образ отражает существенные свойства объекта, он замещает реальный объект в ходе исследования и управления. Моделирование основывается на принципе аналогии, т.е. возможности изучения реального объекта (системы) не непосредственно, а опосредованно, через рассмотрение подобного ему и более доступного объекта (модели).

Целью моделирования является повышение эффективности управления экономикой на разных уровнях управления. Экономическое управление осуществляется на макро- и микроэкономическом уровнях. На макроуровне объектами управления являются народное хозяйство в целом, отрасли и сектора экономики, на микроуровне – предприятия и рынки.

К основным функциям управления экономическими объектами (системами) относятся:

- сбор и обработка информации об объекте управления;
- анализ и оценка информации об объекте управления;
- прогнозирование развития объекта;
- программирование развития объекта;
- планирование развития объекта;
- регулирование развития объекта.

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются:

- анализ экономических объектов и процессов;
- прогнозирование экономических процессов;
- выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной деятельности.

Математической моделью объекта управления называется одно либо несколько математических уравнений, которые задают связи между наиболее существенными для управления показателями объекта. По содержанию различают экономико-математические и экономико-статистические методы и модели. Различие между ними состоит в решаемых с их помощью задачах и применяемых методах.

Экономико-математические модели включают в себя целевые критерии, уравнения, неравенства и ограничения, описывающие функционирование объекта, а также соотношения между показателями, обусловленные существующими экономическими зависимостями между ними. Для разработки экономико-математических моделей используют аппарат математического программирования, теории планирования и управления и др.

Экономико-статистические модели связаны с анализом статистических данных об объекте управления. Эти модели устанавливают статистические связи, существующие между показателями объекта. Для разработки экономико-статистических моделей используют аппарат математической статистики и теории вероятностей.

К ***экономико-математическим методам*** относятся методы линейной алгебры, математического (линейного и нелинейного) программирования, теории вероятностей и математической статистики, методы экономической кибернетики, методы теории игр и принятия решений и др.

Этапами экономико-математического моделирования являются:

1. Постановка экономико-математической проблемы и ее качественный анализ.
2. Построение математической модели.
3. Аналитический анализ модели.
4. Подготовка исходной информации к численному решению.
5. Численное решение.
6. Анализ численных результатов.

Построение модели осуществляется в следующей последовательности:

1. *Построение информационной* (*экономической*) *модели объекта*, когда определяется система показателей, характеризующих объект. Эти показатели называются параметрами или переменными объекта. Показатели делятся на ***экзогенные*** (входные, определяемые вне модели) и э***ндогенные*** (выходные, рассчитываемые с помощью модели). Экзогенные показатели делятся на управляющие (регулирующие) и неуправляемые (внешние) факторы.

В экономико-математической модели переменные, как правило, определяются неоднозначно и принадлежат некоторой допустимой области их значений. Входные неуправляемые переменные часто имеют вероятностный характер, и их значения определяются средним значением и интервалом (или дисперсией) изменения. В некоторых случаях может задаваться распределение вероятности этих показателей.

2. *Построение математической модели*, когда определяется система уравнений, которые характеризуют взаимосвязи между показателями объекта.

Общая схема экономико-математической модели изображена на рис. 1.1

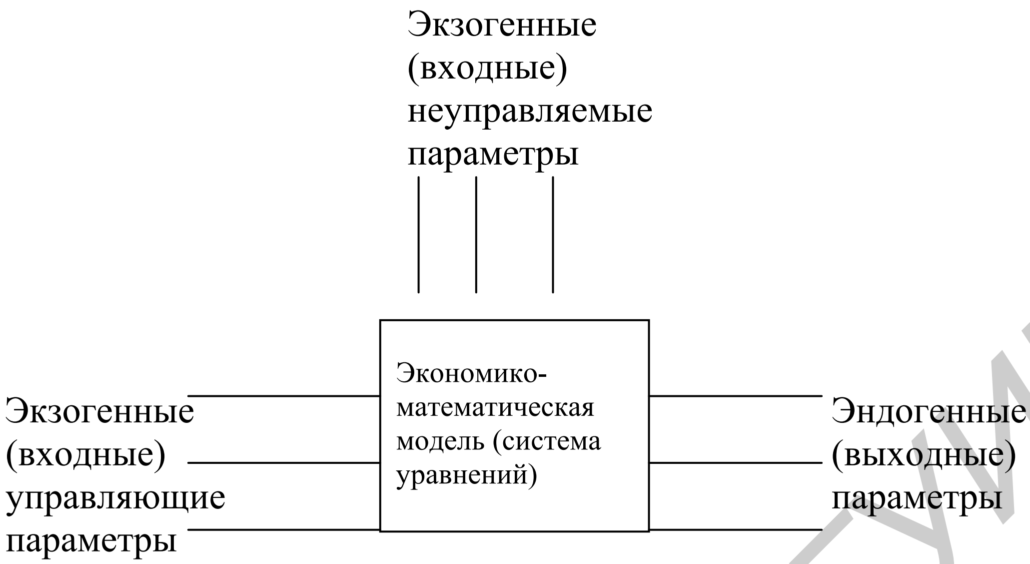


Рис. 1.1. Схема экономико-математической модели объекта

Анализ модели осуществляется с применением экономико-математических методов и зачастую сопровождается проведением необходимых расчетов на ЭВМ. Задача моделирования состоит в определении таких значений управляющих параметров модели, которые соответствуют наилучшим (по некоторому критерию) значениям выходных (эндогенных) показателей. Полученные в процессе моделирования знания о модели используются для управления объектом при разработке планов, программ и т.д. Обычно при практическом использовании модели она уточняется и развивается.

Важнейшим понятием экономико-математического моделирования является понятие ***адекватности модели*** или соответствия модели реальному объекту. При проверке модели на адекватность выделяют два аспекта, а именно, ***верификация модели*** (проверка правильности структуры модели) и ***валидация модели*** (проверка соответствия данных моделирования реальному процессу).

Классификацию методов экономико-математического моделирования можно провести по различным признакам: по классификации дисциплин, целевому назначению, степени агрегированности объектов моделирования, конкретному предназначению, типу информации, учету фактора времени, фактору определенности, типу математического аппарата, положенного в основу модели.

Ниже приведена классификация экономико-математических методов по дисциплинам, в которых они изучаются.

Таблица 1.1

Классификация дисциплин	Методы моделирования
Экономическая кибернетика	Системный анализ экономики Теория экономической информации Теории управляющих систем
Математическая статистика	Выборочный метод Регрессионный и дисперсионный анализ. Факторный анализ Многомерный статистический анализ
Методы принятия оптимальных решений, в том числе исследование операций в экономике	Оптимальное математическое программирование Сетевые методы планирования и управления Методы управления запасами Методы теории массового обслуживания Методы теории игр Методы теории расписаний и принятия решений
Методы экспериментального изучения экономических явлений	Имитационное моделирование Методы экспертных оценок Деловые игры

Приведем другие классификации моделей:

по целевому назначению: теоретико-аналитические и прикладные модели;

по степени агрегированности объектов моделирования: макроэкономические и микроэкономические модели;

по конкретному предназначению: балансовые модели (выражают требования соответствия наличия ресурсов и их использования); трендовые модели (выражают развитие моделируемой экономической системы через тренд ее основных показателей); оптимизационные модели (предназначены для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов решений); имитационные модели (изучают экономические явления с помощью машинных экспериментов);

по типу информации: аналитические (построенные на априорной информации) и идентифицируемые модели (построенные на апостериорной информации);

по учету фактора времени: статические (все зависимости отнесены к одному моменту времени) и динамические модели (описывают эволюцию процесса во времени);

по фактору определенности: детерминированные и вероятностные модели;

по типу математического аппарата, ***положенного в основу модели:*** матричные модели, модели линейного и нелинейного программирования, регрессионные модели, модели теории игр, модели теории графов, сетевые модели, модели массового обслуживания, модели управления запасами.

Пример. Фирма выпускает некоторые виды продукции и использует некоторые виды ресурсов, например оборудование, рабочую силу, сырье. Известны величины b_1, b_2, b_3 – объемы соответствующих ресурсов на год. Известна технологическая матрица $A = (a_{ij})$, где a_{ij} – затраты i-го ресурса на производство единицы j-го вида продукции. Известна цена за единицу продукции c_1, c_2, c_3.

Как наладить производство, чтобы получить максимальный доход от продажи продукции?

Построим математическую модель данной экономической ситуации. Для этого определим целевую функцию и ограничения задачи.

Целевая функция имеет вид

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j \, .$$

Управляющие переменные: x_j , $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ограничение на объем ресурсов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1,\ m},$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Модель линейного программирования

Здесь (c_j, b_j, a_{ij}) – параметры модели.

Контрольные вопросы

1. Что такое социально-экономическая система?
2. Что такое моделирование? Какова его цель?
3. С помощью каких функций осуществляется управление экономическими объектами (системами)?
4. Что собой представляет экономико-математическая модель объекта управления, какие бывают модели объекта управления?
5. Какие показатели входят в экономико-математическую модель?
6. Каковы этапы разработки и использования ЭММ-модели?

2. Линейные балансовые модели

2.1. Необходимые сведения из матричной алгебры

Методы матричной алгебры широко используются не только в нормативных экономико-математических моделях, но и в статистических расчетах с обработкой больших массивов информации. Матричное исчисление применяется при анализе отчетного межотраслевого баланса, матрицы широко используются при анализе взаимозависимых регрессионных уравнений регрессии, в факторном и дисперсионном анализах. Матричную алгебру ценят за краткость, простоту и наглядность. Универсальный характер матричных выражений позволяет приложить одни и те же методы анализа и к малому, и к большому массивам исходных данных. Количество исходных данных влияет только на объем вычислений, а это в свою очередь определяет продолжительность и стоимость работ. Роль этих факторов стремительно уменьшается в связи с использованием быстродействующих электронных вычислительных машин.

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Размером матрицы называется пара чисел $m \times n$, где m – число строк, а n – число столбцов таблицы. Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Матрица размером $n \times n$ называется квадратной. Над матрицами можно производить ряд операций. Матрицу можно умножить на число. Матрицы одинакового размера можно складывать и вычитать. Матрицу A размером $m \times n$ и матрицу B размером $n \times k$ можно перемножать, в результате получается матрица C размером $m \times k$. Ниже определены некоторые операции над матрицами.

Сложение

$$A + B = C, \text{ где } A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}, C = \{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\}.$$

Вычитание

$$A - B = C, \text{ где } A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}, C = \{c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\}.$$

Умножение

$$A\,B = C, \text{ где } A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}, C = \{\sum_{k=1}^{c} a_{ik}\, b_{kj} = c_{ij}\}, i = 1, 2, \ldots \text{с}.$$

С перечисленными выше операциями связаны некоторые законы матричной алгебры. Так, сложение матриц ассоциативно, если матрицы согласованы для сложения. Операция умножения матриц также ассоциативна, если только матрицы согласованы для умножения. Сложение матриц коммутативно в том случае, если матрицы согласованы для сложения. Операции с матрицами удовлетворяют требованиям дистрибутивного закона $A(B + C) = AB + AC$ в том случае, если матрицы B и C согласованы для сложения, а матрицы A и B согласованы для умножения. В общем случае умножение матриц не коммутативно. В трех случаях умножение матриц коммутативно – при умножении матрицы на нулевую матрицу, при умножении матрицы на диагональную матрицу, при умножении матрицы на скалярную величину.

Произведение матрицы на вектор

Произведение матрицы A на вектор является вектором y, т.е. $y = Ax$. Если $y = Ax$ и $x = Bw$, то $y = Abw$, что справедливо для любых векторов x, y, w и любых матриц A, B.

Транспонирование матриц

Транспонированная матрица есть матрица A^{T}, столбцы которой являются строками исходной матрицы при сохранении их порядка. Транспонирование является рефлексивным. Транспонирование вектор-столбца дает вектор-строку и наоборот. Транспонированная сумма матриц равна сумме транспонированных матриц. Транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке, т.е. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. Матрица называется симметрической, если транспонированная матрица равна самой матрице.

Обратная матрица

Матрица, которая в результате умножения на матрицу A равна единичной матрице, называется обратной к A и обозначается символом A^{-1}. Для получения обратной матрицы необходимо:

1) найти определитель исходной матрицы $det\,A$;

2) найти матрицу M из алгебраических дополнений к каждому элементу матрицы A^{T};

3) найти отношение $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{M} / \det \mathrm{A}$.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Ненулевой вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ называется *собственным вектором* квадратной матрицы A порядка $n \times n$, если $Ax = \lambda x$, где λ – некоторое число, называемое *собственным значением* матрицы. При этом говорят, что x есть собственный вектор матрицы A , принадлежащий ее собственному значению λ.

Пусть I – единичная матрица порядка $n \times n$. Уравнение $|A - \lambda I| = 0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы A. Собственные значения матрицы A являются корнями ее характеристического уравнения. Если в матрице A сумма элементов каждого столбца равна 1, то имеется собственный вектор, принадлежащий собственному значению 1.

В соответствии с теоремой Фробениуса–Перрона максимальное по модулю собственное значение λ_A неотрицательной квадратной матрицы $A \geq 0$ неотрицательно, а среди собственных векторов, принадлежащих λ_A, имеется неотрицательный вектор. В случае $A > 0$ все неотрицательные собственные векторы матрицы A положительны и принадлежат только ее максимальному по модулю собственному значению λ_A. Кроме того, в этом случае любые два положительных собственных вектора y и x отличаются лишь числовым множителем, т.е. $y = \alpha\, x$. Максимальное по модулю собственное значение λ_A неотрицательной матрицы A называется *числом Фробениуса* матрицы A, а соответствующий ему неотрицательный собственный вектор – *вектором Фробениуса* для матрицы A.

2.2. Моделирование межотраслевых связей

Межотраслевое моделирование является частью макроэкономического моделирования и служит для анализа и оценки состояния общего экономического равновесия национальной экономики. Национальная экономика в межотраслевом балансе представлена рядом чистых отраслей, связанных между собой финансовыми потоками от реализации продукции, работ и услуг. Чистые отрасли – это условные отрасли, представляющие производство одного или нескольких однородных продуктов.

Экономические связи между чистыми отраслями, непроизводственной сферой и внешним миром при производстве и распределении продукции, работ и услуг представляются в стоимостном выражении с помощью таблицы межотраслевого баланса (МОБ).

Структура табл. 2.1 представлена тремя заполненными квадрантами. Все показатели производства и распределения продукции, работ и услуг даны в стоимостном выражении за год.

Таблица 2.1

Таблица межотраслевого баланса производства и распределения продукции, работ и услуг

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Производящие отрасли</td><td>Потребляющие отрасли</td><td rowspan="2">Конечный продукт, X</td><td rowspan="2">Валовой продукт, Y</td></tr>
<tr><td>→
1 2 3 … j … n</td></tr>
<tr><td rowspan="1">Производящие отрасли</td><td>1
2
3
↓
i
:
n</td><td>X_{11} … X_{1n}
X_{21} … X_{2n}
X_{31} … X_{3n}
.
1
X_{i1} X_{ij} X_{in}
:
X_{n1} … X_{nn}</td><td>Y_1
Y_2
Y_3
.
2
.
.
Y_n</td><td>X_1
X_2
X_3
.
.
.
X_n</td></tr>
<tr><td colspan="2">Амортизация</td><td>C_1 C_2 C_n</td><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Оплата труда</td><td>V_1 V_2 3 V_n</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чистый доход</td><td>m_1 m_2 m_n</td></tr>
<tr><td colspan="2">Валовой продукт</td><td>X_1 X_2 X_n</td><td></td><td></td></tr>
</table>

В первом квадранте отражены данные о взаимных поставках продукции, работ, услуг между отраслями. Первый квадрант называется квадрантом промежуточного потребления и характеризует промежуточное потребление (затраты) или промежуточный спрос отраслей при производстве продукции, работ, услуг:

X_{ij} – стоимость продукции i-й отрасли, поставленной в j-ю отрасль в течение года, или стоимость продукции i-й отрасли, потребленной j-й отраслью в течение года;

i-я строка – промежуточное потребление продукции i-й отрасли всеми отраслями;

j-й столбец – потребление (затраты) в j-й отрасли продукции всех отраслей при производстве своей продукции;

X_i – стоимость валового продукта, произведенного i-й отраслью в течение года.

Второй квадрант называется квадрантом конечного использования (потребления) или конечного спроса. В нем представлено конечное использование продукции отраслей, распределенное на конечное потребление (C_i), инвестиции (I_i), экспорт (E_i) и импорт (M_i), сальдо во внешней торговле ($E_i - M_i$). Конечное потребление включает потребление домашних хозяйств (населения), государства и некоммерческих организаций.

Третий квадрант называется квадрантом добавленной стоимости**.** В нем представлена добавленная стоимость, присоединенная в отраслях к затратам продукции других отраслей при производстве продукции, работ, услуг. Добавленная стоимость, произведенная в отраслях народного хозяйства, включает: оплату труда (V_j), амортизацию (потребление основного капитала) (C_j), чистый доход (m_j). Четвертый квадрант не заполняется.

В состав отраслей в МОБ входят отрасли материального производства: промышленность (энергетика, машиностроение, легкая и пищевая промышленность, строительство, сельское хозяйство) и отрасли нематериальных услуг (жилищно-коммунальное хозяйство, банковская сфера, здравоохранение, образование, наука и др.). В реальный межотраслевой баланс входит около 30 отраслей. Межотраслевой баланс за прошедший год называется отчетным межотраслевым балансом.

В межотраслевом балансе выполняются следующие балансовые соотношения:

$$\begin{gathered}
X_i = \sum_{j=1}^{N} X_{ij} + C_i + I_i + E_i - M_i, \\
X_j = \sum_{i=1}^{N} X_{ij} + W_j + A_j + P_j + H_j - S_j, \\
\sum_{i=1}^{N} C_i + I_i + E_i - M_i = \sum_{j=1}^{N} W_j + A_j + P_j + H_j - S_j, \\
i, j = 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь i, j – номера отраслей, n – количество отраслей в межотраслевом балансе.

Разность между экспортом и импортом $N_i = E_i - M_i$ называется *сальдо внешней торговли* в i-й отрасли.

Суммы $C=\sum_{j=1}^{n} C_j$, $I=\sum_{j=1}^{n} I_j$, $E=\sum_{j=1}^{n} E_j$, $M=\sum_{j=1}^{n} M_j$ называются соответственно *конечным потреблением*, *валовыми инвестициями*, *экспортом* и *импортом* в целом по народному хозяйству. Разность $N=E-M$ представляет собой сальдо во внешней торговле в целом по стране и является суммой сальдо внешней торговли всех отраслей.

Если обозначить

$$\begin{aligned} Y_i &= C_i + I_i + E_i - M_i, \\ Z_j &= W_j + A_j + P_j + H_j - S_j, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где Y_i – конечное использование (непроизводственное потребление) продукции, Z_j – добавленная стоимость в i-й отрасли, то соотношения (2.1) примут вид

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{j=1}^{N} X_{ij} + Y_i, \\ X_j &= \sum_{i=1}^{N} X_{ij} + Z_j, \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i &= \sum_{j=1}^{N} Z_j. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Величина $V=C+I+E-M=C+I+N$ называется валовым внутренним продуктом (ВВП), произведенным в стране за год.

2.3. Статическая модель межотраслевого баланса Леонтьева

Если ввести величины $a_{ij}=\dfrac{X_{ij}}{X_j}$, то балансовые соотношения (2.3) запишутся в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} X_j + Y_i, \; i=1,...,n. \tag{2.4}$$

$$X_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} X_j + Z_j, \; j=1,...,n. \tag{2.5}$$

Определение 1. Числа a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат. Их экономический смысл состоит в том, что они представляют собой долю продукции i-й отрасли в затратах на производство единицы (одного рубля) продукции j-й отрасли.

Из (2.3) следует, что $0 \le a_{ij} < 1$. Из соотношения (2.5) следует, что

$$Z_j = (1-\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) X_j. \tag{2.6}$$

Доля добавленной стоимости в валовом выпуске отраслей равна

$$\frac{Z_j}{X_j} = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и условия $Z_j > 0$ следует, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$.

Величины $M_j = X_j - Z_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j$ называются полными затратами в i-й отрасли при производстве продукции, работ, услуг. Доля затрат в валовом выпуске отраслей равна

$$\frac{M_j}{X_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \tag{2.8}$$

Если ввести векторы $X = (X_1,..., X_n)^T$, $Y = (Y_1,...,Y_n)^T$, $Z = (Z_1,...,Z_n)^T$ (T – символ транспонирования) и матрицу $A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$, то соотношения (2.4) можно записать в матричном виде

$$X = A \cdot X + Y$$
или (2.9)
$$(E - A) \cdot X = Y.$$

Уравнения (2,4), (2,6), (2.9) называются статической моделью межотраслевого баланса Леонтьева. По отношению к уравнениям (2.9) могут быть поставлены три задачи:

а) при заданном векторе X найти Y; б) при заданном Y найти X; в) при заданной части переменных X и Y найти остальные переменные.

Если $\det(E - A) \neq 0$, то из (2.9) следует

$$X = (E - A)^{-1}\ Y. \tag{2.10}$$

Определение 2. Матрица A называется матрицей прямых затрат, а матрица $B = (E - A)^{-1}$ – матрицей полных затрат.

Экономический смысл матрицы полных затрат состоит в том, что ее столбцы являются векторами валовых выпусков отраслей, необходимых для производства единицы конечной продукции соответствующих отраслей.

При вычислении матрицы $B = (E - A)^{-1}$ используется формула обращения произвольной матрицы C

$$C^{-1} = \frac{\overline{C}^T}{\det C}, \tag{2.11}$$

где $\overline{C}$ – матрица алгебраических дополнений для C и $\det C \neq 0$.

Свойства матриц прямых и полных затрат:

1. Матрица $A \geq 0$.

2. Матрица $A \geq 0$ называется продуктивной, если $(E - A)^{-1} \geq 0$.

3. Из продуктивности матрицы A и (2.10) следует, что при любом положительном векторе непроизводственного потребления $Y > 0$ отвечающий ему вектор валового продукта тоже положителен $X > 0$.

Для того чтобы матрица A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из условий:

1. Все главные миноры матрицы $(E – A)$ положительны.
2. Матричный ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots$ сходится к $(E – A)^{-1}$.

Достаточным условием продуктивности является следующее: если сумма элементов в каждом столбце матрицы A меньше 1, то матрица A продуктивная. В межотраслевом балансе это условие ввиду ненулевой добавленной стоимости выполняется всегда.

2.4. Индексы цен в модели межотраслевого баланса

Предположим, что по отношению к межотраслевому балансу (см. табл. 2.1) в будущем году прогнозируется изменение цен в каждой отрасли j в p_j раз по отношению к текущему году при тех же натуральных значениях векторов X и Y (величины p_j называются индексами изменения цен). Тогда в таблицу МОБ можно ввести индексы цен и получить новую таблицу (табл. 2.2), по которой можно построить модель равновесных цен.

Таблица 2.2

Межотраслевой баланс с учетом индекса цен

Отрасли	Промежуточное потребление				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	n		
1	p_1X_{11}		…	p_1X_{1n}	p_1Y_1	p_1X_1
2	p_2X_{21}		…	p_2X_{2n}	p_2Y_2	p_2X_2
			…		…	...
n	p_nX_{n1}		…	p_nX_{nn}	p_nY_n	p_nX_n
Добавленная стоимость	Z'_1		…	Z'_n		
Валовой продукт	p_1X_1		…	p_nX_n		

В табл. 2.2 также выполняются балансовые соотношения

$$
\begin{aligned}
&p_iX_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iX_j + p_iY_i,\\
&p_jX_j = \sum_{i=1}^{n} p_iX_{ij} + Z'_j,\\
&i, j = 1,2,\ldots,n,\\
&\sum_{j=1}^{n} Z'_j = \sum_{i=1}^{n} p_iY_i,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

где Z'_j – новые значения добавленной стоимости.

Разделив соотношения (2.12) на X_j, получим уравнения для вектора индексов цен (модель равновесных цен)

$$p_j = \sum p_i a_{ij} + d_j ,$$
$$\sum_{j=1}^{n} d_j X_j = \sum_{i=1}^{n} p_i Y_i , \qquad (2.13)$$

где $d_j = \dfrac{Z'_j}{X_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

В матричном виде уравнения (2.13) запишутся как

$$p = pA + d ,$$
$$(d, X) = (p, Y), \qquad (2.14)$$
$$p > 0, d > 0 ,$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – вектор-строка индексов цен; $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – вектор-строка долей добавленной стоимости в валовом выпуске отраслей в новом варианте межотраслевого баланса.

При выполнении первого соотношения в (2.14) второе выполняется тождественно. Действительно, из (2.14) получаем соотношение

$$p(E - A) = d . \qquad (2.15)$$

Подставляя его во второе соотношение (2.14), получим

$$(d, X) = (p(E - A), X) = (p, (E - A)X) = (p, Y).$$

Таким образом, для определения вектора индексов цен достаточно решить систему уравнений (2.15), откуда получаем

$$p = d(E - A)^{-1}$$

или (2.16)

$$p^T = ((E - A)^{-1})^T d^T ,$$

где ^{T} – символ транспонирования, векторы p и d являются строками, а векторы p^T и d^T являются столбцами.

Если матрица A продуктивна, то уравнения (2.15), (2.16) имеют положительное решение $p > 0$, если $d > 0$.

Значения векторов X и Y в этой модели имеют вид

$$X' = (p_1 X_1, p_2 X_2, \ldots, p_n X_n),$$
$$Y' = (p_1 Y_1, p_2 Y_2, \ldots, p_n Y_n). \qquad (2.17)$$

Из табл. 2.2 и соотношения (2.12) следует, что модель Леонтьева для значений векторов (2.17) будет иметь вид

$$X' = A' X' + Y' , \qquad (2.18)$$

где $A' = \left\| a_{ij} \dfrac{p_i}{p_j} \right\|$.

Таким образом, коэффициенты прямых затрат нового межотраслевого баланса выражаются через старые коэффициенты и индексы цен следующим образом:

$$a'_{ij} = a_{ij} \frac{p_i}{p_j} . \qquad (2.19)$$

По отношению к уравнениям (2.14) могут быть поставлены три задачи: а) при заданном векторе d найти вектор p; б) при заданном векторе p найти d; в) при заданной части переменных векторов p и d найти остальные переменные.

Балансовую модель (2.16), двойственную к модели Леонтьева, называют *моделью равновесных цен*. Модель равновесных цен позволяет прогнозировать цены на продукцию отраслей при известных значениях величин норм добавленной стоимости. Кроме того, модель равновесных цен позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

В заключение отметим, что с помощью межотраслевого баланса решают следующие задачи:

1. По таблице межотраслевого баланса найти матрицу прямых и полных затрат.
2. Задав вектор конечной продукции, определить вектор валовой продукции.
3. Задав вектор валовой продукции, определить вектор конечной продукции.
4. Задав по одним компонентам вектор конечной продукции, а по другим – вектор валовой продукции, определить неизвестные значения векторов.
5. При новых значениях добавленной стоимости найти индексы цен и построить новую таблицу межотраслевого баланса.
6. По заданной матрице прямых затрат и вектору конечной продукции, установить продуктивность матрицы прямых затрат, определить коэффициенты полных затрат.
7. Найти векторы валового выпуска, добавленной стоимости, затрат, доли затрат и добавленной стоимости в валовом продукте, межотраслевые поставки продукции, составить таблицу межотраслевого баланса.

2.5. Модель международной торговли (модель обмена)

Рассмотрим n стран – участниц торговли с государственными бюджетами X_1, X_2, ..., X_n. Будем считать, что весь бюджет каждой страны тратится на закупку товаров либо внутри страны либо на импорт из других стран.

Пусть a_{ij} – часть бюджета, которую страна j тратит на закупку товаров страны i. Тогда можно ввести структурную матрицу торговли с неотрицательными элементами $A = (a_{ij})$, сумма элементов каждого столбца которой равна единице. После подведения итогов торговли за год страна i получит выручку

$$p_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n.$$

Для того чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитной торговли для каждой страны, т.е. выполнения условия $p_i \geq X_i$ для всех i. Условием бездефицитной торговли являются равенства $p_i = X_i$ для всех i. В матричном виде это условие запишется как $AX = X$, где $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$. Из этого условия следует, что вектор бюджетов X является собственным вектором структурной матрицы торговли A, а соответствующее ему собственное значение равно 1. Это собственное значение матрицы является числом Фробениуса, т.е. максимальным собственным значением. Сбалансированность торговли стран-участниц может быть достигнута только в том случае, когда бюджеты их стран находятся в отношении, в котором находятся компоненты собственного вектора матрицы торговли.

По теореме Фробениуса–Перрона уравнение $AX = X$ всегда имеет ненулевое неотрицательное решение. Поскольку бюджет любой страны неотрицателен ($X_j > 0$), то интерес представляют только положительные решения $X > 0$ данного уравнения. В случае $A > 0$ существование положительного решения следует из теоремы Фробениуса-Перрона. В то же время, если какая-то страна j не импортирует товары из страны i, то матрица A не является положительной. Существует ли в этом случае положительное решение уравнения $AX = X$? Для ответа на этот вопрос вводится понятие *цепочки импорта*.

Говорят, что страны i и j связаны цепочкой импорта от i к j, если существует цепочка стран с началом в стране i и концом в стране j, в которой каждая последующая страна импортирует товары из предыдущей страны.

Имеет место *теорема о цепочке*: если в модели международной торговли структурная матрица A такова, что любые две страны i и j можно связать цепочкой импорта от i к j, то уравнение $AX = X$ имеет положительное решение $X > 0$, единственное с точностью до умножения на число. Заметим, что если A – неотрицательная матрица порядка $n \times n$, то для установления возможности соединения любых i и j цепочкой чисел, в которой любые два соседних числа k и l таковы, что $a_{kl} > 0$, достаточно построить замкнутую цепочку, содержащую (возможно с повторениями) все натуральные числа от 1 до n.

Например, для матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

имеется замкнутая цепочка (1-4-3-2-1); любые два натуральных числа i и j ($i \le 4$, $j \le 4$) можно соединить цепочкой от i к j, используя участки цепочки (1-4-3-2-1).

2.6. Динамическая модель Леонтьева

Рассмотренная выше модель межотраслевого баланса является статической, поскольку в ней все соотношения отнесены к одному моменту времени. Инвестиции (капиталовложения), представленные во втором квадранте, включены в конечный продукт. В этой модели не анализируется распределение, использование и производственная эффективность капитальных вложений.

В динамических моделях отражается процесс развития экономики. В них производственные капитальные вложения выделяются из состава конечной продукции, исследуется их структура и влияние на рост объема производства.

Схема динамического межотраслевого баланса представлена в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Динамический межотраслевой баланс

Отрасли	Промежуточное потребление (текущие затраты)	Валовые инвестиции (изменение основных и оборотных средств)	Конечное потребление, Y	Валовой продукт, X
	1 2 … … n	1 2 … ... n		
1	x_{11} x_{12} … x_{1j} … x_{1n}	K_{11} K_{12} … … K_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21} x_{22} … x_{2j} ... x_{2n}	K_{21} K_{22} … … K_{2n}	Y_2	X_2
…	… … … …	… … … …	…	…
n	x_{n1} x_{n2} … x_{nj} ... x_{nn}	K_{n1} K_{n2} … … K_{nn}	Y_n	X_n

Табл. 2.3 содержит две матрицы, соответствующие первому и второму квадранту статического МОБ. Матрица промежуточного потребления с элементами x_{ij} совпадает с соответствующей матрицей статического баланса.

Элементы второй матрицы показывают, какое количество продукции i-й отрасли направлено в текущем периоде в j-ю отрасль в качестве *производственных капитальных вложений в основные и оборотные средства.* В динамической схеме конечный продукт y_i включает продукцию i-й отрасли, идущую в личное и общественное потребление, накопление непроизводственной сферы, незавершенное строительство, на экспорт. Все показатели даны в стоимостной форме.

В таблице выполняются следующие балансовые соотношения:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \sum_{j=1}^{n} K_{ij} + Y_i \;, i = 1 - n . \qquad (2.20)$$

Как и в статической модели, $X_{ij} = a_{ij}X_j$. Межотраслевые потоки капитальных вложений относятся к периоду (t-1,t). Динамика задается дополнительными соотношениями

$$K_{ij} = \varphi_{ij}\Delta X_j, \quad \Delta X_j = X_j(t) - X_j(t-1). \qquad (2.21)$$

Экономический смысл коэффициентов $\varphi_{ij} = K_{ij}/\Delta X_j$ следующий: они показывают, какое количество продукции i-й отрасли должно быть вложено в j-ю отрасль для увеличения выпуска ее продукции на единицу в рассматриваемых единицах измерения. Коэффициенты φ_{ij} называются *коэффициентами капитальных вложений* или коэффициентами приростной фондоемкости. Систему уравнений (2.20) с учетом (2.21) можно записать как

$$X_i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j(t)+\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(X_j(t)-X_j(t-1))+Y_i(t), i=1-n\ . \tag{2.22}$$

Представим (2.22) в матричном виде

$$\begin{gathered} X(t)=A\cdot X(t)+\Phi\cdot\Delta X(t)+Y(t), \\ A=\| a_{ij} \|, \Phi=\| \phi_{ij} \|, \\ i, j=1, 2..., n. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Из (2.23) следует, что

$$(E-A-\Phi)X(t)=Y(t)-\Phi X(t-1), \quad X(t)=(E-A-\Phi)^{-1}(Y(t)-\Phi X(t-1)). \tag{2.24}$$

Модель (2.22) называется дискретной динамической моделью межотраслевого баланса Леонтьева (ДМОБ). Система уравнений (2.22) представляет собой систему линейных разностных уравнений 1-го порядка. Для исследования данной модели надо задать в начальный момент времени векторы $X(0)$ и $Y(t)$ для $t = 1, 2, \ldots, T$. Решением модели будут значения векторов $X(t)$, $K(t)$, $t = 1, 2, \ldots, T$.

Условием разрешимости системы (2.22) относительно вектора $X(t)$ является требование $\det(E-A-\Phi)\neq 0$.

В данной модели предполагается, что прирост продукции в периоде $(t-1, t)$ обусловлен капиталовложениями, произведенными в том же периоде. Для коротких периодов это предположение нереально, т.к. существуют отставания во времени (временные лаги) между вложением средств в производственные фонды и приростом выпуска продукции. Модели, учитывающие лаги капитальных вложений, образуют особую группу динамических моделей МОБ.

Если перейти к непрерывному времени, то уравнения (2.22) перепишутся в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}\frac{dx_j}{dt}+y_i. \tag{2.25}$$

Для ее решения помимо матриц коэффициентов текущих прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$ и коэффициентов капитальных затрат $\Phi = (\varphi_{ij})$ необходимо знать уровни валового выпуска в начальный момент времени $t = 0$ $(x(0))$ и закон изменения величин конечного продукта $y(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Решением системы уравнений (2.25) будут значения вектор-функции $x(t)$ на отрезке $[0, T]$. Условием разрешимости системы (2.25) является $\det\Phi\neq 0$.

Более общей динамической межотраслевой моделью является модель, учитывающая производственные мощности отраслей. Она представлена ниже в виде следующих соотношений:

$$x_t \geq Ax_t+\Phi v_t+y_t, \tag{2.26}$$

$$x_t \leq \bar{x}_t, \tag{2.27}$$

$$\overline{x_{t+1}} = (E - y)\,\overline{x_t} + v_t\,, \tag{2.28}$$
$$y = diag\,(y_1, y_2, ..., y_n),\, 0 < y_i < 1, \tag{2.29}$$
$$(L_t, x_t) \le L_t\,,$$
$$x_t \ge 0, v_t \ge 0, \overline{x_t} \ge 0, L_t \ge 0, t = 1, 2, ..., T\,.$$

Состояние экономики в году t характеризуется в динамике следующими переменными:

X_t – вектор-столбец валовых выпусков отраслей;

v_t – вектор ввода отраслевых мощностей;

γ – диагональная матрица выбытия мощностей;

$\overline{x}_t$ – вектор-столбец отраслевых мощностей (максимально возможных выпусков);

$l_t = (l_1, l_2, ..., l_n)_t$ – вектор трудоемкости отраслевых производств, может зависеть от времени;

L_t – объем трудовых ресурсов в экономике.

Время в модели дискретно и изменяется через промежутки, равные году ($t = 1, 2, \ldots, T$). Коэффициенты матрицы прямых затрат $A = \|aij\|$ и матрицы капиталоемкости прироста производственных мощностей $\Phi = \|\phi ij\|$ могут зависеть от времени. Экзогенно заданы вектор-функция Y_t и числовая функция L_t. Решением модели являются векторы X_t и $\overline{x}_t$, удовлетворяющие системе неравенств (2.26)-(2.29).

Неравенства (2.26) показывают, что вектор валового продукта X_t должен обеспечивать текущие производственные затраты AX_t, затраты продукции на ввод производственных мощностей ΦV_t и на непроизводственное потребление Y_t. Неравенства (2.27) ограничивают валовые выпуски отраслей наличными мощностями, неравенства (2.28) представляют собой отраслевые балансы изменения производственных мощностей с учетом их выбытия и ввода, неравенства (2.29) показывают, что общая занятость ограничена имеющимися трудовыми ресурсами.

2.7. Модель Неймана

В модели Неймана представлены n продуктов и m способов их производства. Каждый j-й способ задается вектор-столбцом затрат продуктов a_j и вектор-столбцом выпусков продуктов b_j в расчете на единицу интенсивности процесса:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.30}$$

Это означает, что при единичных интенсивностях j-го производственного процесса потребляется вектор продуктов a_j и производится продуктов b_j. Векторы (2.30) рассматриваются в натуральных единицах или в постоянных ценах.

Из векторов затрат и выпуска образуются матрицы затрат A и выпусков B с неотрицательными коэффициентами затрат a_{ij} и выпусков b_{ij}:

$$A=(a_1,...,a_n)=\|a_{ij}\|,\ B=(b_1,...,b_n)=\|b_{ij}\|.$$

Матрицы A и B обладают следующими свойствами:

1) $a_{ij}\ge 0, b_{ij}\ge 0$, т.е. все элементы матриц неотрицательны;

2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}>0, j=1-m$, что означает: в каждом из m способов производства потребляется хотя бы один продукт;

3) $\sum_{j=1}^{m} b_{ij}>0, i=1-n$, что означает: каждый продукт производится хотя бы одним способом производства.

Таким образом, каждый столбец матрицы A и каждая строка матрицы B должны иметь по крайней мере один положительный элемент.

Через $X(t)$ обозначим вектор-столбец интенсивностей

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_m(t) \end{pmatrix}\ge 0,\ t=1, 2, ..., T.$$

Тогда $AX(t)$ – вектор затрат, $BX(t)$ – вектор выпусков при заданном векторе $X(t)$ интенсивностей процессов.

Модель Неймана является обобщением динамической модели межотраслевого баланса Леонтьева, поскольку допускает производство одного продукта несколькими способами производства, и совпадает с ней, если $B = E$.

В модели Неймана имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &AX(t+1)\le BX(t), \\ &X(t)\ge 0,\ X(t+1)\ge 0. \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Соотношения (2.31) означают, что при производстве продукции в году $(t + 1)$ расходуется продукция, произведенная в году t.

Вектор $p(t)=(p_1(t), p_2(t),..., p_n(t))\ge 0$ называется вектором цен продуктов, произведенных в году t, если он удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &p(t+1)B\le p(t)A, \\ &p(t)AX(t+1)=p(t)BX(t), \\ &p(t+1)BX(t)=p(t)AX(t). \end{aligned} \qquad (2.32)$$

Если коэффициенты матриц A и B – стоимостные величины в постоянных ценах, то $p(t)$ будет вектором индексов цен.

Первое векторное неравенство в (2.32) означает, что стоимость выпуска продукции для каждого технологического способа производства в году $t + 1$ не может быть больше стоимости затрат в ценах года t.

Из (2.31) и (2.32) следует, что имеют место следующие соотношения

$$p_i(t)=0, \text{если} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_j(t+1) < \sum_{j=1}^{m} b_{ij} X_j(t),$$
$$X_j(t)=0, \text{если} \sum_{i=1}^{n} p_i(t+1) b_{ij} < \sum_{i=1}^{n} p_i(t) a_{ij}. \tag{2.33}$$

Первое соотношение в (2.33) означает, что цена i-го продукта в году t равна нулю, если его выпуск в году t будет больше его затрат в году $(t + 1)$.

Второе соотношение (2.33) означает, что j-й технологический процесс в году t не будет применяться (интенсивность равна нулю), если стоимость затрат по нему в году t больше стоимости его выпуска в году $(t + 1)$.

Определение 3. Векторы $X(t)$ и $p(t)$, $t = 1, 2, \ldots, T$ называются траекторией сбалансированного роста в модели Неймана, если они удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} X(t+1)=(1+\lambda) X(t), \\ p(t+1)=(1+\rho)^{-1} p(t), \\ \text{где}\, \lambda>0, \rho>0. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Здесь λ – темп, ρ – норма процента сбалансированного роста.

Из (2.34) следует, что в состоянии сбалансированного роста значения компонент вектора $X(t)$ пропорционально возрастают, а вектора $p(t)$ – снижаются. При этом имеют место соотношения

$$\begin{gathered} X(t+1)=(1+\lambda)^t X(0), \\ p(t+1)=(1+\rho)^{-t} p(0), \end{gathered} \tag{2.35}$$

где $X(0)$ и $p(0)$ – начальные значения векторов в году $t = 0$.

Из (2.34), (2.35) следует, что на траектории сбалансированного роста должны выполняться соотношения

$$\begin{gathered} (1+\lambda) AX(t) \le BX(t), \\ p(t) B \le (1+\rho) p(t) A, \\ (1+\lambda) p(t) AX(t) = p(t) BX(t), \\ p(t) BX(t) = (1+\rho) p(t) AX(t). \\ X(t) \ge 0, p(t) \ge 0, \\ \lambda>0, \rho>0. \end{gathered} \tag{2.36}$$

Вопрос о существовании траекторий сбалансированного роста решается следующими теоремами.

Первая теорема Неймана. Если матрицы A и B удовлетворяют свойствам 1-3, то система неравенств (2.36) имеет решение $X(t), p(t), \lambda, \rho$, т.е. в модели Неймана существуют траектории сбалансированного роста.

Вторая теорема Неймана. Существует решение $X^*(t), p^*(t), \lambda^*, \rho^*$ системы (2.36), у которого будет максимальный темп роста $\lambda^* \geq \lambda$ и минимальная норма процента $\rho^* \leq \rho$ по сравнению с другими решениями. При этом выполняется соотношение

$$\lambda^* = \rho^* = \frac{p(t)BX(t)}{p(t)AX(t)} - 1. \tag{2.37}$$

Данное решение называется *магистралью*, или траекторией максимального сбалансированного роста в модели Неймана.

В модели Леонтьева задача о максимальном сбалансированном росте (магистрали) будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\max\,(1+\lambda), \\ &X \geq (1+\lambda)AX, \\ &X \geq 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Согласно теореме Фробениуса-Перрона, если A продуктивная матрица, то задача (2.38) имеет решение $X^* > 0$, $(1+\lambda^*)$, где $(1+\lambda^*)$ равно наименьшему собственному значению матрицы A большему или равному единице, а X^* соответствующий нормированный собственный вектор. При этом в (2.38) будет достигаться равенство.

Контрольные вопросы

1. Что определяет межотраслевой баланс?
2. Какой вид имеет таблица межотраслевого баланса (МОБ) и какой смысл имеют ее квадранты и показатели?
3. Какие балансовые соотношения выполняются в межотраслевом балансе?
4. Какой смысл добавленной стоимости, как она выражается через валовую продукцию и полные затраты?
5. Из каких элементов состоит добавленная стоимость?
6. Что такое статическая модель Леонтьева, каковы ее уравнения?
7. Как определить матрицу полных затрат?
8. Какой смысл матрицы прямых и полных затрат?
9. Что такое продуктивность матрицы А и каковы ее условия?
10. Как определяется вектор индексов цен в МОБ?
11. Какие задачи решаются с помощью модели межотраслевого баланса?
12. Какой вид имеет таблица МОБ для динамической модели?
13. Как записывается дискретная динамическая модель Леонтьева?
14. Какой смысл коэффициентов матрицы Ф?
15. Как записывается непрерывная модель Леонтьева
16. Как записывается модель динамического МОБ с учетом мощностей?
17. Как определяется модель Неймана?
18. Какой экономический смысл неравенств в модели Неймана?
19. Как определяется сбалансированный рост в модели Неймана?
20. Как формулируются теоремы Неймана о сбалансированном росте?

3. Модели сетевого планирования и управления

3.1. Основные понятия и определения

Модели сетевого планирования и управления (модели СПУ) предназначены для планирования и управления сложными комплексами работ (проектами), направленными на достижение определенной цели в заданные сроки (строительство, разработка и производство сложных объектов и др.).

За рубежом система СПУ известна как система PERT (Program Evaluation and Review Technique – метод анализа и оценки программ) или CPM (Critical Path Method – метод критического пути).

Сетевой моделью (СМ) называется экономико-математическая модель, отражающая весь комплекс работ и событий, связанных с реализацией проекта в их логической и технологической последовательности и связи. Математическим аппаратом СМ является теория графов.

Графом называется совокупность двух конечных множеств: множества точек (x_1, x_2, …, x_n), которые называются *вершинами*, и множества пар вершин, которые называются *ребрами* (e_1, e_2, …, e_n). Если пары вершин упорядочены, т.е. на каждом ребре задано направление, ребро называется *дугой*, а граф называется *ориентированным*; иначе – *неориентированным*. Последовательность ребер, ведущая от некоторой вершины к другой вершине, образует *путь***.** Замкнутый путь называется *циклом.* Граф называется *связным*, если для любых двух вершин существует путь, их соединяющий. В противном случае граф называется *несвязным.* Если дугам (i, j) присвоены некоторые числа или *веса* (C_{ij}), то граф называется *нагруженным.* В ориентированном графе вершины, не имеющие входных дуг, называются начальными (источниками), а вершины, не имеющие выходных дуг – конечными (стоками), остальные – промежуточными.

В СПУ применяются связные, ориентированные графы без циклов, имеющие одну начальную и одну конечную вершину.

Основные понятия сетевой модели : *событие*, *работа*, *путь***.**

Работа характеризует любое действие, требующее затрат времени или ресурсов. Работами считаются и процессы, не требующие затрат времени и ресурсов, а устанавливающие зависимости выполнения работ. Такие работы называются *фиктивными.* Работа обозначается парой чисел (i, j), где i – номер события, являющимся начальным для данной работы, j – номер события, являющимся конечным для данной работы, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, являющееся для нее начальным. Каждая работа имеет свою продолжительность $t(i, j)$. Работы на графах обозначаются дугами (стрелками), фиктивные работы обозначаются пунктирными стрелками.

Событиями называются начало или завершение одной или нескольких работ. Они не имеют протяженности во времени. Событие совершается в тот момент, когда оканчивается последняя работа, входящая в него. На графе события изображаются кружками, внутри которых записывается номер события. В моделях СПУ имеется одно начальное событие (номер 0), одно конечное событие или завершающее (номер N) и промежуточные события (номер i). В графической интерпретации сетевой модели работы представляются дугами, а события – вершинами графа.

Путь – цепочка следующих друг за другом работ (дуг), соединяющих начальную и конечную его вершины. *Полный путь L* – путь, начало которого совпадает с начальным событием сети, а конец – с завершающим. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную продолжительность, называют *критическим* (обозначение $L_{кр}$). Продолжительность критического пути обозначается как $t_{кр.}$. Работы, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего комплекса работ.

Сетевая модель должна удовлетворяет следующим требованиям:

1. Не должно быть событий с одинаковыми номерами.
2. Для каждой работы (i, j) должно выполняться $i < j$.
3. Должны быть только одно начальное и одно конечное события.
4. Должны отсутствовать циклы, т.е. замкнутые пути, соединяющие событие с ним же самим.

При выполнении этих требований можно приступать к вычислениям числовых характеристик СМ. Исходные числовые данные СМ представляются в виде таблицы длительности выполнения каждой работы.

3.2. Характеристики элементов сетевой модели

При расчетах для сетевой модели определяются следующие характеристики ее элементов.

Характеристики событий

1. *Ранний срок свершения события* $t_p(0) = 0$, $t_p(j) = max_i\{t_p(i) + t(ij)\}$, $j = 1 – N$ характеризует самый ранний срок завершения всех путей, в него входящих. Этот показатель определяется «прямым ходом» по графу модели, начиная с начального события сети.

2. *Поздний срок свершения события* $t_n(N) = t_p(N)$, $t_n(i) = min_j\{t_n(j) – t(ij)\}$, $i = 1 – (N – 1)$ характеризует самый поздний срок, после которого остается ровно столько времени, сколько требуется для завершения всех путей, следующих за этим событием. Этот показатель определяется «обратным ходом» по графу модели, начиная с завершающего события сети.

3. *Резерв времени события* $R(i) = t_n(i) – t_p(i)$ показывает, на какой максимальный срок можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения всего комплекса работ.

Резервы времени для событий на критическом пути равны нулю, $R(i) = 0$.

Характеристики работы (i, j)

1. *Ранний срок начала работы:* $t_{рн}(i, j) = t_р(i)$.
2. *Ранний срок окончания работы:* $t_{ро}(i, j) = t_{рн}(i, j) + t_{ij} = t_р(i) + t_{ij}$.
3. *Поздний срок начала работы*: $t_{пн}(i, j) = t_п(j) - t_{ij}$.
4. *Поздний срок окончания работы*: $t_{по}(i, j) = t_п(j)$.
5. *Резервы времени работ*:

- *полный резерв* $R_п(i, j) = t_п(j) - t_р(i) - t_{ij}$ – максимальный запас времени, на который можно отсрочить начало или увеличить длительность работы без увеличения длительности критического пути. Работы на критическом пути не имеют полного резерва времени, для них $R_п(i, j) = 0$;
- *частный резерв* $R_1(i, j) = R_п(i, j) - R(i) = t_п(j) - t_п(i) - t_{ij}$ – часть полного резерва, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив позднего срока ее начального события;
- *свободный резерв* $R_c(i, j) = R_п(i, j) - R(j) = t_р(j) - t_р(i) - t_{ij}$ – максимальный запас времени, на который можно задержать начало работы или (если она началась в ранний срок) увеличит ее продолжительность, не изменяя ранних сроков начала последующих работ;
- *независимый резерв* $R_н(i, j) = R_п(i, j) - R(i) - R(j) = t_р(j) - t_п(i) - t_{ij}$ – запас времени, при котором все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие – начинаются в ранние сроки. Использование этого резерва не влияет на величину резервов времени других работ.

Сделаем ряд замечаний. Работы, лежащие на критическом пути, резервов времени не имеют. Если на критическом пути $L_{кр}$ лежит начальное событие i работы (i, j), то $R_п(i, j) = R_1(i, j)$. Если на $L_{кр}$ лежит конечное событие j работы (i, j), то $R_п(i, j) = R_c(i, j)$. Если на $L_{кр}$ лежат и событие i, и событие j работы (i, j), а сама работа не принадлежит критическому пути, то $R_п(i, j) = R_c(i, j) = R_н(i, j)$.

Характеристики путей

1. *Продолжительность пути* равна сумме продолжительностей составляющих ее работ.
2. *Резерв времени пути* равен разности между длинами критического пути и рассматриваемого пути.

Резерв времени пути показывает, на сколько может увеличиться продолжительность работ, составляющих данный путь, без изменения продолжительности срока выполнения всех работ.

В сетевой модели можно выделить так называемый *критический путь*. Критический путь $L_{кр}$ состоит из работ (i, j), у которых полный резерв времени равен нулю $R_п(i, j) = 0$, кроме этого, резерв времени $R(i)$ всех событий i на критическом равен 0. Длина критического пути определяет величину наиболее длинного пути от начального до конечного события сети и равна

$t_{кр} = t_р(N) = t_п(N)$. Заметим, что в проекте может быть несколько критических путей.

3. *Коэффициент напряженности работ*

Для оценки трудности своевременного выполнения работ служит коэффициент напряженности работ:

$$K_н(i, j) = (t(L_{max}) - t_{кр}) / (t_{кр} - t'_{кр}) = 1 - R_п(i, j) / (t_{кр} - t'_{кр}),$$

где $t(L_{max}(i, j))$ – продолжительность максимального пути $L_{max}(i, j)$, проходящего через работу (i, j); $t'_{кр}$ – продолжительность отрезка пути $L_{max}(i, j)$, совпадающего с критическим путем.

Видно, что $K_н(i, j) < 1$. Чем ближе $K_н(i, j)$ к 1, тем сложнее выполнить данную работу в установленный срок. Напряженность критических работ полагается равной 1. Все работы сетевой модели могут быть разделены на 3 группы: напряженные ($K_н(i, j) > 0{,}8$), надкритические ($0{,}6 < K_н(i, j) < 0{,}8$) и резервные ($K_н(i, j) < 0{,}6$).

В результате перераспределения ресурсов стараются максимально уменьшить общую продолжительность работ, что возможно при переводе всех работ в первую группу.

Линейный график Гранта

Для сетевого графика часто строится линейный график Грантта, на котором обозначаются ранние времена начала и продолжительности всех работ. На графике Гранта каждая работа (i, j) обозначена отрезком, который имеет длину t_{ij} и начинается в ранний срок $t_р(i)$ начального события (рис. 3.1).

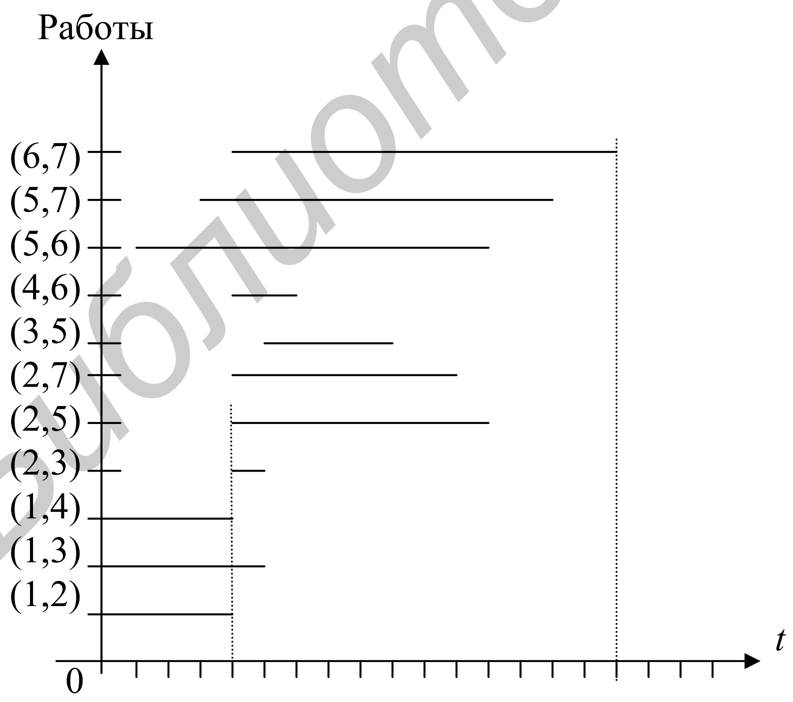


Рис. 3.1. Линейный график Гранта

На графике Гранта видны ранние времена начала, окончания и продолжительность каждой работы и параллельно выполняемые работы. По графику легко определить время завершения всего проекта t_{kp}.

3.3. Пример вычисления характеристик сетевого графика

Пример. Определить характеристики сетевого графика, длительности работ которого представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

События (*i*)	События (*j*)						
1	–	4	5	4	–	–	–
2	–	–	3	–	7	–	8
3	–	–	–	–	4	–	–
4	–	–	–	–	–	2	–
5	–	–	–	–	–	1	3
6	–	–	–	–	–	–	4
7	–	–	–	–	–	–	–

Необходимо найти ранние и поздние сроки свершения событий, рассчитать резервы времени всех работ, определить напряженности работ и критические пути.

Решение. С помощью табл. 3.1 строится сетевой график (рис. 3.2) и рассчитываются все характеристики событий и работ.

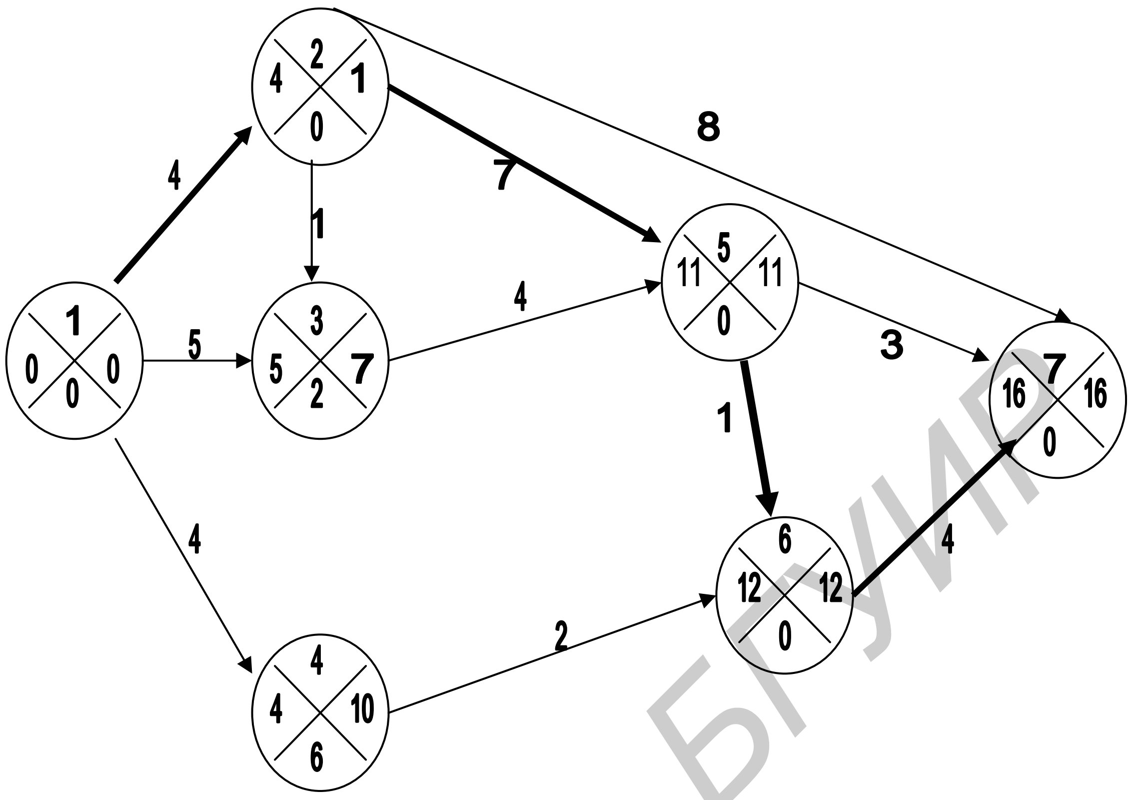


Рис. 3.2. Сетевой график с характеристиками событий

1. Рассчитаем характеристики событий. При определении ранних сроков наступления событий двигаемся по сетевому графику слева направо и используем формулы $t_p(0) = 0$, $t_p(j) = max_i\{t_p(i) + t(i, j)\}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. При определении поздних сроков наступления события двигаемся по сетевому графику справа налево и используем формулы $t_n(N) = t_p(N)$, $t_n(i) = min_j\{t_n(j - t(ij))\}$, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$. Для наглядности каждое событие сетевого графика разделено на 4 сектора. Верхний сектор соответствует номеру события, в левом секторе записан ранний срок $t_p(i)$ наступления события i, в правом – поздний срок $t_n(i)$ наступления события i, в нижнем секторе представлен резерв времени $R(i)$ события i. Эти же характеристики представлены в таблице, приведенной ниже.

i	$t_p(i)$	$t_n(i)$	$R(i)$
1	0	0	0
2	4	4	0
3	5	7	2
4	4	10	6
5	11	11	0
6	12	12	0
7	16	16	0

Анализ таблицы и сетевого графика показывает, что критический путь имеет вид (1-2-5-6-7), а его длина равна $t_{кр} = 16$.

2. Перейдем к определению характеристик работ. Отдельная работа может начаться и окончиться в ранние, поздние или другие промежуточные сроки. В дальнейшем при оптимизации сетевого графика возможно любое размещение работ в заданном интервале.

Расчет сроков начала и окончания работ проводим по формулам

$$t_{рн}(i, j) = t_р(i),\ t_{ро}(i, j) = t_р(i) – t_{ij},\ t_{пн}(i, j) = t_п(j) – t_{ij},\ t_{по}(i, j) = t_п(j).$$

Расчет резервов времени работ проводим по формулам

$$R_п(i, j) = t_п(j) – t_р(i) – t_{ij},\ R_1(i, j) = R_п(i, j) – R(i) = t_п(j) – t_п(i) – t_{ij},$$

$$R_с(i, j) = R_п(i, j) – R(j) = t_р(j) – t_р(i) – t_{ij},$$

$$R_н(i, j) = R_п(i, j) – R(i) – R(j) = t_р(j) – t_п(i) – t_{ij}.$$

Все расчеты сведены в табл. 3.2 (столбцы 2-9).

Таблица 3.2

Работы	t_{ij}	$t_{рн}(ij)$	$t_{р0}(ij)$	$t_{пн}$	$t_{п0} = t_п(j)$	$R_п$	R_1	$R_с$	$R_н$	$K_н$
			(2 + 1)	(5 – 1)		(3 – 2 – 1)				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1, 2)	4	0	4	0	4	0	0	0	0	–
(1, 3)	5	0	5	2	7	2	4	2	2	0,8
(1, 4)	4	0	4	6	10	6	6	0	0	0,5
(2, 3)	1	4	5	6	7	2	2	0	0	0,7
(2, 5)	7	4	11	4	11	0	0	0	0	–
(2, 7)	8	4	12	8	16	4	4	4	4	0,4
(3, 5)	4	5	9	7	11	2	0	2	0	0,7
(4, 6)	2	4	6	10	12	6	0	6	0	0,5
(5, 6)	1	11	12	11	12	0	0	0	0	–
(5, 7)	3	11	14	13	16	2	2	2	2	0,6
(6, 7)	4	12	16	12	16	0	0	0	0	–

Анализ таблицы и сетевого графика показывает, что критический путь имеет вид (1-2-5-6-7), а его длина равна $t_{кр} = 16$.

3. После нахождения критического пути (1-2-5-6-7) длины 16 перейдем к определению напряженности работ. Рассмотрим работу (3, 5) и найдем все полные пути, проходящие через эту работу, и соответствующие им длины:

L_1: 1-2-3-5-7; $t(L_1) = 12$;
L_2: 1-3-5-7; $t(L_2) = 12$;
L_3: 1-3-5-6-7; $t(L_3) = 14$;
L_4: 1-2-3-5-6-7; $t(L_4) = 14$.

Через работу (3,5) проходит два максимальных пути длины 14. Выберем второй из них. Тогда $t'_{кр} = 9$ – длина части (1-2, 5-6-7) пути (1-2-3-5-6-7), совпадающей с критическим путем (1-2-5-6-7). Воспользуемся формулой расчета коэффициента напряженности, в результате получим, что

$$R_н(3, 5) = 1 - R_п(3, 5) / (t_{кр} - t'_{кр}) = 1 - 2 / (16 - 9) = 0{,}7.$$

Для расчета коэффициента напряженности работ надо построить список всех полных путей сетевого графика. Для этого используется специальный алгоритм, основанный на преобразовании сетевого графика в многоуровневый граф типа «дерева», но с повторяющимися вершинами. При построении дерева сетевого графика можно использовать таблицу длительностей работ.

1. Построение «дерева» сетевого графика

На 1-й уровень помещается начальная вершина сетевого графика. На ($n + 1$)-й уровень помещаются все вершины графа, непосредственно связанные с уровнем (n) и соединяются с ним ребрами работ. Расположение вершин на каждом уровне осуществляется слева направо в порядке возрастания номеров.

2. Составление списка всех полных путей сетевого графика

Список путей составляется по крайним правым ребрам, начиная с 1-го уровня. Очередной путь строится снизу вверх при движении по ребрам справа налево.

3.4. Оптимизация сетевого графика по критериям «время – стоимость»

В реальных проектах каждая работа характеризуется не только временем, но и стоимостью выполнения. В этом случае полная стоимость проекта будет равна сумме стоимостей всех входящих в него работ. Могут быть поставлены и решены следующие две задачи оптимизации сетевого графика по критериям «время-стоимость»:

1. Минимизация стоимости проекта при сохранении времени его выполнения t_{kp}.

2. Минимизация времени выполнения t_{kp} при заданной стоимости проекта.

При оптимизации сетевого графика предполагается:

1) уменьшение продолжительности работ ведет к увеличению их стоимости;

2) для каждой работы (i, j) ее продолжительность $t(i, j)$ лежит в пределах $a(i, j) \le t(i, j) \le b(i, j)$, где $a(i, j)$ – минимально возможная продолжительность работы; $b(i, j)$– максимально допустимая продолжительность выполнения работы;

3) стоимость $C(i,j)$ работы заключена в пределах $C_{max}(i, j)$ и $C_{min}(i, j)$.

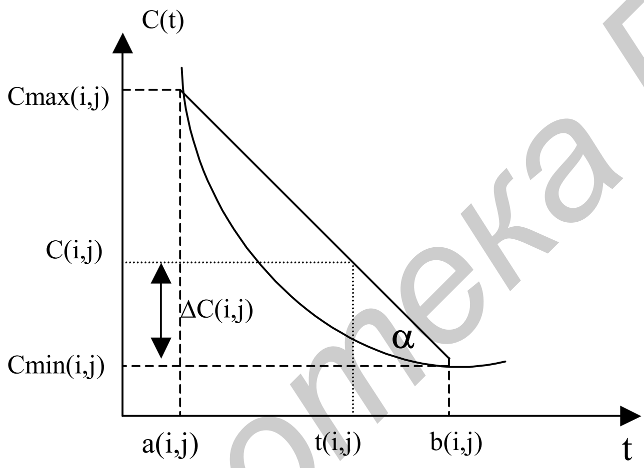


Рис. 3.3. Зависимость стоимости от времени выполнения проекта

Обычно применяют линейную модель зависимости затрат от времени (рис. 3.3). Тогда изменение стоимости работы $\Delta C(i, j)$ при увеличении ее продолжительности на величину $\Delta t(i, j)$ определяется соотношением

$$\Delta C(i, j) = h(i, j) \cdot \Delta t(i, j), \tag{3.1}$$

где $h(i, j)$ показывает изменение затрат при изменении времени выполнения работы (i, j) на единицу и вычисляется по формуле

$$h\,(\mathrm{i,j}) = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{Cmax\,(i,j) - Cmin\,(i,j)}}{\mathrm{b(i,j) - a(i,j)}}. \tag{3.2}$$

Более точной будет нелинейная модель вида

$$C(i,j) = a \cdot t_{ij}^{-b} \qquad (3.3)$$

или линейная логарифмическая модель

$$\ln C(i,j) = \ln a - b \ln t_{ij}. \qquad (3.4)$$

Ниже будет использоваться линейная модель (3.1).

Задача минимизации стоимости проекта

Минимизация стоимости проекта при сохранении t_{kp} достигается увеличением продолжительности выполнения некритических работ на основе использования их свободных резервов времени, т.к. они не влияют на ранние сроки начала последующих работ. Увеличение продолжительности работы (i, j) осуществляется на величину Δt_{ij} до тех пор, пока не будет исчерпан весь свободный резерв времени, или не будет достигнуто максимально допустимое значение продолжительности работы в (i, j), т.е.

$$\begin{aligned} \Delta t_{ij} &= \min\{b_{ij} - t_{ij}, R_c(i,j)\}, \\ \Delta C_{ij} &= h_{ij} \cdot \Delta t_{ij}. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Полная стоимость проекта $C = \sum C(i, j)$ увеличивается на величину $\Delta C = \sum \Delta C_{ij}$.

Пример 3. Провести минимизацию стоимости проекта, сетевой график которого при заданных значениях продолжительности $a(i, j)$, t_{ij}, $b(i, j)$, стоимости $C(i, j)$ и коэффициентов затрат на ускорение h_{ij} представлен на рис. 3.4. Первоначальная стоимость проекта 1216 усл. р.

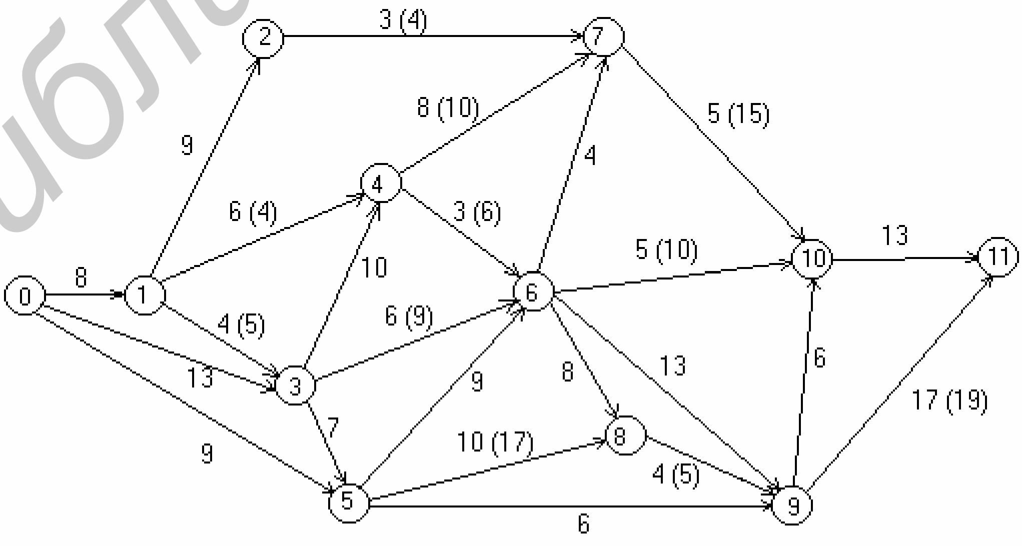


Рис. 3.4. Сетевой график проекта

Решение. Исходные и расчетные значения представлены в табл. 3.3. Заметим, что в таблице приводятся только те работы, для которых $R_c(i, j) > 0$. В результате оптимизации стоимость нового проекта при том же времени выполнения снизилась на 293 единицы и стала равна 923, т.е. уменьшилась почти на 25%. В результате снижения стоимости проекта появились новые критические пути с $t_{кр} = 61$: 0-1-3-4-7-10-11, 0-3-5-8-9-11, 0-1-3-4-6-7-10-11, 0-3-5-6-8-9-11 и т.д. В новом графике из 64 полных путей 28 путей будут критическими.

Таблица 3.3

Работа (i, j)	a_{ij}	t_{ij}	b_{ij}	$R_c(ij)$	C_{ij}	h_{iJ}	Δt_{ij}	ΔC_{ij}	$t^н_{ij} = t_{ij} + \Delta t_{ij}$
0, 5	5	9	14	11	60	8	5	40	14
1, 4	4	6	10	9	28	4	4	16	10
1, 3	3	4	6	1	37	12	1	12	5
2, 7	2	3	7	13	86	6	4	24	7
3, 6	4	6	9	10	92	10	3	30	9
4, 7	3	8	14	2	48	5	2	10	10
4, 6	1	3	6	3	64	12	3	36	6
5, 8	5	10	18	7	15	1	7	7	17
5, 9	3	6	12	16	86	7	6	42	12
6, 10	2	5	10	14	44	5	5	25	10
7, 10	1	5	15	10	74	4	10	40	15
8, 9	2	4	8	1	20	3	1	3	5
9, 11	11	17	23	2	40	4	2	8	19
Итого					694			293	

Задача минимизации времени выполнения проекта

Минимизация времени выполнения проекта возможна только за счет сокращения продолжительности выполнения работ, лежащих на критическом пути L_{kp}. При этом стоимость этих работ и всего проекта увеличится согласно соотношениям (3.1) и (3.6). Для решения этой задачи проводится расчет исходного сетевого графика, а затем выполняется его оптимизация. В начальном сетевом графике продолжительность всех работ может считаться равной максимальному значению ($t_{ij} = b_{ij}$). Далее выполняются следующие действия.

1^0. Составляется список всех полных путей (алгоритм перебора).

2^0. Определяется длительность каждого полного пути.

3^0. Начиная с критических путей, строятся линейные графы всех полных путей с упорядочиванием по убыванию их длительности:

$T_{kp} = T^1 > T^2 > T^3 > \ldots > T^{n-1} > T^n$.

Сверху над каждой работой записывается h_{ij}, а снизу – $(t_{ij} - a_{ij})$ (возможное сокращение ее длительности).

4^0. Начиная с $k = 1$, на каждом шаге k составляется список всех критических путей $\{L^k{}_{kp}\}$. Обозначается их длительность через $T^{\kappa}{}_{kp}$, а стоимость сетевого графика обозначается через C_{κ}. Если все $t_{ij} = a_{ij}$, то расчеты на данном шаге закончены. Переход к 6^0.

5^0. Для путей списка $\{L^k{}_{kp}\}$ определяются работы, подлежащие сокращению по двум возможным вариантам 5.1 и 5.2.

Вариант 5.1. Есть работы, общие для всех путей $\{L^k{}_{kp}\}$. В этом случае выбирается одна общая работа для всех путей в $\{L^k{}_{kp}\}$, для которой минимальна величина h_{ij} и продолжительность ее выполнения не равна минимальному сроку:

$$h^{*}_{pq} = \min h_{ij}\ , \qquad (3.7)$$
$$(i, j) \in \{\mathrm{I}\, L^{k}{}_{kp}\ , t_{ij} > a_{ij}\ \}.$$

Определяется время сокращения длительности выбранной общей работы (p,q) в каждом пути $\{L^k{}_{kp}\}$по формуле

$$\Delta t = min\ \{t_{pq} - a_{pq};\ T^{\kappa}{}_{\kappa p} - T^2\}, \qquad (3.8)$$

т.е. сокращение длительности работы не больше ее минимального времени выполнения и не превышает длительности ближайшего к критическому пути T^2 (шаг 3^0), не вошедшего в список$\{L^k{}_{kp}\}$. Определяется новая продолжительность $t^{н}{}_{pq}$ выбранной работы:

$$t^{н}{}_{pq} = t_{pq} - \Delta t. \qquad (3.9)$$

Согласно (3.9), длительность всех путей $\{L^k{}_{kp}\}$, содержащих работу (p,q), снизится на величину Δt. Определяется новая длина $T^{\kappa+1}{}_{\kappa p}$ путей в $\{L^k{}_{kp}\}$:

$$T^{\kappa+1}{}_{\kappa p} = T^{\kappa}{}_{\kappa p} - \Delta t. \qquad (3.10)$$

С учетом изменения времени выполнения работ проводится пересчет длин всех полных путей:

$$(T^{\kappa+1}{}_{kp} = T^1 > T^2 > T^3 > \ldots > T^{n-1} > T^n).$$

Определяется новая стоимость сетевого графика

$$C_{\kappa+1} = C_{\kappa} + h_{pq}\,\Delta t. \qquad (3.11)$$

Зависимость стоимости сетевого графика от длительности критического пути определяется по формуле

$$C(t) = C + h_{pq}\,(T_{kp} - t), \qquad (3.12)$$
$$T^{\kappa+1}{}_{\kappa p} < t < T^{\kappa}{}_{\kappa p.}$$

Если новая продолжительность $t^{н}{}_{pq} = a_{pq}$, то при решении задач (3.7) исключается работа (p, q), поскольку она не имеет больше резерва снижения.

Увеличиваем шаг на единицу, т.е. полагаем k равным $k + 1$ и осуществляем переход к шагу 4^0 до тех пор, пока $k \neq n$. Иначе идем к 6^0.

Вариант 5.2. В списке $\{L^k{}_{kp}\}$ нет общих работ. В каждом пути $\{L^k{}_{kp}\}$ выбирается по одной работе с минимальным значением h_{ij};

$$h^{*}_{pq} = \min h_{ij}\ , (i, j) \in \{L^{k}{}_{kp}\ , t_{ij} > a_{ij}\ \}. \qquad (3.13)$$

Список этих работ обозначим через $Q = \{(p, \quad q)\}$.Определяется длительность сокращения выбранных работ Δt по формуле (3.8) для всего списка Q.

Определяется новая продолжительность выбранных работы $t^{н}_{pq}$ по формуле (3.9) и новое время $T^{к+1}_{кр}$ для путей $\{L^{k}_{kp}\}$ по формуле (3.10). Осуществляется пересчет длин всех полных путей ($T^{к+1}_{кр} = T^{1} > T^{2} > T^{3} > \ldots >$ $> T^{n-1} > T^{n}$) с учетом изменения времени выполнения работ. Определяется новая стоимость сетевого графика

$$C_{k+1} = C_k + \Delta t \cdot \sum_{pq} h_{pq}\,, \qquad (3.14)$$

где сумма берется по всем выбранным работам. Зависимость стоимости сетевого графика от длительности критического пути определяется по формуле

$$C(t) = C_k + (T^{k}_{kp} - t) \cdot \sum_{pq} h_{pq}\,,\ \text{где} \quad T^{к+1}_{кр} < t < T^{к}_{кр}. \qquad (3.15)$$

Работы, у которых новая продолжительность $t^{н}_{pq} = a_{pq}$, исключаются при решении задачи (3.13), поскольку они не имеют больше резерва снижения.

Увеличиваем шаг k на 1 ($k + 1$) и осуществляем переход к 4^0 до тех пор, пока $k \neq n$. Иначе идем к 6^0.

6^0. На основе формул (3.12) и (3.15) строится график зависимости стоимости сетевого графика от длительности критического пути $C = C(t)$.

7^0. Для определения минимального времени выполнения t^* по заданной стоимости C^* проекта решается уравнение вида $C(t^*) = C^*$.

Сделаем ряд замечаний к данному алгоритму. Дополнительные затраты, связанные с сокращением времени выполнения проекта с t_1 до t_2, равны $C(t_2) - C(t_1)$. Для учета шагов алгоритма следует вести таблицу длительности и стоимости работ и длительности полных путей.

Другим вариантом данного алгоритма является случай, когда начальный сетевой график построен при минимальных сроках выполнения каждой работы, а затем последовательно увеличивают длину критического пути, увеличивая сроки выполнения некритических, а затем и критических работ по критерию максимума коэффициента напряженности h_{ij}.

Пример 4. Провести минимизацию времени выполнения проекта при заданных затратах на его осуществление и построить зависимость стоимости от критического времени $C = C(t)$. Исходные данные задачи сведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4.

№ п/п	Работы	Продолжительность работ		h_{ij}	Стоимость работ при $t_{ij} = b_{ij}$
		a_{ij}	b_{ij}		
1	(0, 1)	10	20	6	35
2	(0, 2)	12	32	3	50
3	(1, 2)	2	12	3	15
4	(1, 3)	2	7	8	10
5	(2, 7)	2	7	3	10
6	(3, 4)	16	26	2	50
7	(3, 5)	8	13	6	15
8	(4, 6)	12	22	4	40
9	(5, 6)	20	25	4	30
10	(6, 7)	8	13	5	25
11	(7, 8)	6	11	9	20
				Итого	300

Находим все полные пути сетевого графика и их длины:

L_1: 0 – 1 – 3 – 4 – 6 – 7 – 8, $t(L_1) = t_{кр} = 99$;

L_2: 0 – 1 – 3 – 5 – 6 – 7 – 8, $t(L_2) = 89$;

L_3: 0 – 1 – 2 – 7 – 8, $t(L_3) = 50$;

L_4: 0 – 2 – 7 – 8, $t(L_4) = 50$.

Для удобства дальнейших расчетов представим эти пути графически в виде цепочек, в которых цифры над каждой работой показывают коэффициенты затрат на ускорение работ h_{ij}, а под стрелками – максимально возможные величины уменьшения продолжительности работ $\Delta t_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$.

$$i \xrightarrow[b_{ij} - a_{ij}]{h_{ij}} j$$

Ниже построены схемы всех полных путей.

$$0 \xrightarrow[10]{6} 1 \xrightarrow[5]{8} 3 \xrightarrow[5]{6} 5 \xrightarrow[5]{4} 6 \xrightarrow[5]{5} 7 \xrightarrow[5]{9} 8 \qquad L_1$$

$$0 \xrightarrow[10]{6} 1 \xrightarrow[5]{8} 3 \xrightarrow[10]{2} 4 \xrightarrow[10]{4} 6 \xrightarrow[5]{5} 7 \xrightarrow[5]{9} 8 \qquad L_2$$

$$0 \xrightarrow[10]{6} 1 \xrightarrow[10]{3} 2 \xrightarrow[5]{3} 7 \xrightarrow[5]{9} 8 \qquad L_3$$

$$0 \xrightarrow[20]{3} 2 \xrightarrow[5]{3} 7 \xrightarrow[5]{9} 8 \qquad L_4$$

1^0. Первоначальная стоимость проекта $C = 300$. Критическим является путь L_2, его длина $t_{кр} = 99$. Уменьшение продолжительности выполнения комплекса можно только за счёт сокращения продолжительности работ пути L_2. Из работ критического пути L_2 наименьший коэффициент h_{ij} имеет работа (3, 4): $h_{34} = 2$. Продолжительность работы (3, 4) можно сократить не более чем на 10 суток. Действительно, $\Delta t = min\{b_{34} - a_{34}, T_{kp} - T^1\} = min\{10, 99 - 89\} = 10$. При этом изменяется длина только критического пути L_2 (с 99 до 89 суток), единственного пути, проходящего через работу (3, 4). Стоимость всего проекта за счет ускорения работы (3, 4) возрастет на $2 \cdot 10 = 20$ единиц и станет равной $300 + 20 = 320$.

Итак, согласно (3.15) получаем $C(t) = 300 + 2(99 - t), 89 \le t \le 99.$ Новые длины путей равны $t(L_1) = t(L_2) = 89$, $t(L_3) = t(L_4) = 50$, $t_{кр} = 89$.

2^0. *Е*сть два критических пути L_1 и L_2 и сократить срок выполнения проекта можно за счет одновременного сокращения их продолжительности, изменяя продолжительность работ, лежащих на этих путях: либо (0, 1), либо (1, 3), либо (6, 7), либо (7, 8). Остановимся на работе (6, 7), поскольку при этом обеспечивается минимум затрат на ускорение. Действительно, из работ критических путей L_1 и L_2 наименьший коэффициент $h_{67} = 5$ имеет работа (6, 7).

Продолжительность работы (*6*,*7*) можно уменьшить не более чем на 5 дней. Действительно , $\Delta t = min\{b_{67} - a_{67}, T_{kp} - T^2\} = min\{5, 89 - 50\} = 5$. На эту величину уменьшатся длины критических путей $t(L_1)$ и $t(L_2)$, а следовательно, и срок выполнения проекта. При этом стоимость работы (6, 7) возрастет на $5 \cdot 5 = 25$ усл. единиц, а для всего проекта она увеличится с 320 до 345 усл.ед. Согласно (3.15), получаем $C(t) = 320 + 5(89 - t), 84 \le t \le 89.$

3^0. С = 345; $t(L_2) = t(L_1) = 84$; $t(L_3) = t(L_4) = 50$; $t_{кр} = 84$. Критическими являются пути L_1 и L_2, $t_{кр} = 84$, $\{L^k_{kp}\} = \{L_1, L_2\}$. Из работ на критических путях L_1 и L_2 наименьший коэффициент h_{ij} имеет работа (0, 1): $h_{01} = 6$. Действительно,

$$h_{min}(i, j) = min(h(0, 1), h(1, 3), h(7, 8)) = min(6, 8, 9) = 6.$$

Продолжительность общей работы (0, 1) на этих путях можно сократить на 10 дней:

$$\Delta t = min\{b_{01} - a_{01}, T_{kp} - T^2\} = min\{10, 84 - 50\} = 10.$$

Согласно (3.15) получаем $C(t) = 345 + 6(84 - t), 74 \le t \le 84.$

Стоимость работы (0, 1) и всего проекта возрастет на $6 \cdot 10 = 60$ единиц, $C_{01} = 35 + 60 = 95$. Новые значения стоимости проекта и длин критических путей: $C = 345 + 6 \cdot 10 = 405$, $t(L_1) = t(L_2) = 74$.

4^0. $C = 405$, $t(L_1) = t(L_2) = 74$, $t(L_3) = 40$, $t(L_4) = 50$. Критическими являются пути L_1 и L_2. $t_{кр} = 74$, $\{L^k_{kp}\} = \{L_1, L_2\}$. $h_{min}(i, j) = min(h(1, 3), h(7, 8)) = min(8, 9) = 8$, $h_{min} = h(1, 3) = 8$. Продолжительность общей работы (1, 3) сокращается на 5 дней:

$$\Delta t = min\{b_{13} - a_{13}, T_{kp} - T^2\} = min\{5, 74–50\} = 5.$$

Согласно (3.15) получаем $C(t) = 405 + 8(74 - t), 69 \le t \le 74.$

Стоимость работы (1, 3) и всего проекта возрастет на $8{\cdot}5 = 40$ единиц, $C_{13} = 10 + 40 = 50$. Новое значение $C = 405 + 8{\cdot}5 = 445$, $t(L_1) = t(L_2) = 69$.

5^0. $C = 445$, $t(L_1) = t(L_2) = 69$, $t(L_3) = 40$, $t(L_4) = 50$. Критическим являются пути L_1 и L_2. $t_{кр} = 69$, $\{L^k{}_{кр}\} = \{L_1, L_2\}$. $h_{min}(i, j) = h(7, 8) = 9$. Продолжительность общей работы (7, 8) сокращается на 5 дней:

$$\Delta t = min\{b_{78} - a_{78}, T_{kp} - T^2\} = min\{5, 69–50\} = 5.$$

Согласно (3.15) получаем $C(t) = 445 + 9(69 - t), 64 \le t \le 69.$

Стоимость работы (7, 8) и всего проекта возрастет на $9{\cdot}5 = 45$ единиц, $C_{78} = 20 + 45 = 65$. Новое значение $C = 445 + 9{\cdot}5 = 490$, $t(L_1) = t(L_2) = 64$.

6^0. $C = 490$, $t(L_1) = t(L_2) = 64$, $t(L_3) = 35$, $t(L_4) = 45$. Критическими являются пути L_1 и L_2. $t_{кр} = 64$, $\{L^k{}_{кр}\} = \{L_1, L_2\}$. Общих работ на этих путях нет. Можно сократить работы (*3*,*5*) и (*5*,*6*) пути L_1 на 5 дней и работу (4, 6) пути L_2 на 10 дней. Одновременно можно сократить на 5 дней продолжительность работы (5, 6) пути L_1 и работы (4, 6) пути L_2. Действительно, $\Delta t = min\{b_{46} - a_{46}, b_{56} - a_{56}, T_{kp} - T^2\} = min\{10, 5, 64 - 50\} = 5$. Коэффициенты напряженности этих работ равны соответственно $h(5, 6) = 4$, $h(4, 6) = 4$. Коэффициент затрат на ускорение работ равен $h(5, 6) + h(4, 6) = 4 + 4 = 8$.

Согласно (3.15) получаем $C(t) = 490 + 8(64 - t), 59 \le t \le 64.$

Стоимость работы (4, 6) возрастет на $4{\cdot}5 = 20$, а работы (5, 6) на $4{\cdot}5 = 20$ единиц: $C_{46} = 40 + 20 = 60$, $C_{56} = 30 + 20 = 50$. Новые значения $C = 490 + 8{\cdot}5 = 530$, $t(L_1) = t(L_2) = 59$.

7^0. $C = 530$, $t(L_1) = t(L_2) = 59$, $t(L_3) = 35$, $t(L_4) = 45$. Критическими являются пути L_1 и L_2. $t_{кр} = 59$, $\{L^k{}_{кр}\} = \{L_1, L_2\}$.

Общих работ нет. Теперь можно одновременно сократить на 5 дней продолжительность работы (3, 5) пути L_1 и работы (4, 6) пути L_2:

$$\Delta t = min\{b_{35} - a_{35}, b_{46} - a_{46}, T_{kp} - T^2\} = min\{5, 5, 59–50\} = 5.$$

Коэффициенты напряженности этих работ равны $h(3, 5) = 6$, $h(4, 6) = 4$ соответственно. Коэффициент затрат на ускорение обеих работ будет равен $h(3, 5) + h(4, 6) = 6 + 4 = 10$. Следовательно,

$$C(t) = 530 + 10(59 - t), 54 \le t \le 59.$$

Стоимость работы (*3*,*5*) возрастет на $6{\cdot}5 = 30$, а работы (4, 6) – на $4{\cdot}5 = 20$ единиц: $C_{35} = 15 + 30 = 45$, $C_{46} = 60 + 20 = 80$. Новые значения $C = 530 + 10{\cdot}5 = 580$, $t(L_1) = t(L_2) = 54$. Алгоритм продолжается до тех пор, пока есть $t_{ij} > a_{ij}$.

Шаги алгоритма представим в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Таблица длительности / стоимости работ

№ п/п	Работа	Шаг алгоритма						
		1	2	3	4	5	6	7
1	(0, 1)	20/35			10/95			
2	(0, 2)	32/50						
3	(1, 2)	12/15						
4	(1, 3)	7/10				2/50		
5	(2, 7)	7/10						
6	(3, 4)	26/50	16/70					
7	(3, 5)	13/15						
8	(4, 6)	22/40						17/60
9	(5, 6)	25/30						20/50
10	(6, 7)	13/25		8/50				
11	(7, 8)	11/20					6/65	
Стоимость проекта		300	320	345	405	445	490	530

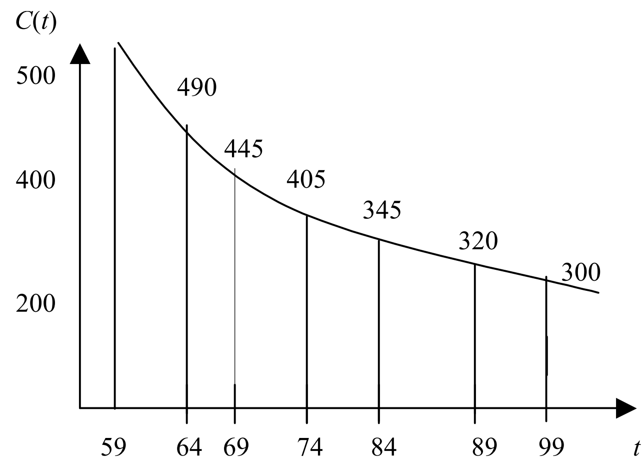
Ниже представлены длительности полных путей на различных шагах алгоритма (табл. 3.6.)

Таблица 3.6

Таблица длительности полных путей

Длительность полных путей	Шаг алгоритма						
	1	2	3	4	5	6	7
$T(L_1)$	99	89	84	74	69	64	59
$T(L_2)$	89	89	84	74	69	64	59
$T(L_3)$	50	50	50	40	40	35	35
$T(L_4)$	50	50	50	50	50	45	45

Теперь, построив функцию $C(t)$, можно определить время выполнения проекта t^* для любых затрат C^* и наоборот.



Например, из шага 3^0 следует, что при стоимости проекта C^* = 375 усл. р. минимальная продолжительность проекта будет равна t^* = 79 дней, а из шага 7^0 видно, что при стоимости C^* = 540 усл. р. t^* = 55 дней.

С помощью функции $C(t)$ можно оценить и дополнительные затраты, связанные с сокращением сроков завершения проекта. Так, сокращение продолжительности проекта с 79 до 55 дней потребует дополнительно 540 – – 375 = 165 усл. р.

В заключение сделаем следующее замечание. При линейной зависимости стоимости работ от их продолжительности задача оптимизации сетевого графика может быть поставлена в виде задачи линейного программирования, в которой необходимо минимизировать стоимость проекта при двух группах ограничений. Первая группа ограничений- ограничения на время выполнения работ, вторая группа ограничений показывает, что продолжительность всех полных путей не должна превышать заданного времени выполнения проекта. Однако решать такие задачи линейного программирования классическими методами неэффективно.

4. Модели и методы линейного программирования

4.1. Основные понятия

В экономике оптимизационные задачи возникают в связи с разработкой планов предприятий, отраслей или народного хозяйства на кратко-, средне- или долгосрочный периоды времени.

Задача оптимизации производства для предприятия ставится в форме максимизации выручки или прибыли при заданных ассортименте выпускаемой продукции и ограничениях на имеющиеся запасы ресурсов (сырье, оборудование, труд, производственные площади и др.). Задача может ставиться и в форме минимизации затрат при выпуске заданных объемов продукции несколькими способами производства. Оптимизационные задачи могут быть поставлены не только для предприятий реального сектора экономики, но также и для торговли, банковской и страховой деятельности.

Пример 1. Фабрика на месячную производственную программу имеет ресурсы трех видов: рабочую силу (800 чел/дн), оборудование (1400 станков/ч), сырье (4080 т) и может выпускать четыре вида продукции, цены реализации на которые известны. Заданы нормы расхода ресурсов на производство единицы каждого вида продукции. Вся информация записывается в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурсов, т
	Продукция 1	Продукция 2	Продукция 3	Продукция 4	
Труд, чел/дн.	7	2	2	6	800
Сырье, т	5	8	4	3	4800
Оборудование, станков/ч	2	4	1	8	1400
Цены, тыс. р.	3	4	10	5	

Требуется найти такой план производства продукции, при котором будет максимальна общая стоимость ее выпуска. Приведенная формулировка называется экономической постановкой задачи.

Экономико-математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\max\ (3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 10\cdot x_3 + 5\cdot x_4),\\
&7\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 6\cdot x_4 \le 800,\\
&5\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_4 \le 4800,\\
&2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 8\cdot x_4 \le 1400,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – вектор объемов производства каждого вида продукции.

Задача (4.1) называется задачей линейного программирования.

4.2. Общая постановка задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) в общей постановке имеет три формы: произвольную, симметричную и каноническую.

1. *Произвольная форма* ЗЛП имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\max\ (\min) \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j, \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad (i = 1,\dots,m_1), \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i, \quad (i = m_1+1,\dots,m_2), \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad (i = m_2+1,\dots,m), \\
&x_j \ge 0, \quad (j = 1,\dots,n_1), \\
&x_j - \textit{произвольные}, \quad (j = n_1+1,\dots,n).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Выражение $\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ называется *целевой функцией* (*или критерием*) задачи. Величины (X_1, X_2, …, X_n) – переменные задачи. Система неравенств в задаче (4.2) определяет *область допустимых значений* (*планов*) *задачи* D, которая имеет форму выпуклого многогранника.

Неравенства и равенства в задаче (4.2) называются *ограничениями*. Каждое неравенство определяет полупространство, а равенство – плоскость в пространстве переменных (X_1, X_2, …, X_n).

Решение задачи (4.2) называется *оптимальным решением* (*или оптимальным планом*) и обозначается как $X^* = (X^*_1, X^*_2, \dots, X^*_n)$. Оптимальные решения лежат на границе области D.

Если область D ограничена, то задача ЛП имеет либо единственное, либо бесконечно много решений. Если решение единственно, то оно совпадает с одной из вершин многогранника D.

Если градиент целевой функции $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ коллинеарен градиенту одного из ограничений, то задача имеет бесконечно много решений, лежащих на данном ограничении.

Если ограничения несовместны, или целевая функция неограниченна, то задача (4.2) не имеет решения.

Если область области D не ограничена, то решение может существовать либо быть неограниченным.

Всякая задача на минимум может быть сведена к задаче на максимум и наоборот, умножением целевой функции на –1. Оптимальный план задачи при этом не изменится, а значение целевой функции изменит знак. После решения надо снова изменить знак целевой функции.

2. *Симметричная форма* ЗЛП на максимум имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\max \ \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j, \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \\
&x_j \ge 0, \quad (j = 1,\dots,n \ ).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Симметричная форма задачи на минимум имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\min \ \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j, \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i, \\
&x_j \ge 0, \quad (j = 1,\dots,n \ ).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Если все $b_i \ge 0$, то задача (4.3) обычно имеет следующий экономический смысл: x_j – объемы производства j-го вида продукции, c_i – цены или прибыль единицы продукции, a_{ij} – нормативы затрат i-го вида ресурса на производство единицы j-го вида продукции, b_i – имеющийся запас i-го вида ресурса. Надо определить план производства продукции $X^* = (X^*_1, X^*_2, \dots, X^*_n)$, который дает максимальную выручку или прибыль, при заданных ограничениях на имеющиеся ресурсы. Ограничения, на которых в оптимальном плане достигнуто равенство, соответствуют *дефицитным* ресурсам, остальные ресурсы называются *недефицитными***.**

3. *Каноническая форма* ЗЛП представлена ниже:

$$
\begin{aligned}
&\max \ (\min) \ \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j, \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad (i = 1,\dots,m \ ), \\
&x_j \ge 0, \quad (j = 1,\dots,n \ ),
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Из линейной алгебры известно, что количество линейно независимых уравнений не может быть больше числа неизвестных. Поэтому в (4.5) можно считать, что $n \ge m$.

Определение. Если в ограничении задачи (4.5) есть переменная с коэффициентом, равным единице, отсутствующая в других ограничениях, то она называется *базисной*, остальные переменные ограничения называются *свободными.*

Если базисные переменные есть во всех ограничениях, то такая форма ЗЛП называется *канонической с базисными переменными*. Каноническая форма с базисными переменными является исходной для решения задачи *симплексным алгоритмом.*

Опорным планом называется любой вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, удовлетворяющий условиям (4.5) и имеющий не более чем m ненулевых компонент.

Если в канонической форме все $b_i \geq 0$, то задача (4.5) имеет опорный план, в котором базисные переменные равны b_i, а остальные (свободные) переменные равны 0. Такой план называется *начальным опорным планом.*

Балансовой называется переменная, которая добавляется или вычитается из левой части неравенства для получения равенства. В задачах (4.3), (4.4) балансовые переменные будут базисными.

Любая форма ЗЛП приводится к канонической форме с помощью следующих преобразований:

- замена переменной, которая принимает произвольные значения, на разность двух новых положительных переменных;
- введение балансовых переменных.

Искусственная переменная вводится, когда в канонической форме ЗЛП в ограничении нет базисной переменной. В этом случае целевая функция изменяется путем вычитания искусственной переменной с коэффициентом M в задаче на максимум и путем прибавления – в задаче на минимум. Коэффициент M считается большим положительным числом.

При вводе искусственных переменных и корректировке целевой функции измененная задача называется M-задачей.

Пример 4.1. Пусть задача ЛП имеет вид

$$\begin{aligned}
&\max \quad 2x_1 + 10x_2 - 8x_3,\\
&2x_1 - x_3 \leq 2,\\
&x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 3,\\
&2x_1 - x_3 = 5,\\
&x_1, x_3 \geq 0,\\
&x_2 - \textit{произвольное.}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Чтобы привести ее к канонической форме, сделаем подстановку $x_2 = x_2^1 - x_2^2$, а в неравенства введем балансовые переменные x_4, x_5 и искусственную переменную x_6. Тогда M-задача для (4.6) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\max 2x_1 + 10x_2^1 - 10x_2^2 - 8x_3 - M \cdot x_6\ ,\\
&2x_1 - x_3 + x_4 = 2,\\
&0,5x_1 + x_2^1 - x_2^2 - x_3 - 0,5x_5 = 1,5,\\
&2x_1 - x_3 + x_6 = 5,\\
&x_1\ , x_2^1\ , x_2^2\ , x_3\ , x_4\ , x_5\ , x_6 \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3. Симплекс-алгоритм решения задачи ЛП

Существует несколько форм симплекс-алгоритма: с короткой матрицей, с расширенной матрицей, двойственный алгоритм, модифицированный.

При рассмотрении алгоритма с короткой матрицей будем считать, что задача дана на максимум целевой функции. Если задача дана на минимум, то ее можно привести к задаче на максимум, изменив знак целевой функции.

Для применения симплекс-алгоритма ЗЛП должна быть представлена в канонической форме (4.5). Если в системе ограничений (4.5) $m < n$ и все уравнения линейно независимы, то эту систему можно разрешить относительно тех m переменных, которым в матрице ограничений соответствуют линейно независимые столбцы.

Пусть независимыми будут первые m столбцов, тогда ограничения задачи (4.5) можно разрешить относительно $X_1, X_2, \ldots, X_m$:

$$X_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} X_j , \quad i = 1,2,\ldots,m. \tag{4.8}$$

Переменные X_1, X_2, ..., X_m будут базисными, а переменные X_{m+1}, X_{m+2}, ..., X_n – свободными.

Целевую функцию надо выразить через свободные переменные

$$f = b_0 - \sum_{j=m+1}^{n} b_j X_j . \tag{4.9}$$

Симплекс-алгоритм носит итеративный характер и состоит в построении и последовательном преобразовании симплексной таблицы, в результате которого от начального плана можно за конечное число шагов получить оптимальный план, либо установить, что ЗЛП не имеет решения.

Задачу (4.8), (4.9), разрешенную относительно базисных переменных, удобно представить в виде симплексной таблицы.

Таблица 4.1

Базисные переменные (БП)	План, B	Свободные переменные (СП)					
		X_{m+1},	X_{m+2}	...			X_n
X_1	b_{10}	b_{11}	b_{12}	...			$b_{1,m-n}$
X_2	b_{20}	b_{21}	b_{22}	...			$b_{2,m-n}$
…	…	…	…	…			…
X_m	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	...			$b_{m,n-m}$
F	b_0	$-b_m$	$-b_{m+1}$	...			$-b_n$

В F-строке записаны коэффициенты модифицированной целевой функции с обратными знаками, b_0 – это значение функции при нулевых значениях свободных переменных.

Если в столбце свободных членов все коэффициенты $b_{io} \geq 0$, то вектор $X = (X_1 = b_{10}, X_2 = b_{20}, \ldots, X_m = b_{m0}, X_{m+1} = 0, \ldots, X_n = 0)$ называется начальным опорным планом. Значение целевой функции равно элементу B-столбца в F-строке.

Решение задачи линейного программирования симплексным методом проводится в два этапа. Сначала находится начальное базисное решение, а затем проводится направленный перебор базисных решений для получения оптимального плана.

Алгоритм построения начального опорного плана

1. Отыскание разрешающего столбца.

В столбце свободных членов отыскивается отрицательный элемент. Если такого нет, текущее решение является опорным. Далее переходят к алгоритму нахождения оптимального плана.

Если среди элементов столбца свободных членов несколько отрицательных, то выбирается минимальный из них. По минимальному отрицательному элементу этой строки выбирается *разрешающий столбец* (r). Если просматриваемая строка не содержит отрицательных элементов, задача несовместна и не имеет решения.

2. Выбор разрешающей строки.

Находятся симплексные отношения элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца (кроме F-строки). Рассматриваются только положительные отношения. По наименьшему положительному симплексному отношению определяется *разрешающая строка* (s).

3. Выбор разрешающего элемента.

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится *разрешающий элемент* (a_{sr}).

4. Симплексные преобразования таблицы:

- x-переменные разрешающих столбца и строки меняются местами;
- разрешающий элемент заменяется обратной величиной;
- остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак на противоположный;
- остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;
- все прочие элементы таблицы вычисляются *по методу прямоугольника* по формуле

$$b_{ij} = b_{ij} - (4.b_{i,r}\ b_{s,j}) / b_{sj},\ i \neq s,\ j \neq r. \qquad (4.10)$$

В результате выполнения этого шага переменная x_r становится базисной, а переменная x_s выводится из базиса и становится свободной. После чего переходят к шагу 1.

Алгоритм нахождения оптимального плана

1. Проверка базисного решения на оптимальность.

Если все элементы F-строки неотрицательны, то базисное решение оптимально. В противном случае оно может быть улучшено.

Если все элементы F-строки положительны, то полученный оптимальный план будет единственным, если в F-строке есть нулевые элементы, то существует бесконечно много оптимальных планов.

2. Выбор разрешающего столбца.

Разрешающий столбец выбирают по минимальному отрицательному элементу F-строки. Пусть r – номер разрешающего столбца.

Если в F-строке есть отрицательный элемент, в столбце которого нет положительных элементов, то целевая функция неограниченна и решения ЗЛП не существует.

3. Вычисление симплексного отношения и выбор разрешающей строки.

Разрешающая строка определяется по минимальному положительному симплексному отношению. Симплексное отношение – это отношение элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца.

Пусть s – номер разрешающей строки.

4. Выбор разрешающего элемента.

На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент. Обозначим его через b_{sr}.

5. Симплексное преобразование таблицы.

Выполняется точно так же, как и в предыдущем алгоритме. После чего осуществляется переход к шагу 1.

Пример 4.2. Решить задачу симплекс-алгоритмом.

$$\begin{aligned}
&\max(-2X_1 + X_2 + X_3),\\
&3X_1 + X_2 - X_3 = 6,\\
&4X_1 + X_2 \ge 19,\\
&4X_1 + 3X_2 \le 24,\\
&X_1, X_2, X_3 \ge 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Умножим первое и второе ограничение на –1 и введем новые балансовые переменные X_5, X_6.

Получаем каноническую форму задачи с базисными переменными X_3, X_4, X_5:

$$
\begin{aligned}
&\max\,(-2X_1 + X_2 + X_3),\\
&-3X_1 - X_2 + X_3 = -6,\\
&-4X_1 - X_2 + X_4 = -19,\\
&4X_1 + 3X_2 + X_5 = 24,\\
&X_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,5.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

С помощью первого равенства исключим из целевой функции базисную переменную X_3. Получим $F = -2X_1 + X_2 + (-6 + 3X_1 + X_2) = -6 + X_1 + 2X_2$ и построим начальную симплексную таблицу.

БП	B	СП	
		X_1	X_2
X_3	–6	–3	–1
X_4	–19	–4	**–5**
X_5	24	4	3
F	–6	–1	–2

Так как в B-столбце есть отрицательные элементы, то план не является опорным.

Построение опорного плана

1. Выбираем вторую строку (X_4-строка), в которой берем второй разрешающий столбец (X_2-столбец) по наименьшему отрицательному элементу.

2. Вычисляем симплексные отношения (–6/–1, –19/–5, 24/3), минимальное значение будет 19/5. Разрешающей строкой является вторая строка.

3. Разрешающим элементом будет –5, стоящий на пересечении разрешающих строки и столбца.

4. Пересчитываем симплексную таблицу. Получим новую таблицу.

БП	B	СП	
		X_1	X_4
X_3	–11/5	**–11/5**	–1/5
X_2	19/5	4/5	–1/5
X_5	63/5	8/5	3/5
F	8/5	3/5	–2/5

План снова не является опорным. Выбираем первую строку и разрешающий столбец переменной X_1. Вычисляем симплексные отношения столбца плана и столбца переменной X_1, получаем (1, 19/4, 63/8) – минимальное отношение равно 1. Разрешающей будет первая строка.

Разрешающий элемент будет –11/5. Переставляем переменные X_3 и X_1. Пересчитаем симплексную таблицу.

БП	План	СП	
		X_3	X_4
X_1	1	–8/11	**1/11**
X_2	3	4/11	–3/11
X_5	11	8/11	5/11
F	1	3/11	–5/11

В этой таблице план ($X_1 = 1$, $X_2 = 3$, $X_5 = 11$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$) является опорным.

Поиск оптимального плана

План $X = (1, 3, 0, 0, 11)$ не является оптимальным, т.к. в F–строке есть отрицательный элемент, который определяет разрешающий столбец переменной X_4. Находим симплексные отношения (11, –11, 121/5), разрешающей будет строка переменной X_1.

Выполняем перестановку переменных X_1 и X_4 и пересчитываем симплексную таблицу.

БП	План	СП	
		X_3	X_1
X_4	11	–5	11
X_2	6	–1	3
X_5	6	**3**	–5
F	6	–2	5

Полученный план не является оптимальным, в F-строке есть отрицательный элемент –2, который определяет разрешающий столбец переменной X_3.

Вычисляем симплексные отношения (–11/5, –-6, 2). Разрешающей будет строка переменной X_5, разрешающим элементом – элемент 3.

Переставляем переменные X_5 и X_3 в обозначении строк и столбцов и пересчитываем симплексную таблицу.

БП	План	СП	
		X_5	X_1
X_4	22		
X_2	8		
X_3	2		
F	10	2/3	5/3

Из таблицы видно, что текущий план является оптимальным, т.к. в F-строке нет отрицательных элементов.

Оптимальный план имеет вид $X^* = (X^*_1 = 0,\ X^*_2 = 8,\ X^*_3 = 2,\ X^*_4 = 22,\ X^*_5 = 0)$. Для исходной задачи оптимальным будет план ($X^*_1 = 0$, $X^*_2 = 8$, $X^*_3 = 2$). Значение целевой функции задачи в оптимальном плане равно 10 – последнему элементу B-столбца в F-строке.

Сделаем несколько полезных замечаний к симплексному алгоритму.

1. Если в F-строке задачи на максимум есть отрицательный элемент, в столбце которого нет положительных элементов, то целевая функция неограниченна, т.е. решения ЗЛП не существует.

2. Если в F-строке последней симплексной таблицы, содержащей оптимальный план, есть нулевые элементы, то задача имеет бесконечно много оптимальных планов, если нулевых элементов нет, то оптимальный план единственный.

3. Если в оптимальном плане M-задачи есть искусственная переменная, то ограничения задачи несовместны и задача не имеет решения.

4.4. Двойственность задач линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная задача. Двойственная задача по отношению к исходной задаче строится по следующим правилам:

1. Если исходная задача ставится на максимум, то двойственная ставится на минимум и наоборот.

2. Коэффициенты целевой функции исходной задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи. Правые части ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

3. Если A-матрица коэффициентов исходной задачи, то транспонированная матрица A^T будет матрицей коэффициентов двойственной задачи.

4. В задаче на максимум все ограничения имеют знак $\le$ (=), а в задаче на минимум все ограничения имеют знак $\ge$.

5. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче. Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи. Если ограничение исходной задач имеет знак ($\ge$), то соответствующая переменная двойственной задачи неотрицательна. Если ограничение имеет знак (=), то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать положительные и отрицательные значения и наоборот.

В матричном виде двойственные задачи, заданные в симметричной форме, имеют вид

Прямая задача Двойственная задача

$$\begin{array}{ll} \max\limits_x (c^T, x) = (c^T, x^*), & \min\limits_x (b^T, y) = (b^T, y^*), \\ A \cdot x \le b, & A^T \cdot y \ge c, \\ x \ge 0, & y \ge 0, \end{array} \qquad (4.13)$$

где $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$,

$b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$,

$x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$, $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)^T$ – *оптимальные решения задач.*

Переменные $(y_1, y_2, .., y_m)$ называются двойственными (или объективно обусловленными) оценками.

Связь двойственных задач представлена в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Прямая задача	Двойственная задача
$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,...,m_1$	$y_i \ge 0, \quad i = 1,...,m_1$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1,...,m$	$y_i -$ *любые*, $\quad i = m_1 + 1,...,m$
$x_j \ge 0, \quad j = 1,...,n_1$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,...,n_1$
$x_j -$ *любые*, $\quad j = n_1 + 1,...,n$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j = n_1 + 1,...,n$

Экономическая интерпретация задач (4.13) следующая. Вектор x – это вектор выпускаемой продукции, y – двойственные оценки ресурсов прямой задачи. Левая часть ограничений двойственной задачи представляет собой оценку затрат на единицу выпускаемой продукции в двойственных ценах.

Прямая задача представляет собой задачу на определение плана, обеспечивающего максимальный выпуск продукции при заданных ценах реализации и ограничениях на ресурсы. Двойственная задача – определение таких оценок ресурсов, в которых стоимость имеющихся ресурсов минимальна, а затраты на производство единицы продукции не меньше цен реализации продукции.

Сформулируем важные теоремы линейного программирования.

Первая теорема двойственности. Для взаимно двойственных задач имеет место один из трех случаев:

1. Если существует решение одной задачи, то существует решение и второй задачи. Значения целевых функций на оптимальных решениях обеих задач равны $(c^T, x^*) = (b^T, y^*)$ и на множестве допустимых значений обеих задач выполняется неравенство $(c^T, x) \le (b^T, y)$. Если на допустимых решениях обеих задач целевые функции равны, то решения оптимальны.

2. Если решение одной задачи неограниченно, то другая задача несовместна.

3. Обе задачи несовместны.

Вторая теорема двойственности. Оптимальные решения двойственных задач удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} & y_i \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i) = 0, \quad i = 1,...,m, \\ & x_j \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j) = 0, \quad j = 1,...,n. \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Имеет место и обратное свойство: если допустимые значения переменных x_j, y_i удовлетворяют соотношениям (4.14), то они являются оптимальными решениями обеих задач.

Экономический смысл второй теоремы двойственности состоит в следующем:

1) если оптимальная оценка *i*-го ресурса не равна нулю $(y_i^* > 0)$, то в оптимальном плане этот ресурс используется полностью ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* = b_i$);

2) если в оптимальном плане ресурс не используется полностью ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* < b_i$), то его оценка равна нулю $(y_i^* = 0)$;

3) если *j*-й продукт входит в оптимальный план $(x_j^* > 0)$, то в оптимальных оценках ресурсов он неубыточен ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* = c_j$);

4) если *j*-й продукт в оптимальных оценках ресурсов убыточен ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* > c_j$), то он не входит в оптимальный план $(x_j^* = 0)$.

4.5. Влияние изменения параметров исходной задачи на значение целевой функции

Запишем функцию Лагранжа для задачи ЛП:

$$L(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \, (b_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j). \qquad (4.15)$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{j=1}^{n} x_j (c_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i). \qquad (4.16)$$

Из первой и второй теорем двойственности следует равенство

$$L(x^*, y^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*. \qquad (4.17)$$

Дифференцируя (4.16), получим три соотношения:

$$\frac{\partial L(x^*, y^*)}{\partial b_i} = y_i^*,$$
$$\frac{\partial L(x^*, y^*)}{\partial x_j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*, \qquad (4.18)$$
$$\frac{\partial L(x^*, y^*)}{\partial a_{ij}} = -x_j^* y_i^*.$$

Из соотношений (4.17) и (4.18) можно сделать несколько выводов.

1. Вектор $y^* = (y^*_1,\ y^*_2,\ \ldots,\ y^*_m)$ дает градиент целевой функции в оптимальном плане, при изменении правых частей ограничений исходной задачи (запасов ресурсов) на единицу. Отсюда следует, что изменение значения целевой функции в оптимальном плане при небольшом изменении объемов имеющихся ресурсов будет приближенно равно

$$\Delta(\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \cdot \Delta b_i\ . \qquad (4.19)$$

Следовательно, незначительное изменение запасов недефицитных ресурсов не изменит целевую функцию, т.к. для них $y^*_i = 0$.

2. Величины $d_j = (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i)$ дают изменение (градиент) целевой функции исходной задачи при изменении выпуска продукции на единицу в оптимальном плане. Из (4.14) следует, что для продуктов, вошедших в оптимальный план, $d_j = 0$, а для не вошедших в оптимальный план продуктов – $d_j < 0$.

Отсюда следует, что небольшое изменение оптимального плана по вошедшим в план продуктам не даст изменения целевой функции при тех же ресурсах, а выпуск небольшого количества убыточного продукта (который не вошел в оптимальный план) приведет к снижению значения целевой функции на величину

$$\Delta Z_j = (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i)\Delta x_j^*\ . \qquad (4.20)$$

3. Величины $(-x^*_j \cdot\ y^*_i)$ образуют градиент целевой функции относительно изменения технологических коэффициентов a_{ij}. Уменьшение этих коэффициентов ведет к росту целевой функции. Максимальный рост целевая функция получает при уменьшении значений технологических коэффициентов, при этом достигается

$$\max_{ij} x_j^* y_i^*\ . \qquad (4.21)$$

4.6. Совместное решение двойственных задач

Решение двойственной задачи получается по значению F-строки последней симплексной таблицы прямой задачи следующим образом.

1. Устанавливается соответствие между переменными двойственных задач.

2. Значения F-строки свободных X-переменных приравниваются соответствующим значениям Y-переменных, остальные значения Y-переменных приравниваются к нулю.

Пример 4.3. Найти решение двойственной задачи по решению прямой.

Прямая задача

$$F = 7,5X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 12X_4 \to \max$$
$$2X_1 + X_2 + 0,5X_3 + 4X_4 \le 3400(+X_5) <\!-\!> Y_1$$
$$X_1 + 5X_2 + 3X_3 \le 1200(+X_6) <\!-\!> Y_2$$
$$3X_1 + 6X_3 + X_4 \le 3000(+X_7) <\!-\!> Y_3$$
$$X_i \ge 0,\ i = 1, ..., 7.$$

Двойственная задача

$$G = 3400Y_1 + 1200Y_2 + 3000Y_3 \to \min$$
$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \ge 7,5(-Y_4) <\!-\!> X_1$$
$$Y_1 + 5Y_2 \ge 3(-Y_5) <\!-\!> X_2$$
$$0,5Y_1 + 3Y_2 + 6Y_3 \ge 6(-Y_6) <\!-\!> X_3$$
$$4Y_1 + Y_3 \ge 12(-Y_7) <\!-\!> X_4$$
$$Y_i \ge 0,\ i = 1, ..., 7.$$

Таблица соответствия переменных

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_1	Y_2	Y_3

Заключительная симплекс-таблица

Базисные переменные	План, B	СП				
		X_1	X_2	X_7	X_5	
X_4	799	0,46	–0,05	0,0	0,25	Y_7
X_6	20	–0,05	0,19	–0,1	0,03	Y_2
X_3	367	0,43	0,01	0,17	–0,04	Y_6
F	11850	4,0	0,04	0,75	2,815	
		Y_4	Y_5	Y_3	Y_1	

Оптимальные планы двойственных задач

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
F	4,0	0	0	0	2,815	0,04	0,75
Y	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_1	Y_2	Y_3

Оптимальный план прямой задачи ($X^*_1 = X^*_5 = X^*_6 = X^*_7 = 0$, $X^*_2 = 20$, $X^*_3 = 367$, $X^*_4 = 799$). Оптимальный план двойственной задачи($Y^*_1 = 2{,}815$; $Y^*_2 = 0{,}04$; $Y^*_3 = 0{,}75$; $Y^*_4 = 0{,}399$; $Y^*_5 = Y^*_6 = Y^*_7 = 0$).Значение целевой функции прямой и двойственной задач равно $F^* = G^* = 11\ 850$.

Экономический смысл оптимального решения двойственных задач представлен в следующей таблице.

Таблица 4.3

Оптимальное решение исходной задачи $F \to max$						
Объемы производства продукции				Остатки ресурсов на складе		
X^*_1	X^*_2	X^*_3	X^*_4	X^*_5	X^*_6	X^*_7
0	20	367	799	0	0	0
Y^*_4	Y^*_5	Y^*_6	Y^*_7	Y^*_1	Y^*_2	Y^*_3
4,0	0	0	0	2,815	0,04	0,75
Превышение затрат ресурсов над ценой реализации				Двойственные оценки ресурсов		
Оптимальное решение двойственной задачи $G \to min$						

Из таблицы видно, что все ресурсы используются полностью, т.е. являются дефицитными, их остатки равны нулю. Оценки этих ресурсов равны соответственно $Y^*_1 = 2{,}815$, $Y^*_2 = 0{,}04$ и $Y^*_3 = 0{,}75$. В оптимальном плане первый продукт не выпускается $X^*_1 = 0$, он является убыточным, т.к. превышение затрат над ценой у него равно $Y^*_4 = 4{,}0$. Продукты второй, третий и четвертый выпускаются в оптимальном плане $X^*_2 = 20$, $X^*_3 = 367$, $X^*_4 = 799$ и являются неубыточными, превышение затрат над ценой у них $Y^*_5 = Y^*_6 = Y^*_7 = 0$. При реализации оптимального плана предприятие получит максимально возможную прибыль, равную 11 850 ден. ед.

Решения прямой и двойственной задач можно получить с помощью функции «ПОИСК РЕШЕНИЯ» в системе EXCEL.

4.7. Проверка решения ЗЛП на устойчивость

Интервалы изменения параметров задачи, для которых решение не изменяется, называется областью устойчивости. Рассмотрим несколько задач на проверку решения ЗЛП на устойчивость к изменению параметров модели.

1. Изменение вектора ограничений

Исходная задача: $Ax = b, f = c^T x \to max.$

Новая задача: $Ax = b + \Delta b, f = c^T x \to max.$

Предельные значения (верхняя и нижняя граница) изменений дефицитных ресурсов (ограничений), при которых двойственные оценки (матрица базисных переменных) в оптимальном плане не меняются, определяются из формул.

Пусть изменения касаются недефицитных ресурсов, базисные переменные которых не равны нулю. Тогда их значения в последней симплексной таблице показывают, на сколько можно уменьшить правые части этих ограничений без изменения оптимального плана. Любое увеличение этих ресурсов не влияет на оптимальный план.

В *примере 4.3* таким ресурсом является второй ресурс с базисной переменной X_6. Допустимые изменения этого ресурса лежат в диапазоне $-20 \le \Delta b \le \infty$.

Пусть изменения касаются дефицитных ресурсов, которым отвечают свободные переменные. Умножая соответствующие столбцы последней симплексной таблицы на Δb и складывая с *B*-столбцом, получаем неотрицательные значения. Соответствующие неравенства определяют диапазоны изменения правых частей соответствующих ограничений.

В *примере 4.3* такими ресурсами будут первый и третий ресурс с базисной переменной X_5 и X_7. Допустимые изменения этих ресурсов определяются из неравенств

$$0,25\,\Delta b_1 + 799 \ge 0,$$
$$0,03\,\Delta b_1 + 20 \ge 0,$$
$$-0,04\,\Delta b_1 + 367 \ge 0.$$

$$-0,1\,\Delta b_3 + 20 \ge 0,$$
$$0,17\,\Delta b_1 + 367 \ge 0.$$

Целевая функция изменится на величину $\Delta f^* = \sum_i y_i^* \Delta b_i$.

2. Изменение вектора цен

Исходная задача: $Ax = b, f = c^T x \to max.$

Новая задача: $Ax = b, f = (c + \Delta c^T)x \to max.$

Пусть изменения коэффициентов целевой функции относятся к свободной переменной, которая в оптимальном плане равна нулю $x^*_к = 0$.

Коэффициенты при свободных переменных в индексной строке в последней симплексной таблице показывают, в каких пределах соответствующие коэффициенты целевой функции могут меняться (увеличиваться) без изменения оптимального плана.

Пусть изменение коэффициента целевой функции относится к базисной переменной $x^*_к > 0$.

Если умножить коэффициенты *к*-й строки последней симплексной таблицы на $\Delta c_к$ и сложить с индексной строкой, то полученная строка должна быть неотрицательна, что и определяет величину $\Delta c_к$.

Целевая функция изменится на величину $\Delta f^* = \sum_j \Delta c_j X_j^*$

3. Введение нового продукта в план

Производство нового продукта с ценой реализации C_s и столбцом нормативов расхода ресурсов $A_s = (a_{is})$ увеличит целевую функцию, если затраты ресурсов в двойственных оценках на выпуск единицы новой продукции не больше ее цены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{is}\, y^*_i \le C_s, \tag{4.22}$$

иначе выпуск нового продукта уменьшит значение целевой функции. Это следует из второй теоремы двойственности и соотношения (4.8).

4. Введение нового ресурса

При введении нового ресурса B_q значение целевой функции не снизится, если будут выполняться ограничения (4.11) для всех базисных переменных и равенство нулю в (4.11) для всех свободных переменных. Кроме этого, запас нового ресурса должен быть достаточен для оптимального плана, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{qj}\, \boldsymbol{x}^*_j \le B_q. \tag{4.23}$$

4.8. Транспортная задача и метод потенциалов

Транспортная задача является специальным типом задач линейного программирования. Экономическая постановка этой задачи следующая. Имеется m поставщиков и n потребителей некоторой продукции. Заданы тарифы (стоимость) перевозок единицы продукции от поставщиков к потребителям, известны объемы запасов у поставщиков и потребности каждого потребителя в продукции.

Требуется составить план поставок продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной.

Математическая постановка этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}, \\
&\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j,\ j = 1,2,\ldots,n, \\
&\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i,\ i = 1,2,\ldots,m, \\
&X_{ij} \ge 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь X_{ij} – объем, c_{ij} – тариф поставки продукции от i-го поставщика к j-му потребителю, b_j – потребности потребителей в продукции, a_i – запасы продукции у поставщиков.

Видно, что (4.24) является задачей линейного программирования со специальной матрицей. В задаче (4.24) имеется mn неизвестных X_{ij} и $m + n$ уравнений.

Решение транспортной задачи называется *оптимальным планом перевозок* (*поставок*) *продукции.*

Задача (4.24) называется *сбалансированной* (*закрытой*), если суммарный объем потребностей равен суммарному объему предложения продукции, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{4.25}$$

Если условие (4.25) не выполняется, то задача называется открытой. Для решения открытую задачу преобразуют в закрытую. Для этого в задачу вводят либо фиктивного поставщика недостающего объема продукции (если потребности больше предложения), либо фиктивного потребителя лишней продукции (если предложение больше потребностей), тарифы которых полагаются равными нулю.

При решении задачи используется свойство, которое состоит в том, что ранг матрицы A задачи (4.24) на единицу меньше числа уравнений $r(A) = m + n - 1$. С учетом этого число ненулевых переменных $X_{ij} > 0$ в опорном плане будет не больше $(m + n - 1)$.

Если число ненулевых X_{ij} в опорном плане равно $(m + n - 1)$, то план называется *невырожденным*, иначе – *вырожденным.*

Для решения задачи (4.24) составляется табл. 4.4.

Таблица 4.4

Поставщики	Потребители				Запасы продукции	Индексы, U
	1	2	…	n		
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1	
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2	
…	...	...	...	...	...	
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m	
Потребности в продукции	b_1	b_2	...	b_n		
Индексы V						

В случае открытой задачи в таблицу вводят либо фиктивного поставщика, либо фиктивного потребителя, с целью получения равенства (4.25), с соответствующим объемом продукции. Поэтому будем считать, что в таблице выполняется соотношение (4.25).

Алгоритм решения задачи (4.24) состоит из двух частей: построение начального опорного плана (набора чисел $X_{ij} > 0$), удовлетворяющих соотношениям (4.24)) и построение оптимального плана.

При решении первой задачи осуществляют заполнение табл. 4.4, а при решении второй задачи ее преобразование по определенному алгоритму.

Построение начального плана перевозок

Есть несколько методов построения начального опорного плана: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и другие.

Рассмотрим метод минимального элемента

1. Выбирают клетку табл. 4.4 с минимальным значением c_{ij}, в которую записывают min (a_i, b_j).

2. Из запаса i-го поставщика и потребностей j-го потребителя вычитают эту величину. Из дальнейших рассмотрений исключают поставщика, запасы которого исчерпаны и потребителя, спрос которого полностью удовлетворен.

3. Повторяют шаг 1 до тех пор, пока все запасы продукции не будут исчерпаны.

Метод северо-западного угла отличается от метода минимального элемента тем, что клетки заполняют последовательно по строкам, начиная с элемента X_{11}.

Построение оптимального плана

Для построения оптимального плана перевозок используется метод потенциалов, который является формой симплекс-алгоритма.

Здесь могут быть два варианта.

Вариант 1. Если опорный план вырожден, то в свободные клетки с минимальными значениями C_{ij} записывают перечеркнутые нули $\cancel{0}$ (фиктивные поставки), пока не получат невырожденный план. Число $\cancel{0}$ считается очень малой положительной величиной.

Дальше задача решается методом потенциалов.

Вариант 2. Опорный план невырожден, поскольку количество ненулевых X_{ij} равно $m + n - 1$.

1. Для $X_{ij} > 0$ составляется система уравнений:

$$u_i + v_j = c_{ij}. \qquad (4.26)$$

Неизвестные u_i, v_j называются индексами (потенциалами).

2. Поскольку в системе (4.26) количество уравнений на единицу больше числа неизвестных, то одному неизвестному надо присвоить произвольное значение (обычно 0). Система (4.26) решается последовательно подстановкой полученных значений в следующие уравнения.

После решения системы (4.26) для свободных клеток таблицы определяют потенциалы

$$S_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j). \qquad (4.27)$$

3. Если все $S_{ij} \geq 0$, то полученный план оптимальный. Иначе выбирают клетку с минимальным $S_{ij} < 0$. Начиная с выбранной клетки матрицы

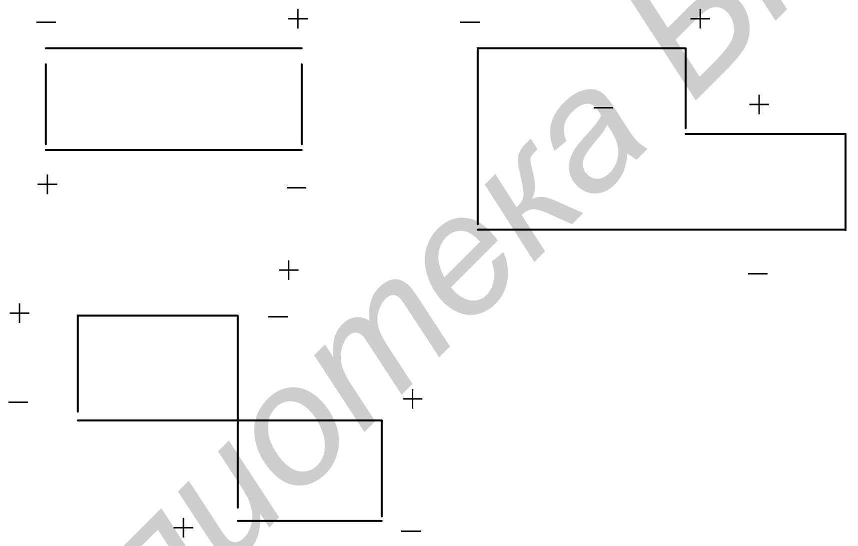
перевозок, стоится замкнутый прямоугольный цикл (цепочка) с вершинами в заполненных клетках (в том числе символом θ).

Выбранной клетке присваивается знак «+», следующей вершине цикла по (или против) часовой стрелке – знак «–», далее «+»,«–», и т.д. по циклу. Данная цепочка знаков обязательно заканчивается знаком «–». Цепочка называется вырожденной, если она состоит из одного элемента.

Среди клеток цикла, отмеченных знаком «–», выбирается клетка с наименьшим значением переменной X_{ij}, затем из нагрузки клеток, отмеченных знаком «–», вычитают это значение, а клетки, отмеченных знаком «+», прибавляют это значение. Получают новый опорный план, который проверяют на невырожденность и в случае необходимости выполняют переход к невырожденному по варианту 1.

После этого осуществляется переход к шагу 1.

Пример 4.4. В данном примере представлены возможные типы циклов.



Пример 4.5. Решить транспортную задачу, заданную матрицей вида

Поставщики	Потребители				Индексы *U*
	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 5	2 25	6	3 10	1
35	7 35	3	5	4	4
Индексы *V*	3	1	1	2	

Решение. Проверкой установлено, что задача является закрытой.

1. Опорный план построен методом минимального элемента, начиная с $X_{13} = 20$ с минимальным значением $C_{13} = 1$. Полученный опорный план невырожденный.

2. Для ненулевых X_{ij} записывается система индексных уравнений

$$U_1 + V_3 = 1;\ U_1 + V_4 = 2;\ U_2 + V_1 = 4;$$
$$U_2 + V_2 = 2;\ U_2 + V_4 = 3;\ U_3 + V_1 = 7.$$

Полагая $U_1 = 0$, находим остальные индексы, которые записывают в индексные строки таблицы.

3. Определяем потенциалы свободных клеток: $S_{11} = 5 - (0 + 3) = 2$; $S_{12} = 4 - (0 + 1) = 3$; $S_{23} = 6 - (1 + 1) = 4$; $S_{32} = 3 - (4 + 1) = -2$; $S_{33} = 5 - (4 + 1) = 0$; $S_{34} = 4 - (4 + 2) = -2$.

Полученный план неоптимальный, т.к. есть отрицательные потенциалы. Выбираем наименьший потенциал. В этом случае берем клетку (3; 2).

4. Строим замкнутый цикл (3; 2), (3; 1), (2; 1), (2; 2). Клетке (3; 2) присвоим знак «+», следующей «–» и т.д. по циклу. Выбираем среди отрицательных клеток минимальное значение X_{ij}, $\min(25, 35) = 25$. К положительным клеткам цикла добавляем 25, а из отрицательных клеток вычитаем 25.

Получаем новую таблицу, план в которой является невырожденным.

Поставщики	Потребители				Индексы U
	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 30	2	6	3 10	1
35	7 10	3 25	5	4	4
Индексы V	3	1	1	2	

Находим индексы и записываем их в индексные сроки. Повторяем алгоритм. Получаем новую таблицу, план которой является вырожденным, поскольку количество ненулевых переменных $5 < 6 = m + n - 1 = 3 + 4 - 1$.

Поставщики	Потребители				Индексы U
	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 40	2 **0**	6	3	1
35	7	3 25	5	4 10	2
Индексы V	3	1	1	2	

Помещаем в клетку (2;2) символ **0**. Вычисляем новые значения индексов.

Находим потенциалы свободных клеток:

$S_{11} = 5 – 3 = 2$, $S_{12} = 4 – 1 = 3$, $S_{23} = 6 – 2 = 3$, $S_{24} = 3 – 3 = 0$, $S_{31} = 7 – 5 = 2$, $S_{32} = 5 – 3 = 2$.

Потенциалы всех свободных клеток неотрицательны, поэтому полученный план оптимальный.

Контрольные вопросы

1. Какие есть формы представления моделей линейного программирования?
2. Как находится начальный опорный план симплексного алгоритма?
3. В чем суть симплексного преобразования?
4. Как связаны между собой двойственные задачи линейного программирования?
5. В чем суть метода потенциалов?
6. В чем суть метода минимального элемента?
7. В чем суть метода северо-западного угла?
8. В чем особенность вырожденного плана транспортной задачи?

5. Линейные регрессионные модели

5.1. Простая линейная регрессия и метод наименьших квадратов

Главная задача, которая решается с помощью регрессионного анализа – создание математических моделей экономических объектов или процессов на основе наблюдаемых (статистических) значений экономических показателей. Задача регрессионного анализа ставится следующим образом. Пусть есть два экономических показателя X и Y, характеризующих экономический объект. Показатель Y – называется объясняемым (выходным или эндогенным), показатель X – объясняющим (входным, фактором или экзогенным).

Пример 5.1. Пусть Y – рентабельность продукции, X – уровень инфляции (или курс рубля) за месяц (квартал, год). Имеется ряд наблюдаемых значений показателей (Y, X), полученных двумя способами:

1) в разные периоды времени для одного объекта;
2) в один период времени для разных однотипных объектов.

Исходные данные сведены в таблицу.

Таблица 5.1

	1	2	3	…	N
Показатель X	X_1	X_2	X_3	...	X_n
Показатель Y	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_n

В первом случае значения (X_i, Y_i), i = 1, 2, …, n называются временными рядами, n – количество наблюдений, во втором случае – пространственными наблюдениями. По значениям табл. 5.1 может быть построен график, называемый корреляционным полем.

Рис. 5.1. Корреляционное поле

Если между показателями X и Y нет точной функциональной зависимости, то предполагается, что связь между X и Y выражается стохастической (вероятностной) моделью вида

$$Y = f(X) + U_t, \tag{5.1}$$

где $f(x)$ – некоторая функция, выражающая зависимость переменной Y от фактора X, U_t – случайная функция, характеризующая влияние неучтенных факторов, t – время наблюдения.

Обычно считают, что U_t – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием $M(U_t) = 0$, постоянной дисперсией $D(U_t) = const$ и ковариацией $cov(U_t, U_{t+s}) = 0$, $s > 0$.

В этом случае уравнение

$$\hat{Y} = f(X) \tag{5.2}$$

называется уравнением простой регрессии, а функция $f(X)$ – функцией регрессии.

Из (5.1) и сделанных допущений следует, что $Y(X)$ – случайная функция, а математическое ожидание $Y(X)$ равно $f(X)$, или $f(X) = M(Y(X))$. Если рассматривать X как случайную величину, то тогда $M(Y/X) = f(X)$, т.е. условное математическое ожидание Y по X равно $f(X)$.

Если $f(X)$ – линейная функция то уравнение (5.2) имеет вид

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X \tag{5.3}$$

и называется уравнением простой (однофакторной) линейной регрессии. Если $f(X)$ – нелинейная функция, то уравнение (5.2) называется уравнением нелинейной регрессии. При рассмотрении модели (5.3) коэффициенты a_0 и a_1 выбирают так, чтобы функция (5.3) наилучшим (в некотором смысле) образом приближала значения из табл. 5.1.

Методом оценки коэффициентов модели (5.3) является метод наименьших квадратов (МНК), при котором коэффициенты a_0 и a_1 определяются из задачи

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (a_0 + a_1 X))^2, \tag{5.4}$$

где Y_i, X_i – наблюдаемые значения показателей.

Если обозначить

$$L(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (a_0 + a_1 X))^2, \tag{5.5}$$

то, как известно из математического анализа, задача (5.4) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(a_0, a_1)}{\partial a_0} &= 0, \\ \frac{\partial L(a_0, a_1)}{\partial a_1} &= 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Подставляя (5.5) в (5.6), получим систему уравнений

$$\frac{\partial L(a_0,a_1)}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (a_0 + a_1 X_i)) = 0,$$
$$\frac{\partial L(a_0,a_1)}{\partial a_1} = -2\sum(Y_i - (a_0 + a_1 X_i))X_i = 0. \qquad (5.7)$$

Откуда получим

$$n\cdot a_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$
$$a_0\sum_{i=1}^{n} X_i + a_1\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i. \qquad (5.8)$$

Если определитель системы (5.8) не равен нулю, то система имеет единственное решение:

$$a_0 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} Y_i)(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2},$$
$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}. \qquad (5.9)$$

Если ввести выборочные средние

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \overline{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i, \quad \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$
$$\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}), \mathrm{var}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \qquad (5.10)$$

тогда решение (5.9) можно записать в виде:

$$a_0 = \overline{Y} - a_1\overline{X}, a_1 = \frac{\overline{XY} - (\overline{X})(\overline{Y})}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}. \qquad (5.11)$$

Можно показать, что $a_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}.$

Из (5.9) и (5.11) видно, что решение задачи МНК существует, если $\overline{X^2} \neq (\overline{X})^2$, в противном случае линейная регрессия не может быть построена.

Коэффициенты a_0 и a_1, определенные по формулам (5.9)–(5.11), называются коэффициентами простой линейной регрессии.

Для вычисления коэффициентов a_0 и a_1 по формулам (5.9), (5.11) обычно пользуются статистической табл. 5.2.

Таблица 5.2

№ п/п	X	X^2	Y	XY
1	X_1	X^2_1	Y_1	X_1Y_1
2	X_2	X^2_2	Y_2	X_2Y_2
…	...	...	...	...
n	X_n	X^2_n	Y_n	X_nY_n
Сумма	$\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i$
Средние	$\overline{X}$	$\overline{X^2}$	$\overline{Y}$	$\overline{XY}$

Величины
$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (a_0 + a_1 X_i),\quad i = 1,2,...,n. \tag{5.12}$$
называются остатками регрессии. Они показывают, на какую величину регрессия $\hat{Y}_i$ отличается от реального значения Y_i. Из (5.4) следует, что при оценивании коэффициентов регрессии по методу наименьших квадратов значение суммы квадратов остатков минимально.

Можно построить график уравнения (5.3) на корреляционном поле (рис. 5.2).

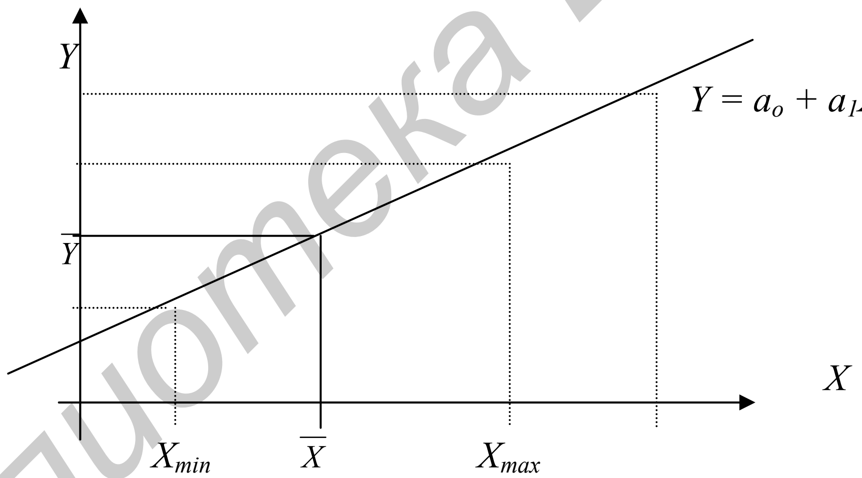


Рис. 5.2. Линия регрессии

Как видно из уравнений (5.11), средние значения показателей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ лежат на линии регрессии.

Одной из основных задач регрессионного анализа является получение прогнозных значений показателей X и Y. Если значения Xj, $j = n + 1$, $n + 2$, …, N являются прогнозными (ожидаемыми) значениями фактора X, то определяемые из уравнений регрессии (5.3) значения $\hat{Y}_j$, будут соответствующими прогнозными значениями показателя Y.

5.2. Точность и надежность модели простой линейной регрессии

Для оценки точности модели (5.3) используется ряд критериев, в которых применяются так называемые статистики или статистические характеристики:

1) коэффициент корреляции, 2) коэффициент детерминации, 3) стандартная ошибка регрессии, 4) доверительные интервалы для коэффициентов регрессии, 5) доверительные интервалы для прогнозных значений, 6) усредненный коэффициент эластичности.

Рассмотрим каждый из этих критериев более подробно.

1. Коэффициент корреляции r_{xy} используется для оценки тесноты связи между показателями X и Y:

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}, \operatorname{cov}(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n},$$
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}}, \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n}}. \tag{5.13}$$

Известно, что $|r_{xy}| \le 1$. Чем ближе $|r_{xy}|$ к 1, тем сильнее статистическая связь между X и Y. Если $r_{xy} = 0$, связь между X и Y отсутствует. Если $r_{xy} > 0$, то имеется положительная корреляция, т.е. при возрастании X статистически возрастает Y; если $r_{xy} < 0$, то отрицательная – при возрастании X показатель Y статистически убывает.

Считается, что если $|r_{xy}| > 0{,}7$, то связь между показателями X и Y высокая и можно строить простую регрессию, если $|r_{xy}| < 0{,}4$, то связь между показателями слабая и вместо X необходимо выбрать другой фактор для построения простой регрессии показателя Y или увеличить количество наблюдений.

2. Значимость вычисленного значения r_{xy} определяется с помощью t-критерия Стьюдента:

$$t_{набл} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2}(n-2)}\,. \tag{5.14}$$

Вычисленное значение $t_{набл}$ обычно сравнивается с критическим (табличным) значением t-критерия Стьюдента $t_{кр} = t_{табл}$ (α, n – 2) при уровне значимости α = 0,05 (или 0,01) (уровни доверительной вероятности $\beta = 1 - \alpha$ равны 0,95 или 0,99) и числе степеней свободы (n – 2).

Если $t_{набл} > t_{кр}$, то полученное значение r_{xy} считается значимым и принимается гипотеза о наличии статистической связи между показателями, иначе принимается гипотеза об отсутствии связи между показателями и надо выбрать другой показатель X.

Обычно при $\alpha = 0{,}3$ принимают $t_{кр} = 1{,}05$ (70% доверительная вероятность); при $\alpha = 0{,}05$ – $t_{кр} = 1{,}96$ (95% доверительная вероятность); при $\alpha = 0{,}01$ – $t_{кр} = 2{,}65$ (99% доверительная вероятность).

3. Коэффициент детерминации R^2 (R-квадрат) служит для оценки степени соответствия модели фактическим данным:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}. \qquad (5.15)$$

Величина $\sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2$ называется вариацией регрессии, а $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$ – вариацией наблюдений относительно среднего.

Имеет место неравенство $0 < R^2 < 1$. Коэффициент детерминации R^2 показывает, какую часть фактической вариации переменной Y составляет вариация регрессии.

Чем ближе R^2 к 1, тем точнее модель линейной регрессии, если $R^2 > 0{,}8$, то модель линейной регрессии считается точной, если $R^2 < 0{,}5$, то модель является неудовлетворительной, надо строить нелинейную регрессию или выбирать другой фактор X.

4. Стандартная ошибка регрессии

$$SE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n-2}}. \qquad (5.16)$$

5. Проверка значимости простой линейной регрессии осуществляется по F-критерию Фишера:

$$F = \frac{R^2 (n-2)}{(1 - R^2)}. \qquad (5.17)$$

Если вычисленное значение F-критерия больше табличного при заданном уровне значимости 0,05 и числе степеней свободы $(n - 2)$, то принимается гипотеза о наличии линейной регрессии между показателями X и Y, иначе необходимо строить нелинейную регрессию или выбирать другой фактор X.

6. Доверительные интервалы коэффициентов регрессии при заданном уровне значимости определяются по формулам:

$$\begin{gathered}(a_0 - SEa_0 \cdot t(\alpha/2, n-2),\ a_0 + SEa_0 \cdot t(\alpha/2, n-2)), \\ (a_1 - SEa_1 \cdot t(\alpha/2, n-2),\ a_1 + SEa_1 \cdot t(\alpha/2, n-2)).\end{gathered} \qquad (5.18)$$

Стандартные ошибки коэффициентов равны

$$SEa_0 = \sqrt{\frac{\sum X_t^{\ 2} \sum (Y_t - \overline{Y})^2}{n(n-2)\sum (X_t - \overline{X})^2}}\ , \tag{5.19}$$

$$SEa_1 = \sqrt{\frac{\sum (Y_t - \overline{Y})^2}{(n-2)\sum (X_t - \overline{X})^2}}\ .$$

7. Доверительный интервал для прогнозных значений X^*_t регрессии определяется по формуле

$$(\hat{Y}_t - V_t, \hat{Y}_t + V_t), \tag{5.20}$$

где

$$V_t = SE \cdot t(\alpha, n-2) \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_t^* - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}}\ , \tag{5.21}$$

$t(a, n-2)$ – табличное значение критерия Стьюдента при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы (n – 2). Формулы (5.16), (5.19), (5.20) применяются как для наблюдаемых, так и для прогнозных значений X и Y.

8. Усредненный коэффициент эластичности показывает влияние переменной X на переменную Y и определяется по формуле

$$Э = a_1 \cdot \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}\ . \tag{5.22}$$

Очевидно, что коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем изменится Y при изменении X на 1%.

Ложная регрессия

Если наблюдаемые величины имеют тенденцию к росту или снижению с течением времени, то между ними возникает ложная регрессия (корреляция), которая может превысить причинную связь между ними. Такая проблема возникает для цен и финансовых показателей, определяемых нарастающим итогом. Чтобы избежать ложной регрессии, обычно переходят к анализу индексов например $(P_1 - P_0) / P_0$, или P_1 / P_0, где P_0 базовое значение показателя P.

Нелинейная регрессия

В случае если корреляционное поле показывает нелинейную связь между показателями, или когда (согласно F-критерия) отвергнута гипотеза о линейной связи между X и Y, надо выбрать нелинейную регрессию.

Приведем примеры некоторых уравнений регрессии:

$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_nX^n$ – полиномиальная регрессия,
$Y = a_0 + a_1Ln\,X$ – логарифмическая регрессия,
$Y = aExp(bX)$ – экспоненциальная регрессия,
$Y = aX^b$ – степенная регрессия.

Полиномиальная регрессия выбирается, когда имеет место немонотонная зависимость между X и Y. Если на корреляционном поле есть только одна точка максимума или минимума, то выбирается квадратичная регрессия.

В случае квадратичной регрессии

$$\hat{Y} = a_0 + a_1X + a_2X^2 \tag{5.23}$$

коэффициенты находятся методом наименьших квадратов и определяются по данным таблицы 1 из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1\overline{X} + a_2\overline{X^2} = \overline{Y}, \\ &a_0\overline{X} + a_1\overline{X^2} + a_2\overline{X^3} = \overline{XY}, \\ &a_0\overline{X^2} + a_1\overline{X^3} + a_2\overline{X^4} = \overline{X^2Y}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Если определитель системы (5.24) не равен нулю, то имеется единственное решение для коэффициентов квадратичной регрессии.

В других случаях нелинейной регрессии ее сводят к линейной с помощью замены переменных. Данная процедура состоит в следующем. Пусть, исходя из экономических соображений или из вида корреляционного поля, выбрана степенная регрессионная модель:

$$Y = aX^b. \tag{5.25}$$

Логарифмируя (5.25), получим соотношение

$$Ln(Y) = Ln(a) + bLn(X). \tag{5.26}$$

На основе наблюдаемых данных строится табл. 5.3.

Таблица 5.3

№п/п	1	2	3	….	*N*
Ln (*X*)	*Ln* (*X1*)	*Ln* (*X2*)	*Ln X3*)	…	*Ln* (*Xn*)
Ln (*Y*)	*Ln* (*Y1*)	*Ln Y2*)	*Ln* (*Y3*)	…	*Ln* (*Yn*)

Делается замена переменных: $V = Ln(Y)$, $Z = Ln(X)$. По данным табл. 5.3 строится линейная регрессия

$$V = a_0 + a_1 Z = a_0 + a_1 Ln(X). \quad (5.27)$$

Сравнивая (23) с (24), получаем: $a_0 = Ln(a)$, $a_1 = b$. Откуда нелинейная регрессия (5.22) будет иметь вид

$$Y = Exp(a_0)X^{a1}. \quad (5.28)$$

Этот же метод используется при построении других видов нелинейной регрессии.

В практических задачах обычно строится линейная и несколько нелинейных моделей регрессии, а затем по максимальному коэффициенту детерминации R^2 выбирается одна из них.

Полиномиальная регрессия не может быть сведена с помощью замены переменных к линейной регрессии, поэтому для квадратичной модели надо пользоваться уравнениями (5.24).

Трендовые модели

Если $X = t$ – время, то уравнение регрессии называется уравнением тренда, а функция $f(t)$ – функцией тренда, которая характеризует изменение показателя Y от времени. В этом случае наблюдаемые значения $Y(t)$ называются временным рядом.

В общем случае модель временного ряда показателя Y рассматривают как сумму трех компонент:

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t), \quad (5.29)$$

где $f_0(t)$ – монотонная функция (монотонный тренд), $f_1(t)$ – сезонная компонента (с периодом один год), $f_2(t)$ – циклическая компонента с периодом несколько лет, t – месяц или квартал.

При анализе и прогнозировании временных рядов при условии корреляции случайной компоненты U_t для разных моментов времени применяются другие методы анализа временных рядов.

В системе EXEL функция «Анализ данных» позволяет строить простые линейные, нелинейные регрессионные и трендовые модели и получать их статистические характеристики.

5.3. Множественная линейная регрессия

При решении задач экономического анализа и прогнозирования часто надо определить влияние на показатель Y значений более чем одного связанных с ним показателей (факторов) X_1, X_2, …, X_n, наблюдаемых в разные моменты времени t.

Если между показателями Y и X_i нет функциональной зависимости, то рассматривают стохастическую модель вида

$$Y = F(X_1, X_2 ... X_p) + U_{t}, \tag{5.30}$$

где переменная Y называется зависимой (эндогенной) переменной, X_1, …, X_p – независимые (экзогенные) переменные (факторы), F – некоторая функция, U_t случайная величина (характеризует влияние неучтенных факторов), t – момент (период) наблюдения. Как и в случае простой регрессии U_t обычно считается нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием равным нулю $M(U_t) = 0$, постоянной дисперсией $D(U_t) = const$ и ковариацией $cov(U_t, U_{t+s}) = 0, s > 0.$

Функция F называется функцией множественной (многофакторной) регрессии, а уравнение

$$\hat{\mathrm{Y}} = \mathrm{F}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_k) \tag{5.31}$$

уравнением или моделью множественной регрессии, k – количество факторов.

Если функция F – нелинейная функция, то регрессия называется нелинейной, иначе – линейной. Уравнение множественной линейной регрессией имеет вид:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_k X_k. \tag{5.32}$$

Коэффициенты (a_i, $i = 1 - k$) называются коэффициентами множественной регрессии.

Основная задача теории линейных регрессионных моделей заключается в определении коэффициентов $\{a_i,\ i = 1 - k\}$ по наблюдаемым значениям переменных ($Y(t)$, $X_1(t)$, …, $X_k(t)$) в различные моменты времени $t = 1, 2, …, n$, где n – количество наблюдений вектора ($Y, X_1, …, X_k$).

Для определения коэффициентов (a_i, $i = 0 - k$) запишем уравнение (5.32) для различных моментов времени наблюдений ($t = 1, 2, …, n$). Получим систему n уравнений относительно k – неизвестных (a_i, $i = 0 - k$), предполагается, что $k < n$:

$$\begin{aligned} &\hat{y}^t = a_0 + a_1 x_1^t + a_2 x_2^t + ... + a_k x_k^t, \\ &t = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Систему уравнений (5.34) можно записать в матричном виде:

$$\hat{Y} = Xa, \tag{5.34}$$

где $a = (a_0 ... a_k)^T$ – неизвестный вектор параметров модели (5.32);

X – матрица наблюдаемых значений факторов X_i:

$$X = \begin{bmatrix} 1\ x_1^1\ x_2^1\ \ldots\ x_k^1 \\ 1\ x_1^2\ x_2^2\ \ldots\ x_k^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\ x_1^n\ x_2^n\ \ldots\ x_k^n \end{bmatrix}. \qquad (5.35)$$

Система уравнений (5.34) имеет n уравнений и $(к + 1)$ неизвестных $a = (a_0 \ldots a_k)^T$.

В стандартном *регрессионном* анализе предполагается, что $k < n$ и $rang(X) = k$.

Как и в простой линейной регрессии, для определения вектора неизвестных параметров $a = (a_0, \ \ldots, \ a_k)^T$ модели (5.32) по результатам наблюдений используется метод наименьших квадратов (МНК).

Построим вектор наблюдаемых значений показателя Y:

$$Y = (y^t, y^2, \ldots, y^n)^T \qquad (5.36)$$

и вектор регрессионных значений согласно (5.32):

$$\hat{Y} = (\hat{y}^1, \hat{y}^2, \ldots, \hat{y}^n).$$

Вектор $e = Y - \hat{Y} = (y^1 - \hat{y}^1, y^2 - \hat{y}^2, \ldots, y^n - \hat{y}^n)$ называется *вектором остатков* регрессии.

Параметры $(a_0, \ \ldots, \ a_k)$ находятся методом наименьших квадратов (МНК) из задачи минимизации суммы квадратов остатков:

$$\min_{a_i} \sum_{t=1}^{n} (y^t - \hat{y}^t)^2 \equiv \min_{a_i} \sum_{t=1}^{n} (y^t - \sum_{i=0}^{k} a_i X_i^t)^2. \qquad (5.37)$$

Коэффициенты (a_i) выбираются так, чтобы сумма квадратов остатков регрессии была минимальной. Если ввести функцию

$$L(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{t=1}^{n} (y^t - \sum_{i=0}^{k} a_i X_i^t)^2 \qquad (5.38)$$

то задача (5.37) эквивалентна системе уравнений:

$$\frac{\partial L(a_0, a_1, \ldots, a_k)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k. \qquad (5.39)$$

Из (5.38) и (5.39) получаем соотношение (оценку) для вектора коэффициентов регрессии $\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k)$:

$$X^T X \hat{a} = X^T Y. \qquad (5.40)$$

Если $\det X^T X \neq 0$, то вектор коэффициентов множественной регрессии равен

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \qquad (5.41)$$

Видно, что вектор $\hat{a}$ является линейной функцией от наблюдаемых значений *Y* и нелинейной относительно *X*.

Вектор остатков регрессии будет равен:

$$e = Y - \hat{Y} = Y - X \cdot \hat{a}. \qquad (5.42)$$

Прогнозирование с помощью регрессионной модели. При ожидаемых прогнозных значениях факторов X^t прогнозные значения показателя *Y* находятся из регрессионных соотношений (5.33), т.е. равны $\hat{Y}^t$, $t = n + 1, n + 2, \ldots, N$.

5.4. Оценка качества модели множественной регрессии

Для обеспечения качества модели необходимо, чтобы было $n > 3k$, где n – количество наблюдений, k – количество факторов. Модель множественной регрессии оценивается с помощью следующих критериев:

1. Коэффициент детерминации (R^2):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y}^t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(y^t - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y^t - \hat{y}^t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y^t - \bar{y})^2}, \qquad (5.43)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y^t.$$

Всегда $0 < R^2 < 1$. Чем ближе R^2 к 1, тем точнее модель. Если $R^2 > 0{,}8$, то модель считается точной, если $R^2 < 0{,}5$, то модель надо улучшить, либо выбрав другие факторы, либо увеличив количество наблюдений.

2. Коэффициент множественной корреляции:

$$R = \sqrt{R^2}. \qquad (5.44)$$

3. Скорректированный коэффициент детерминации:

$$R_c^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k-1}. \qquad (5.45)$$

4. Стандартная ошибка:

$$SE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n-k-1}}. \qquad (5.46)$$

5. Оценка значимости модели, т.е. оценка того насколько верна гипотеза о линейности регрессии между *Y* и факторами X_i осуществляется по *F*-критерию Фишера. По наблюдаемым значениям определяется значение

$$F_{набл} = \frac{R^2(n-k-1)}{(1-R^2)k}. \qquad (5.47)$$

Если $F_{набл} > F_{кр} = F_{табл}(0{,}95;\ n-1;\ n-k-1)$, где 0,95 – уровень доверительной вероятности, $(n-1)$ и $(n-k-1)$ степени свободы модели, то модель считается значимой, и принимается гипотеза о линейной регрессии между переменными Y и X_i, где $F_{табл}$ – табличное значение F-критерия Фишера.

Иначе гипотеза о линейной регрессии отвергается и надо изменять модель: выбрать другие факторы, увеличить количество наблюдений или построить нелинейную регрессию.

6. Оценка значимости коэффициентов регрессии (кроме свободного члена) осуществляется сравнением статистики

$$t_j = \frac{a_j}{SE\sqrt{b_{jj}}} \qquad (5.48)$$

с табличным значением t-статистики Стьюдента. В (5.48) b_{jj} – диагональный элемент матрицы $(X^T X)^{-1}$. Если значение (5.48) превосходит табличное значение t-статистики Стьюдента, то j-й коэффициент считается значимым, в противном случае фактор, соответствующий данному коэффициенту следует исключить из модели.

7. Доверительный интервал для прогнозных значений линии регрессии определяется по формуле

$$(\hat{Y}_t - V_t, \hat{Y}_t + V_t), \qquad (5.49)$$

где $$V_t = SE \cdot t(\alpha, n-k-1)\sqrt{x_n^{\,T}(t)(X^T X)^{-1} x_n(t)}, \qquad (5.50)$$

$t(a, n-k-1)$ – табличное значение критерия Стьюдента при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $(n-k-1)$;

$x_n(t)$ – вектор-столбец факторов для прогнозных значений времени $(t = n + 1, n + 2, n + 3, \ldots)$.

Матрица $(X^T X)^{-1}$ соответствует наблюдаемым значениям факторов.

8. Влияние факторов X на показатель Y оценивается с помощью коэффициентов эластичности $Э_j$ и бета-коэффициентов:

$$\begin{aligned} Э_j &= a_j \frac{\overline{X_j}}{\overline{Y}}, \\ \beta_j &= a_j \frac{S_j}{S_y}, \end{aligned} \qquad (5.51)$$

где $S_j = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})}{n-2}}$, $S_y = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j - \overline{Y})}{n-2}}$ – несмещенные среднеквадратичные отклонения факторов X и Y.

Коэффициенты эластичности $Э_j$ показывают, на сколько процентов изменится значение переменной Y при изменении X_j на 1%. Бета-коэффициенты β_j показывают, на какую часть среднеквадратичного отклонения изменится Y при изменении X_j на величину своего среднеквадратичного отклонения.

Долю влияния j-го фактора в суммарном влиянии всех факторов на показатель Y оценивают с помощью дельта-коэффициентов:

$$\Delta_j = r_{yj} \frac{\beta_j}{R^2}, \tag{5.52}$$

r_{yj} – коэффициент корреляции между j-м фактором и переменной Y.

При $k = 1$ получаются оценки для модели простой (однофакторной) регрессии.

5.5. Отбор факторов для построения модели линейной регрессии

Основными этапами построения регрессионной модели для заданного показателя Y являются:

1. Выбор системы факторов X_i, влияющих на показатель Y, на основе содержательного анализа задачи.
2. Сбор наблюдаемых значений показателей Y и X_i. Построение матрицы коэффициентов корреляции Y и X_i.
3. Отбор, на основе матрицы коэффициентов корреляции, наиболее значимых факторов X_i.
4. Выбор и построение регрессионной модели.
5. Оценка качества модели.
6. Оценка влияния отдельных факторов на показатель Y.
7. Прогнозирование значений показателя Y.

По наблюдаемым данным строится таблица наблюдений.

Таблица 5.4

Таблица наблюдений

Номер наблюдения	Показатели				
	Y	X_1	X_2	...	X_n
1	Y^1	X_1^1	X_2^1	…	X_n^1
2	Y^2	X_1^2	X_2^2	…	X_n^2
…	…	…	…	…	…
n	Y^n	X_1^n	X_2^n	…	X_n^n

На основе табл. 5.2 вычисляются коэффициенты парной корреляции:

$$
\begin{aligned}
& r_{x_i y} = \frac{\operatorname{cov}(x_i, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad r_{x_i x_j} = \frac{\operatorname{cov}(x_i, x_j)}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}, \\
& \operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x^t - \overline{x})(y^t - \overline{y}), \\
& \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(x^t - \overline{x})}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y^t - \overline{y})}{n}}, \\
& \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x^t, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y^t .
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

Строится таблица коэффициентов парной корреляции**.**

Таблица 5.5

Таблица коэффициентов парной корреляции

Показатели	Показатели				
	Y	X_1	X_2	…	X_n
Y	1	r_{yx1}	r_{yx1}	…	r_{yxn}
X_1	r_{x1y}	1	r_{x1x2}	…	r_{x1xn}
X_2	r_{x2y}	r_{x2x1}	1	…	r_{x2xn}
…	…	…	…	…	…
X_n	r_{xny}	r_{xnx1}	r_{xnx2}	…	1

Известно, что $\left|r_{x_i y}\right| \le 1$; $\left|r_{x_i x_j}\right| \le 1$**.** Чем ближе коэффициенты корреляции к 1, тем теснее связь. Для построения модели выбирают факторы X_i, для которых $\left|r_{x_i y}\right| > 0{,}7$**.**

Среди факторов X_i, X_j, для которых $\left|r_{x_i x_j}\right| > 0{,}7$ один отбрасывается (с меньшим значением $\left|r_{x_i y}\right|$), т.к. между ними есть мультиколлинеарность, т.е. сильная статистическая связь.

Далее отбрасываются факторы с меньшими значениями $\left|r_{x_i y}\right|$ с целью получения неравенства $n > 3k$ или увеличивают количество наблюдений.

После чего строится регрессионная модель**.**

Функция «Анализ данных» системы EXEL позволяет получать матрицу коэффициентов корреляции, модели простой линейной и множественной регрессии и их статистические характеристики.

Контрольные вопросы

1. Как определяется модель простой линейной регрессии?
2. Назовите основные причины наличия в регрессионной модели случайного отклонения.
3. Перечислите основные этапы регрессионного анализа.
4. В чем суть метода наименьших квадратов?
5. Какие выводы можно сделать об оценках коэффициентов регрессии и случайного отклонения, полученных по МНК?
6. Как связаны эмпирические коэффициенты линейной регрессии с выборочным коэффициентом корреляции между переменными?
7. Перечислите предпосылки применения МНК.
8. Как определяются стандартные ошибки регрессии и коэффициентов регрессии?
9. В чем суть статистической значимости коэффициентов регрессии?
10. Объясните суть коэффициента детерминации. В каких пределах он изменяется?
11. Как определяется модель множественной линейной регрессии?
12. Как определяется статистическая значимость коэффициентов регрессии?
13. Как используется F-статистика в регрессионном анализе?

6. Методы и модели многомерного факторного анализа

6.1. Основные понятия

Пусть имеется некоторый объект, характеризуемый системой показателей (факторов) $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, которые могут быть коррелированы между собой.

Задача многомерного факторного анализа (МФА) заключается в переходе от первоначальной системы коррелированных факторов X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ к новой системе некоррелированных факторов e_i, Y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ без потери информации об объекте. При этом число новых факторов должно быть меньше числа исходных $m < n$. Это позволяет упростить анализ объекта. Факторный анализ применяется не только в экономике, но и в других областях знаний: биологии, сельском хозяйстве, химии, металлургии и др.

Стохастическая модель МФА имеет вид

$$X_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot Y_j + v_i \cdot e, i = 1,2,\ldots,n., \qquad (6.1)$$

где $M(X_i) = a_i$, $i = 1,2,\ldots,k$.

В матричном виде модель (6.1) запишется как

$$X = a + A \cdot Y + V \cdot e, \qquad (6.2)$$

где $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)^T$, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^T$ – случайные векторы, для которых предполагается, что имеют место соотношения

$$M(Y) = M(e) = 0,\ cov(Y_i, Yj) = 0,\ cov(e_i, e_j) = 0,\ cov(Y_i, e_j) = 0,$$

т.е. все новые факторы являются некоррелированными. В модели (6.2) X – вектор-столбец исходных факторов, Y – вектор-столбец общих факторов, e – вектор-столбец характерных факторов, A – матрица факторных нагрузок на общие факторы, V – диагональная матрица нагрузок на характерные факторы. Вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $, V = diag(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ являются неслучайными. Из (6.1) и сделанных предположений следует, что $M(X) = a$.

От модели (6.2) обычно переходят к модели с центрированными переменными, полагая $\overset{0}{X} = X - a$, тогда $M(\overset{0}{X}) = 0$ и уравнения (6.2) примут вид

$$\overset{0}{X} = A \cdot Y + V \cdot e. \qquad (6.3)$$

Если первоначальные факторы X центрированы, т.е. $M(X) = 0$, то сразу имеет место модель (6.3). Кроме этого, переменные X_i часто имеют значительно различающиеся дисперсии и различные размерности, что приводит к усложнению интерпретации модели (6.1)-(6.3). Поэтому часто выполняется нормирование переменных X_i в соответствии с формулой

$$\overset{0}{X}_i = \frac{X_i - a_i}{\sigma(X_i)}, i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6.4)$$

где $\sigma(X_i)$ – среднеквадратичное отклонение переменной X_i. Поскольку $M(\overset{0}{X}_i)=0, \sigma(\overset{0}{X}_i)=1$, то переменные $\overset{0}{X}_i = \dfrac{X_i - a_i}{\sigma(X_i)}$ называются стандартизованными.

Задача многомерного статистического анализа состоит в том, чтобы по наблюдаемым значениям исходных переменных X_i определить в рамках моделей (6.1), (6.2) или (6.3) общие факторы Y и характерные факторы e, удовлетворяющие сделанным выше предположениям.

Необходимость рассмотрения такой задачи возникает, например, в регрессионных моделях, в которых факторы X_i являются сильно коррелированными, что ухудшает статистические и прогнозные характеристики моделей. В этом случае целесообразно перейти к регрессионной модели с новыми некоррелированными факторами Y_j, e_i.

6.2. Метод главных компонент

В методе главных компонент предполагается, что характерные факторы e_i отсутствуют и $m = n$. В этом случае уравнения (6.3) примут вид:

$$\begin{gathered} X = A \cdot Y \\ \textit{или} \\ Y = A^{-1} \cdot X, \end{gathered} \tag{6.5}$$

где факторы $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ являются некоррелированными и выполняются соотношения $M(X) = M(Y) = 0$, т.е. считается, что первоначальные факторы X центрированы. Предполагается, что $detA \neq 0$.

Вторая формула в (6.5) показывает, как новые факторы Y выражаются через первоначальные факторы X. Таким образом, задача состоит в нахождении новой системы таких n некоррелированных факторов Y, удовлетворяющих (6.5), что $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = 0$, $i \neq j$. Факторы Y называются главными компонентами переменных X.

Пусть проведено n наблюдений за объектом исследований. Эти наблюдения в системе координат $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ будут представлять собой точки, которые образуют корреляционное поле объекта. Теоретически это поле можно представить, как n-выборку из генеральной совокупности, образованной случайным вектором X с распределением вероятностей имеющих нулевые средние и ковариационную матрицу $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$ и дисперсии $\sigma_i^2 = \operatorname{cov}(X_i, X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Вычислительная процедура метода главных компонент заключается в следующем.

1. Строим матрицу $\hat{X}$ наблюдаемых значений переменных X_i:

$$\hat{X} = \begin{Vmatrix} X_1^1 X_1^2 \ldots X_1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_k^1 X_k^2 \ldots X_k^n \end{Vmatrix}. \tag{6.6}$$

2. Определяем выборочную ковариационную матрицу наблюдаемых значений переменных X_i:

$$K = M(\hat{X}\hat{X}^T) = \left\| \operatorname{cov}(X_i, X_j) \right\|_{k\times k}, \tag{6.7}$$

где $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_i^t X_j^t$ – выборочные ковариации стандартизованных факторов X_i и X_j.

Поскольку выборочная ковариационная матрица K симметрична и неотрицательна, то из линейной алгебры известно, что ее можно привести к диагональному виду

$$G^T K G = \Lambda = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 00...00 \\ 0\lambda_2 0...00 \\ .... \\ 000.....0\lambda_n \end{matrix} \right\| = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k). \tag{6.8}$$

При этом матрица G является ортогональной и для нее выполняется соотношение $G^T = G^{-1}$. Геометрически это означает переход к новым координатам Y (поворот в X-пространстве), при котором матрица K максимально упрощается.

В (6.8) диагональными элементами являются собственные числа матрицы K, которые определяются из характеристического уравнения

$$\det(K - \lambda E) = 0\,. \tag{6.9}$$

Столбцы матрицы G являются собственными векторами матрицы K и находятся из уравнений

$$K \cdot g_i = \lambda_i \cdot g_i,\ i = 1, 2, \ldots, k. \tag{6.10}$$

Поэтому матрица G может быть представлена как

$$G = \left\| g_1 g_2 ... g_k \right\|, \tag{6.11}$$

где g_i – векторы-столбцы. Будем считать, что векторы g_i упорядочены по убыванию собственных значений

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_k\,. \tag{6.12}$$

Тогда главные компоненты Y определяются из соотношения

$$Y = G^T X. \tag{6.13}$$

Сравнивая (6.5) и (6.13) и учитывая, что $G^T = G^{-1}$ получаем, что

$$A = G \text{ и } A^{-1} = G^T.$$

Выборочная ковариационная матрица для значений Y_i, определяемых из соотношений (6.13), имеет вид

$$\Lambda = M(YY^T) = G^T K G = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n),$$

т.е. $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = 0, i \neq j, \sigma^2(Y_i) = \operatorname{cov}(Y_i, Y_i) = \lambda_i$.

Таким образом, переменные Y_i являются статистически некоррелированными, а их дисперсии равны $M(Y_i^2) = \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Из линейной алгебры известно, что суммы диагональных элементов матриц K и Λ будут равны. Следовательно, выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{cov}(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{cov}(Y_i, Y_i)$$

$$\text{или} \quad \sum_{i=1}^{k} \sigma^2(X_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i .$$

Из этих соотношений следует, что сумма дисперсий главных компонент Y_i равна сумме дисперсий факторов X_i. Поэтому при статистическом анализе объекта можно ограничиться только частью главных компонент Y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, для которых процент вклада в общую дисперсию переменных X достаточно велик.

В случае нормированных переменных X ($M(Xi) = 0$, $\sigma^2(X_i) = 1$) выполняется соотношение $\sum_{i=1}^{k} \sigma^2(X_i) = k$. Поэтому можно оставлять для рассмотрения только те главные компоненты, для которых $\lambda_i \geq 1$, отбрасывая компоненты, информативность которых меньше информативности нормированной переменной, равной единице.

Таким образом, при переходе от переменных X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ к меньшему числу главных компонент Y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ ($m < k$) почти не произойдет потери информации об объекте. Это позволяет во множественном регрессионном анализе вместо большого числа зависимых переменных X_1, X_2, …, X_k ограничиться гораздо меньшим набором главных компонент, некоррелирующих друг с другом, что позволит улучшить статистические характеристики модели.

6.3. Модель факторного анализа

Модель факторного анализа состоит в том, что исходные показатели выражаются через меньшее число общих факторов

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} Y_j + v_i \cdot, i = 1,2,\ldots,k. \tag{6.14}$$

или $$X = A \cdot Y + V \cdot e, \tag{6.15}$$

где $A = \|a_{ij}\|_{k \times m}$ – матрица факторных нагрузок, $V = diag(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $m < k$.

Факторные модели позволяют проводить количественный анализ акционерного капитала (выбор пакета акций, оценка эффективности управления портфелем активов, определение возможного дохода).

Пример 1. Факторная модель дохода от пакета акций:

$$R_i = E_0 + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \ldots + b_{ik}F_k + E_i\,,$$

где R_i – доход, получаемый от i-й акции, E_0 – доход предыдущего периода, F_j – изменение цены j-й акции, b_{ij} – влияние на доход изменения цены j-й акции, E_i – величина, объясняющая неучитываемые факторы.

Пример 2. Модель дохода с учетом рисков.

$$R_i = E_0 + b_{i1}G_1 + b_{i2}G_2 + \ldots + b_{ik}G_k + E_i\,,$$

где E_0 – доход по безрисковой ставке, G_j – рыночные оценки риска по акциям, b_{ij} – влияние на доход риска j-й акции.

Задача факторного анализа состоит в том, чтобы по наблюдаемым значениям переменных X найти некоторые матрицы A и V, удовлетворяющие уравнениям (6.14), (6.15).

При построении факторной модели (6.14), (6.15) предполагается, что все переменные X_i центрированы и нормированы, а все общие факторы Y_j и характерные факторы e_i являются центрированными, нормированными и некоррелированными величинами. В этом случае ковариационная матрица переменных X_i совпадает с корреляционной матрицей, а все переменные X_i будут безразмерными, что упрощает интерпретацию модели.

Если имеет место (6.15), то выборочная ковариационная матрица R исходных показателей X_i (со средними характеристиками $M(X_i) = 0$, $\sigma(X_i) = 1$) удовлетворяет соотношению

$$R = AA^T + V^2, \tag{6.16}$$

где $R = M(\hat{X}\hat{X}^T) = \left\| \operatorname{cov}(X_i, X_j) \right\|_{k \times k}$, $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_i^t X_j^t$, $\hat{X}$ – матрица наблюдаемых значений факторов,

$$\hat{X} = \begin{Vmatrix} X_1^1 X_2^1 \ldots X_k^1 \\ X_1^2 X_2^2 \ldots X_k^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1^n X_2^n \ldots X_k^n \end{Vmatrix}.$$

При сделанных предположениях относительно переменных X_i, Y_j и e_i выполняются соотношения

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is}^2 + v_i^2 = \sigma^2(X_i) \equiv 1,$$
$$\sum_{s=1}^{m} a_{is} a_{js} = \operatorname{cov}(X_i, X_j),\ i \neq j, \tag{6.17}$$
$$i, j = 1,2,\ldots,k.$$

Величина v_i^2 называется специфичностью, $h_i^2 = \sum_{s=1}^{m} a_{is}^2$ – общностью показателя X_i. Если общность определена, то специфичность находят из соотношения $v_i^2 = 1 - h_i^2$. Из (6.17) следует, что полные дисперсии переменных X_i равны сумме квадратов факторных нагрузок соответствующей строки матрицы A и специфичности v_i^2.

Обычно найти матрицу A , согласно (6.14), (6.15) и (6.16), невозможно, поскольку $m < k$. Поэтому в факторном анализе переходят к уравнению

$$R_h = AA^T, \tag{6.18}$$

где R_h – редуцированная корреляционная матрица, недиагональные элементы которой совпадают с элементами R, а на диагонали вместо единиц стоят общности h_i^2, которые меньше единицы. Следовательно, предполагается, что общие факторы объясняют только часть дисперсии переменных X_i.

Система уравнений (6.18) представляет собой формулировку основной задачи факторного анализа: по известной корреляционной матрице R найти матрицу A и набор специфичностей, удовлетворяющих соотношениям $v_i^2 = 1 - h_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Эта задача решается следующим образом.

1. От значений переменных X переходят к значениям стандартизованных переменных Z по формулам:

$$Z_i^t = \frac{X_i^t - \overline{X}_i}{\sigma(X_i)},$$
$$\overline{X}_i = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_i^t}{n}, \tag{6.19}$$
$$\sigma(X_i) = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (X_i^t - \overline{X}_i)^2}{n}}$$

Здесь X_i^t – значение переменной X_i в момент времени t.

2. Для переменных Z вычисляется корреляционная матрица R

$$R = \hat{Z}\hat{Z}^T = \begin{Vmatrix} 1\, r_{12} r_{13} \ldots r_{1k} \\ r_{21} 1\, r_{23} \ldots r_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k1} r_{k2} r_{k3} \ldots 1 \end{Vmatrix}. \tag{6.20}$$

3. Оцениваются величины общностей. Обычно берут квадраты коэффициентов множественной корреляции показателей X_i со всеми остальными показателями, или наибольшие по абсолютной величине коэффициенты парной корреляции показателя X_i со всеми остальными показателями. Применяются и другие методы.

4. Определяется редуцированная матрица R_h

$$R_h = \begin{Vmatrix} h_1^2\ r_{12} r_{13} \ldots r_{1k} \\ r_{21}\ h_2^2\ r_{23} \ldots r_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k1} r_{k2} r_{k3} \ldots h_k^2 \end{Vmatrix}. \tag{6.21}$$

5. Оценивается число факторов Y. Здесь есть разные подходы, самым распространенным является подход, при котором каждый Y-фактор должен объяснять более 5% полной дисперсии переменных X.

6. Оценивается матрица факторных нагрузок. Для этого можно использовать различные методы:

– метод главных компонент, когда факторы определяются собственными значениями и собственными векторами корреляционной матрице R переменных Z;

– метод главных компонент, когда факторы определяются собственными значениями и собственными векторами редуцированной матрицы R_h;

– итеративный метод, когда часть главных компонент, определяемых по матрице R_h, используется для определения новых значений общностей. Последние подставляются в матрицу R_h, после чего вычисления повторяются. Вычисления прекращаются при незначительно изменяющихся новых значениях общностей;

– метод максимального правдоподобия, метод минимальных остатков, альфа-факторный метод и другие.

7. Выполняется вращение факторного отображения. Процедура вращения осей факторного пространства предназначена для получения из матрицы A новой матрицы B факторных нагрузок с максимально простой структурой. Вращение факторного пространства записывается в виде соотношений

$$\begin{aligned} &F = D \cdot Y, \\ &B = DAD^{-1}, \\ &\det D \neq 0, \end{aligned} \tag{6.22}$$

где D – матрица вращения, B – новая матрица факторных нагрузок.

Матрица D выбирается так, чтобы большинство коэффициентов матрицы B были близки к нулю, и лишь некоторые из них имели относительно большие значения. Геометрически (рис. 6.1) это означает, что наблюдаемые значения переменных Y, определяемые согласно (6.15), будут максимально сосредоточены вдоль новых осей F-координат. Матрица D при этом может быть не ортогональной.

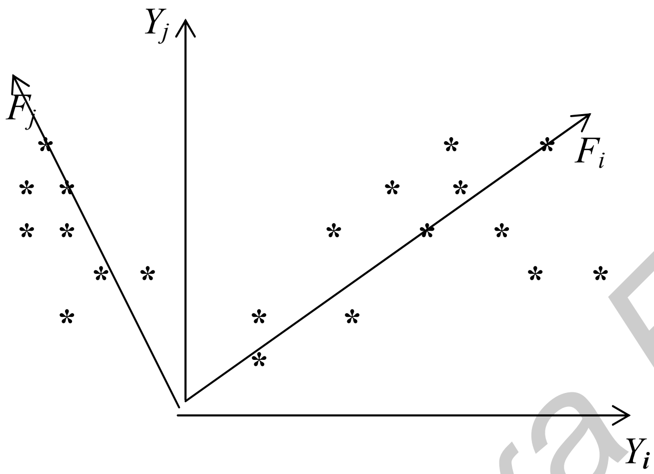


Рис. 6.1. Вращение факторного пространства

В заключение отметим, что все рассмотренные выше методы реализованы в современных пакетах прикладных программ.

6.4. Использование факторного анализа при количественном анализе акционерного капитала

Модели и методы факторного анализа позволяет проводить количественный анализ акционерного капитала (выбор акций, исследование эффективности управления портфелем активов, определение дохода).

Построение факторных моделей преследует две цели: 1) «объяснение» портфельных доходов; 2) внесение поправок на систематический риск.

Факторные модели «объяснения» дохода представляет собой линейные уравнения вида

$$R_i = E_0 + b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2 + \ldots + b_{ir}f_r + e_i,$$

где R_i – доход по i-й акции. Здесь E_0 – предполагаемый (ожидаемый) доход, коэффициенты b_{ic} характеризуют чувствительность дохода по акциям i-й фирмы к влиянию фактора l, f_l – значение изменения соответствующего фактора l, e_i – величины, представляющие некоторый остаточный доход, не объясненный другими переменными.

Факторные модели, используемые для внесения поправок на риск, также представляют собой линейные уравнения, которые включают только систематические факторы, например:

$$R_i = E_0 + b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2 + \ldots + b_{is}f_s + e_i,$$

где s – число систематических факторов. Систематические факторы характеризуют источники таких изменений, которые не могут быть элиминированы с помощью диверсификации активов. Например, экономическая депрессия влияет на курсы практически всех акций. Также же влияние оказывает и неожиданная инфляция. Несистематические факторы относятся к источникам тех изменений, которые можно элиминировать с помощью диверсификации активов.

Увеличение систематического риска в долгосрочной перспективе приводит к увеличению доходов. Предполагаемые будущие доходы связаны с систематическими факторами следующей факторной моделью:

$$E_i = g_0 + g_1 b_{i1} + g_2 b_{i2} + \ldots + g_s b_{is}$$

где E_i – ожидаемый доход по акции; g_0 – используемая в модели безрисковая ставка, $g_1, \ldots, g_s$ – соответствующие рыночные цены риска; величины $b_{i1}, \ldots, b_{is}$ характеризуют степень (масштабы риска), определяемые чувствительностью дохода по акциям i-й компании к влиянию соответствующего фактора. В рамках данной модели ожидаемый доход определяет уровень используемой при анализе нормы дисконтирования τ.

Очевидными «кандидатами» на роль источников наибольших изменений дохода, которые не могут быть уменьшены благодаря диверсификации активов, могут служить: изменение активности в реальном секторе экономики, движение процентных ставок, инфляция и колебания уровня дивидендов. Для исследования необходимо существование по меньшей мере трех или четырех систематических факторов. Два наиболее распространенных четырехфакторных набора таковы:

1) «факторы роста – цикличность – стабильность – изменения в энергетике»

2) «развитие реального сектора – инфляция – премии за риск в кредитной сфере – временная структура процентных ставок».

Использование простых и четких факторных моделей для классификации источников, вызывающих изменение дохода, и управления портфелем активов подтверждает плодотворность такого анализа.

Факторный анализ можно использовать для вектора акций путем раздельной оценки факторов, влияющих на доходы по акциям, и последующего прогнозирования изменений значений этих факторов. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим гипотетические акции, выпущенные некоторой радиовещательной компанией «GIGANT».

Предположим, что при оценке бета-коэффициента компании ее оцениваемые доходы и остаточные величины представлялись зависящими по меньшей мере от двух факторов: от рыночного дохода и от индекса, характеризующего доходы в данной отрасли. Значит, можно построить гипотетическую двухфакторную модель, позволяющую хотя бы частично объяснить изменения дохода во времени $R_t = R_{ft} + b_{1t} f_{1t} + b_{2t} f_{2t} + e_t$ где R_t – доход по акциям XYZ в период *t*, R_{ft} – доход по безрисковым активам за тот же период, b_{it} – характеризует изменения в доходе по акциям (выраженные в процентах) при заданном значении f_i, e_t – случайная ошибка, f_{1t} – значения фактора 1, которые могут характеризовать превышение рыночного дохода – дохода по акциям, входящим в набор «Standart&Poor’s», над доходом по безрисковым активам, f_{2t} – значения фактора 1, которые могут характеризовать «избыточные» доходы по акциям главных радиовещательных компаний.

Факторный анализ основан на специальных методах расчета индексов, наилучшим образом объясняющих разброс значений выборочной совокупности данных. Табл. 6.1 содержит набор таких индексов для некоторых групп акций (и облигаций), а также отдельных акций, включая акции гипотетических компаний XYZ.

Таблица 6.1

Нагрузки первых четырех факторов

	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3	Фактор 4
Индекс «Standart&Poor’s 500»	0,97	–0,04	0,09	–0,01
Денежные эквиваленты	–0,30	0,09	0,29	0,61
Индекс облигаций «Salomon Brothers»	0,30	0,43	0,57	0,05
Индекс Американской фондовой биржи	0,86	–0,22	0,00	–0,09
Индекс Нью-Йоркской фондовой биржи	0,98	–0,04	0,08	0,02
Индекс «Wilshire 5000»	0,98	–0,06	0,05	0,03
GIGANT	0,37	0,61	–0,32	0,33
«CBS»	0,58	0,48	–0,24	0,19
«Cox Communication»	0,59	0,21	–0,15	0,23
«Exxon»	0,64	–0,52	0,31	0,02
«Schlumberger»	0,65	–0,47	0,26	0,20
«American Brands»	0,44	0,40	0,50	0,02
«Avon Products»	0,43	0,33	0,06	0,36
«Chase Manhattan Bank»	0,75	–0,19	0,18	0,02
«Diamond Shamrock»	0,75	–0,19	0,18	0,02
«Charming Shoppes»	0,60	0,13	–0,34	0,24
«Manor Care»	0,64	0,30	–0,23	0,26
«Gerber Scientific»	0,69	–0,06	–0,27	0,33
«Atlantic Richfield»	0,49	–0,54	–0,02	0,44
Объясненная дисперсия	0,43	0,11	–0,08	0,06
Суммарная дисперсия	0,43	0,54	0,62	0,68

Каждый из коэффициентов может рассматриваться как бета-коэффициент, принимающий значения от –1 до +1. Например, значения первого фактора (индексы) тесно коррелированны со значениями индекса «Standart&Poor's 500» (коэффициент корреляции 97%). Следовательно, такая зависимость может интерпретироваться как проявление эффекта влияния рыночных доходов. Доходы XYZ обнаруживают 37%-ную корреляцию с этим индексом. Второй фактор труднее интерпретировать: наибольшие факторные нагрузки приходятся на индекс облигаций «Salomon Brothers», XYZ, «Exxon» (отрицательная нагрузка), «Schlumberger» (отрицательная нагрузка), «American Brands» и «Atlantic Richfield» (отрицательная нагрузка). Этот второй фактор может отражать влияние цен на нефть и сырьевые товары, так как падение цен должно способствовать повышению рыночных цен облигаций, снижению процентных ставок и, соответственно, уменьшению доходов нефтяных компаний. Третий фактор может отражать влияние долгосрочных процентных ставок (факторные нагрузки облигаций, а также «American Brands2 положительны), а четвертый – влияние краткосрочных ставок.

Приведенные факторные нагрузки и индексы рассчитываются методом выделения главных компонент, который может считаться частным случаем факторного анализа. При выделении основных компонент не специфицируется число факторов. В анализ последовательно включаются возможные источники изменений до тех пор, пока не удается получить «объяснение» всех изменений рассматриваемой переменной. При факторном анализе эти изменения «разносятся» в две группы выделяются систематические изменения (их можно «объяснить» действием рассматриваемых факторов) и остаточные, идиосинкратические изменения. Вообще говоря, при большой выборке факторная интерпретация не зависит от выбора метода расчета, хотя сами оценки факторных нагрузок могут меняться.

Факторный анализ обладает рядом достоинств, он позволяет получить практически важные результаты. Так, поскольку индексы рассчитываются на основе *анализа главных компонент* (principal components analysis) они последовательно объясняют наибольший процент вариации значений остаточных величин, не зависимых от других индексов. Значения «объясненных» каждым из четырех факторов изменений составили 43%, 11%, 8%, 6% – итого 68% вариации значений индексов и данных, относящихся к отдельным акциям. Как выясняется, действительно существенных факторов, оказывающих воздействие на процесс формирования дохода, немного. Многочисленные исследования также отмечают наличие трех или четырех основных факторов, связываемых с рыночными эффектами, процентными ставками, инфляцией и т.д.

Литература

Основная

1. Исследование операций в экономике / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ. 1997.
2. Сирл С., Госман У. Матричная алгебра в экономике. – М.: Статистика, 1974.
3. Казмер Л. Методы статистического анализа в экономике. – М.: Статистика, 1972.
4. Кендал Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976.
5. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и матемтическая статистика. – М.: Статистика, 1991.
6. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1997.
7. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. – М.: Аудит, 1997.
8. Балашевич В.А., Андронов А.М. Экономико-математическое моделирование производственных систем. – Мн.: БГУ, 1995.
9. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. – М.: Финансы и статистика, 1998.
10. Экономико-математические модели и методы / Под общей ред. А.В. Кузнецова. – Мн.: БГЭУ, 2000.
11. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2001.

Вспомогательная

1. Поттосина С.А. Метод. пособие по курсу «Эконометрика». Раздел: Анализ и прогнозирование временных рядов. – Мн.: БГУИР, 1996.
2. Поттосина С.А., Рысевец М.С. Метод. пособие по курсу «Экономико-математические модели и методы в экономике» для экономических специальностей. – Мн.: БГУИР, 1998.
3. Поттосина С.А. Экономико-математические модели и методы. Метод. указ. Программа и контрольные задания по курсу «Экономико-математические модели и методы в экономике» для студентов экономической специальности заочной формы обучения. – Мн.: БГУИР, 1999.

Св. план 2003, поз. 109

Учебное издание

Поттосина Светлана Анатольевна,
Журавлев Валерий Александрович

Экономико-математические модели и методы

Учебное пособие
для студентов экономических специальностей БГУИР
всех форм обучения

Редактор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать 18.09.2003.	Формат 60х84 1/16.	Бумага офсетная.
Печать ризографическая.	Гарнитура «Таймс».	Усл. печ. л. 5,7.
Уч.-изд. л. 5,0.	Тираж 350 экз.	Заказ 29.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Лицензия ЛП № 156 от 30.12.2002.
Лицензия ЛВ № 509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки, 6.