Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра экономической информатики

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

Методические указания, программа и контрольные задания
по курсу “Экономико-математические модели и методы в экономике”
для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Минск 1999

Метод. указания, программа и контрольные задания по курсу “ Экономико-математические модели и методы” для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / Сост. С.А. Поттосина.-Мн.:БГУИР, 1999.-

Краткая аннотация

В методическом пособии представлены программа курса “ Экономико-математические модели и методы”, приведены теоретические сведения по регрессионным и линейным экономическим моделям, представлены задания для контрольных работ.

Программа разработана на кафедре экономической информатики.

Обсуждена и одобрена на заседании кафедры экономической информатики

“ ” _______________1998 г., протокол №

Рекомендована к утверждению Советом экономического факультета БГУИР

“ ” ______________199 г., протокол №

Составление С.А. Поттосина,

1. *Программа курса*

1.1. Значение и задачи курса

Получение знаний и приобретение навыков по построению экономико-математических моделей и методов их исследования.

Общая характеристика и применение линейных экономических моделей. Линейные регрессионные модели. Задачи управления запасами, детерминированные и стохастические модели управления запасами. Модели и методы многомерного анализа.

1.2. Объем и структура курса

№	Наименование разделов и тем курса	Форма обучения заочная		
		лк.	п.з.	с.р
	Введение. Общая характеристика математических моделей и методов в экономике			2
1	***Линейные экономические модели и методы матричной алгебры***	2	8	
1.1	Основные действия над матрицами Собственные значения и векторы матрицы		2	
1.2	Модель Леонтьева многоотраслевой. экономики	1	2	
1.3	Модель равновесных цен. Модель международной торговли (модель обмена)	1	4	
2	***Регрессионные модели и метод наименьших квадратов***	3	2	
2.1	Общие сведения о регрессионных моделях	1		
2.2	Парная линейная регрессия и ее оценивание.	1	1	
2.3	Множественная линейная регрессия	1	1	
3	***Вероятностные модели рынка ценных бумаг и их оценивание***		2	6
3.1	Структура и организация рынка ценных бумаг. Основные и производные инструменты финансового рынка		1	2
3.2	Портфель ценных бумаг, его характеристики. Модели Марковица и Щарпа		1	2
3.3	Статистика финансового рынка. Прямой статистический подход и метод ведущего фактора			2
4	***Модели управления запасами***	1	2	
4.1	Простейшие модели управления запасами		1	
4.2	Детерминированная модель при переменных издержках производства		1	
4.3	Модель управления запасами при вероятностном спросе	1		
5	**Методы и модели многомерного статистического анализа**			8
5.1	Общие модели многомерного статистического анализа			2
5.2	Модель и свойства главных компонент			2
5.3	Модель факторного анализа			2
5.4	Кластерный анализ			2

1.3. Содержание учебных занятий

1. Введение. Общая характеристика математических моделей и методов в экономике

2. Линейные экономические модели и методы матричной алгебры [**2**]

2.1. Основные действия над матрицами Собственные значения и вектора матрицы.

2.2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

1.2. Модель равновесных цен. Модель международной торговли (модель обмена).

3. Регрессионные модели и метод наименьших квадратов [1,7]

3.1. Общие сведения о регрессионных моделях

3.2. Парная линейная регрессия и ее оценивание

3.3. Множественная линейная регрессия

4. Вероятностные модели рынка ценных бумаг и их оценивание [3]

4.1. Структура и организация рынка ценных бумаг. Основные и производные инструменты финансового рынка.

4.2. Портфель ценных бумаг, его характеристики. Модели Марковица и Шарпа.

4.3. Статистика финансового рынка. Прямой статистический подход и метод ведущего фактора.

5. Модели управления запасами [4 ,6]

5.1. Простейшие модели управления запасами.

5.2. Детерминированная модель при переменных издержках производства.

5.3. Модель управления запасами при вероятностном спросе.

6. Модели и методы многомерного статистического анализа [1,8]

6.1. Общие модели многомерного статистического анализа.

6.2. Модель и свойства главных компонентов.

6.3. Модель факторного анализа.

6.4. Кластерный анализ.

2. Методические указания по курсу

2.1. Регрессионные модели и метод наименьших квадратов

2.1.1. Общие сведения о регрессионных моделях.

Для статистического исследования зависимости изменения какого-либо экономического показателя y от движения набора связанных с ним показателей $x_1, x_2, ..., x_p$ оказывается полезным аналитическое уравнение вида

$$y=f(x_1,x_2,...,x_p) + u, \tag{2.1}$$

где случайная составляющая u выступает в роли ошибки (шума), y называется объясняемой или зависимой (эндогенной) переменной, $x_1,x_2,...,x_p$, объясняющими или независимыми (экзогенными) переменными. В совокупности с условиями, налагаемыми на компоненты уравнения (2.1), оно называется регрессионной моделью. Регрессионные модели могут описывать как временные, так и пространственные зависимости. Уравнение регрессии - это формула статистической связи между переменными. Формула статистической связи между двумя переменными называется парной регрессией, зависимость от нескольких переменных - множественной регрессией. Выбор формул связи переменных называется спецификацией уравнения регрессии. Регрессионные модели подразделяются на два больших класса: линейные и нелинейные, в зависимости от вида функции f. Если вид функции f аппроксимируется линейным уравнением вида

$$y=a_1x_1+a_2x_2+....+a_px_p+u, \tag{2.2}$$

то имеем дело с линейными регрессионными моделями. Например, Кейсом была предложена линейная формула зависимости частного потребления y от располагаемого дохода x : $y=C+bx$, где $C>0$ - величина автономного потребления, $1>b>0$- предельная склонность к потреблению.

В случае парной регрессии для выбора формулы связи можно использовать графический метод - построение корреляционного поля или "облака" точек наблюдений. На рис. 2.1 изображены три ситуации: (а) – взаимосвязь y и x близка к линейной, (б) - взаимосвязь величин y и x описывается нелинейной функцией, (в) - явная зависимость между y и x отсутствует.

Рис. 2.1. Корреляционное поле для различных зависимостей между двумя величинами.

До тех пор пока не оценены количественно значения параметров формулы регрессии, она остается лишь гипотезой. Оценка значений параметров выбранной формулы статистической связи переменных называется параметризацией уравнения регрессии. В теории классической регрессии коэффициенты a_1, a_2 ,...a_p считаются постоянными и неизвестными. Они подлежат оцениванию путем статистического анализа наблюдаемых сочетаний значений переменных $(y, x_1, x_2, \dots x_p)$ в разные моменты времени $t=1,2,\dots,T$. Поэтому в уравнении (2.2) появляется индекс t ,т.е.

$$y_t=a_1x_{1t}+a_2x_{2t}+\dots+a_px_{pt}+u_t\ ,\ t=1,2,\dots T \qquad (2.3)$$

где все переменные представлены временными рядами - значениями $y_t, x_{1t}, x_{2t}, \dots x_{pt}$ при $t=1,2,\dots T$, где T - объем выборки. Обычно в качестве критерия близости функции f к некоторому множеству точек на корреляционном поле для моделей множественной и парной линейной регрессии используют минимум суммы квадратов разностей наблюдаемых значений зависимой переменной y_t и теоретических значений, рассчитанных по уравнению регрессии

$$Q=\Sigma e_t^2=\Sigma(y-(a_1x_{1t}+a_2x_{2t}+\dots+a_px_{pt}))\rightarrow min \qquad (2.4)$$

Метод оценивания параметров линейной регрессии, минимизирующий сумму квадратов отклонений (2.4), называется методом наименьших квадратов (МНК). Для того, чтобы полученные МНК-оценки параметров регрессионной модели обладали хорошими свойствами (несмещенность, состоятельность, эффективность), шумовая составляющая модели должна удовлетворять некоторым условиям, а именно: математическое ожидание шума должно быть равно нулю, дисперсия шума должна быть постоянна, а между различными значениями шумовой составляющей должна отсутствовать корреляция. Если эти предположения нарушены, то для оценивания параметров регрессионных моделей применяется обобщенный метод наименьших квадратов(ОМНК).

2.1.2 Парная линейная регрессия и ее оценивание.

Рассмотрим процедуру оценивания параметров парной линейной регрессии $\hat{}y= a_0 + a_1 x$. Для того чтобы функция $Q=\Sigma(y_t - (a_0 + a_1 x_t))^2$ достигала минимума, необходимо равенство нулю ее частных производных:

$$\partial Q/ \partial a_0 = \Sigma (y_t - (a_0 + a_1 x_t)) = 0, \text{ или } \Sigma y_t - na_0 - a_1 \Sigma x_t = 0 \qquad (2.5)$$

$$\partial Q/ \partial a_1 = \Sigma (y_t - (a_0 + a_1 x_t))x_t = 0, \text{ или } \Sigma y_t x_t - a_0 \Sigma x_t - a_1 \Sigma x_t^2 = 0 \qquad (2.6)$$

Решая систему нормальных уравнений (2.5)-(2.6), получаем формулы для оценок неизвестных параметров модели:

$$a_1 = y - a_0 x,$$

$$a_0= (\Sigma y_t x_t - n y x) / (\Sigma x_t^2 -n x^2),$$

$$x = (\Sigma x_t) / n , \quad y = (\Sigma y_t) / n .$$

Из этих формул следует, что коэффициент регрессии $a_1 = r D(y)/ D(x)$ пропорционален коэффициенту корреляции r величин y,x и отношению дисперий $D(y) / D(x)$ этих величин. Коэффициент корреляции изменяется от -1 до + 1 и вычисляется по формуле

$$r = (n\Sigma x_t y_t-\Sigma x_t\Sigma y_t) / sqrt((n\Sigma x_t^2 -(\Sigma x_t)^2) (n\Sigma y_t^2 - (\Sigma y_t)^2)).$$

Символом *sqrt(b)* обозначен корень квадратный из величины *b.* Если коэффициент *r* известен, то легко рассчитать коэффициент парной регрессии a_1, не решая системы нормальных уравнений.

После определения оценок параметров рассчитываются значения эмпирической линии регрессии $\hat{}y= a_0 + a_1 x$. Достоверность подбора вида функции для выражения формы связи оценивается величиной дисперсии и характером распределения остаточных величин (остатков) $e_t = y_t - \hat{}y_t$, $t = 1,2,...,T$. Дисперсия остатков или остаточная дисперсия определяется по формуле $\sigma^2_e = \Sigma(y_t - \hat{} y_t)^2/n$. Для измерения тесноты корреляционной связи при любой форме зависимости используется индекс корреляции

$$R = 1 - \sigma_e^2 / \sigma^2 ,$$

где $\sigma^2 = \Sigma(y_t – (\Sigma y_t)/n)^2/n$ - общая дисперсия. Коэффициент детерминации R^2 показывает долю вариации зависимой переменной (результативного признака) *y* под влиянием независимой переменной (признака-фактора) *x*. Для линейных моделей R = r.

Показатели тесноты корреляционной связи и параметры уравнения регрессии следует оценивать с точки зрения их существенности (неслучайности). Для этого используют *t*- критерий Стьюдента и вычисляют значения статистики t по следующим формулам:

$$t_r = r \ sqrt((n) / (1 - r^2)) ,$$

$$t_{a0} = a_0 \ sqrt (n) /\sigma_e , \ t_{a1} = a_1 \sigma_x \ sqrt(n)/ \sigma_e ,$$

$$\sigma_x^2 = \Sigma(x_t -(\Sigma x_t)/n)^2/n.$$

Коэффициент корреляции и параметры уравнения регрессии признаются значимыми, если расчетное значение статистики *t* превышает табличное $t(\alpha / 2, n)$ с заданным уровнем значимости α и числом степеней свободы *n* . Для интервальных оценок параметра a_1 уравнения регрессии и коэффициента корреляции *r* производят расчеты их ошибок SE_1 и SE_r по формулам:

$$SE_r = sqrt((1-r^2) / (n-2)),.$$

$$SE_1 = S\sigma_e / sqrt\ (\Sigma(x_t -(\Sigma x_t)/n)^2),$$

где $S\sigma_e^2 = (\Sigma e_t^{\ 2} /n)$ - оценка дисперсии распределения остатков вдоль линии регрессии генеральной совокупности,

$$SE_r = sqrt((1-r^2)/ (n-2)).$$

Интервальные оценки параметров уравнения регрессии находятся с заданной вероятностью $1-\alpha$ в следующих пределах:

$$(a_1 - t(\alpha/2, n)\ SE_1 ,\ a_1 + t(\alpha/2, n)\ SE_1)$$

$$(r - t(\alpha/2, n)\ SE_r ,.\ r + t(\alpha/2, n)\ SE_r) .$$

Заметим, что оценка значимости и достоверности параметров модели проводится при условии нормальности распределения остатков.

Для оценки адекватности модели реальным данным применяется метод дисперсионного анализа, который предполагает расчет статистики *F* критерия Фишера (*F* - отношение). Ниже приведена таблица 2.1 дисперсионного анализа для простой линейной регрессии.

Для оценивания адекватности модели расчетное F-отношение сравнивается с табличным значением $F(\alpha,n-1,1)$. *Если* $F > F(\alpha,n-1,1)$, то построенная регрессионная модель считается адекватной реальным данным, и связь между показателями *y* и *x* признается существенной (значимой).

Таблица 2.1

Таблица дисперсионного анализа

Источник дисперсии	Сумма квадратов	Степень свободы	Средний квадрат	*F*-отношение
Регрессия	$SS_D=$ $= \Sigma(y_t - y_t)^2/n$	*1*	$MS_D=SS_D$	$F=MS_D/MS_R$
Отклонение от регрессии	$SS_R=$ $= \Sigma(y_t - y_t)^2/n$	*n-2*	$MS_R=$ $=SS_R/(n-2)$	
Полная	$SS_T=$ $= \Sigma(y_t - y_t)^2/n$	*n-1*		

Как правило, при выборе формулы взаимосвязи между показателями используют не менее двух различных моделей регрессии. Ниже приведены наиболее часто встречающиеся формулы связи:

а) $y= a_0 + a_1 x$; *б)* $y= a_0 + a_1 \lg x$; *в)* $y= a_0 a_1^{\,x}$ *или* $\lg y = \lg a_0 + x \lg a_1$.

Для отбора наиболее адекватной модели производится сравнение их остаточных дисперсий $\sigma^2_e = \Sigma(y_t - \hat{}y_t)^2/n = SS_R$. По критерию минимальности остаточной дисперсии предпочтение следует отдать той модели, которая обеспечивает наименьшее значение SS_R.

Пример

Исследовались специальные услуги - поставки на короткие расстояния внутри города с точки зрения связи между расстоянием, измеряемым кратчайшим маршрутом на линиях, и затраченным временем в минутах. Выборочные данные десяти поездок представлены в табл. 2.2 и на рис 2.2.

Таблица 2.2.

Расстояние, миль(x)	время, минуты (y)
3,5	16
2,54	13
4,9	19
4,2	18
3,0	12
1,3	11
1,0	8
3,0	14
1,5	9
4,1	16

Рис. 2.2. Корреляционное поле

Построить регрессионную модель и использовать ее для прогноза времени поездки на любые расстояния.

Решение задачи: По расположению точек на корреляционном поле, можно высказать предположение о линейной регрессии между *y* - временем поездки и *x* - расстоянием между пунктами передвижения, а именно: $y= a_0 + a_1\ x$. Параметры линейной регрессионной модели определяются по формулам

$a_0= (\Sigma y_t x_t - n\ y\ x) /(\Sigma x_t^2 -n\ x^{\ 2}),\ \ a_1 = y - a_0\ x\ \ ,\ \ \ x = (\Sigma x_t) /n\ ,\ \ y = (\Sigma\ y_t\ )/n.$

После проведения несложных вычислений находим, что $a_0= 5,91$ и $a_1 = 2,66$. Следовательно, $y= a_0 + a_1\ x = 5,91 + 2,66\ x$. Наклон линии регрессии (коэффициент a_1) - это рассчитанное количество минут, приходящееся на одну милю расстояния поездки. Пересечение линии регрессии с осью *y* (коэффициент a_0) - это рассчитанное время для подготовки к поездке и доставки товаров, т.е. необходимое для каждой поездки время, в сравнении с реально затраченным.

В данном примере параметры модели оценивались на малом количестве данных. Необходимо оценить качество полученных оценок, т.е. подсчитать доверительные интервалы для параметров a_0 и a_1., а также проверить адекватность модели реальным данным.

С этой целью вычисляется коэффициент детерминации как отношение объясненной вариации SS_D к общей вариации SS_T. Коэффициент детерминации R^2 равен квадрату выборочного коэффициента корреляции, который вычисляется по формуле :

$r = (10\ 435{,}2 - 28{,}9\ 136) / sqrt((10\ 99{,}41 - 28{,}9^2)\ (10\ 1972 - 136^2)) = 0{,}958.$

Коэффициент детерминации высок и равен $0{,}958^2 = 91{,}8$, т.е. выборочная регрессионная модель объясняет *91,8 %* вариации времени доставки. Не объясняется *8,2 %* вариации времени поездки. Эта часть вариации обусловлена всеми остальными факторами, влияющими на время поездки, но не включенными в модель.

Данную модель можно использовать для прогноза времени поездки. Например, если расстояние равно *4,0 мили*, то среднее время поставки товара $y = a_0 + a_1 x = 5{,}91+2{,}66\ x.=16{,}6$ *мин.* В расчетах такого рода требуется осторожность: не рекомендуется использовать модель для прогноза при тех значениях независимой переменной, которые не входят в исходные данные. Если бы нам нужно было экстраполировать расчеты для расстояний, выходящих за заданные пределы, мы должны были бы собрать больше данных.

В нашем примере оцененная дисперсия остатков $S\sigma_e^2 = (\Sigma e^2 /(n))$ равна *1,25*. Для вычисления стандартной ошибки

$$SE_1 = S\sigma_e / sqr\ (\Sigma(x_t - (\Sigma x_t)/n)^2)$$

вычисляем $sqrt\ (\Sigma(\ x_t\ -(\Sigma\ x_t)/n\ )^2 = sqrt\ (15{,}889)$, следовательно, SE_1 равна *0,281*.

Для проверки гипотезы H_0: между *x* и *y* нет линейной связи ($a_1 = 0$)

против альтернативы H_1: линейная связь существует ($a_1 \neq 0$) вычислим значение *t* - критерия Стьюдента для параметра a_1, оно равно *9,47*. По таблицам Стьюдента при заданной вероятности $1- \alpha = 0.95$ найдем значение $t(\alpha/2,\ n) = t(0{,}025,\ 8) = 2{,}306$. Поскольку *9,47*> *2,306*, отвергаем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 . Следовательно, линейная связь между временем и расстоянием существует, и переменная x помогает объяснить изменчивость признака *y*.

Рассчитаем доверительный интервал для параметра a_1 модели, выбирая при заданной доверительной вероятности $1 - \alpha = 0{,}95$ из таблиц Стьюдента значение $t\ (\alpha/2,\ n) = t\ (0{,}025,\ 8) = 2{,}306$:

$$(a_1 - t(\alpha/2,\ n)\ SE_1,\ a_1 + t(\alpha/2,\ n)\ SE_1)$$

$$(\ 2{,}66 - 0{,}65 \quad , \quad 2{,}66 + 0{,}65).$$

С вероятностью 95% можно сказать, что значения коэффициента регрессии лежат между *2,01* и *3,31* мин на милю.

2.1.3. Задания для контрольной работы

Задача 1. По выборочным данным исследовать зависимость между показателями *X* , *Y* и построить парную линейную регрессионную модель, для чего:

- установить наличие связи между исследуемыми показателями графическим методом (построить корреляционное поле);
- построить регрессионную модель с использованием не менее двух уравнений регрессии и отобрать лучшее по критерию минимума остаточной дисперсии;
- методом дисперсионного анализа оценить адекватность модели;

для измерения интенсивности связи между показателями;

- вычислить коэффициент корреляции, коэффициент детерминации, индекс корреляции;
- вычислить ошибки коэффициента корреляции и параметров модели с заданной доверительной вероятностью;
- оценить значимость коэффициента регрессии модели по критерию Стьюдента;
- осуществить прогноз по полученной регрессионной модели.

Замечание. При выполнении задания желательно использовать компьютерные средства.

Варианты задачи

- Зависимость между объемом реализованной продукции *X* и балансовой прибылью *Y* предприятий одной из отраслей промышленности характеризуется данными, представленными в таблице

1.1

X	1,7	2,2	8,6	1,3	3,4	3,9	4,7	5,8	3,6	6,4	7,2
Y	20	75	41	82	106	129	145	180	210	250	262

1.2.

X	1,2	1,8	2,0	2,5	3,0	3,2	3,5	4,9	5.0	6,2	7,3
Y	20	25	34	30	36	37	40	46	58	69	80

1.3.

X	2	3	4	3	2	6	5	7	8	12	9
Y	20	50	57	63	22	75	60	81	87	102	95

1.4.

X	3	2	5	4	6	7	9	11	5	4	9
Y	20	15	57	47	69	74	89	107	48	52	78

- Зависимость между стоимостью основных фондов *X* и объемом валовой продукции *Y* предприятия одной из отраслей промышленности характеризуется данными, представленными в таблице

1.5.

X	1,4	2,6	3,2	4,8	5,6	6,3	7,7	8,1	9,5	10.2	11,3
Y	20	25	31	32	40	56	52	60	61	70	75

1.6.

X	1,1	2,3	3,5	4,1	5,7	6,6	7,3	8,5	9.8	10,1	12,0
Y	21	26	30	31	39	54	51	63	65	72	78

1.7.

X	1,5	2,6	3,5	4,8	5,9	6,3	7,2	8,9	9,5	11,1	15,0
Y	30	35	41	43	50	61	68	73	79	81	93

1.8.

X	1,2	2,8	3,4	4,6	5,2	6,4	7,8	8,3	9,1	9,9	10,5
Y	25	30	32	37	41	53	59	63	71	69	80

- Зависимость между величиной располагаемого дохода *X* и объемом частного потребления *Y* в определенном периоде одной из стран характеризуется данными, представленными в таблице

1.9.

X	10.2	15.3	18,4	20,5	24,7	25,6	27,3	28.3	29,6	30,1	31.0
Y	11,4	16,8	17,2	21,5	25,8	27,9	28,4	30.1	31,6	34,8	37,2

1.10.

X	9	10	12	13	15	17	19	21	25	27	29
Y	13	15	14	17	16	19	20	22	28	30	32

1.11.

X	5,5	10,5	12,6	15,3	16,0	17,2	18,9	19,4	20,1	21,6	22,0
Y	7,1	7,9	8,3	10,6	13,6	15,2	17,8	16,3	17,9	18,9	20,6

1.12.

X	7.0	7,9	8,2	8,9	9,4	9,9	10,7	11,2	12,1	15,7	16,0
Y	13	15	16	17	18	21	22	20	25	24	26

- Зависимость между доходом корпораций *X* и объемом дивидендов *Y* за определенный период одной из стран характеризуется данными, представленными в таблице

1.13.

X	26,7	27,2	31,2	33,1	38.4	45,2	49.3	47.2	49,1	53,7	55.2
Y	13,4	13,8	15,2	16.5	17,8	19.8	21.5	22,8	24,1	25.3	25,9

1.14.

X	20	21	24	26	28	28,9	31,8	32,0	24	21	19
Y	10,6	11,5	12,5	13,9	17,9	18,1	19,0	21,7	13,8	10,7	12,0

1.15.

X	15	16	21	17	18	22	23	15,6	23,9	25	14
Y	9,0	10,4	12,8	11,4	13,2	15,9	16,3	10,3	17,4	24,8	8,2

1.16.

X	15,7	16,3	21,9	17,4	18,5	22,2	23,1	15	23	25,7	14,9
Y	9,0	11,0	13,0	11,9	14	16	17	11	18	25	9,3

- Зависимость между электровооруженностью труда *X* и средней выработкой продукции рабочего за отчетный период *Y* по различным предприятиям отрасли характеризуется данными, представленными в таблице:

1.17.

X	7	5	4	3	6	6	5	5	3	6	4
Y	8,0	6,7	5,3	6,3	5,6	3,5	7,3	8,0	6,0	6,4	4,0

1.18.

X	3	7	6	5	6	4	5	4	6	3	5
Y	3,9	8,7	7,9	6,9	7,6	6,1	7,0	6,3	7,8	4,6	6,8

1.19.

X	3	4	5	3	4	6	7	4	3	6	4
Y	4,0	5,2	6,8	5,6	6,3	7,9	9,0	4,8	3.8	7,2	4,4

1.20.

X	4	5	6	3	4	7	6	4	5	3	5
Y	5,1	4,9	7,5	3,6	3,9	7,3	6,7	4,9	6,9	3,5	7,1

Задача 2. (выполняется студентами дневной формы обучения) Исследование зависимости между расходами на жилье *(y)*, располагаемым личным доходом *(x)* и индексом реальных цен на жилье *(p)* показало, что имеет место следующая логарифмическая регрессионная модель:

$$\log y_t = \alpha + \beta_1 \log x_t + \beta_2 \log p_t + u_t \qquad (2.7)$$

Индекс *t* показывает, что текущие расходы на жилье связаны с текущим доходом. Данные по y_t, x_t, p_t за рассматриваемый период времени приведены в табл. 2.3.

Поскольку расходы на жилье подвержены инерции и медленно согласуются с изменением доходов и цен можно предложить иные регрессионные модели, а именно

$$\log y_t = \alpha + \beta_1 \log x_{t-1} + \beta_2 \log p_{t-1} + u_t \qquad (2.8)$$

$$\log y_t = \alpha + \beta_1 \log x_t + \beta_2 \log p_t + u_t \qquad (2.9)$$

В этих моделях используются лаговые переменные x_{t-1} , p_{t-1} ,x_t , $p_{t-2,}$ для получения значений которых нужно просто сдвинуть данные для x_t, p_t в табл. 2.3. на один (два) уровня ниже.

Таблица 2.3

Расходы на жилье *(y)*, располагаемый личный доход *(x)* и индекс реальных цен или относительные цены на жилье *(p)* в США (1959-1983 гг.)

год	y_t	x_t	p_t
1959	60,9	479,7	104,5
1960	64,0	489,7	104,5
1961	67,9	503,8	105,1
1962	70,7	524,9	105,0
1963	74,0	542,3	104,8
1094	77,4	580,8	104,5
1965	81,6	616,3	104,0
1966	85,3	646,9	102,6
1967	98,1	673,5	102,2
1968	93,5	701,3	100,9
1969	98,4	722,5	100,0
1970	102,0	751,6	99,6
1971	106.4	779,2	100,0
1972	112,5	810,3	100,0
1973	118,2	865,3	99,1
1974	124,2	858,4	95.1
1975	128,3	875,8	93,3
1976	134,9	906,8	93,7
1977	141,3	942,9	94,5
1978	148,5	988,8	94,7
1979	154,8	1015,5	93,8
1980	159,8	1021,6	93,0
1981	164,8	1049,3	94,2
1982	167,5	1058,3	96,7
1983	171,3	1095,4	99,2

Вместо логарифмических регрессионных моделей (2.7.9) можно рассматривать линейные регрессионные модели, если значения логарифма переменных заменить на значения самих переменных.

Варианты задания

1. Построить логарифмическую регрессию между расходами на жилье и доходами с запаздыванием на один год и сравнить результаты с такой же регрессией без запаздывания на тот же период.
2. Построить логарифмическую регрессию между расходами на жилье и доходами с запаздыванием на два года и сравнить результаты с такой же регрессией без запаздывания на тот же период.
3. Построить логарифмическую регрессию между расходами на жилье и относительной ценой с запаздыванием на один год и сравнить результаты с такой же регрессией без запаздывания на тот же период.
3. Построить логарифмическую регрессию между расходами на жилье и относительной ценой с запаздыванием на два года и сравнить результаты с такой же регрессией без запаздывания на тот же период.
4. Построить линейную регрессию между расходами на жилье доходами с запаздыванием на один год и сравнить результаты с такой же регрессией без запаздывания на тот же период.
5. Построить линейную регрессию между расходами на жилье и доходами с запаздыванием на два года и сравнить результаты с такой же регрессией без запаздывания на тот же период.
6. Построить линейную регрессию между расходами на жилье и относительной ценой с запаздыванием на один год и сравнить результаты с такой же регрессией без запаздывания на тот же период.
7. Построить линейную регрессию между расходами на жилье и относительной ценой с запаздыванием на два года и сравнить результаты с такой же регрессией без запаздывания на тот же период.
8. Построить линейное уравнение регрессии объема расходов на жилье от располагаемых доходов, индекса цен на жилье (относительной ценой) и объемов этих расходов с лагом на один период. Провести тест на автокорреляцию.
9. Построить логарифмическое уравнение регрессии объема расходов

на жилье от располагаемых доходов, индекса цен на жилье (относительной ценой) и объемов этих расходов с лагом на один период. Провести тест на автокорреляции.

2.2. Линейные экономические модели и методы матричной алгебры

Экономико-математические модели, которые широко применяются в плановой и исследовательской работе, часто применяются для описания взаимосвязи экономических структур, их динамики во времени, зависимости от ряда факторов и т.д. Один из компактных способов описания таких структур заключается в матричном отображении. Методы матричной алгебры широко используются не только в нормативных экономико-математических моделях, но и в статистических расчетах с обработкой больших массивов информации. Матричное исчисление применяется при анализе отчетного межотраслевого баланса, матрицы широко используются при анализе взаимозависимых регрессионных уравнений регрессии, в факторном и дисперсионном анализе. Матричную алгебру ценят за краткость, простоту и наглядность. Универсальный характер матричных выражений позволяет приложить одни и те же методы анализа и к малому, и к большому массиву исходных данных. Количество исходных данных влияет только на объем вычислений, а это в свою очередь определяет продолжительность и стоимость работ. Роль этих факторов стремительно уменьшается в связи с использованием быстродействующих электронных вычислительных машин.

2.2.1 Основные арифметические действия с матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Размером матрицы называется пара чисел m , n где m - число строк, а n - число столбцов в таблице. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами. Матрица размером $n\times n$ называется квадратной. Над матрицами можно производить ряд операций. Матрицу можно умножить на число. Матрицы одинакового размера можно складывать и вычитать. Матрицу A размером $m\times n$ и матрицу B размера $n\times k$ можно перемножать, в результате чего получается матрица C размера $m\times k$. Ниже определены некоторые операции над матрицами.

Сложение

$A+B=C$, *где* $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$, $C=\{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\}$.

Вычитание

$A- B=C$,*где* $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$, $C=\{c_{ij}= a_{ij} - b_{ij}\}$.

Умножение

$A\ B=C$, *где* $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$, $C=\{\Sigma^{m}_{k=1}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}\}$

Законы алгебры

Сложение матриц ассоциативно, если матрицы согласованы для сложения. Операция умножения матриц также ассоциативна, если только матрицы согласованы для умножения. Сложение матриц коммутативно в том случае, если матрицы согласованы для сложения. Операции с матрицами удовлетворяют требованиям дистрибутивного закона $A(B+C)=AB+AC$ в том случае, если матрицы B и C согласованы для сложения, а матрицы A и B согласованы для умножения. В общем случае умножение матриц не коммутативно. В трех случаях умножение матриц коммутативно - при умножении матрицы на нулевую матрицу, при умножении матрицы на диагональную матрицу, при умножении матрицы на скалярную величину.

Линейные преобразования

Произведение матрицы A на вектор x является вектором y, т.е. $y=Ax$. Если $y=Ax$ и $x=Bw$, то $y=A\ B\ w$. Это справедливо для любых векторов x,y,w и любых матриц A,B.

Транспонирование матриц

Транспонированная матрица есть матрица, чьи столбцы являются строками исходной матрицы при сохранении их порядка. Транспонирование является рефлексивным. Транспонирование вектора-столбца дает вектор-строку и наоборот. Транспонированная сумма матриц равна сумме транспонированных матриц. Транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке, т.е. $(AB) =B^TA^T$. Матрица называется симметрической, если транспонированная матрица равна самой матрице.

Обратная матрица

Матрица, которая в результате умножения на матрицу A равна единичной матрице, называется обратной к A и обозначается символом A^{-1}. Для получения обратной матрицы необходимо:

1) найти определитель исходной матрицы $det\ A$;

2) найти матрицу M из алгебраических дополнений к каждому элементу матрицы A;

3) найти отношение $A^{-1}=M^T / det\ A$.

Собственные значения и собственные вектора матрицы

Ненулевой вектор $x =(x_1,x_2,.. ,x_n)^T$ называется собственным вектором квадратной матрицы A порядка n , если $Ax=\lambda x$, где λ - некоторое число. Число λ называется собственным значением матрицы. При этом говорят, что x есть собственный вектор матрицы A, принадлежащий ее собственному значению λ.

Пусть I - единичная матрица порядка n . Уравнение $|A- \lambda I| = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A. Собственные значения матрицы A являются корнями ее характеристического уравнения. Если в матрице A сумма элементов каждого столбца равна 1, то имеется собственный вектор, принадлежащий собственному значению, равному 1.

В соответствии с теоремой Фробениуса-Перрона максимальное по модулю собственное значение λ_A неотрицательной квадратной матрицы $A \geq 0$ неотрицательно, а среди собственных векторов, принадлежащих λ_A, имеется неотрицательный вектор. В случае $A > 0$ все неотрицательные собственные векторы матрицы A положительны и принадлежат только ее максимальному по модулю собственному значению λ_A. Кроме того, в этом случае любые два положительных собственных вектора y и x отличаются лишь числовым множителем, т.е. $y=\alpha x$. Максимальное по модулю собственное значение λ_A неотрицательной матрицы A называется числом Фробениуса матрицы A, а соответствующий ему неотрицательный собственный вектор - вектором Фробениуса для А.

2.2.2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Эффективное ведение народного хозяйства предполагает наличие баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой - как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями пользуются определенного вида таблицами, называемыми таблицами межотраслевого баланса.

Рассматривается экономика, в которой имеется n различных отраслей $O_1, O_2, ..., O_n$ каждая из которых производит свой продукт. В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Будем вести речь о некотором определенном промежутке времени (плановый год) и введем следующие обозначения:

x_i - общий объем продукции отрасти i за данный промежуток времени - так называемый валовой выпуск отрасли i;

x_{ij} - объем продукции отрасти i , расходуемый отраслью j в процессе производства;

y_i - объем продукции отрасти , предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере - объем конечного потребления. Этот объем составляет обычно более *75%* всей произведенной продукции. В него входят создаваемые хозяйственные запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т.д.), поставки на экспорт.

Указанные величины можно свести в табл. 2.4

Таблица 2.4

Таблица межотраслевого баланса

Производственное потребление	Конечное потребление	Валовой выпуск
x_{11} x_{12} .... x_{1n}	y_1	x_1
x_{21} x_{22} .... x_{2n}	y_2	x_2
....		
x_{n1} x_{n2} x_{nn}	y_n	x_n

Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что при любом $i=1,2,...n$ должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ...x_{in} + y_i, \tag{2.10}$$

означающее, что валовой выпуск x_i расходуется на производственное потребление, равное $x_{i1}+ x_{i2}+.....x_{in},$ и непроизводственное потребление, равное y_i. Данное соотношение называется соотношением баланса.

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными, или стоимостными. В зависимости от этого различают натуральный и стоимостной межотраслевые балансы.

В. Леонтьев [2], рассматривая развитие американской экономики в предвоенный период, обратил внимание на то, что величины $a_{ij}=x_{ij} / x_j$ остаются постоянными в течение ряда лет вследствие примерного постоянства используемых технологий. Последнее обстоятельство позволяет сделать допущение о линейности существующей технологии: для выпуска любого объема x_j продукции отрасли, необходимо затратить продукцию отрасти i в количестве $a_{ij}\, x_j$, где a_{ij} - постоянный коэффициент. Другими словами, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Принцип линейности распространяется и на другие виды издержек, например, на оплату труда, а также на нормативную прибыль. Коэффициенты a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат, матрица $A = (a_{ij})$ - матрицей прямых затрат. Все ее элементы, по определению, неотрицательны. Такими же будут элементы x , если элементы y также неотрицательны.

В предположении линейности соотношение (2.10) принимает вид

$$x_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots x_n a_{1n} + y_1,$$
$$x_2 = x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots x_n a_{2n} + y_2, \qquad \text{или } x = A x + y \qquad (2.11)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$$
$$x_n = x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \ldots x_n a_{nn} + y_n, \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T,$$

Вектор x называется вектором валового выпуска, вектор y - вектором конечного потребления, соотношение (2.11) - уравнением линейного межотраслевого баланса. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы А и векторов х и у это соотношение называют моделью Леонтьева. Если матрица (I - A) является невырожденной, то решение уравнения (2.11) имеет вид

$$x = (I - A)^{-1} y \qquad (2.12)$$

Уравнение межотраслевого баланса можно использовать для целей планирования. В этом случае задача ставится так: для предстоящего планового периода при заданном векторе у конечного потребления требуется определить вектор х валового выпуска. Для решения этой задачи необходимо решить систему линейных уравнений (2.11) с неизвестным вектором x при заданных матрице A и векторе y. При этом нужно иметь в виду следующие особенности системы (2.11): все компоненты матрицы A и вектора y неотрицательны, что вытекает из экономического смысла A и y ; все компоненты вектора x также должны быть неотрицательны. Таким образом, $A \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 0$.

Обратим внимание на смысл коэффициентов a_{ij} прямых затрат в случае стоимостного баланса: a_{ij} совпадает со значением x_{ij} при $x_j = 1$ *(1 руб.)*. Таким образом, a_{ij} есть стоимость продукции отрасли i, вложенной в *1 руб*. продукции отрасли j .

Матрица $A \geq 0$ называется продуктивной, если для любого вектора $y \geq 0$ существует решение $x \geq 0$ уравнения $x = A x + y$. В этом случае и модель Леонтьева, определяемая матрицей A , также называется продуктивной.

Уравнение Леонтьева можно записать следующим образом: $(I\text{-}A)\ x = y$. Если обратная матрица $(I\text{-}A)^{-1}$ существует, то
$x = (I\text{-}A)^{-1}y.$

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A.
В частности, матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(I\text{-}A)^{-1}$ существует и неотрицательна. Неотрицательная квадратная матрица продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы. Известно, что если бесконечный ряд из матриц $I+A+A^2+...$ сходится, то его сумма есть матрица $(I\text{-}A)^{-1}$. С учетом выше сказанного вектор x можно представить в виде следующей суммы:

$$x = (I\text{-}A)^{-1}y = (I+A+A^2+...)y = y + Ay + A^2y + ...,$$

которую называют вектором полных затрат. Таким образом, вектор валового выпуска x совпадает с вектором полных затрат.

Пример

Рассмотрим крайне упрощенное четырехсекторное описание экономики, в котором выделены две отрасли (сельское хозяйство и промышленность), один первичный фактор производства (труд) и государственный сектор, который потребляет продукцию обеих отраслей и использует труд. Поскольку государственный сектор ничего не производит, его потребление представляет собой конечный спрос на товары, производимые в других секторах. В процессе производства каждая отрасль потребляет некоторое количество продукции другой отрасли, а также труд. Рабочая сила нуждается в продукции обеих отраслей и в затратах труда для своего воспроизводства. Трудовые ресурсы могут быть свободно импортированы и экспортированы, т.е. никогда не может быть безработицы или излишнего спроса на труд. Основной капитал и запасы продукции поддерживаются на одном и том же уровне в течение всего периода.

Наблюдение за натуральными потоками продукции между четырьмя секторами экономики на протяжении некоторого периода представлены в табл. 2.5

“Затраты – выпуск” *Таблица* 2.5.

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего x
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	600	400	1400	600	3000
Промышленность	1500	800	700	1000	4000
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

Допустим, что цены относительно стабильны и технологии меняются медленно. Каковы должны быть трудовые ресурсы и уровни выпуска в каждом производственном секторе, если государственный сектор предполагает потребить *1000 т* продукции сельского хозяйства, *1200* машин и ему требуется нанять *800* человек в следующем периоде? Иначе говоря, определить, каково будет соответствующее значение вектора x, если новое значение вектора y будет равно $y = (1000,1200,800)^T$.

Решение. Для приведения задачи к стандартному виду $x = A\,x + y$, необходимо построить матрицу A , каждый элемент a_{ij} которой определен как количество продукции, использованное для производства единицы продукции. Для этого необходимо каждый *ij-й* элемент таблицы потоков межотраслевого баланса разделить на сумму показателей строки j . Действительно, если разделить объем продукции i , проданной сектору j , на общий выпуск сектора j , то получим количество продукции i , использованное при производстве единицы продукции вида j . Например, $a_{12} = 400/4000 = 0{,}1$, т.е. для производства одной машины требуется *0,1 т* продукции сельского хозяйства. Таким путем получаем матрицу коэффициентов затрат

$$A = \begin{pmatrix} 600 / 3000 & 400 / 4000 & 1400 / 7000 \\ 1500 / 3000 & 800 / 4000 & 700 / 7000 \\ 900 / 3000 & 4800 / 4000 & 700 / 7000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 1,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$(I - A)^{-1} = (1 / 0,264) \begin{pmatrix} 0,60 & 0,33 & 0,17 \\ 0,48 & 0,66 & 0,18 \\ 0,84 & 0,99 & 0,59 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы определить уровень производства сельского хозяйства и промышленности и необходимую численность работников, определим величину x для нового значения y:

$$x = (I - A)^{-1} y = (1 / 0,264) \begin{pmatrix} 0,60 & 0,33 & 0,17 \\ 0,48 & 0,66 & 0,18 \\ 0,84 & 0,99 & 0,59 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4287,88 \\ 5363,64 \\ 9469,70 \end{pmatrix}$$

Таким образом, для удовлетворения новых показателей спроса необходимо будет произвести примерно *4288 т* сельскохозяйственной продукции и *5364* машины, для чего потребуется *9470* работников.

Относительно анализа межотраслевых связей можно сделать следующие два общих замечания. Во-первых, в большинстве межотраслевых балансов потоки выражаются в стоимостных величинах, что делает показатели совместимыми. Один из способов объединения данных о различных товарах заключается во взвешивании этих товаров по их ценам. Публикуемые таблицы межотраслевых балансов обычно выражены в стоимостных показателях.

Во-вторых, определенное экономическое содержание имеют элементы матрицы $B = (I - A)^{-1}$; (i, j) – *й* элемент представляет собой количество продукта i, в котором нуждается экономика для того, чтобы обеспечить поставку единицы товара j в качестве конечного продукта.

Например, в приведенном примере для производства одной машины в качестве конечного продукта сельскохозяйственный сектор должен поставить $b_{12} = 0,330 / 0,264 = 1.25$. Следовательно, для изготовления промышленным сектором одной машины требуется из общей потребности продукции сельского хозяйства *1,25 тонн* только *0,1 тонн* непосредственно, а потребность же в остальных *1,15 тонн* является опосредованной.

2.2.3. Модель равновесных цен.

Рассмотрим балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева - модель равновесных цен. Пусть A - матрица прямых затрат, $x= (x_1,x_2,..,x_n)^T$ - вектор валового выпуска. Обозначим через $p = (p_1,p_2,....,p_n)$ - вектор цен, i-ая координата которого равна цене единице продукции *i*-ой отрасли. Пусть первая отрасль получит доход, равный $p_1 x_1$. Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции других отраслей и для этого ею будет затрачена сумма

$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 +.......+ a_{n1}p_n$.

Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную $x_1 (a_{11}p_1+a_{21}p_2 +....+a_{n1}p_n)$.

Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, обозначим через V_1. Эта часть дохода идет на выплату зарплаты, налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции.

Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$x_1 p_1 = x_1 (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 +.......+ a_{n1}p_n) + V_1.$$

Разделив это равенство на x_1 , получаем

$$p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 +.......+ a_{n1}p_n + \nu_1,$$

где $\nu_1 = V_1 / x_1$ - норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции). Подобные равенства можно получить и для других отраслей, а затем записать в матричной форме $p = A^T p + \nu$, где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n)$ - вектор норм добавленной стоимости.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Действительно, для определения равновесных цен необходимо воспользоваться формулой $p = (I - A^T)^{-1} \nu$. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

2.2.4. Модель международной торговли (модель обмена)

Рассмотрим n стран - участниц торговли с государственными бюджетами $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Будем считать, что весь бюджет каждой страны тратится на закупки товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Пусть a_{ij} - часть бюджета, которую страна j тратит на закупки товаров страны i. Тогда можно ввести структурную матрицу торговли $A = (a_{ij})$, сумма элементов каждого столбца которой равна единице.

После подведения итогов торговли за год страна i получит выручку $p_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{in}X_n$. Для того чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать выполнения неравенств $p_i \geq X_i$ для всех i. Условием бездефицитности торговли являются равенства $p_i = X_i$ для всех i. В матричном виде это условие запишется как $AX=X$., где $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$. Из этого условия следует, что вектор бюджетов X является собственным вектором структурной матрицы торговли A, а соответствующее собственное значение равно 1. Это собственное значение матрицы является числом Фробениуса, т.е. максимальным собственным значением. Сбалансированность торговли стран - участниц может быть достигнута только в том случае, когда бюджеты их стран находятся в отношении, в котором находятся компоненты собственного вектора матрицы торговли.

По теореме Фробениуса-Перрона уравнение $AX=X$ всегда имеет ненулевое неотрицательное решение. Поскольку бюджет любой страны $X_j > 0$, то интерес представляют только положительные решения $X>0$.
В случае $A>0$ существование положительного решения следует из теоремы Фробениуса-Перрона. В то же время если какая-то страна j не импортирует товары из страны i , то матрица A не является положительной. Существует ли положительное решение уравнения $AX=X$ в этом случае? Для ответа на этот вопрос вводится понятие цепочки импорта.

Говорят, что страны i и j связаны цепочкой импорта от i к j, если существует цепочка стран с началом в i и концом в j , в которой каждая последующая страна импортирует товары из предыдущей. Имеет место терема о цепочке: если в модели международной торговли структурная матрица A такова, что любые две страны i и j можно связать цепочкой импорта от i к j , то уравнение $AX=X$. имеет положительное решение $X>0$, единственное с точностью до умножения на число. Заметим, что если A - неотрицательная матрица размером n, то для того чтобы установить возможность соединения любых i и j цепочкой чисел, в которой любые два соседних числа k и l таковы, что $a_{kl}>0$, достаточно построить замкнутую цепочку, содержащую (возможно с повторениями) все натуральные числа от 1 до n .

2.2.5. Задания для контрольной работы

Задача 3. После наблюдения натуральных потоков продукции между четырьмя секторами экономики на протяжении некоторого периода составлена таблица “затраты - выпуск” в стоимостном выражении. Определить, каковы должны быть трудовые ресурсы и уровни выпуска в каждом производственном секторе, если изменится государственный спрос *Y*. Найти матрицу коэффициентов “затраты - выпуск”. Объяснить содержание элемента $b_{2\,3}$ матрицы $(I-A)^{-1} = B$.

Найти общий объем сбыта каждого сектора и размер валового национального продукта.

Варианты задания

3.1 *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	500	300	1300	700	2800
Промышленность	1500	800	700	1000	4000
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

$Y^T = (600, 1000, 600)$

3.2. *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	600	400	1400	600	3000
Промышленность	1400	900	600	1100	4000
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

$Y^T = (600, 1000, 600)$

3.3. *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	600	400	1400	600	3000
Промышленность	1500	800	700	1000	4000
Трудовые ресурсы	800	4900	600	700	7000

$Y^T = (600, 1000, 600)$

3.4. *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	600	400	1400	600	3000
Промышленность	1700	700	600	1100	4100
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

$Y^T = (600, 1000, 600)$

3.5. *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	600	500	1500	600	3200
Промышленность	1500	800	700	1000	4000
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

$Y^T = (800, 1000, 600)$

3.6. *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промышленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	600	400	1400	600	3000
Промышленность	1300	700	700	1300	4000
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

$Y^T = (600, 1000, 600)$

3.7. *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промышленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	600	400	1400	600	3000
Промышленность	2500	800	700	1000	5000
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

$Y^T = (650, 1000, 600)$

3.8. *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудов. ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	1600	400	1400	600	4000
Промышленность	1500	800	700	1000	4000
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

$Y^T = (600, 1000, 650)$

3.9. *Таблица “Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос (гос-во)	
Сельское хозяйство	600	400	1400	600	3000
Промышленность	1500	800	700	1000	4000
Трудовые ресурсы	800	5000	600	600	7000

$Y^T = (600, 1200, 600)$

Таблица 3.10. *“Затраты - выпуск”*

Производственный сектор	Потребляющий сектор				Всего
	Сельское хоз-во	Промыш-ленность	Трудовые ресурсы	Конечный спрос	
Сельское хозяйство	600	400	1400	600	3000
Промышленность	1500	800	800	1200	4300
Трудовые ресурсы	900	4800	700	600	7000

$Y^T = (600, 1000, 600)$

Перечень контрольных вопросов:

4.1. Модель простой линейной регрессии.
4.2. Модель множественной регрессии.
4.3. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
4.4. Модель равновесных цен.
4.5. Модель международной торговли.
4.6. Модели факторного анализа.
4.7. Простейшие модели кправления запасами. Мгновенная поставка.
4.8. Простейшие модели управления запасами. Отсутствие дефицита.
4.9. Простейшие модели управления запасами. Наличие дефицита.
4.10. Модель управления запасами при переменных издержках производства.

Литература

1. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Статистика, 1991
2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.. Математические методы в экономике. -М.: ДИС, 1997
3. Первозванский А.А., Первозванская. Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. -М.: ИНФРА-М, 1994
4. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений.-М.: Аудит, 1997
5. Балашевич В.А., Андронов А.М.. Экономико-математическое моделирование производственных систем- Мн: Университетское, 1995
6. Исследование операций в экономике /Под ред.Н.Ш.Кремера.- М.: Банки и биржи, ЮНИТИ,1997 г.
7. Поттосина С.А. Методическое пособие по курсу “Эконометрика”. Раздел: Анализ и прогнозирование временных рядов.-Мн.: БГУИР, 1996 г.
8. Поттосина С.А., Рысевец М.С. Методическое пособие по курсу “Экономико-математические модели и методы в экономике” для экономических специальностей. –Мн.: БГУИР, 1998 г.

Св. план 1999, поз. 95

Учебное издание

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

Методические указания, программа и контрольные задания по курсу

“Экономико-математические модели и методы” для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Составитель: Поттосина Светлана Анатольевна

Редактор Н.В. Гриневич

Корректор Е.Н.Батурчик

Подписано в печать Формат 60х84 1/16

Бумага Печать офсетная Усл. печ.л.

Уч.-изд. 2,0 Тираж 120 экз. Заказ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Отпечатано в БГУИР. Лицензия ЛП № 156. 220027, Минск, П.Бровки, 6