

С.М.Боровиков

**Теоретические основы
конструирования, технологии
и надежности**

*Утверждено Министерством образования
Республики Беларусь в качестве учебника
для студентов инженерно-технических
специальностей высших учебных заведений*

**Минск
Издательство "Дизайн ПРО"
1998**

УДК 621.396.6(075.8)

ББК 32.84я7

Б83

Рецензенты: кафедра "Конструирование и технология радиоэлектронных систем" Полоцкого государственного университета, зав.каф. М.М.Юрцевич; С.Н.Юрко

Боровиков С.М.

Б83 Теоретические основы конструирования, технологии и надежности. — Мн.: Дизайн ПРО, 1998. — 336 с.: ил.

ISBN 85-6182-51-4

Рассматриваются приемы математического описания параметров и получения математических моделей радиоэлектронных устройств и технологических процессов их производства. Излагаются основы теории и методы анализа точности и стабильности выходных параметров, основы теории надежности и методы оценки показателей надежности проектируемых радиоэлектронных устройств.

Для студентов специальности "Проектирование и производство радиоэлектронных средств" в качестве учебника. Может быть полезна студентам других радиоэлектронных специальностей, а также широкому кругу специалистов, занимающихся применением прикладных математических методов в конструкторско-технологическом проектировании и надежности технических изделий.

Гос. Заказ

УДК 621.396.6(075.8)

ББК 32.84я7

ISBN 985-6182-51-4

© Боровиков С.М., 1998

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебником для вузов по дисциплине "Теоретические основы конструирования, технологии и надежности". В ней изложен учебный материал в соответствии с программой указанного курса для студентов специальности "Проектирование и производство радиоэлектронных средств".

В основу написания книги положены лекции, читаемые автором в Белорусском государственном университете информатики и радиоэлектроники. Используются также результаты научно-исследовательских работ, выполненных при участии автора. В немалой степени отпечаток на содержание книги наложило участие автора в работе научно-методического Совета Минвуза СССР по специальности "Конструирование и производство радиоаппаратуры", а также (начиная с 1988 г.) научно-методической комиссии по специальности "Конструирование и технология радиоэлектронных средств" при учебно-методическом управлении по радиотехнике, электронике и связи Госкомитета по народному образованию СССР.

В первой главе книги дается общая характеристика параметров радиоэлектронных средств (РЭС), излагается суть системного подхода к проектированию конструкций и технологических процессов их производства.

Во второй главе рассматривается описание параметров с учетом их вероятностного рассеяния.

В третьей главе изложены приемы построения математических моделей с использованием пассивного и активного факторных экспериментов.

В четвертой главе приводятся методы анализа точности и стабильности выходных параметров радиоэлектронных устройств и технологических процессов с использованием математических моделей.

Пятая глава посвящена основам теории надежности, определению показателей надежности проектируемых радиоэлектронных устройств, а также приемам обеспечения надежности на этапе их проектирования.

В шестой главе рассматривается решение задач прогнозирования технического состояния и надежности радиоэлектронных устройств и их элементов.

В седьмой главе дается характеристика задач оптимизации, с которыми приходится сталкиваться в процессе конструкторско-технологического проектирования РЭУ.

В восьмой главе рассматривается применение теории массового обслуживания в решении производственно-технологических задач.

В девятой главе излагаются приемы статистического моделирования параметров радиоэлектронных устройств и технологических процессов. При этом акцент делается на моделирование с использованием ЭВМ.

В учебнике приводится ряд примеров решения прикладных инженерных задач, что, по мнению автора, поможет лучше освоить излагаемый учебный материал.

Книга может быть использована в учебном процессе студентами других специальностей, ориентированных на проектирование и производство радиоэлектронных изделий.

В целом учебник дает основы для приобретения, а в дальнейшем и развития навыков в применении прикладных математических методов для проектирования радиоэлектронных устройств и технологических процессов их производства.

Это позволит выпускнику вуза в условиях проектных организаций и предприятий осмысливать и четко формулировать стоящие перед ним задачи, решение которых основывается на использовании прикладных математических методов. Для этого специалисту потребуется минимум времени для применения известных ему или изучения и применения новых методов.

ВВЕДЕНИЕ

Конструкторско-технологическое проектирование является важнейшей составной частью создания радиоэлектронных устройств (РЭУ). От успешного выполнения этого этапа во многом зависят качественные показатели РЭУ.

Разработка конструкций и технологии РЭУ в определенной степени являются творческими процессами. Удачность этих процессов во многом зависит от потенциальных дарований, опыта и интуиции инженера. Однако, независимо от наличия указанных качеств, радиоинженеру конструктору-технологу приходится прибегать к помощи математических методов при выборе решений и оценке их качества. При этом широко используются аналитические методы анализа.

Во многих случаях оценить качественные показатели чисто аналитическими приемами весьма затруднительно, либо вообще не представляется возможным. В этих случаях прибегают к экспериментальным методам. Например, для аналитической оценки точности или стабильности функционального параметра РЭУ необходимо располагать математическим выражением (моделью), связывающим этот функциональный параметр с параметрами элементов, входящих в состав устройства.

Для большинства устройств получить такое выражение чисто аналитическими приемами весьма сложно. Поэтому интересующее математическое выражение получают, используя экспериментальные методы.

Таким образом, для радиоинженера конструктора-технолога важны как аналитические, так и экспериментальные математические методы, используемые при выборе конструкторско-технологических решений и оценке их качества.

Отечественный и зарубежный опыт показывают, что применение ЭВМ для целей автоматизации инженерных расчетов способствует повышению технического уровня изделий, так как на ЭВМ можно смоделировать и просчитать большое число альтернативных конструкторских и технологических вариантов и выбрать из множества вариантов лучший (оптимальный или близкий к оптимальному). Кроме того, применение ЭВМ позволяет сократить сроки разработки РЭУ и освоения их в производстве.

Для автоматизации инженерных расчетов, основанных на математических (теоретических) методах, инженер должен понять и осмыслить эти методы. Поэтому основная цель книги изложить учебный материал в форме, доступной для понимания и осмысления студентам, получившим начальную подготовку по радиоэлектронике, языкам программирования для ЭВМ, теории вероятностей и математической статистике в объеме, предусмотренном учебным планом специальности "Проектирование и производство радиоэлектронных средств".

Библиотека БГУИР

Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПАРАМЕТРОВ. СИСТЕМНЫЕ МЕТОДЫ В КОНСТРУИРОВАНИИ И ТЕХНОЛОГИИ РЭУ

1.1. Выходные и первичные параметры

Все физические величины, характеризующие объект, процесс или внешнюю среду, в технике называются *параметрами*. Применительно к РЭУ различают выходные и первичные параметры.

Выходной параметр характеризует меру функций, для выполнения которых предназначена конструкция РЭУ или технологический процесс. Все другие параметры конструкции или технологического процесса, а также параметры внешней среды, которые в той или иной степени влияют на выходной параметр, называют *первичными* (иногда входными) *параметрами*.

Например, для неинвертирующего источника высокостабильного (опорного) напряжения, выполненного с использованием операционного усилителя $DA1$ (рис. 1.1), в качестве выходного параметра может рассматриваться выходное напряжение $U_{\text{вых}}$.

Первичными параметрами в этом случае являются параметры резисторов $R1-R3$, напряжение стабилизации стабилитрона $VD1$, напряжение источника питания $A1$, возможно, параметры операционного усилителя $DA1$ (коэффициент усиления, входное сопротивление и т.д.) и параметры окружающей среды.

Устройство (конструкция) или технологический процесс могут характеризоваться в общем случае совокупностью выходных параметров. Для усилителя звуковых частот это, например, выходная мощность, коэффициент усиления по мощности, коэффициент нелинейных искажений, диапазон воспроизводимых частот и т.д. В зависимости от решаемой инженерной задачи может рассматриваться один или несколько выходных параметров.

Заметим, что каждый элемент РЭУ в общем случае может описываться совокупностью первичных параметров. Однако в зависимости от физической сущности рассматриваемого выходного параметра РЭУ во внимание могут приниматься один (резисторы,

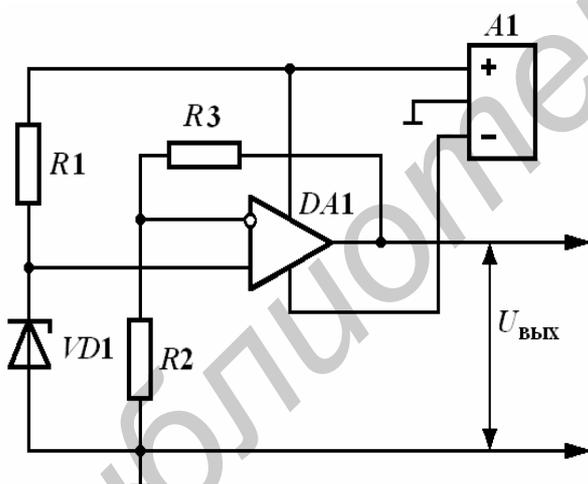


Рис.1.1 Источник опорного напряжения

конденсаторы и т.п.) или несколько (транзисторы, интегральные микросхемы, диоды) первичных параметров.

В ряде случаев [1, 2] вместо термина первичные параметры пользуются понятиями внутренние и внешние параметры, которые могут рассматриваться как разновидности первых. Под *внутренними* и *внешними* понимают параметры, характеризующие соответственно составные части РЭУ (технологического процесса) и внешнюю по отношению к нему среду. Например, если для источника опорного напряжения (рис. 1.1) в качестве выходного параметра рассматривать напряжение $U_{\text{вых}}$, то внутренними параметрами будут сопротивления резисторов $R1-R3$, напряжение стабилизации стабилитрона $VD1$, и, теоретически, параметры операционного усилителя, а внешними — сопротивление нагрузки, напряжение источника питания $A1$, температура окружающей среды и др.

В дальнейшем внутренние и внешние параметры обобщенно будем называть первичными.

Употребление терминов "выходной" и "первичный" параметры в известной степени носит условный характер и зависит от уровня структурной единицы конструкции РЭУ или технологического процесса. Например, выходные параметры каскадов и функциональных узлов могут рассматриваться как первичные параметры для блоков, а выходные параметры блоков — как первичные для радиоэлектронного аппарата в целом.

1.2. Конструкторские параметры

В конструировании РЭУ широко пользуются таким понятием, как конструкторские параметры устройства. Основными конструкторскими параметрами являются: а) масса; б) габариты; в) полезное использование массы; г) полезное использование объема; д) полезное использование площади.

Полезное использование объема описывают с помощью коэффициента заполнения по объему K_V , который можно подсчитать по формуле

$$K_V = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{V}, \quad (1.1)$$

где n — количество элементов в устройстве;

v_i — объем i -го элемента;

V — общий объем РЭУ (определяется объемом корпуса).

В инженерной практике различают коэффициент заполнения по установочным объемам и коэффициент заполнения

по физическим объемам в зависимости от того, какие объемы элементов (установочные или физические) подставляются в выражение (1.1).

Физический объем i -го элемента $V_{\text{физ}i}$ — это такой объем, который равен объему вытесненной этим элементом жидкости.

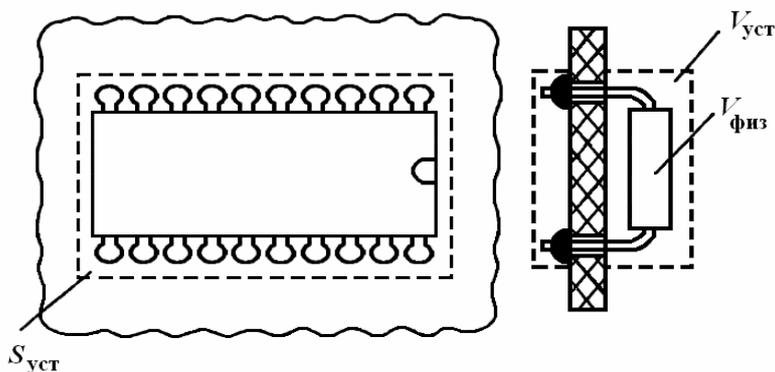


Рис. 1.2. К пояснению физического и установочного объемов

Установочный объем $V_{\text{уст}i}$ — это объем, необходимый для установки и монтажа элемента в устройстве (рис. 1.2).

Как правило, всегда справедливо соотношение

$$V_{\text{уст}i} > V_{\text{физ}i}.$$

В силу трудности определения $V_{\text{физ}i}$ в инженерной практике обычно пользуются установочными объемами $V_{\text{уст}i}$. Значения $V_{\text{уст}i}$ приводятся в справочной литературе [3], либо могут быть подсчитаны аналитически.

Значения коэффициентов заполнения по объему для некоторых видов РЭУ приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Значения коэффициентов K_V

Характеристика РЭУ (функциональное назначение)	Категория или группа РЭУ		
	стационарная	возимая	бортовая
1. Радиопередающая	0,2	0,4	0,6...0,7
2. Радиоприемная	0,4	0,5	0,7...0,8
3. РЭУ цифровой обработки информации	0,7	0,7	0,8...0,9
4. Источники питания	0,5	0,6...0,7	до 1,0

В инженерной практике вместо коэффициента заполнения по объему K_V часто пользуются коэффициентом увеличения объема $K_{ув}^V$, определяемым как

$$K_{ув}^V = \frac{1}{K_V}. \quad (1.2)$$

Значение коэффициента $K_{ув}^V$, выбирают равным 1,2...5 [3].

По аналогии с объемом может быть введено понятие коэффициента заполнения по массе (K_M), а для печатных плат и

коэффициента заполнения по площади (K_s). Эти коэффициенты могут быть подсчитаны по формулам

$$K_M = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{M}, \quad (1.3)$$

$$K_S = \frac{\sum_{i=1}^n S_{\text{уст}i}}{S}, \quad (1.4)$$

где m — масса i -го элемента;
 $S_{\text{уст}i}$ — установочная площадь i -го элемента (см. рис. 1.2);
 M — суммарная масса РЭУ;
 S — общая площадь платы, на которой устанавливаются элементы;
 n — количество элементов в РЭУ.

В инженерной практике вместо коэффициентов K_M и K_S пользуются коэффициентом увеличения массы ($K_{\text{ув}}^M$) и коэффициентом увеличения поверхности платы ($K_{\text{ув}}^S$). Коэффициенты $K_{\text{ув}}^M$ и $K_{\text{ув}}^S$ являются обратными величинами коэффициентов K_M и K_S , т.е.

$$K_{\text{ув}}^M = \frac{1}{K_M}, \quad (1.5)$$

$$K_{\text{ув}}^S = \frac{1}{K_S}. \quad (1.6)$$

При проектировании РЭУ коэффициенты увеличения используют со следующими численными значениями:

а) коэффициент $K_{\text{ув}}^M$ — от 1,1 до 3... 5;

б) коэффициент $K_{\text{ув}}^S$ — от 1,5 до 3.

Опишем, как пользоваться на практике коэффициентом увеличения на примере коэффициента увеличения поверхности (площади) печатной платы $K_{\text{ув}}^S$.

Предположим, что согласно электрической принципиальной схеме РЭУ выбраны типы всех n элементов. По справочным таблицам [3] находим установочные площади этих элементов, $S_{\text{уст}i}$ ($i = 1, \dots, n$). Далее подсчитываем значение величины

$$\sum_{i=1}^n S_{\text{уст}i}.$$

Пусть значение этой величины равно 30 см^2 . Выбираем значение коэффициента увеличения поверхности печатной платы $K_{\text{ув}}^S$.

Примем
$$K_{\text{ув}}^S = 2.$$

Тогда площадь печатной платы $S_{\text{пл}}$, на которой будут размещены элементы, определится как

$$S_{\text{пл}} = K_{\text{ув}}^S \sum_{i=1}^n S_{\text{уст } i} = 2 \cdot 30 = 60 \text{ см}^2.$$

В технической литературе коэффициенты вида K_M и K_S употребляют также и под другими названиями, например, коэффициент использования по массе и площади.

Рассмотренные выше конструкторские параметры РЭУ называют также компоновочными параметрами.

Для функциональных узлов РЭУ часто пользуются понятиями "количество деталей в единице объема" (N) и "количество функций в единице объема" (f).

$$N = \frac{n}{V}, \quad (1.7)$$

$$f = \frac{F}{V}, \quad (1.8)$$

где n — общее количество элементов данного устройства;

F — количество функций данного устройства;

V — объем РЭУ.

Характеристику f обычно используют для функциональных узлов устройств цифровой обработки информации.

1.3. Единичные и комплексные показатели качества

Совокупность свойств РЭУ, обуславливающих пригодность удовлетворять определенные потребности в соответствии с его функциональным назначением, составляет качество РЭУ.

Для оценки качества РЭУ используют *показатели качества*, под которыми понимают количественные характеристики одного или нескольких свойств РЭУ, рассматриваемые применительно к определенным условиям его создания и эксплуатации.

Качество РЭС является многогранным свойством. Для описания различных сторон этого свойства используют единичные показатели качества.

Основными единичными показателями качества являются:

- 1) выходные электрические параметры;

- 2) масса;
- 3) габариты;
- 4) надежность;
- 5) ресурс;
- 6) стоимость;
- 7) художественное оформление (дизайн);
- 8) технологичность;
- 9) удобство в эксплуатации и обслуживании.

Не все единичные показатели могут быть выражены количественными мерами. Многие показатели находятся в противоречивой связи, т.е. с улучшением одного из показателей ухудшается другой. Например, возрастание надежности РЭУ влечет за собой повышение стоимости.

Часто о качестве РЭУ судят не по абсолютным, а по относительным показателям. Например, вновь разработанное РЭУ сравнивают с существующим прототипом, либо с каким-либо образцом, принятым за эталон.

Указанные обстоятельства затрудняют комплексную оценку качества модернизированных и вновь разработанных устройств.

Для выхода из положения используют комплексные показатели качества. Эти показатели обобщенно учитывают важнейшие единичные показатели качества.

Комплексный показатель качества, в отличие от единичного, характеризует несколько свойств РЭУ (как минимум два каких-то свойства).

В инженерной практике популярностью пользуются следующие модели (выражения) комплексного показателя качества:

$$K = \sum_{i=1}^m \alpha_i k_i; \quad (1.9)$$

$$K = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m k_i^{\alpha_i}}, \quad (1.10)$$

где k_i — нормированное (безразмерное) значение i -го единичного показателя;

α_i — коэффициент, характеризующий вес (значимость, важность) i -го единичного показателя для данного вида РЭУ;

m — количество единичных показателей, принятых во внимание.

Весовые коэффициенты α_i зависят от функционального назначения устройства и устанавливаются обычно с позиции заказчика, используя, например, метод экспертных оценок.

Коэффициенты α_i обычно выбирают так, чтобы обеспечивалось одно из условий

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1; \quad \prod_{i=1}^m \alpha_i = 1. \quad (1.11)$$

Для получения нормированных безразмерных значений единичных показателей могут использоваться, например, такие выражения:

$$k_i^0 = \frac{k_i - k_i^*}{k_{i \text{ опт}} - k_i^*}; \quad k_i^0 = \frac{k_i}{k_{i \text{ ср}}}; \quad k_i^0 = \frac{k_i}{k_{i \text{ max(min)}}}, \quad (1.12)$$

где k_i^0 — нормированное значение i -го единичного показателя;
 k_i — текущее значение i -го единичного показателя;
 k_i^* — критическое значение i -го единичного показателя с точки зрения потребительских свойств РЭУ;
 $k_{i \text{ опт}}$ — оптимальное значение i -го единичного показателя качества;
 $k_{i \text{ max(min)}}$ — максимальное или минимальное значение i -го единичного показателя качества.

С практическим использованием комплексных показателей качества вида (1.9) и (1.10) применительно к интегральным микросхемам и микросборкам можно ознакомиться в работах [4, 5].

Стандарт (ГОСТ 15467-79) кроме комплексного показателя качества устанавливает еще так называемый интегральный показатель качества. Он представляет собой отношение суммарного полезного эффекта от эксплуатации РЭУ к суммарным затратам на его создание и эксплуатацию.

Интегральный показатель качества может быть также определен, например, в виде

$$I = \frac{Q_\Sigma}{Z_\Sigma}, \quad (1.13)$$

где Q_Σ — полная целевая отдача РЭУ данного типа за период эксплуатации;
 Z_Σ — сумма затрат (издержек) на достижение полной целевой отдачи.

Важное значение для оценки уровня качества РЭУ имеет распределение полной целевой отдачи и суммы затрат во времени (рис. 1.3).

Полная целевая отдача Q_Σ зависит от многих технических и организационных факторов: подготовки парка РЭУ, условий их

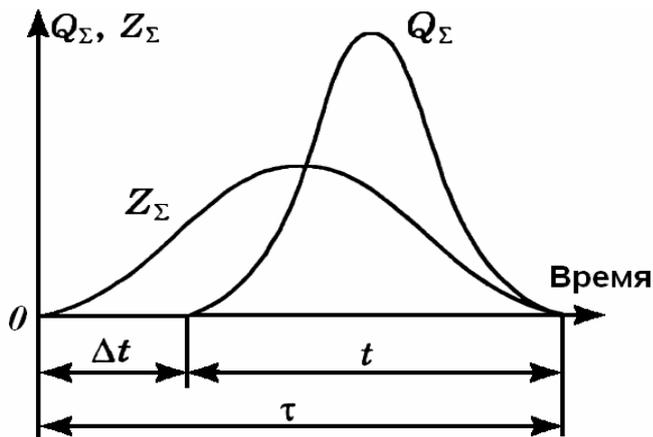


Рис. 1.3 Распределение во времени полной целевой отдачи и затрат:
 t — время достижения полной целевой отдачи; Δt — время проектирования, изготовления и подготовки к применению РЭУ; τ — период времени расходования средств.

ется влияние фактора времени.

От правильного построения математических моделей (выражений) для величин Q_Σ и Z_Σ зависит правильность интегральной оценки качества РЭУ. На практике обычно сложно получить не только модели для расчета Q_Σ и Z_Σ , но иногда не ясно, через какие параметры выразить полную целевую отдачу.

В реальных условиях не менее трудно подсчитать и суммарные затраты Z_Σ .

Вместе с тем общность интегрального показателя качества вида (1.13) облегчает его применение к конкретным условиям.

1.4. Методы оценки уровня качества

Для оценки уровня качества РЭУ на практике широко используют следующие методы: дифференциальный; комплексный; смешанный; статистический.

Дифференциальный метод основан на использовании единичных показателей качества РЭУ.

Комплексный метод основан на использовании комплексных показателей качества, важным вопросом здесь является учет тех единичных показателей, которые не могут быть явно выражены количественными мерами, например, художественное оформление (дизайн) или удобство в техническом обслуживании. Для учета подобных единичных показателей пригодны методы экспертных оценок. В этих методах единичному показателю дает независимую оценку (например, в баллах) группа специалистов-экспертов. Результирующую окончательную оценку обычно получают путем

эксплуатации, квалификации обслуживающего персонала и др. И все это изменяется во времени.

Затраты на достижение полной целевой отдачи зависят, например, от технического уровня предприятия, форм и методов организации производства, специализации и кооперирования, профессиональной подготовленности кадров, технологичности конструкции РЭУ и др. Здесь также сказывается

усреднения. В простейшем случае подсчитывают среднее арифметическое значение по формуле

$$k = \frac{\sum_{j=1}^n k_j}{n}, \quad (1.14)$$

где k_j — численное значение оценки, сделанное j -м экспертом;
 n — число экспертов, участвующих в процедуре экспертной оценки единичного показателя качества.

Лучшие результаты дает усреднение с учетом весовых коэффициентов, учитывающих значимость мнения (опыт, квалификацию, авторитет и т.п.) j -го эксперта. В этом случае используют формулу

$$k = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j k_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_j}, \quad (1.15)$$

где α_j — весовой коэффициент j -го эксперта.

Смешанный метод оценки основан на одновременном использовании единичных и комплексных показателей качества РЭУ.

При статистических методах значение интересующего показателя качества РЭУ определяют с использованием правил математической статистики.

При решении практических задач по оценке качества РЭУ обычно прибегают к сочетанию рассмотренных методов оценки качества.

1.5. Суть системного подхода к проектированию конструкций и технологии

Детальное рассмотрение конструкций и технологии РЭУ показывает, что как конструкции, так и технологические процессы проявляют признаки систем: представляют собой единое целое, состоящее из составных частей, выполняющих какую-то общую задачу. Поэтому для проектирования конструкций и технологии РЭУ применим такой же подход, как и при проектировании систем. Он получил название системного подхода.

Опыт проектирования показывает, что использование системного подхода позволяет достичь более высоких качественных показателей конструкций и технологических процессов, нежели при рецептурном принципе проектирования.

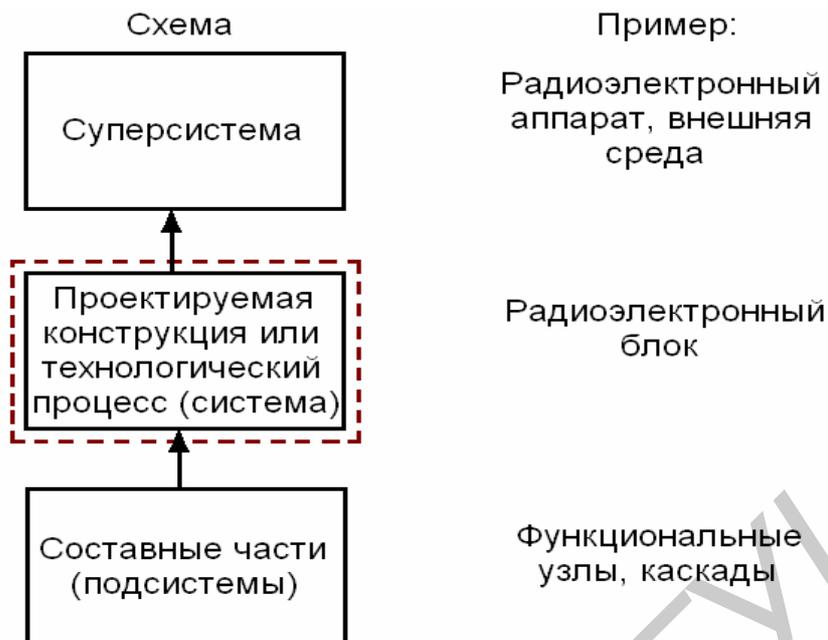


Рис.1.4. К понятию системного подхода

Характерной особенностью рецептурного подхода к проектированию является использование указаний (рекомендаций, рецептов) отраслевых стандартов, нормалей и других технических документов.

В самом общем виде системный подход к проектированию заключается в учете на всех этапах проектирования связи, отражаемой схемой, показанной на рис. 1.4.

Рассмотрим основные черты системного подхода применительно к проектированию конструкций:

1) необходимость рассмотрения альтернативных вариантов, которые предположительно могут привести к получению сопоставимых результатов. Это, прежде всего, касается выбора источников энергии, используемых материалов, компоновочных схем, комплектующих изделий. Выбранные решения должны наиболее адекватно удовлетворять требованиям к конструкции;

2) оценка качества конструкции не только основываясь на общепринятых показателях, таких, как выходные параметры, стоимость, время разработки, удобство в обслуживании, надежность и т.п., но и количественная оценка значения комплексного (интегрального) показателя качества;

3) учет того, что конструкция РЭУ функционирует во внешней среде и в действительности является подсистемой некоторой другой системы (суперсистемы). Решения, принимаемые при разработке конструкции РЭУ на любой стадии, обусловлены внешней средой, которая выступает в виде следующих факторов: физическое окружение; уровень науки и техники; форма структуры

проектной организации; квалификация, опыт и интеллект персонала; время разработки; дополнительные факторы;

4) исследование эффективности конструкторских решений на основе моделирования без использования устройств;

5) использование вероятностно-статистических методов при оценке решений, на результат которых влияют случайные параметры;

6) широкое использование ЭВМ и современного математического аппарата при оценке пригодности конструкторских решений.

По аналогии с конструкциями может быть рассмотрен системный подход применительно к проектированию технологии [6].

Библиотека БГУИР

Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ

2.1. Случайный характер параметров и их вероятностное описание

В силу объективно действующих причин параметры элементов, технологических операций, свойства материалов, характеристики инструмента всегда имеют некоторый разброс относительно своих средних (номинальных) значений.

По сути, параметры, с которыми приходится иметь дело в конструировании и технологии РЭУ (КиТРЭУ) являются случайными.

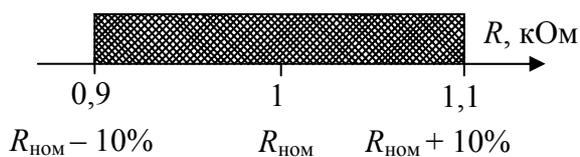


Рис.2.1. Диапазон изменения сопротивления нагрузки

допуска (рис.2.1).

Для анализа точности и стабильности выходных параметров надо располагать моделью (выражением) вида

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

где y – выходной параметр;
 x_i, \dots, x_n – первичные параметры;
 n – число учитываемых первичных параметров.

Кроме того, надо знать вероятностное описание первичных параметров. Под вероятностным описанием будем понимать количественные характеристики, дающие представление о среднем значении параметра, степени его разброса, группировании значений параметра в той или иной области и т.д.

В качестве вероятностного описания параметров можно использовать его числовые характеристики, а именно:

а) математическое ожидание параметра $M(x)$;

б) среднее квадратическое отклонение параметра $\sigma(x)$ или дисперсию $D(x)$, где x – рассматриваемый параметр.

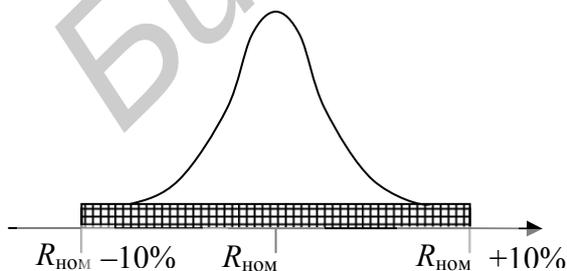


Рис.2.2. Группирование значений сопротивления резистора в пределах поля допуска

Указанные характеристики хороши для инженерного использования, однако не дают ответ на вопрос, как сгруппированы значения параметра в пределах поля допуска (рис.2.2).

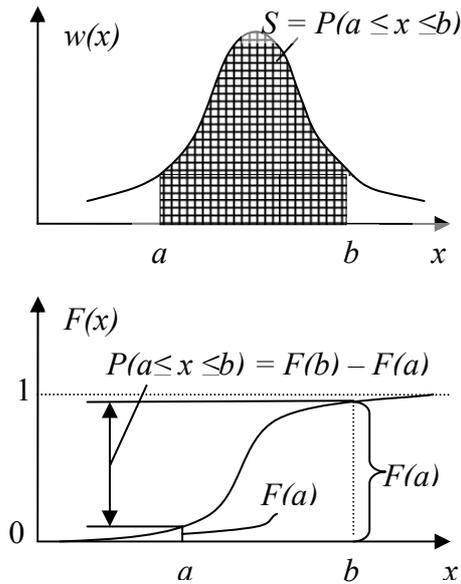


Рис.2.3. Определение вероятности попадания параметра в заданный диапазон

Для ответа на этот вопрос в инженерной практике используют закон распределения параметра в пределах поля допуска. Пользуются либо плотностью распределения параметра $w(x)$ или функцией распределения $F(x)$. Функции w и F несут о рассматриваемом параметре x одну и ту же информацию, но в разной форме.

Инженера конструктора-технолога нередко интересует вопрос, какова вероятность того, что параметр x будет находиться в диапазоне от a до b . Эта вероятность с использованием функций w и F может быть определена как

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b w(x) dx, \quad (2.2)$$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a). \quad (2.3)$$

Геометрическая интерпретация выражений (2.2) и (2.3) показана на рис.2.3.

2.2. Модели законов распределения параметров

2.2.1. Общие сведения

В инженерной практике пользуются термином "модель закона распределения параметра", имея в виду, что истинный закон распределения может быть вообще нам не известен, а используем мы некоторое приближение этого закона, полученное экспериментально.

Известно более 300 видов моделей законов распределения. В конструировании и технологии РЭУ используют не более 10-20 из них. Широко используют такие, как нормальную и усеченную нормальную; равномерную; экспоненциальную; логарифмически нормальную; модель Вейбулла.

Характеристика экспоненциальной модели и модели Вейбулла, широко используемых в теории и практике надежности, приведена в разделе 5.6.

2.2.2. Нормальная модель

Функция w для этой модели имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.4)$$

где x – рассматриваемый параметр и его текущие значения;
 m, σ – параметры модели.

Функция распределения для нормальной модели может быть получена в виде

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.5)$$

Указанный интеграл нельзя выразить через элементарные функции. Для его определения используют специальные табличные функции. В инженерной практике широко используют две:

а) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, где $\Phi(x)$ – нормальная функция рас-

пределения параметра со значениями $m=0, \sigma = 1$ (в дальнейшем – функция стандартного нормального распределения);

б) $\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, где $\Phi_1(x)$ – функция Лапласа.

Связь между этими функциями такова

$$\Phi(x) = 0,5 + \Phi_1(x).$$

В дальнейшем будем пользоваться функцией $\Phi(x)$.

Тогда функция распределения параметра x в случае нормальной модели запишется как

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad (2.6)$$

где $\frac{x-m}{\sigma}$ – аргумент функции.

С учетом выражения (2.6) вероятность вида $P(a \leq x \leq b)$ может быть определена как

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \quad (2.7)$$

С параметрами m и a нормальной модели как-то связаны числовые характеристики $M(x)$ и $\sigma(x)$. Для нормальной модели, и только для нее, справедливы равенства

$$\begin{cases} m = M(x); \\ \sigma = \sigma(x). \end{cases} \quad (2.8)$$

Графики функций $w(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 2.4.

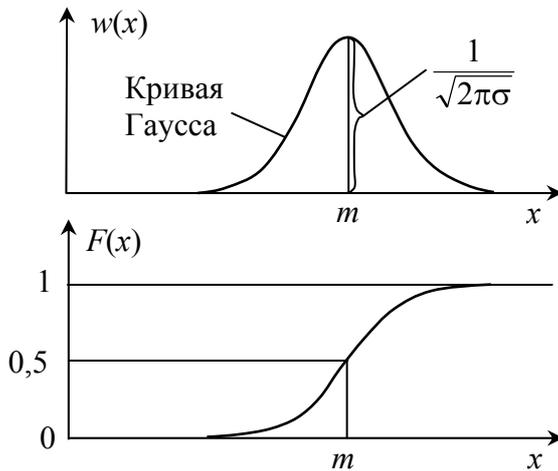


Рис.2.4. Графики функций $w(x)$ и $F(x)$ для нормальной модели

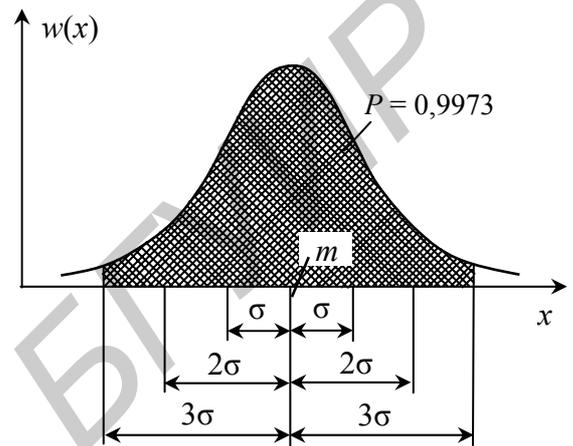


Рис.2.5. К пояснению “правила трех сигм”

Во всех случаях нормальной модели инженера может интересовать вопрос, какова вероятность вида

$$P(m - n \cdot \sigma \leq x \leq m + n \cdot \sigma),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – целые числа.

Применяя выражение (2.7), для $n = 1, 2, 3$ получим значения, приведенные в табл.2.1.

Таблица 2.1

Значения вероятностей $P(m - n \cdot \sigma \leq x \leq m + n \cdot \sigma)$ в зависимости от n

n	1	2	3
$P(m - n \cdot \sigma \leq x \leq m + n \cdot \sigma)$	0,68	0,95	0,9973

Из табл.2.1 видно, что в диапазон $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$ укладывается практически все рассеивание параметра (99,73% значений). Поэтому на практике, определив параметры нормальной модели, предельными значениями рассматриваемого параметра считают точки, отстоящие от величины m на $\pm 3\sigma$ (рис.2.5). Такой способ оценки предельных отклонений параметра получил название “правила трех сигм”. Этим правилом широко пользуются при установлении допусков на параметры.

Если есть основания принять модель распределения параметра нормальной, то половина поля допуска (δ), устанавливается по "правилу трех сигм", т.е.

$$\delta \approx 3\sigma. \quad (2.9)$$

Примерно в 95% случаев параметры в КиТРЭУ распределены по законам близким к нормальному. Замечено, что для параметров резисторов и конденсаторов, имеющих допуск $\pm 10\%$ и более, оправдано использование нормальной модели.

2.2.3. Усеченная нормальная модель

Параметры в КиТРЭУ, являясь случайными величинами, часто меняются в ограниченных пределах от A до B . Поэтому часто для их описания используют усеченную нормальную модель (распределение).

Функция w в этом случае имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < A; \\ \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} & \text{при } A \leq x \leq B; \\ 0 & \text{при } x > B, \end{cases}$$

где m , σ – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение исходного неусеченного нормального распределения (модели).

Величину C определяют как

$$C = \frac{1}{\Phi\left(\frac{B-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right)},$$

где $\Phi(\dots)$ – табличная функция стандартного нормального распределения (см. табл.П1.1 прил.1).

Функция распределения $F(x)$ в случае усеченной нормальной модели может быть получена в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < A; \\ C \left[\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-m}{\sigma}\right) \right] & \text{при } A \leq x \leq B; \\ 1 & \text{при } x > B. \end{cases}$$

Графики функций $w(x)$ и $F(x)$ показаны на рис.2.6.

Параметры усеченной нормальной модели A , B , m и σ связаны с числовыми характеристиками $M(x)$ и $\sigma(x)$ выражениями

$$M(x) = m + K\sigma;$$

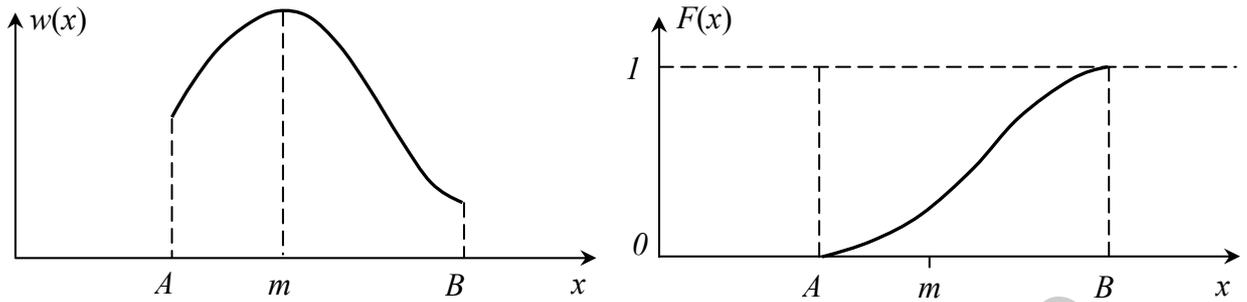


Рис.2.6. Графики функций $w(x)$ и $F(x)$ для усеченной нормальной модели

$$\sigma(x) = \sigma \sqrt{1 - K^2 - C [t_2 \varphi(t_2) - t_1 \varphi(t_1)]};$$

$$K = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)}; \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}};$$

где $t_1 = \frac{A-m}{\sigma}$; $t_2 = \frac{B-m}{\sigma}$.

2.2.4. Логарифмически нормальная модель

Для логарифмически нормальной модели характерно то, что по нормальному закону распределен не сам случайный параметр, а его логарифм.

Функция $w(x)$ для логарифмически нормальной модели имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{M_1 \sigma_x x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

где m_x, σ_x — параметры модели; $m_x = M(\lg x)$; $\sigma_x = \sigma(\lg x)$;

$$M_1 = \frac{1}{\lg e} = 2,303.$$

Функция распределения $F(x)$ может быть получена в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{\lg t - m_x}{\sigma_x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

График функции $w(x)$ зависит от значения параметра σ_x (рис.2.7).

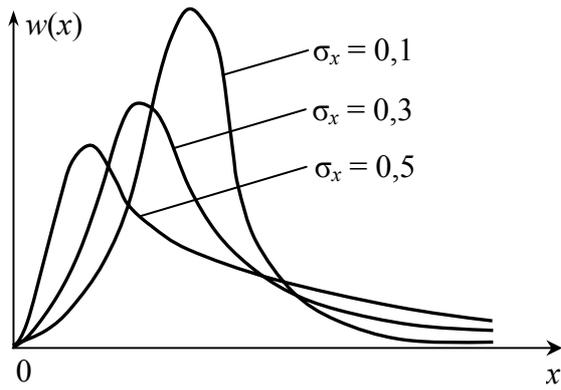


Рис.2.7. График функции $w(x)$ для логарифмически нормальной модели

Параметры m_x и σ_x логарифмически нормальной модели связаны с числовыми характеристиками $M(x)$ и σ_x выражениями

$$M(x) = 10^{m_x} \exp\left[\frac{M_1^2 \sigma_x^2}{2}\right],$$

$$\sigma(x) = M(x) \sqrt{\left[\frac{M(x)}{10^{m_x}}\right]^2 - 1}.$$

При малых значениях σ_x логарифмически нормальная модель близка к нормальной. Поэтому при $\sigma_x < 0,1 \dots 0,3$ возможна приближенная замена логарифмически нормальной модели нормальной с параметрами

$$m = 10^{m_x} \exp\left[\frac{M_1^2 \sigma_x^2}{2}\right];$$

$$\sigma = M_1 10^{m_x} \sigma_x.$$

Иногда в логарифмически нормальной модели используют натуральный логарифм рассматриваемого параметра.

2.2.5. Равномерная модель

Функция w имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b, \end{cases} \quad (2.10)$$

где a, b – параметры равномерной модели.

Функция распределения $F(x)$ может быть получена в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx = \frac{x-a}{b-a}. \quad (2.11)$$

Графики функций $F(x)$ и $w(x)$ имеют вид, показанный соответственно на рис.2.8 и 2.9.

Параметры модели a и b связаны с числовыми характеристиками $M(x)$ и $\sigma(x)$ выражениями

$$M(x) = \frac{a+b}{2}; \quad (2.12)$$

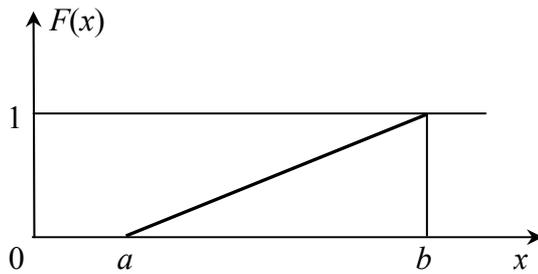


Рис.2.8. График функции $F(x)$ для равномерной модели

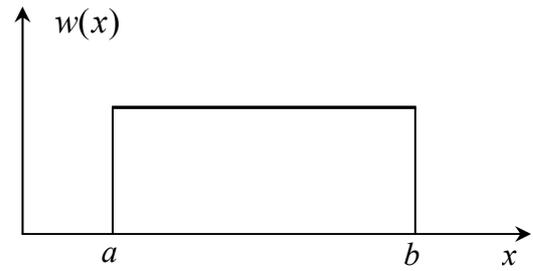


Рис.2.9. График функции $w(x)$ для равномерной модели

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (2.13)$$

Равномерное распределение на практике – чаще всего следствие вмешательства человека. Например, закон распределения параметра для элементов повышенной точности, полученных путем отбора из выборки с относительно большим допуском на параметр, может быть принят равномерным. Сказанное иллюстрирует рис.2.10.

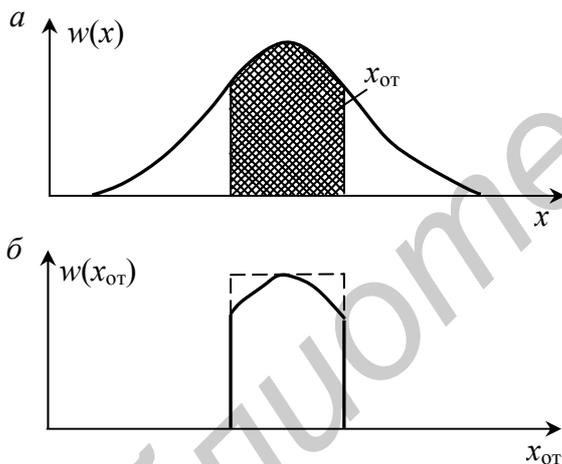


Рис.2.10. Равномерная модель как следствие отбора элементов повышенного уровня точности параметров

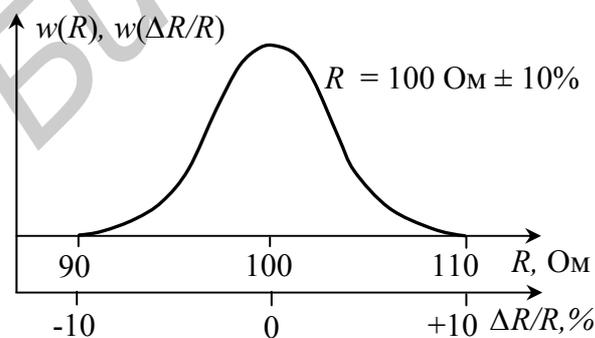


Рис.2.11. Вероятностное описание параметров

Неравномерностью на вершине пренебрегают и пользуются равномерной моделью (см. рис.2.10, б).

Для резисторов и конденсаторов, имеющих допуск на параметры $\pm 5\%$ и менее, в большинстве случаев оправдана гипотеза о равномерной модели, так как по всей видимости высокая точность параметра достигалась путем отбора элементов.

В случае, когда нет оснований принять гипотезу о равномерной или нормальной моделях и сложно определить закон распределения экспериментально, следует пользоваться равномерной моделью, так как она является на практике предельным (наихудшим) случаем рассеивания параметров.

Пользуются либо вероятностным описанием параметра, взятым в своей размерности,

либо вероятностным описанием его относительной погрешности (разброса, отклонения). Связь между указанными вероятностными описаниями иллюстрируется рис.2.11.

Форма закона распределения при переходе от R к $\Delta R/R$ сохраняется, меняются только его параметры.

2.3. Пути вероятностного описания совокупности параметров

Ранее было показано, что для вероятностного описания параметров, рассматриваемых в отдельности, можно использовать характеристики $M(x_i)$, $\sigma(x_i)$, $w(x_i)$, где x_i – i -й первичный параметр (в случае функции $w_i(x)$ и его текущие значения).

В конструировании и технологии РЭУ в большинстве случаев приходится иметь дело с совокупностью параметров. Они могут быть независимыми и зависимыми.

Возникает вопрос, как на практике с вероятностной точки зрения описать совокупность параметров.

Наиболее полной характеристикой такого вероятностного описания является многомерная функция плотности распределения $w(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, где n – число параметров рассматриваемой совокупности.

Из теории вероятностей известно, что

$$w(x_1, \dots, x_n) = w(x_1) \dots w(x_n) = \prod_{i=1}^n w(x_i). \quad (2.14)$$

Это выражение справедливо для независимых параметров. Поэтому для совокупности независимых параметров можно пользоваться вероятностным описанием этих параметров, рассматриваемых в отдельности, т.е. характеристиками $M(x_i)$, $\sigma(x_i)$, $w(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Для зависимых параметров указанное выше выражение несправедливо. Поэтому для вероятностного описания их совокупности следовало бы пользоваться многомерной функцией $w(x_1, \dots, x_n)$, или различными модификациями условных функций:

$$\begin{aligned} &w(x_1 / x_2, \dots, x_n); \\ &w(x_1 / x_2, x_3, \dots, x_n); \\ &\dots \\ &w(x_n / x_1, x_2, \dots, x_{n-1}); \\ &w(x_1, x_2 / x_3, \dots, x_n); \\ &\dots \end{aligned}$$

Однако даже в случае двух параметров ($n = 2$) мы столкнулись бы со сложностями математического характера, так как $w(x_1, x_2)$, представляет собой поверхность, а условная функция $w(x_1/x_2)$ – семейство кривых (рис.2.12, 2.13).

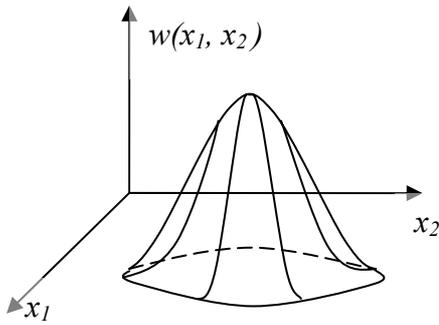


Рис. 2.12. Двумерная функция распределения параметров x_1 и x_2

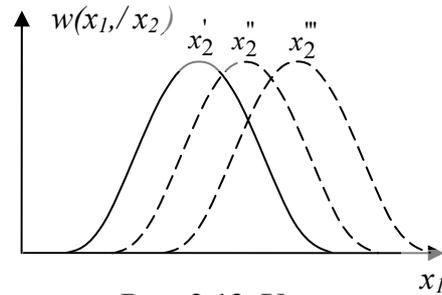


Рис. 2.13. Условная функция распределения

Поэтому возникает вопрос, как из многомерных или условных функций извлечь информацию о зависимости параметров в форме, удобной для инженерного использования. Выход был найден путем введения такого понятия, как коэффициент корреляции между параметрами.

2.4. Корреляция параметров

В технике, да и в жизни вообще, кроме жестких, т.е. функциональных связей между параметрами существует так называемый вероятностный или стохастический характер связи, при котором каждому значению одного из параметров, может соответствовать одно или несколько значений другого параметра.

Для количественной оценки силы вероятностной связи между параметрами обычно используют математический аппарат корреляционного анализа. Поэтому вероятностную связь между параметрами часто называют корреляционной связью или корреляцией.

Первое суждение о силе корреляционной связи можно получить по виду так называемого корреляционного поля параметров.

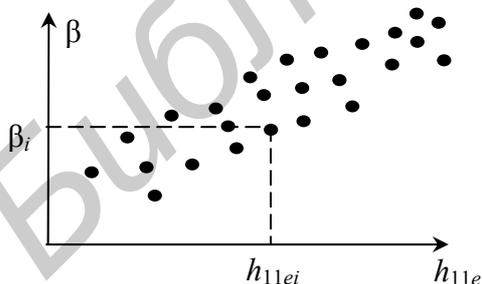


Рис.2.14. Корреляционное поле параметров

Корреляционное поле параметров представляет собой совокупность точек, нанесенных на прямоугольную систему координат, причем каждая точка соответствует паре рассматриваемых параметров. Например, корреляционное поле параметров β и h_{11e} транзистора может принять вид, показанный на рис.2.14.

В технике с каждой точкой корреляционного поля связан экземпляр объекта или реализация процесса.

Если точки корреляционного поля группируются вблизи прямой линии, мысленно проведенной в этом поле, то между параметрами имеет место тесная корреляционная связь.

Для количественной оценки тесноты или силы связи между параметрами пользуются *коэффициентом корреляции*, подсчитываемым по формуле [7]

$$r_{x,z} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(z_i - m_z)}{(n-1)\sigma_x\sigma_z}, \quad (2.15)$$

где x, z – рассматриваемые параметры;

x_i, z_i – i -е значение параметра x и соответствующее ему значение параметра z ;

m_x, m_z – математические ожидания параметров x и z ;

σ_x, σ_z – средние квадратические отклонения параметров x и z ;

n – число наблюдений пар параметров x и z .

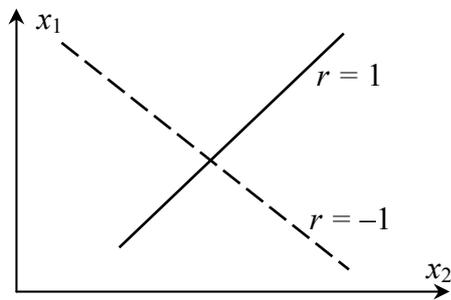


Рис. 2.15. Линейная функциональная связь между параметрами

Коэффициент корреляции, подсчитываемый по формуле (2.15), лежит в пределах от -1 до $+1$. Он характеризует близость корреляционной связи между параметрами к их линейной функциональной зависимости. Между параметрами имеет место линейная функциональная связь, если $r = \pm 1$ (рис.2.15).

Различают отрицательную и положительную корреляцию между параметрами. Для отрицательной корреляции $r < 0$, для положительной $r > 0$. Вид корреляционного поля для этих случаев показан на рис.2.16.

Если $r \rightarrow 0$, то мы имеем дело практически с независимыми параметрами. Вид корреляционного поля в этом случае близок к показанному на рис.2.17.

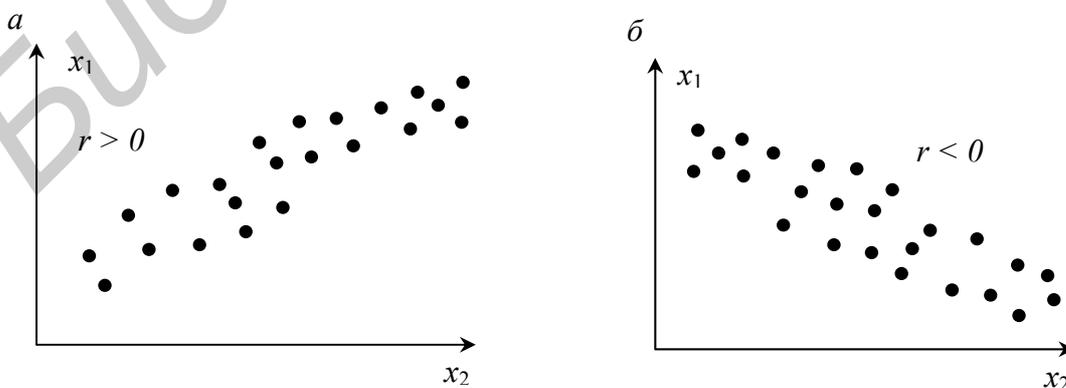


Рис.2.16. Корреляционное поле параметров:
а – положительная корреляция; б – отрицательная корреляция

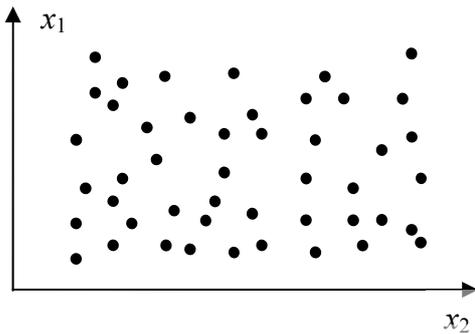


Рис.2.17. Корреляционное поле практически независимых параметров

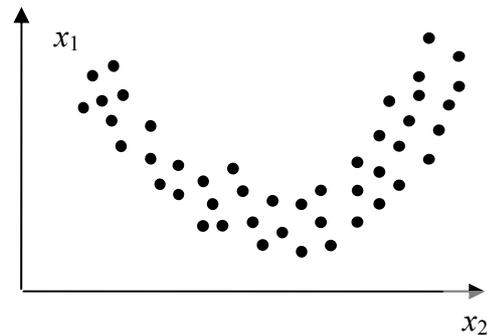


Рис.2.18. Корреляционное поле параметров при нелинейной связи

Известны случаи, когда коэффициент корреляции, подсчитываемый по выражению (2.15), оказывается близким к нулю, но между параметрами существует тесная связь (рис.2.18).

Дело здесь в том, что коэффициент, подсчитываемый по выражению (2.15), выявляет лишь линейную составляющую вероятностной связи между параметрами. По этой причине его часто называют коэффициентом линейной корреляции (существует еще и криволинейная корреляция).

Коэффициент, определяемый по выражению (2.15), называют также коэффициентом парной корреляции, имея ввиду, что рассматривается корреляция между парой параметров. Существует также такое понятие, как множественная корреляция.

Характерным примером коррелированных параметров из жизни является масса и рост человека.

2.5. Вероятностное описание зависимых параметров

В инженерной практике для вероятностного описания зависимых параметров пользуются характеристиками $M(x_i)$, $\sigma(x_i)$, $w(x_i)$, r_{ij} ; $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, где n – число параметров совокупности.

Часто для удобства записи информацию о зависимости параметров представляют в виде корреляционной матрицы. Она представляет собой таблицу, каждая ячейка которой содержит запись коэффициента парной корреляции. Например, корреляционная матрица h - параметров транзистора может быть представлена в виде табл.2.2.

Корреляционная матрица h -параметров транзистора

Параметр	h_{11}	h_{21}	h_{12}	h_{22}
h_{11}	1,00			
h_{21}	0,80	1,00		
h_{12}	0,55	0,30	1,00	
h_{22}	0,25	0,4	0,45	1,00

Корреляционная матрица является симметричной относительно единичной диагонали, поэтому заполняют либо верхнюю, либо нижнюю ее часть.

2.6. Экспериментальное определение вероятностного описания

2.6.1. Основные задачи математической статистики

Для решения многих инженерных задач надо располагать вероятностным описанием параметров. В ряде случаев такое описание может быть получено из технической документации на элементы, устройства или процесс.

Пример 2.1. Пусть в паспорте на резистор указано $R = 1 \text{ кОм} \pm 10\%$. Так как допуск на параметр относительно велик, то оправдано использование гипотезы о нормальном распределении параметра. Далее можно указать

$$M(R) = R_{\text{ном}} = 1 \text{ кОм.}$$

С учетом "правила трех сигм" (рис.2.19)

$$\sigma(R) \approx \frac{\delta(R)}{3}.$$

Из рис.2.19 видно, что $\delta(R) = 0,1 \text{ кОм}$, тогда

$$\sigma(R) \approx \frac{0,1}{3} \approx 0,033 \text{ кОм} = 33 \text{ Ом.}$$

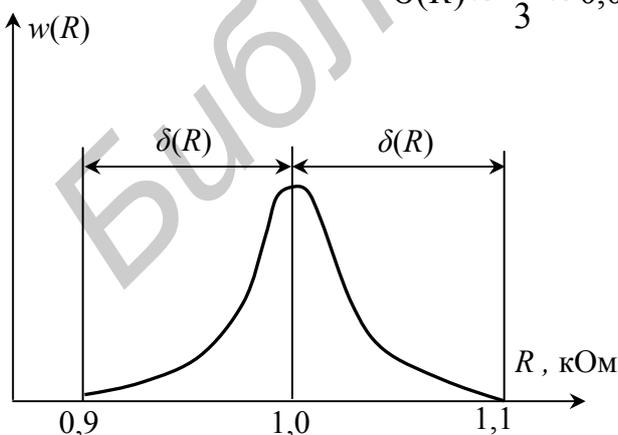


Рис.2.19. Вероятностное описание сопротивления резонатора

Во многих случаях из технической документации сложно или невозможно получить характеристику параметра, необходимую для расчетов. Например, из записи "значение параметра h_{21e} не менее 20" невозможно даже примерно указать математическое ожидание $M(h_{21e})$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(h_{21e})$. Затруднительно принять и гипотезу

о законе распределения параметра. В подобных случаях вероятностное описание параметров получают экспериментально с помощью статистических методов.

Используя эти методы, вероятностное описание параметров определяют на основе ограниченного числа наблюдений (опытов). Произведенные n опытов можно мысленно рассматривать как "выборку" из некоторой чисто условной "генеральной совокупности", состоящей из бесконечного числа возможных или мысленных опытов, которые можно было бы произвести над интересующим параметром. Поэтому в отношении числовых характеристик параметров, полученных на основе ограниченного числа наблюдений, употребляют термины "выборочное среднее", "выборочное среднее квадратическое отклонение", "выборочные характеристики" и т.д. В прикладной литературе указанные термины иногда заменяют терминами "статистическое среднее", "статистическое среднее квадратическое отклонение", "статистические характеристики" и т.п.

Основными задачами математической статистики, применительно к решению рассматриваемых вопросов, являются следующие:

- а) определение математических ожиданий (средних значений) параметров;
- б) нахождение характеристик разброса (рассеивания, отклонения) параметров;
- в) выявление законов распределения параметров;
- г) определение коэффициентов парной корреляции между ними.

Для определения законов распределения параметров, в соответствии с принципами математической статистики, надо иметь достаточно большое число наблюдений параметра n : $n \geq 50 \dots 100$. К сожалению, по экономическим и техническим соображениям не всегда удается обеспечить указанное требование.

Следует помнить, что надо иметь не менее 20-30 наблюдений параметра, чтобы как-то можно было доверять вероятностному описанию, полученному с помощью приемов математической статистики.

С наблюдением параметра связана замена элемента, устройства или реализации технологического процесса.

2.6.2. Требования, предъявляемые к оценкам параметров

Любое значение параметра, полученное на основе ограниченного числа наблюдений, называют оценкой параметра. Например, в качестве оценки математического ожидания параметра используют среднее значение.

Различают точечные и интервальные оценки. **Точечной** называют такую оценку, которая представляется одним числом, т.е. точкой на числовой оси. **Интервальной** называют оценку, представленную интервалом значений.

К оценкам предъявляются следующие основные требования:

а) с увеличением числа наблюдений оценка параметра должна приближаться к истинному его значению. Оценку, отвечающую этому свойству, называют состоятельной;

б) вычисляя оценку параметра, мы должны быть уверены в том, что заведомо не совершаем ошибку в сторону уменьшения или увеличения оценки, т.е. должны быть уверены в отсутствии систематической ошибки. Оценка, отвечающая этому свойству, называется несмещенной;

в) расхождения между оценками параметра, подсчитанными по результатам n наблюдений, взятых из любого участка теоретически возможного числа наблюдений N , должны быть минимальными. Другими словами, дисперсия оценки должна быть минимальной. Оценку, отвечающую этому свойству, называют эффективной.

2.6.3. Определение точечных оценок математических ожиданий и средних квадратических отклонений параметров

Пусть произведено n наблюдений параметра x и получены значения x_1, x_2, \dots, x_n . Определим точечную оценку для математического ожидания и среднего квадратического отклонения этого параметра, причем оценки должны отвечать указанным выше требованиям.

Из теории вероятностей известно, что такие оценки могут быть подсчитаны с помощью выражений

$$M^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad (2.16)$$

$$\sigma^*(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [x_i - M^*(x)]^2}{n-1}}. \quad (2.17)$$

Здесь, а при необходимости далее, оценки будут помечаться знаком * над обозначением параметра или характеристики.

Величину $(n - 1)$ в знаменателе формулы (2.17) называют иногда числом степеней свободы.

2.6.4. Определение интервальных оценок параметров

В инженерной практике нередко возникает вопрос о точности и надежности оценки. Для ответа на этот вопрос пользуются такими понятиями, как доверительный интервал и доверительная вероятность.

Под доверительным интервалом понимают диапазон значений, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение параметра. Указанную вероятность называют доверительной.

Если мы найдем доверительный интервал, то тем самым укажем интервальную оценку параметра. Покажем, как это делать, на примере математического ожидания параметра.

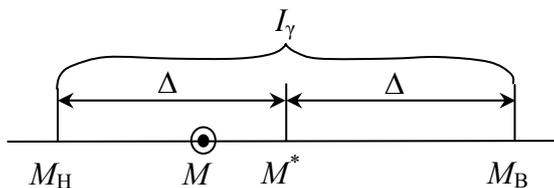


Рис.2.20. К определению интервальной оценки

Пусть получена точечная оценка математического ожидания параметра x . Обозначим эту оценку как $M^*(x)$.

Доверительный интервал строят обычно симметричным относительно точечной оценки $M^*(x)$, как показано на рис.2.20.

Здесь приняты следующие

обозначения:

M^* – точечная оценка математического ожидания рассматриваемого параметра; для простоты записи знак x опущен;

M – истинное значение математического ожидания;

$M_н$ – нижняя граница доверительного интервала;

$M_в$ – верхняя граница доверительного интервала;

$I_γ$ – доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $γ$;

$Δ$ – расстояние от точечной оценки M^* до границ доверительного интервала.

Доверительный интервал $I_γ$ обычно выражают как

$$I_γ = \{M_н; M_в\} = \{M^* - Δ; M^* + Δ\}. \quad (2.18)$$

Если мы его найдем, то тем самым укажем интервальную оценку для математического ожидания.

Для определения доверительного интервала $I_γ$ надо знать значение $Δ$. Для ее нахождения воспользуемся следующим приемом.

Из теории вероятностей известно, что даже при числе наблюдений n стремящемся к 10-15, закон распределения оценки $M^*(x)$ близок к нормальному (рис.2.21).

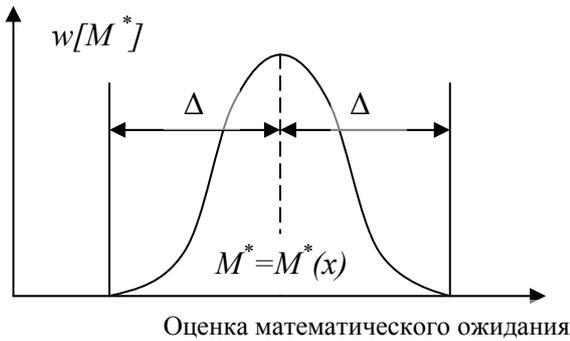


Рис.2.21. Плотность распределения оценки математического ожидания

Предельными отклонениями оценки математического ожидания будем считать точки, отстоящие от рассчитанной точечной оценки $M^*(x)$ на значение $\pm 3\sigma(M^*)$, где $\sigma(M^*)$ — среднеквадратичное отклонение оценки математического ожидания.

Поэтому можно записать

$$\Delta = 3\sigma(M^*). \quad (2.19)$$

Известно, что для $\sigma(M^*)$, справедливо выражение [7]

$$\sigma(M^*) \approx \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}, \quad (2.20)$$

где $\sigma^*(x)$ — точечная оценка среднего квадратического отклонения рассматриваемого параметра x .

Заменив в выражении (2.19) $\sigma(M^*)$ ее оценкой, определяемой формулой (2.20), получим

$$\Delta \approx 3 \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}};$$

$$I_\gamma = \left\{ M^* - 3 \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}; M^* + 3 \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}} \right\}. \quad (2.21)$$

Так как мы воспользовались "правилом трех сигм", то значение Δ , а следовательно и доверительный интервал гарантируются с вероятностью $\gamma = 0,9973$. В инженерной практике могут использоваться и другие значения вероятности γ , а именно: $\gamma = 0,9$, $\gamma = 0,95$. Поэтому в общем виде Δ может быть представлена как

$$\Delta = t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}, \quad (2.22)$$

где t_γ — коэффициент, зависящий от доверительной вероятности γ (табл.2.3).

Таблица 2.3

Значение коэффициента t_γ в зависимости от вероятности γ

γ	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	0,9973	0,999
t_γ	1,282	1,439	1,643	1,960	2,576	3,000	3,290

Этот коэффициент показывает, какое количество величин $\sigma(M^*)$ – 1,282; 1,439 и т.д. – надо отложить влево и вправо от точечной оценки M^* , чтобы вероятность попадания истинного значения математического ожидания в полученный диапазон была равна вероятности γ . В общем случае коэффициент t_γ определяется как

$$t_\gamma = \arg\Phi\left(\frac{1+\gamma}{2}\right), \quad (2.23)$$

где $\arg\Phi(\dots)$ – аргумент стандартной функции $\Phi(\dots)$ нормального распределения, для которого сама функция $\Phi(\dots)$ принимает значения, указанные в скобках.

Например, если $\Phi(1,64) = 0,95$, то $\arg\Phi(0,95) = 1,64$.

В окончательном виде искомый доверительный интервал I_γ , следовательно, и интервальная оценка математического ожидания, может быть записана в виде

$$I_\gamma = \left(M^* - \Delta; M^* + \Delta \right) = \left(M^* - t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}; M^* + t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}} \right). \quad (2.24)$$

Пример 2.2. Произведено измерение параметра h_{21e} десяти транзисторов типа КТ602А. Результаты приведены в табл.2.4.

Таблица 2.4

Результаты измерений параметра h_{21e}

Номер экземпляра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_{21e}	39	32	57	38	44	34	63	46	50	47

Требуется найти точечную оценку математического ожидания величины h_{21e} и построить доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0,95$.

Решение. По формуле (2.16) имеем

$$M^*(h_{21e}) = \frac{39+32+\dots+47}{10} = 45.$$

По формуле (2.17) вычисляем несмещенную оценку $\sigma^*(h_{21e})$:

$$\sigma^*(h_{21e}) = \sqrt{\frac{(39-45)^2 + (32-45)^2 + \dots + (47-45)^2}{10-1}} \approx 9,85.$$

По табл.2.3 для $\gamma = 0,95$ находим $t_\gamma = 1,96$. Доверительные границы:

$$M_H = M^*(h_{21e}) - t_\gamma \frac{\sigma^*(h_{21e})}{\sqrt{n}} = 45 - 1,96 \frac{9,85}{\sqrt{10}} \approx 38,9;$$

$$M_B = M^*(h_{21e}) + t_\gamma \frac{\sigma^*(h_{21e})}{\sqrt{n}} = 45 + 1,96 \frac{9,85}{\sqrt{10}} \approx 51,1.$$

Следовательно, доверительный интервал (интервальная оценка) для математического ожидания параметра h_{21e} :

$$I_\gamma = (38,9; 51,1).$$

2.6.5. Определение требуемого числа наблюдений параметра

На практике часто возникает вопрос, какое число наблюдений параметра x надо иметь, чтобы определить среднее значение (оценку математического ожидания $M^*(x)$) с ошибкой, не превышающей заданного значения ε . Для ответа на этот вопрос примем гипотезу о нормальном распределении оценки $M^*(x)$ и воспользуемся ранее полученной формулой (2.22).

$$\Delta = t_\gamma \frac{\sigma^*(x)}{\sqrt{n}}.$$

Возведя обе части этого выражения в квадрат, можно получить

$$n \geq \frac{t_\gamma^2 \sigma^2(x)}{\Delta^2}. \quad (2.25)$$

В этом случае $\Delta = \varepsilon$ – допустимая ошибка в определении среднего значения параметра, т.е. разница между оценкой $M^*(x)$ и истинным значением математического ожидания $M(x)$, которая еще допускается.

На практике этой формулой следует пользоваться следующим образом:

а) если $\sigma(x)$ известна априорно, то зная вероятность γ и ошибку ε , формулой можно воспользоваться сразу и определить требуемое число наблюдений;

б) если значение $\sigma(x)$ априорно не известно, то выполняют некоторое число наблюдений параметра n_1 , подсчитывают оценку $\sigma^*(x)$ и проверяют, выполняются ли условие (2.25). Если условие выполняется, то проведенное число наблюдений n_1 уже достаточно, в противном случае выполняют дополнительные наблюдения, уточняют значение $\sigma^*(x)$ и снова проверяют условие (2.25). Так поступают до тех пор, пока это условие не будет выполнено.

Пример 2.3. Определим, какое число наблюдений надо иметь, чтобы гарантировать среднее значение коэффициента усиления транзистора β с погрешностью не более 5 единиц. По техническим условиям на транзистор данного типа $\beta = 20 \dots 80$.

Решение.

1. Задаемся доверительной вероятностью, с которой будет гарантироваться среднее значение коэффициента усиления транзистора β . Выбираем $\gamma = 0,95$; тогда $t_\gamma = 1,96 \approx 2$.

2. Так как закон распределения величины β не известен, и без проведения эксперимента затруднительно выдвинуть гипотезу о законе распределения, будем исходить из худшего случая. Поэтому для величины β примем гипотезу о равномерной модели.

Из условия задачи следует $a = 20$, $b = 80$. Определим значение $\sigma(\beta)$, используя формулу (2.13). Получим

$$\sigma(\beta) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{80-20}{2\sqrt{3}} = 17,3.$$

3. По условию задачи $\varepsilon = 5$. Применяя формулу (2.25), получим

$$n \geq \frac{2^2 \cdot 17,3^2}{5^2} \approx 48.$$

2.6.6. Оценка коэффициентов парной корреляции

В технической документации на элементы, устройства и технологические процессы информация о коэффициентах корреляции, как правило, отсутствует. При решении инженерных задач их определяют экспериментально. При этом для большинства задач приемлемо использование коэффициента линейной корреляции. По результатам наблюдений оценку этому коэффициенту можно дать с помощью выражения

$$r_{xz}^* = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i - M^*(x)][z_i - M^*(z)]}{(n-1)\sigma^*(x)\sigma^*(z)}, \quad (2.26)$$

где x, z

– рассматриваемые параметры;

x_i, z_i	– значение параметра x в i -м наблюдении и соответствующее этому наблюдению значение параметра z ;
$M^*(x), M^*(z)$	– оценки математических ожиданий параметров x и z ;
$\sigma^*(x), \sigma^*(z)$	– оценки средних квадратических отклонений параметров.
n	– число наблюдений параметров.

С i -м наблюдением пары параметров связаны экземпляр элемента, устройства или реализация технологического процесса.

Так как число наблюдений n ограничено, то на практике возникает вопрос, насколько правомерно в дальнейших инженерных расчетах можно пользоваться полученной оценкой коэффициента корреляции.

Для ответа на него выполняют проверку статистической значимости (в дальнейшем просто значимости). Это означает выяснение, за счет чего оценка коэффициента корреляции оказалась отличной от нуля: за счет ограниченности числа наблюдений, т.е. случайных причин, либо за счет того, что это объективно имеет место.

Проверку значимости коэффициента корреляции выполняют по-разному, в зависимости от числа наблюдений пар параметров. При числе наблюдений $n > 50$ принимают гипотезу о нормальном распределении оценки r^* , поскольку доказано, что при $n > 50$ эта гипотеза, как правило, работает.

Затем строят доверительный интервал, симметричный относительно рассчитанной точечной оценки r^* . Для коэффициента корреляции его определяют как

$$I_\gamma = (r^* - t_\gamma \sigma_r; r^* + t_\gamma \sigma_r), \quad (2.27)$$

где σ_r – среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции, равное

$$\sigma_r \approx \frac{1 - (r^*)^2}{\sqrt{n}}; \quad (2.28)$$

t_γ – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности γ .

Построив доверительный интервал, проверяют, попадает ли в этот интервал точка $r = 0$. Если да, то нет оснований оценку коэффициента корреляции считать значимой, ибо отличной от нуля с вероятностью γ она оказалась за счет ограниченного числа наблюдений.

Применяя формулу (2.27), необходимо помнить, что значения доверительных границ для выборочного коэффициента корреляции по абсолютной величине (модулю) ограничены единицей. Кроме того, следует знать, что приближение (2.28) при значениях r^* , близких к ± 1 , является весьма грубым [8, 9].

Пример 2.4. Путем обработки по формуле (2.26) результатов измерений пар параметров h_{11e} и β шестидесяти транзисторов типа КТ315Б получена точечная оценка коэффициента парной корреляции этих параметров $r^* = 0,56$. Требуется дать ответ на вопрос о статистической значимости коэффициента корреляции при значении доверительной вероятности $\gamma = 0,95$.

Решение.

1. По табл. 2.3 для $\gamma = 0,95$ находим $t_\gamma = 1,96$.

2. По формуле (2.28) определяем среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции

$$\sigma_r = \frac{1 - (r^*)^2}{\sqrt{n}} = \frac{1 - 0,56^2}{\sqrt{60}} \approx 0,09.$$

3. Пользуясь выражением (2.27), вычисляем нижнюю r_n и верхнюю r_v границы доверительного интервала для коэффициента корреляции

$$r_n = r^* - t_\gamma \sigma_r = 0,56 - 1,96 \cdot 0,09 = 0,38;$$

$$r_v = r^* + t_\gamma \sigma_r = 0,56 + 1,96 \cdot 0,09 = 0,74.$$

Тогда доверительный интервал

$$I_\lambda^{(r)} = (0,38; 0,74).$$

Так как полученный интервал не содержит точки $r = 0$, то с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$ наличие корреляционной зависимости между исследуемыми параметрами считается доказанным, и значением коэффициента корреляции $r = 0,56$ можно пользоваться в расчетах.

При $n < 50$ рассмотренный прием оценки значимости коэффициента корреляции оказывается достаточно грубым. Поэтому при $n < 50$, а также в случаях, когда $|r^*| \rightarrow 1$ пользуются преобразованием Фишера, определяемым как

$$F = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r^*}{1-r^*} = \text{arth}(r^*). \quad (2.29)$$

Для проверки значимости коэффициента корреляции вначале определяют доверительный интервал для F :

$$I_{\gamma}^{(F)} = \left(\underbrace{F - t_{\gamma} \sigma_F}_{F_H}; \underbrace{F + t_{\gamma} \sigma_F}_{F_B} \right), \quad (2.30)$$

где σ_F – среднее квадратическое отклонение F .

Фишер показал, что

$$\sigma_F = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (2.30)$$

Зная доверительный интервал F , с помощью обратного преобразования Фишера находят доверительный интервал для коэффициента корреляции

$$r_H = \text{th}(F_H);$$

$$r_B = \text{th}(F_B).$$

При решении практических задач можно пользоваться таблицей значений преобразования Фишера (табл. П1.2, прил.1).

Пример 2.5. Исследовалось 12 экземпляров транзисторов типа КТ603, и была определена точечная оценка коэффициента линейной корреляции между параметрами $I_{к0}$ и временем отказа транзистора t_0 . Эта оценка приняла значение $r^* = -0,66$. Требуется выяснить, правомерно ли в дальнейших расчетах пользоваться этой оценкой.

Решение.

1. Так как $n < 50$, то воспользуемся преобразованием Фишера. Можно получить

$$F = \text{arth}(r^*) = \text{arth}(-0,66) = -0,79.$$

2. Подсчитываем среднее квадратическое отклонение F :

$$\sigma_F = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{12-3}} \approx 0,33.$$

3. Задаемся значением доверительной вероятности. Выберем $\gamma = 0,95$. По табл. 2.3 находим для $\gamma = 0,95$; $t_{\gamma} = 1,96$.

4. Подсчитаем нижнюю доверительную границу

$$F_H = F - t_{\gamma} \sigma_F = -0,79 - 1,96 \cdot 0,33 \approx -1,44.$$

5. Для значения F_B получим

$$F_B = F + t_{\gamma} \sigma_F = -0,79 + 1,96 \cdot 0,33 \approx -0,14.$$

6. Определяем нижнюю и верхнюю доверительные границы для коэффициента корреляции

$$r_{\text{H}} = \text{th}(F_{\text{H}}) = \text{th}(-1,44) \approx -0,89;$$

$$r_{\text{B}} = \text{th}(F_{\text{B}}) = \text{th}(-0,14) \approx -0,14.$$

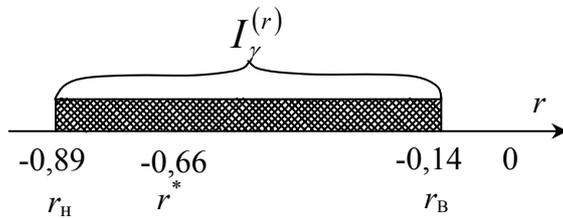


Рис.2.22. К определению значимости коэффициента корреляции

вательно, его точечной оценкой $r^* = -0,66$ можно пользоваться в дальнейших расчетах.

7. Проверяем, попадает ли в построенный доверительный интервал для коэффициента корреляции точка со значением $r = 0$ (рис.2.22).

Из рис.2.22 видно, что коэффициент корреляции в данном случае значим при доверительной вероятности $\gamma=0,95$. Следо-

2.6.7. Определение законов распределения параметров на основе опытных данных

Вначале получают статистическую совокупность из n наблюдений интересующего параметра, например x , для чего у n экземпляров (выборки) однотипных элементов (изделий) измеряют значение интересующего параметра x . Желательно, чтобы $n \geq 60-100$. Далее, обрабатывая статистическую совокупность, определяют оценки математического ожидания $M^*(x)$ и дисперсии $D^*(x)$.

Затем строят статистический ряд. Для этого весь диапазон наблюдаемых значений параметра x разбивают на k интервалов и для каждого из них определяют значение

$$p_i^* = \frac{m_i}{n}; \quad i=1, 2, \dots, k; \quad k \geq 4, \quad (2.32)$$

где p_i^* — частота, соответствующая i -му интервалу;

m_i — число наблюдений параметра x , приходящихся на i -й интервал.

Иногда в литературе по прикладной математической статистике [10] словом частота называют величины m_i , а для p_i^* употребляют термин частость. В дальнейшем для величин p_i^* мы будем использовать термин частота, рассматриваемый как статистический аналог вероятности попадания параметра в i -й интервал.

Приближенное число интервалов рекомендуется определять по правилу Стёрджеса [11]

$$k = 1 + 3,32 \lg n,$$

при $n \geq 50$ желательно обеспечить условия

$$7 \leq k \leq 20; m_i \geq 5, i = 1, 2, \dots, k.$$

Сумма частот всех интервалов должна быть равна единице.

Строят таблицу, в которой приводят интервалы в порядке их расположения (вдоль оси абсцисс) и соответствующие интервалам частоты (табл.2.5).

Таблица 2.5

Статистический ряд

Интервал, I_i	x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_k, x_{k+1}
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*

Здесь I_i – обозначение i -го интервала; x_i, x_{i+1} – границы i -го интервала, $i = 1, 2, \dots, k$.

Полученную таблицу называют статистическим рядом. Далее строят гистограмму. По оси абсцисс откладываются интервалы и на каждом из них, как на основании, строится прямоугольник, высота которого

$$h_{x_i, x_{i+1}} = \frac{p_i^*}{x_{i+1} - x_i}, \quad (2.33)$$

где $(x_{i+1} - x_i)$ – ширина i -го интервала.

Удобно выбирать равные интервалы. В этом случае высоты прямоугольников гистограммы пропорциональны соответствующим частотам p_i^* (рис.2.23). Огибающая линия гистограммы может рассмат-

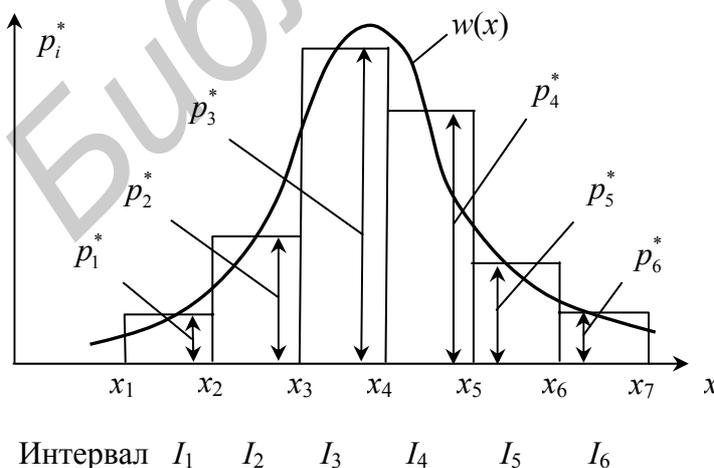


Рис.2.23. Гистограмма распределения параметра

риваться как статистический аналог плотности распределения параметра.

При увеличении n можно выбирать все более узкие интервалы. При этом гистограмма будет все ближе к графику функции плотности распределения параметра x (рис.2.23).

Если априорно известен вид закона распределения, построение гистограммы можно не выполнять.

Пользуясь данными статистического ряда (табл.2.5), можно приближенно построить и статистическую функцию распределения параметра x . Для практики обычно достаточно эту функцию построить по нескольким точкам, в качестве которых удобно использовать границы x_1, x_2, \dots интервалов.

Тогда очевидно

$$\left. \begin{aligned} F^*(x_1) &= 0, \\ F^*(x_2) &= p_1^*, \\ F^*(x_3) &= p_1^* + p_2^*, \\ &\dots \\ F^*(x_k) &= \sum_{i=1}^{k-1} p_i^*, \\ F^*(x_{k+1}) &= \sum_{i=1}^k p_i^* = 1. \end{aligned} \right\} (2.34)$$

Соединяя полученные точки ломаной линией или плавной кривой, получим приближенный график статистической функции распределения (рис.2.24).

Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с ограниченным числом измерений (наблюдений). Поэтому при статистической обработке материала часто приходится решать вопрос, как подобрать теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с ограниченным объемом экспериментальных данных. Такую

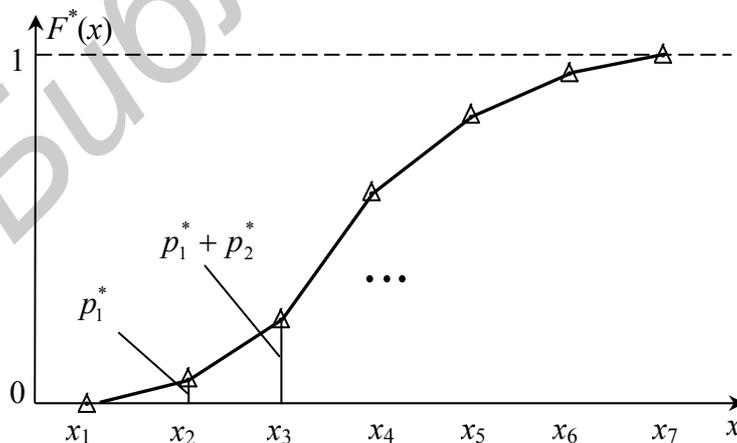


Рис.2.24. График статистической функции распределения

задачу называют задачей выравнивания или сглаживания статистических рядов [7].

В некоторых случаях вид теоретической кривой выбирается заранее, на основе анализа сущности задачи, в других случаях – по внешнему виду статистического распределения. Обычно в последнем случае пользуются

гистограммой: по графику статистической функции распределения (рис.2.24) в большинстве случаев трудно сказать что-то определенное о виде закона распределения.

Аналитическое выражение выбранной кривой зависит от некоторых параметров распределения. Задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора таких значений параметров, при которых соответствие между теоретическим и статистическим распределениями оказывается наилучшим. Одним из методов решения этой задачи является так называемый метод моментов [1, 7].

В данном случае параметры теоретического распределения выбирают так, чтобы важнейшие числовые характеристики (моменты) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Например, если теоретическая кривая $w(x)$ зависит от двух параметров, то они принимаются так, чтобы математическое ожидание $M(x)$ и дисперсия $D(x)$ теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками $M^*(x)$ и $D^*(x)$.

С учетом этого при выравнивании статистического распределения нормальным законом в выражении (2.4) необходимо принять

$$m = M^*(x); \quad \sigma = \sqrt{D^*(x)}. \quad (2.35)$$

В случае выравнивания законом равной вероятности параметры a и b теоретического распределения должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{a+b}{2} = M^*(x); \quad \frac{(b-a)^2}{12} = D^*(x). \quad (2.36)$$

Как бы хорошо ни была подобрана теоретическая кривая, например $w(x)$, между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения. Для ответа на вопрос, чем объясняются эти расхождения – ограниченным числом наблюдений или неудачным подбором кривой, служат так называемые "критерии согласия".

При использовании критериев согласия чаще проверяются гипотезы применительно к функциям распределения $F(x)$. Распространение получил критерий согласия Пирсона, называемый критерием χ^2 (хи-квадрат). Этот критерий оправдан при значении $n > 100$ и количестве наблюдений параметра, приходящихся на i -й интервал, $m_i > 5$. Схема применения критерия следующая.

1. Определяется мера расхождения U по формуле

$$U = \chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (2.37)$$

где p_i – вероятность попадания параметра x в i -й интервал, подсчитанная по теоретическому закону распределения.

2. Определяется число степеней свободы

$$f = k - s, \quad (2.38)$$

где k – количество интервалов;

s – число независимых условий (связей), наложенных на частоты p_i^* (часто $s = 3$).

3. По значениям f и χ^2 с помощью специальных таблиц (табл. П11.3, прил.1), составленных для функции χ^2 находится вероятность того, что величина, имеющая распределение χ^2 с f -степенями свободы, превзойдет рассчитанное значение U . Если эта вероятность весьма мала (менее 0,1), гипотеза отбрасывается, как неправдоподобная. Если вероятность относительно велика, гипотезу можно признать не противоречащей опытным данным.

Пример 2.6. С целью исследования закона распределения емкости коллекторного перехода (C_k) транзистора типа КТ812 было измерено значение этого параметра у 100 экземпляров. Результаты измерений представлены в виде статистического ряда (табл.2.6).

Таблица 2.6

Статистический ряд емкости коллекторного перехода транзистора

Номер интервала	1	2	3	4	5
Границы интервала, пФ	70; 76	76; 82	82; 88	88; 94	94; 100
m_i	5	20	42	27	6
p_i^*	0,05	0,20	0,42	0,27	0,06
p_i	0,038	0,212	0,405	0,274	0,064

Получены оценки количественных характеристик величины C_k :

$$M^*(C_k) = 85,72 \text{ пФ}; \sigma^*(C_k) = 5,58 \text{ пФ}.$$

Необходимо построить гистограмму и выровнять статистический ряд с помощью нормального закона.

Решение. Так как ширина интервалов одинакова, то в качестве высот прямоугольников гистограммы можно отложить соответствующие значения частот p_i^* . Построенная гистограмма показана на рис.2.25.

Нормальный закон зависит от двух параметров: m и σ .

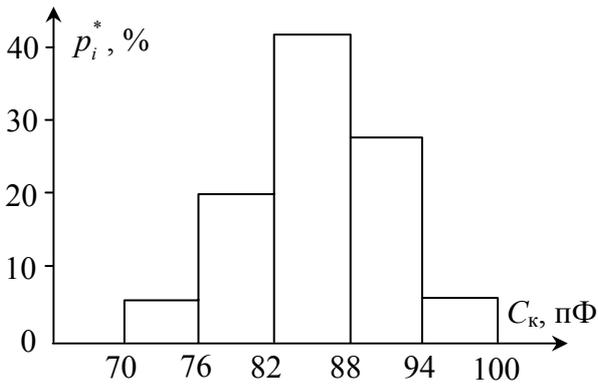


Рис.2.25. Гистограмма распределения емкости коллекторного перехода

Подберем для теоретического закона распределения эти параметры так, чтобы сохранить первые два момента статистического распределения: математическое ожидание $M(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$. Для этого необходимо обеспечить условия

$$m = M^*(x); \sigma = \sigma^*(x).$$

Поэтому принимаем

$$m = 85,72; \sigma = 5,58.$$

Далее, пользуясь теоретическим нормальным законом с параметрами $m = 85,72; \sigma = 5,58$, находим теоретические значения вероятностей попадания исследуемого параметра в интервалы. Пользуемся формулой (2.7), которая применительно к данной задаче принимает вид

$$p_i = \Phi\left(\frac{C_{i+1} - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{C_i - m}{\sigma}\right).$$

Рассчитанные по этой формуле с использованием табл. П 1.1 прил.1 значения теоретических вероятностей p_i сведены в табл.2.6.

По формуле (2.37) определяем значение меры расхождения:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \approx 0,53.$$

Находим число степеней свободы. В данном случае число наложенных связей $s = 3$, так как на частоты p_i^* накладывается требование

$$\sum_i p_i^* = 1$$

и, кроме того, теоретическое распределение подбирается с теми условиями, чтобы совпадали теоретические и статистические средние значения и средние квадратические отклонения. Поэтому

$$f = 5 - 3 = 2.$$

По табл.П1.3 прил.1 для значений $f = 2$ и $\chi^2 = 0,53$ находим значение вероятности $P \approx 0,77$. Поэтому гипотеза о том, что исследуемый параметр распределен по нормальному закону, не противоречит опытными данным.

В конструировании и технологии РЭУ кроме критерия Пирсона находят применение и другие критерии, например критерий А.М.Колмогорова. С этим критерием можно ознакомиться в работах [1, 6, 10].

2.6.8. Применение вероятностных сеток (бумаги) для проверки гипотез о законах распределения параметров

Для оперативного принятия решений о законах распределения параметров используют вероятностные сетки, называемые также вероятностной бумагой [11-13].

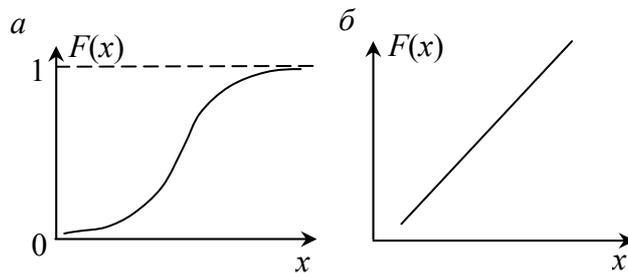


Рис.2.26. К пояснению вероятностной сетки: а – ось ординат не преобразована; б – ось ординат преобразована

Вероятностная сетка – это координатная сетка в прямоугольной системе координат, в которой масштаб по оси ординат, а иногда также и масштаб по оси абсцисс преобразованы таким образом, что функция распределения параметра, построенная на этой сетке, принимает вид прямой линии (рис.2.26).

На практике пользуются вероятностной сеткой следующим образом. Для верхних границ интервалов, на которые был разбит диапазон наблюдаемых значений параметра, подсчитывают накопленное значение частот (вероятностей). Последний интервал в рассмотрение не берется.

Пусть границами интервалов являются точки (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, k$; где k – число интервалов. Тогда для верхней границы x_2 первого интервала можно записать (см. рис.2.23)

$$F(x_2) = p_1^*,$$

где p_i^* – частота (статистическая вероятность) попадания параметра в первый интервал.

Далее получим

$$F(x_3) = p_1^* + p_2^*,$$

$$F(x_4) = p_1^* + p_2^* + p_3^* .$$

...

Для верхней границы x_k предпоследнего интервала справедливо

$$F(x_k) = p_1^* + p_2^* + \dots + p_{k-1}^* = \sum_{i=1}^{k-1} p_i^* .$$

Затем точки с координатами

$$\begin{aligned} &x_2, F(x_2); \\ &x_3, F(x_3); \\ &\dots \\ &x_k, F(x_k) \end{aligned}$$

наносят на вероятностную сетку. Если визуально они достаточно хорошо ложатся на прямую линию, то принимается гипотеза о том законе распределения, вероятностная сетка которого использовалась. В противном случае пробуют другие вероятностные сетки.

Линия, которой мысленно соединяют точки, нанесенная на вероятностную сетку, представляет собой эмпирическую функцию распределения, но полученную на координатной сетке, у которой одна или даже обе оси координат являются нелинейными.

На практике либо пользуются готовыми бланками вероятностных сеток, либо строят эти сетки с помощью шаблонов. В прил.5 приведены шаблоны для построения вероятностных сеток нормального, экспоненциального, логарифмически нормального распределений и распределения Вейбулла. Следует подчеркнуть, что приведенные шаблоны используют для построения оси ординат вероятностной сетки, на которой откладывают накопленные значения частот. Для этого на узкой полоске бумаги отмечают точками вертикальный размер (нижнюю и верхнюю границы), который будет иметь вероятностная сетка. Затем ее прикладывают к шаблону и, поддерживая параллельность его вертикальным линиям, перемещают полоску влево или вправо, до совпадения точек с крайними лучами. После чего на полоске делают отметки, совпадающие с промежуточными лучами, и проставляют цифровые значения. Полученная таким образом шкала используется для нанесения делений на вертикальную ось вероятностной сетки. Если вертикальный размер вероятностной сетки планируется большим, нежели размер крайней левой вертикальной линии шаблона, то лучи продлеваются на нужное расстояние влево.

Ось абсцисс для вероятностных сеток нормального и экспоненциального распределений принимается равномерной, а для логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла логарифмической. Для построения логарифмической шкалы в последнем случае можно пользоваться также шаблоном (см. рис.П5.4 прил.5).

Образцы вероятностных сеток нормального, экспоненциального и логарифмически нормального распределений показаны на рис.П5.5-П5.7 прил.5.

Пример 2.7. С помощью вероятностной сетки требуется проверить гипотезу о нормальном распределении емкости коллекторного перехода транзистора. Результаты наблюдений этого параметра в виде статистического ряда приведены в условии предыдущего примера (см. табл.2.6).

Решение. Из табл.2.6 видно, что верхними границами интервалов являются значения 76, 83, 88 и 94 пФ. Верхняя граница последнего интервала со значением 100 пФ, во внимание не принимается.

Накопленные значения частот, соответствующие указанным верхним границам интервалов, могут быть определены как

$$F(C_k = 76) = p_1^* = 0,05;$$

$$F(C_k = 82) = p_1^* + p_2^* = 0,05 + 0,20 = 0,25;$$

$$F(C_k = 88) = p_1^* + p_2^* + p_3^* = 0,25 + 0,42 = 0,67;$$

$$F(C_k = 94) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i^* = p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* = 0,67 + 0,27 = 0,94.$$

С помощью шаблона (рис.П5.1 прил.5) строим вероятностную сетку нормального распределения и наносим на эту сетку точки с координатами

$$(76; 0,05); (82; 0,25); (88; 0,67); (94; 0,94).$$

Вероятностная сетка с нанесенными на нее точками показана на рис.2.27.

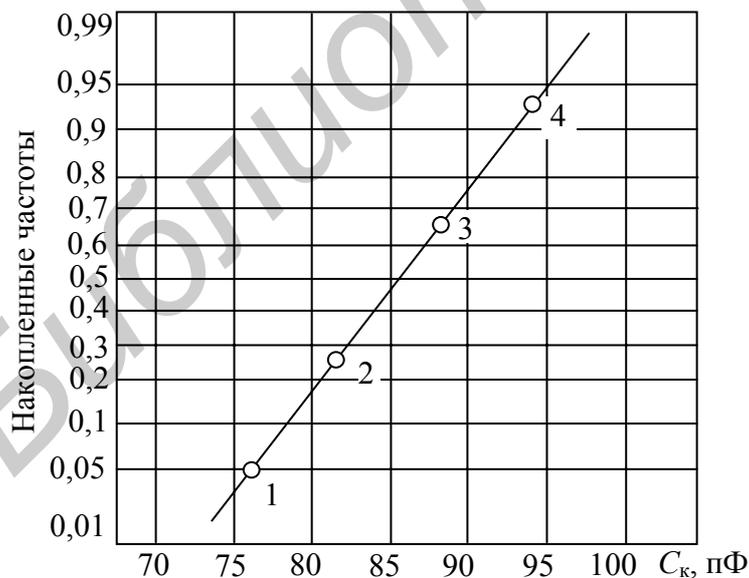


Рис.2.27. Эмпирическая функция распределения, построенная на вероятностной сетке нормального закона

Можно заметить, что точки достаточно хорошо ложатся на прямую, т.е. эмпирическая функция распределения, построенная на вероятностной сетке, приближается к прямой линии. Поэтому гипотеза о нормальном распределении рассматриваемого параметра (емкости C_k) принимается.

Заметим что номера точек на вероятностной сетке соответствуют номерам интервалов в табл.2.6.

2.7. Применение вероятностного описания параметров для решения инженерных задач

2.7.1. Некоторые рекомендации по использованию моделей законов распределения параметров

Ранее давались некоторые рекомендации по использованию на практике нормальной и равномерной моделей. Обобщим и систематизируем рекомендации по применению моделей законов распределения параметров.

1. Известно, что примерно 90-95% параметров, с которыми инженеру приходится сталкиваться при проектировании конструкций РЭУ и технологии их изготовления, распределены по закону, близкому к нормальному, и тогда оправдана гипотеза о нормальной модели. Чтобы решать инженерные задачи в случае нормального закона обычно исходят из того, что предельные отклонения параметра, регламентируемые допуском на него, соответствуют точкам $m \pm 3\sigma$ (рис.2.28).

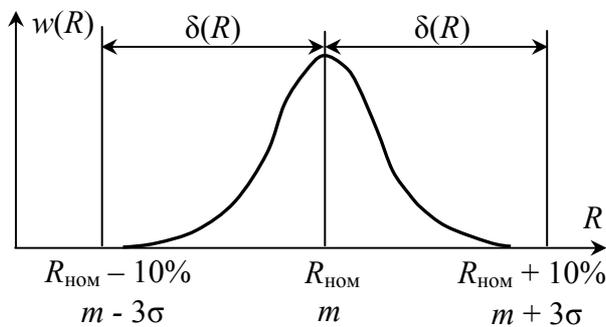


Рис.2.28. Предельные отклонения параметра при нормальном законе распределения: m — среднее значение параметра (при симметричном допуске соответствует номинальному значению); σ — среднее квадратическое отклонение параметра; $\delta(R)$ — половина поля допуска на сопротивление резистора

сигм”, используя выражение

$$\sigma(x) \approx \frac{\delta(x)}{3}, \quad (2.39)$$

где $\delta(x)$ — половина поля допуска на параметр x .

Среднее квадратическое отклонение относительной погрешности параметра x можно определить по формуле

$$\sigma\left(\frac{\Delta x}{x}\right) \approx \frac{\delta\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{3}, \quad (2.40)$$

где $\delta(\Delta x/x)$ — половина поля допуска параметра x , выраженная его относительным отклонением, обычно в процентах. Эту величину называют также половиной поля рассеивания относительной погрешности параметра и она всегда положительна.

и тогда оправдана гипотеза о нормальной модели. Чтобы решать инженерные задачи в случае нормального закона обычно исходят из того, что предельные отклонения параметра, регламентируемые допуском на него, соответствуют точкам $m \pm 3\sigma$ (рис.2.28).

С учетом сделанного предположения среднее квадратическое отклонение параметра, например x , определяют по “правилу трех

Пример 2.8. В электрической схеме радиоэлектронного устройства предполагается использовать резистор с сопротивлением $R = 300 \text{ Ом} \pm 10\%$. Требуется определить среднее квадратическое отклонение R и его относительной производственной погрешности $\Delta R/R$ в предположении, что для R оправдана гипотеза о нормальном законе распределения.

Решение.

Так как допуск на параметр R симметричный, то его среднее значение (математическое ожидание) совпадает с номинальным. Следовательно

$$M(R) = R_{\text{ном}} = 300 \text{ Ом.}$$

Примерное значение среднего квадратического отклонения сопротивления R найдем, используя формулу (2.39).

Нетрудно найти

$$\delta(R) = 0,1 \cdot R_{\text{ном}} = 0,1 \cdot 300 = 30 \text{ Ом.}$$

Следовательно

$$\sigma(x) \approx \frac{\delta(x)}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ Ом.}$$

В качестве параметра x рассмотрим $\Delta R/R$.

Как отмечалось ранее, при переходе от R к $\Delta R/R$ вид закона распределения сохраняется, меняются лишь его параметры. Можно убедиться, что в данном случае

$$M\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 0.$$

Значение $\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$ найдем по формуле (2.40). Получим

$$\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right) \approx \frac{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{3} = \left| \begin{array}{l} \text{По условию примера} \\ \delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 10\% \end{array} \right| = \frac{10}{3} \approx 3,3\%.$$

В данном случае $\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$ получена в процентах. Ее можно найти и в относительных единицах

$$\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = \left| \begin{array}{l} \text{По условию примера} \\ \delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 0,1 \end{array} \right| = \frac{0,1}{3} \approx 0,033.$$

2. Для параметров резисторов и конденсаторов с большим допуском ($\pm 10\%$ и более) в большинстве случаев оправдана гипотеза о нормальной модели. Однако, если из партии с допуском на

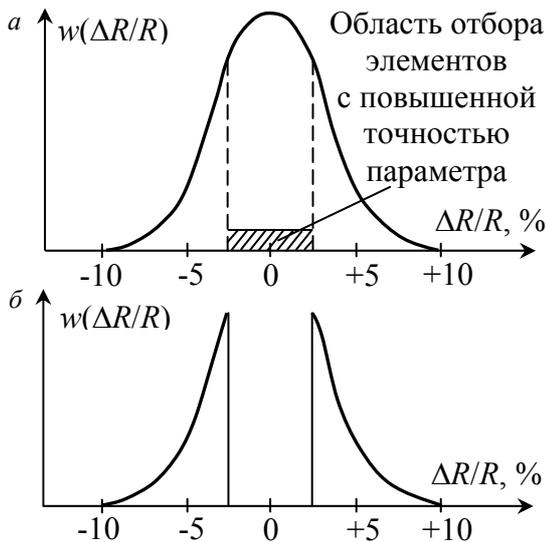


Рис.2.29. Влияние отбора элементов на закон распределения параметра:
а – закон распределения сопротивления резисторов до процедуры отбора; **б** – закон распределения сопротивления резисторов исходной партии после процедуры отбора

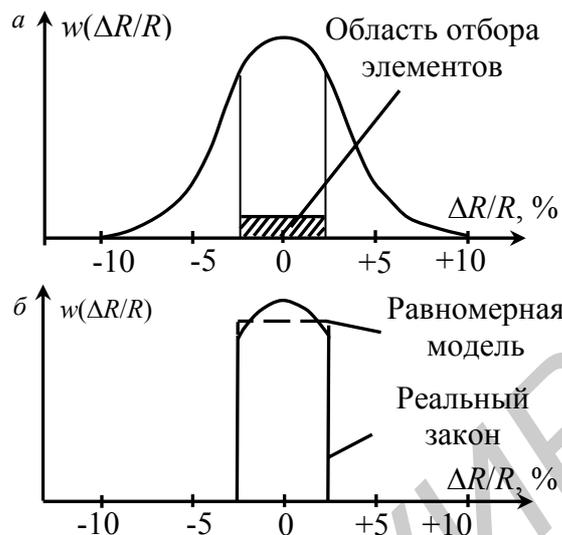


Рис.2.30. Равномерная модель как следствие отбора элементов:
а – закон распределения для исходной партии (до процедуры отбора);
б – закон распределения для отобранных резисторов с повышенной точностью сопротивления

параметры $\pm 10\%$ и более проводился отбор элементов с малым их разбросом, то пользоваться для исходной партии элементов гипотезой о нормальной модели будет неправильным. Подтверждением сказанному служит рис.2.29.

3. Для параметров резисторов и конденсаторов, имеющих допуск $\pm 5\%$ и менее, в инженерных приложениях можно пользоваться гипотезой о равномерной модели, так как, по всей видимости, высокая точность параметров достигалась путем отбора из партий элементов, имеющих заметно больший разброс параметра. Оправданность такого подхода понятна из рис.2.30.

Неравномерностью на вершине распределения (см. рис.2.30, б) пренебрегают и пользуются равномерной моделью.

В случае равномерной модели характеристики $\sigma(x)$ или $\sigma\left(\frac{\Delta x}{x}\right)$, необходимые для решения инженерных задач, определяют, используя формулы

$$\sigma(x) \approx \frac{\delta(x)}{\sqrt{3}}; \quad \sigma\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\delta\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{\sqrt{3}}. \quad (2.41)$$

4. Если закон распределения параметра неизвестен, и нельзя принять гипотезу о нормальной или равномерной модели, то следует либо попытаться подобрать модель закона распределения параметра экспериментально, либо пользоваться равномерной моделью, ибо эта модель на практике является предельным наихудшим случаем разброса параметра. Другими словами, при одинаковом диапазоне изменения параметра равномерная модель, по сравнению с другими, которые реально могут иметь место на практике, характеризуется максимальным средним квадратическим отклонением параметра.

2.7.2. Примеры применения моделей законов распределения параметров

Пример 2.9. Определим, какой процент резисторов с разбросом сопротивления не более чем на $\pm 5\%$ содержится в партии элементов со значением сопротивления $100 \text{ Ом} \pm 10\%$.

Решение.

1. Так как в исходной партии резисторов допуск на сопротивление относительно велик, $\delta(\Delta R/R) = 10\%$, то оправдана гипотеза о нормальной модели закона распределения $\Delta R/R$ (рис. 2.31).

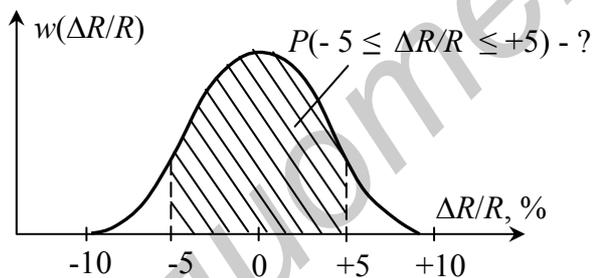


Рис.2.31. Иллюстрация к примеру 2.9
сущей нас вероятности воспользуемся формулой (2.7). Напомним ее вид

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Применительно к рассматриваемому примеру имеем

$$x \rightarrow \frac{\Delta R}{R}; \quad a = -5\%; \quad b = +5\%.$$

2. Определим значения m и σ , характеризующие исходную партию резисторов.

$$m = M\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 0, \text{ так как допуск симметричный.}$$

Искомый процент резисторов определяется вероятностью

$$P\left(-5 \leq \frac{\Delta R}{R} \leq +5\right).$$

Она численно равна заштрихованной площади на рис.2.31.

Для нахождения интере-

Учитывая, что $\sigma = \sigma(\Delta R/R)$, по "правилу трех сигм" найдем значение величины $\sigma(\Delta R/R)$:

$$\sigma\left(\frac{\Delta R}{R}\right) \approx \frac{\delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right)}{3} = \left| \begin{array}{l} \text{По условию примера} \\ \delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 10\% \end{array} \right| = \frac{10}{3} \approx 3,3\%.$$

3. Используя значение функции $\Phi(x)$ (прил.1, табл.П1. 1.), находим вероятность $P(-5\% \leq \Delta R/R \leq +5\%)$.

$$\begin{aligned} P\left(-5 \leq \frac{\Delta R}{R} \leq +5\right) &= \Phi\left(\frac{+5-0}{3,33}\right) - \Phi\left(\frac{-5-0}{3,33}\right) = \\ &= \Phi(1,50) - \Phi(-1,50) = 0,9332 - 0,0668 \approx 0,87. \end{aligned}$$

Таким образом, в исходной партии примерно 87% резисторов будут иметь разброс сопротивления не более, чем на $\pm 5\%$ от номинального значения $R_{\text{ном}} = 100 \text{ Ом}$.

Можно рассчитать, что в исходной партии резисторов с допуском $\pm 10\%$ содержится немало количество элементов с разбросом сопротивления не более, чем $\pm 2\%$, $\pm 1\%$ (табл.2.7).

Таблица 2.7

Примерный процент элементов с заданным разбросом параметра в партии резисторов с допуском $\pm 10\%$

Максимальный разброс сопротивления резисторов, %	Примерный процент элементов в исходной партии
± 5	87
± 2	45
± 1	24,5

Пример 2.10. Транзистор типа КТ203Б по техническим условиям (ТУ) имеет коэффициент усиления тока базы в режиме малого сигнала $h_{21} = 30-100$. Для работы в составе РЭУ пригодны лишь экземпляры со значением параметра $h_{21} \geq 50$. Определить, какое примерно число экземпляров пригодно для указанных целей из партии транзисторов объемом 1000 штук.

Решение.

1. Искомое число экземпляров можно определить, зная вероятность вида

$$P(50 \leq h_{21} \leq 100).$$

2. Примем гипотезу о нормальном распределении параметра h_{21} . Вероятность $P(50 \leq h_{21} \leq 100)$ численно равна площади, заштрихованной на рис.2.32.

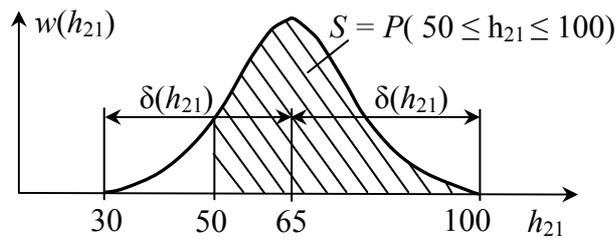


Рис.2.32. Иллюстрация к примеру 2.10

Интересующую вероятность определим по формуле (2.7). Имеем:

$$x \rightarrow h_{21}; a = 50; b = 100;$$

$$m = M(h_{21}); \sigma = \sigma(h_{21}).$$

Зная диапазон значений h_{21} , легко найти среднее значение $M(h_{21})$:

$$M(h_{21}) = \frac{30+100}{2} = 65.$$

Значение $\sigma(h_{21})$ определим по "правилу трех сигм" (см. рис.2.32).

$$\sigma(h_{21}) \approx \frac{\delta(h_{21})}{3} = \frac{100-65}{3} \approx 11,67.$$

4. Используя значения функции $\Phi(x)$ (прил.1, табл.П.1), находим

$$\begin{aligned} P(50 \leq h_{21} \leq 100) &= \Phi\left(\frac{100-65}{11,67}\right) - \Phi\left(\frac{50-65}{11,67}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{50-65}{11,67}\right) = 1 - \Phi(-1,29) = 1 - 0,0985 \approx 0,9. \end{aligned}$$

Таким образом из партии объемом 1000 транзисторов примерно 90%, т.е. 900 экземпляров, будут пригодны для постановки в РЭУ.

Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Понятие моделей

3.1.1. Общие сведения о моделировании и моделях

Моделирование – это замена действующего или проектируемого объекта или процесса неким подобием, которое отражает их основные характерные черты. В зависимости от того, что представляет собой замена (имитация), различают математические, физические и графические модели. Соответственно, от того, какие модели реализуют, моделирование может быть математическим, физическим и графическим,

Графическое моделирование в КиТРЭУ – это получение схем и чертежей, позволяющих судить о составе, форме, размерах и принципе функционирования конструкций РЭУ или структуре и взаимосвязи частей технологических процессов.

Физическое моделирование — это вещественная замена конструкциями или процессами той же физической природы, но в измененном масштабе или виде, либо вещественная замена конструкциями или процессами иной физической природы, но такой, которая отображает характерные черты исследуемой конструкции или процесса.

Примером физической модели двухвходового логического элемента (схемы) "ИЛИ" является электро-механическая модель, показанная на рис.3.1. При этом физической моделью этого логического элемента является не сама схема (рис 3.1, в), а ее вещественная (материальная) реализация. Саму же схему можно рассматривать, как графическую модель. Таким образом при пояснении

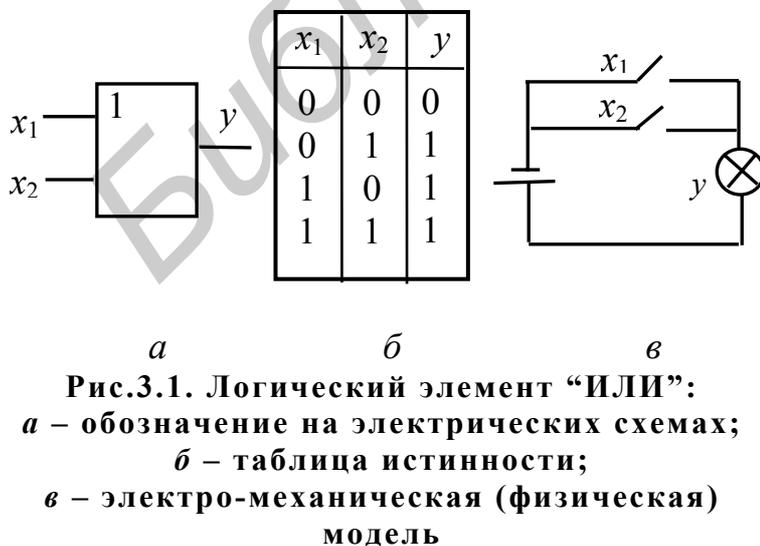


Рис.3.1. Логический элемент "ИЛИ":
а – обозначение на электрических схемах;
б – таблица истинности;
в – электро-механическая (физическая) модель

физической модели невольно приходится воспользоваться графической моделью.

Читателю предлагается самостоятельно привести физические (электро-механические) модели логических элементов "И" и "НЕ".

Математическое моделирование основано на использовании математических выражений,

описывающее выходной параметр РЭУ или ТП. Когда говорят «математическая модель РЭУ или ТП», то имеют в виду математическое выражение, описывающее выходной параметр РЭУ или ТП. Иногда для большей определенности употребляют также слова "математическая модель выходного параметра" РЭУ или ТП.

В инженерной практике широкое применение находят регрессионные модели, являющиеся разновидностью математических моделей.

3.1.2. Регрессионные модели

На выходные параметры РЭУ или ТП оказывают влияние большое число первичных параметров. Часть первичных параметров мы знаем, а о влиянии некоторых из них даже не догадываемся. При решении инженерных задач ограничиваются небольшим числом наиболее существенных первичных параметров. Обычно это число $k < 5-8$. В связи с этим зависимость выходного параметра y от учитываемых первичных параметров x_1, \dots, x_k оказывается вероятностной.

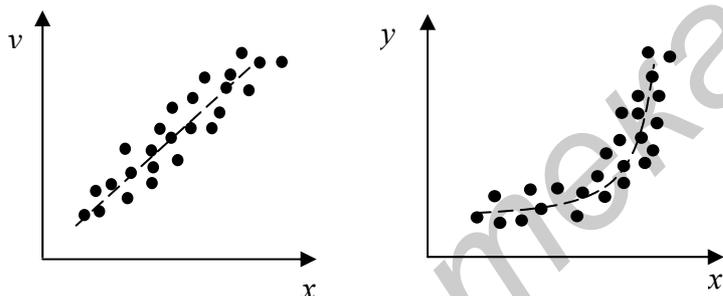


Рис.3.2. Возможные корреляционные поля выходного y и первичного x параметров

Предположим что во внимание принят лишь один первичный параметр x . Тогда корреляционное поле параметров x и y может, например, принять вид, показанный на рис. 3.2. Проведем в корреляционном поле прямую, или кривую линию, которая лучшим образом характеризует изменение выходного параметра y в зависимости от первичного параметра x . Эту линию называют линией регрессии, а математическое выражение, описывающее линию — уравнением регрессии или регрессионной моделью. Когда первичный параметр не один, а несколько, то говорят об уравнении множественной регрессии.

В инженерной практике популярны регрессионные модели в виде полиномов. Особый интерес представляет полином первой степени. Его математический вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_k = \sum_{i=1}^k a_i x_i, \quad (3.1)$$

где y — выходной параметр РЭУ или ТП;
 x_1, \dots, x_k — первичные параметры;
 k — число учитываемых первичных параметров;

a_0, a_1, \dots, a_k — коэффициенты модели, определяемые по результатам экспериментов.

Модель вида (3.1) называют также уравнением множественной линейной регрессии.

К математическим моделям предъявляются два основных требования: простота получения и относительно минимальные погрешности при описании поведения устройства или процесса. Во многом этим требованиям отвечают линейные регрессионные модели вида (3.1). Для определения по данным эксперимента коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_k получены несложные расчётные формулы, а удовлетворительность описания реальных РЭУ и ТП обусловлена небольшим отклонением первичных параметров относительно своих средних (номинальных) значений, составляющим

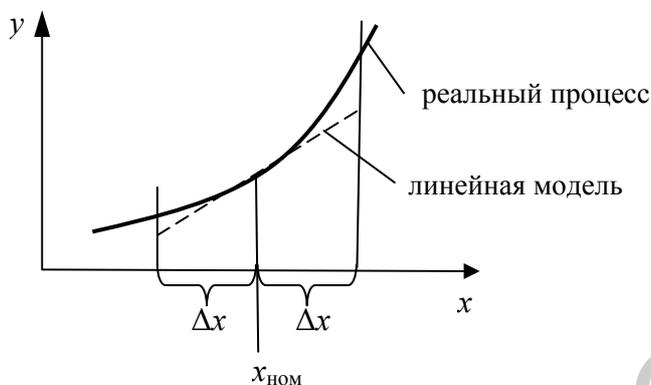


Рис.3.3. Линейная аппроксимация выходного параметра на участке $x_{\text{ном}} \pm \Delta x$

обычно не более 20...30%. Из рис.3.3 видно что замена резко нелинейной зависимости на участке $x_{\text{ном}} \pm \Delta x$ прямой линией не вызовет больших ошибок. По этой причине линейные регрессионные модели в большинстве случаев оказываются пригодными для дальнейшего инженерного анализа РЭУ и ТП.

При построении математических моделей возникает вопрос, как в корреляционном поле лучшим образом провести прямую или другую линию. Для ответа на этот вопрос используется метод наименьших квадратов.

3.1. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате эксперимента для наблюдаемых значений первичного параметра x зафиксированы значения выходного параметра y . Нанесём результаты эксперимента в виде экспериментальных точек на координатную плоскость (рис.3.4).

Понятно, что лучшей линией в корреляционном поле является такая, для которой расхождение с экспериментальными точками минимально. Это можно записать в виде критерия

$$\sum_{i=1}^n (y_{\text{э}i} - y_{\text{т}i}) = \sum_{i=1}^n \Delta y_i \rightarrow \min \quad (3.2)$$

где n — число экспериментальных точек (точек корреляционного поля);

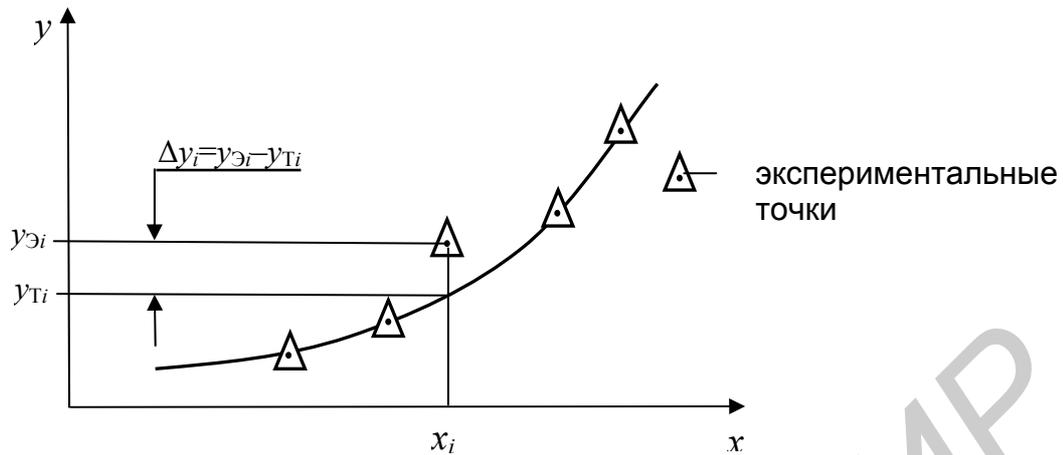


Рис.3.4. Подбор линии методом наименьших квадратов:

$y_{Эi}$ — экспериментальное значение y в i -й точке;
 $y_{Тi}$ — теоретическое значение y в i -й точке.

Для получения значения $y_{Тi}$ нужно в математическое выражение, описывающее предполагаемую удачную линию, подставить значение x_i .

Критерий вида (3.2) является общим критерием. На его основе могут быть предложены конкретные критерии, а именно:

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i \rightarrow \min \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n |\Delta y_i| \rightarrow \min \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^\alpha \rightarrow \min; \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \quad (3.5)$$

Критерий (3.3) предполагает, что расхождение между $y_{Эi}$ и $y_{Тi}$ принимаются со своим знаком, поэтому по математической записи он совпадает с общим критерием (3.2).

Из указанных критериев (3.3)-(3.5) теория и практика остановили выбор на критерии (3.5) при значении $\alpha = 2$, т.е. на критерии

$$\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 \rightarrow \min \quad (3.6)$$

Подбор теоретических линий (функций) на его основе получил название метода наименьших квадратов. Этот метод имеет веское теоретическое обоснование ввиду следующего:

линия, построенная в корреляционном поле с помощью данного метода, является наиболее вероятной;

метод приводит к получению простых расчетных формул для определения коэффициентов теоретических функций.

Пример 3.1. В процессе эксплуатации передатчика радиолокационной станции (РЛС) измерялось значение его импульсной мощности в определенные моменты времени (табл.3.1).

Таблица 3.1
Результаты измерения мощности передатчика РЛС

Время, ч	0	50	100	150	200
Мощность, Вт	800	790	750	730	710

Требуется методом наименьших квадратов подобрать функцию, которая описывала бы изменение мощности передатчика P на интервале наблюдений от $t_1 = 0$ до $t_k = 200$ ч.

Решение. Предположим, на основе анализа физики процессов, происходящих в элементах передатчика РЛС, есть основания считать, что мощность P падает с течением времени t по экспоненциальному закону, т.е.

$$P(t) = P_0 e^{-at},$$

где P_0 — значение мощности в начальный момент времени;

a — коэффициент, подлежащий определению.

В качестве значения P_0 можно принять

$$P_0 = P(t = 0) = 800.$$

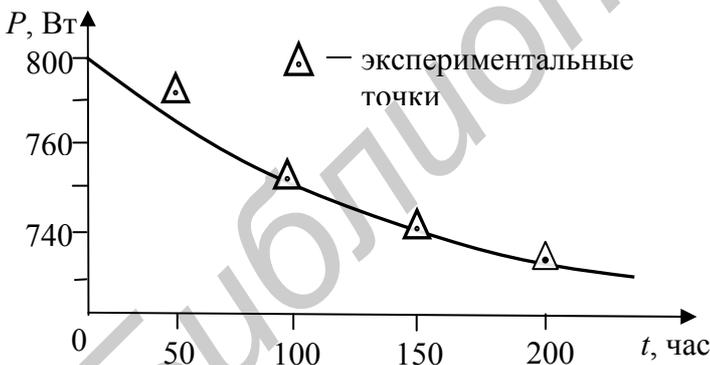


Рис.3.5. Сглаживание экспериментальной зависимости теоретической кривой

Тогда задача подбора теоретической функции сводится к нахождению по экспериментальным данным лучшего значения коэффициента a (рис.3.5).

Коэффициент a найдем используя

критерий вида (3.6). Для этого определим примерное значение (порядок) коэффициента a . Зададимся несколькими значениями этого коэффициента в диапазоне его возможного изменения. Для каждого значения a просчитаем значение

$$S = \sum_{i=1}^n (P_i - 800e^{-at_i})^2. \quad (3.7)$$

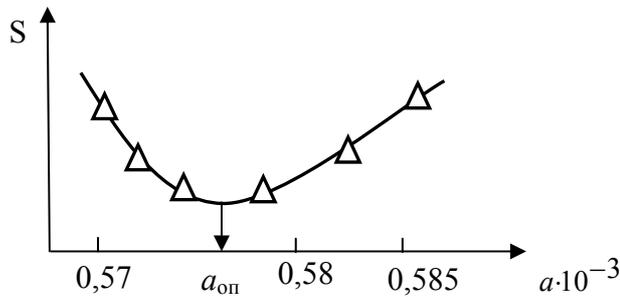


Рис.3.6. К определению коэффициента a теоретической функции

Из рис.3.6 видно, что $a_{\text{опт}} \approx 0,000576$.

При пользовании графиком, показанным на рис.3.6, необходимо, чтобы искомое значение коэффициента a попало "в вилку". В противном случае процесс построения графика нужно продолжить в сторону уменьшения S , пока искомое значение коэффициента a не попадет "в вилку".

В инженерной практике при подборе теоретических функций нет необходимости каждый раз применять описанный в примере подход.

Для ряда вида функций получены расчетные формулы для определения их коэффициентов.

3.3. Нахождение приближающих математических моделей в виде элементарных функций

3.3.1. Линейная функция

Будем считать, что в процессе эксперимента наблюдались значения параметра x и фиксировали соответствующие значения параметра y . В итоге получено две совокупности значений:

$$x_i, i = 1, \dots, n;$$

$$y_i, i = 1, \dots, n,$$

где n — число экспериментальных точек.

Подберем функцию, которая лучшим образом приближается к экспериментальным точкам, и которую назовем приближающей. Ее найдем в виде

$$y = ax + b, \quad (3.8)$$

где a, b — коэффициенты линейной функции.

Найдем линейную функцию, которая с точки зрения метода наименьших квадратов описывает поведение параметра y в зависимости от параметра x .

Затем построим график изменения указанной суммы от значения коэффициента a . Лучшим с точки зрения метода наименьших квадратов будет такое значение a , при котором записанная выше сумма будет минимальна (рис.3.6).

Согласно [7], такой является функция, коэффициенты a и b которой подсчитаны по формулам

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

При решении практических задач обычно стремятся функцию, сглаживающую результаты эксперимента, привести к линейному виду и воспользоваться формулами (3.9).

3.3.2. Показательная функция

Предположим, что лучшей с точки зрения метода наименьших квадратов, является функция вида

$$y = be^{ax}, \quad b > 0. \quad (3.10)$$

Прологарифмировав равенство (3.10), получим

$$\ln y = ax + \ln b$$

Введем обозначения $Y = \ln y$; $B = \ln b$. Получим

$$Y = ax + B \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) есть уравнение прямой линии. Ее коэффициенты a и B могут быть подсчитаны по формулам (3.9), используя в качестве значений y_i значения $\ln y_i$ ($i = 1, \dots, n$). Совокупность x_i ($i = 1, \dots, n$) используется без изменения.

В результате применения формул (3.9) коэффициент a определится сразу, а коэффициент b определится, как

$$b = e^B. \quad (3.12)$$

3.3.3. Степенная функция

Приближающую функцию будем искать в виде

$$y = bx^a, \quad b > 0. \quad (3.13)$$

Предположим, что все значения x_i и y_i ($i = 1, \dots, n$) положительны. Прологарифмировав равенство (3.13) при условии $b > 0$, получим

$$\ln y = \ln b + a \ln x \quad (3.14)$$

Обозначим: $Y = \ln y$; $B = \ln b$; $X = \ln x$, тогда равенство (3.14) примет вид

$$Y = aX + B,$$

т.е. задача свелась к отысканию параметров a и B , линейной функции по выражениям (3.9). Однако в данном случае в качестве значений x_i и y_i необходимо использовать значения $\ln x_i$ и $\ln y_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Значение коэффициента a функции (3.13) будет получено сразу, а значение коэффициента b — с помощью выражения

$$b = e^B.$$

3.3.4. Логарифмическая функция

В этом случае приближающую функцию находим в виде

$$y = a \ln x + b. \quad (3.15)$$

Легко заметить, что для перехода к линейной функции достаточно сделать замену

$$X = \ln x$$

Для расчета коэффициентов a и b по формулам (3.9) необходимо в качестве значений x_i использовать значения $\ln x_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Значения y_i ($i = 1, \dots, n$) используются без изменения. В результате расчета значения коэффициентов a и b функции (3.15) будут получены сразу.

3.3.5. Дробно-линейная функция

Приближающая функция имеет вид

$$y = \frac{1}{ax + b}. \quad (3.16)$$

Перепишем равенство (3.16) следующим образом:

$$\frac{1}{y} = ax + b.$$

Из последнего равенства видно, что для нахождения неизвестных коэффициентов функции (3.16) можно воспользоваться формулами (3.9), но в качестве значений y_i необходимо взять значения $1/y_i$ ($i = 1, \dots, n$). Коэффициенты функции (3.16) в этом случае будут определены сразу.

3.3.6. Гипербола

Если график, построенный по точкам с использованием значений x_i и y_i ($i = 1, \dots, n$), напоминает ветвь гиперболы, то приближающую функцию можно искать в виде:

$$y = \frac{a}{x} + b. \quad (3.17)$$

Для перехода к линейной функции сделаем подстановку $X = 1/x$. Тогда

$$y = aX + b.$$

Поэтому перед использованием формул (3.9) необходимо значения x_i преобразовать в значения $1/x_i$ ($1, \dots, n$). После чего по формулам (3.9) коэффициенты a и b будут получены сразу.

3.3.7. Дробно-рациональная функция

Пусть приближающая функция ищется в виде

$$y = \frac{x}{ax + b}. \quad (3.18)$$

Преобразовав равенство (3.18), получим

$$\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x}.$$

Вводя обозначения $Y = 1/y$; $X = 1/x$ придем к линейной функции

$$Y = bX + a.$$

В этом случае перед использованием формул (3.9) необходимо значения x_i и y_i преобразовать соответственно в значения $1/x_i$ и $1/y_i$ ($i = 1, \dots, n$). Коэффициенты a и b модели (3.18) будут равны соответственно значениям коэффициентов b и a , подсчитанным по формулам (3.9).

3.4. Способы получения математических моделей РЭУ

Математические модели РЭУ могут быть получены аналитическим путем на основе рассмотрения физической сущности выходного параметра и математических выражений, характеризующих его поведение в тех или иных условиях. К сожалению этот подход во многих случаях не позволяет достичь цели. В подобных случаях математические модели получают с помощью экспериментальных исследований РЭУ. При этом в практике находят применение пассивные и активные факторные эксперименты.

Факторными эксперименты называют потому, что в процессе проведения эксперимента каким-либо образом изменяют значения первичных параметров, рассматриваемых как факторы, и фиксируют уровень выходного параметра, рассматриваемого как отклик или функция отклика.

При пассивном эксперименте инженер наблюдает значения факторов и регистрирует соответствующий этим значениям уровень выходного параметра (отклика). Изменение значений факторов в таком эксперименте достигается путем замены экземпляра устройства. Основным недостатком таких экспериментов состоит в необходимости проведения большого числа опытов.

При активном эксперименте инженер активно вмешивается в его ход путем принудительной установки (задания) в опытах нужных ему значений факторов. Активные эксперименты позволяют заметно уменьшить количество опытов, требуемое для получения математической модели. Однако их проведение не всегда возможно по техническим или экономическим соображениям.

3.5. Применение пассивного эксперимента для получения математических моделей

Опишем основные этапы процедуры получения математических моделей РЭУ с использованием пассивных экспериментов.

1. Для рассматриваемого вида устройства выявляются первичные параметры (факторы), в наибольшей степени влияющие на выходной параметр. Число этих факторов k рекомендуется ограничивать значением $k < 5-8$.

2. Определяется требуемое количество опытов пассивного эксперимента n или, что то же самое, требуемое число замен экземпляра устройства:

$$n \geq \frac{(1 - r_{\min}^2)^2}{\sigma_r^2}, \quad (3.19)$$

где r_{\min} — минимальное значение коэффициента парной корреляции между первичным параметром (фактором) и выходным параметром, считаемое еще значимым (существенным, весомым); обычно $|r_{\min}| = 0,2 \dots 0,3$;

σ_r — среднее квадратическое отклонение коэффициента корреляции.

Значение σ_r определяют, как

$$\sigma_r = \frac{|r_{\min}|}{t_\gamma}, \quad (3.20)$$

где t_γ — коэффициент, зависящий от доверительной вероятности γ (см. табл.2.3).

Пример 3.2. Требуется определить, какое число опытов пассивного эксперимента необходимо провести для случая, когда принято значение $|r_{\min}|=0,3$. Доверительная вероятность $\gamma = 0,95$.

Решение. По табл.2.3 для $\gamma = 0,95$ находим $t_\gamma = 1,96$. По формуле (3.20) вычислим значение σ_r :

$$\sigma_r = \frac{0,3}{1,96} \approx 0,153.$$

Используя выражение (3.19), определим требуемое число опытов:

$$n = \frac{(1 - 0,3^2)^2}{0,153^2} \geq 36.$$

Нетрудно убедиться, если принять $|r_{\min}|=0,2$, то число опытов $n \geq 89$.

3. Проводятся опыты пассивного эксперимента. Проведение опытов включает:

наблюдение (измерение) значений факторов для исследуемого экземпляра устройства;

регистрацию (измерение) значения выходного параметра, соответствующего наблюдаемым значениям факторов;

замену экземпляра устройства.

Результаты опытов рекомендуется сводить в таблицу вида табл.3.2.

Таблица 3.2

Рекомендуемая форма записи результатов пассивного эксперимента

Номер опыта (экземпляр устройства)	Значение фактора			Уровень выходного параметра y
	x_1	...	x_k	
1				
...				
n				

Такая таблица удобна тем, что приводимая в ней информация, может сразу вводиться для обработки в ЭВМ, без переписывания и систематизации условий и результатов опытов.

4. Выполняется статистическая обработка результатов опытов. В общем случае сложность математической обработки зависит от того, коррелированы ли между собой факторы.

Статистическая обработка в настоящее время как правило выполняется на ЭВМ с использованием библиотечных программ.

По результатам статистической обработки строят модели в виде уравнения регрессии. Часто вначале строят линейную модель

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k, \quad (3.21)$$

где y — выходной параметр;
 x_1, \dots, x_k — факторы;
 k — количество факторов принятых во внимание;
 a_0, a_1, \dots, a_k — коэффициенты модели, получаемые из эксперимента.

При записи математической модели в не включают только значимые коэффициенты. Проверка значимости, как правило, является составной частью статистической обработки и выполняется с помощью тех же библиотечных программ для ЭВМ

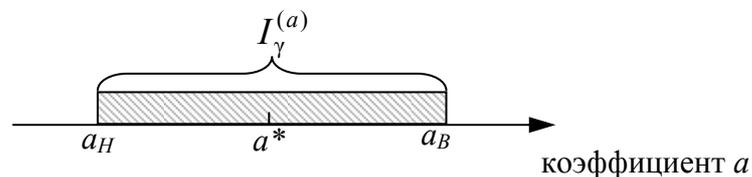
Проверить значимость коэффициента модели означает дать ответ на вопрос, за счет чего коэффициент оказался отличным от нуля — за счет случайных причин (ограниченного числа опытов), либо за счет того, что это объективно имеет место.

Программы для ЭВМ, выполняющие процедуру проверки значимости, реализуют обычно следующий алгоритм. Для рассматриваемого коэффициента, например a , определяется доверительный интервал (интервальная оценка) $I_\gamma^{(a)}$, соответствующий доверительной вероятности γ :

$$I_\gamma^{(a)} = \{a_H; a_B\},$$

где a_H, a_B — границы интервала.

Дальше уточняется вопрос, попадает ли в построенный доверительный интервал $I_\gamma^{(a)}$ точка $a=0$ (рис.3.7).



**Рис.3.7. Доверительный интервал для коэффициента a :
 a^* — точечная оценка**

Если это происходит, то нет оснований точечную оценку a^* , полученную при статистической обработке, считать значимой, ибо отличной от нуля она могла оказаться за счет ограниченности числа опытов, погрешностей эксперимента и других случайных причин. Следовательно, такой коэффициент (слагаемое с коэффициентом a^*) не следует включать в формируемую математическую модель.

Если в дальнейшем выяснится, что линейная модель вида (3.21) окажется неадекватной результатам эксперимента, то опять-таки с использованием библиотечных программ для ЭВМ, строят математическую модель в виде степенного полинома. Обычно ограничиваются полиномом второй, реже третьей степени.

5. Проверяется пригодность построенной модели для целей практики. Об этом судят по ее адекватности результатам эксперимента.

Проверить адекватность модели означает выяснить вопрос, за счет чего имеют место расхождения между значениями выходного параметра, полученными экспериментально и подсчитанными по построенной математической модели, — за счет погрешностей в опытах либо за счет того, что модель плохо описывает поведение выходного параметра РЭУ. Обычно этап 5 выполняют также на ЭВМ, совместно с этапом 4.

Многие библиотечные программы при проверке адекватности используют критерий Фишера.

3.6. Получение математических моделей с помощью активных факторных экспериментов

3.6.1. Задачи теории планирования эксперимента

В инженерной практике стремятся получить математические модели РЭУ или технологических процессов с использованием минимального числа опытов. В ряде случаев это можно сделать с помощью математической теории планирования эксперимента.

Планирование эксперимента — это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

В теории планирования эксперимента процедуру выбора числа и условий проведения опытов называют планированием многофакторного эксперимента, имея в виду, что число факторов — не менее двух. Термин "варьирование" означает установление исследователем нужных ему в эксперименте значений (уровней) факторов.

Теория планирования эксперимента должна дать ответы на следующие вопросы:

- по какому плану проводить эксперимент;
- как обрабатывать результаты эксперимента;
- как оценивать качество опытов и пригодность построенной модели для практики?

3.6.2. Основы теории планирования активных факторных экспериментов

Пусть факторы x_1, \dots, x_k объекта исследования связаны с выходным параметром (откликом) зависимостью

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_k), \quad (3.22)$$

где k – число учитываемых факторов.

При использовании полных факторных экспериментов (ПФЭ) зависимость (3.22) часто получают в виде неполной квадратичной модели (полинома):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots, \quad (3.23)$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{12}, \dots$ – коэффициенты полинома;
 x_1, \dots, x_k – натуральные в своей размерности значения факторов.

Многоточие в конце выражения (3.23) означает, что на практике можно интересоваться не всеми взаимодействиями (произведениями) факторов, а лишь линейной частью модели.

Модель вида (3.23) называют уравнением регрессии, или регрессионной моделью, коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{12}, \dots$ — коэффициентами регрессионной модели.

Получить полином с натуральными значениями факторов (размерный полином) сразу в большинстве случаев не представляется возможным. Поэтому вначале получают полином с кодированными безразмерными значениями факторов. Такой полином будем называть безразмерным.

Безразмерный полином ищут в виде

$$y = b_0 + b_1 \hat{x}_1 + \dots + b_k \hat{x}_k + b_{12} \hat{x}_1 \hat{x}_2 + \dots \quad (3.24)$$

где $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ — кодированные (безразмерные) значения факторов;
 b_0, b_1, \dots — коэффициенты, значения которых в общем случае отличны от значений аналогичных коэффициентов модели (3.23).

Кодированные значения факторов определяются соотношением

$$\hat{x}_j = \frac{x_j - x_{j0}}{\lambda_j}, \quad (3.25)$$

где x_j — натуральное текущее значение j -го фактора;
 x_{j0} — натуральное значение нулевого уровня j -го фактора;
 λ_j — половина размаха варьирования j -го фактора, называется обычно интервалом варьирования;
 j — номер фактора ($j=1, \dots, k$).

Для получения модели вида (3.23) или ее линейной части

$$y = b_0 + b_1 \hat{x}_1 + \dots + b_k \hat{x}_k \quad (3.26)$$

каждый фактор достаточно варьировать на двух уровнях. Уровень j -го фактора, соответствующий большему значению $x_{jВ}$, называют верхним, а соответствующий меньшему значению $x_{jН}$ — нижним. Посередине между ними размещен основной (нулевой или базовый) уровень (рис.3.8).

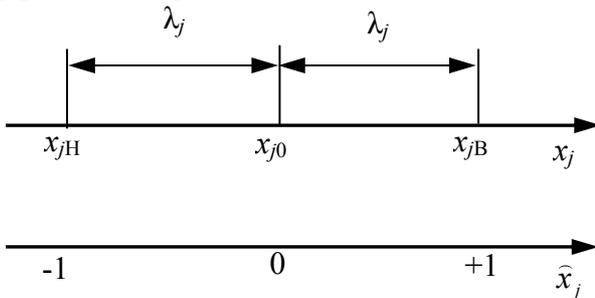


Рис.3.8. Уровни варьирования фактора x_j

При кодировании уровней факторов с использованием выражения (3.25) план эксперимента не зависит от физики процесса (явления).

На практике стремятся уровни варьирования выбрать так, чтобы получить $\hat{x}_j = \pm 1$. Это упрощает эксперимент и обработку его результатов. Значение $\hat{x}_j = -1$

соответствует нижнему, а значение $\hat{x}_j = +1$ — верхнему уровням варьирования (рис.3.8). В дальнейшем будут рассмотрены эксперименты, в которых кодированные уровни факторов, принимают значения -1 или $+1$.

Если число факторов равно k , то при их варьировании на двух уровнях (-1 ; $+1$) число сочетаний (комбинаций) уровней факторов или, что то же самое, число опытов N эксперимента определится выражением $N = 2^k$.

3.6.3. Полный факторный эксперимент (ПФЭ)

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом — ПФЭ.

Так как при варьировании факторов лишь на двух уровнях число опытов ПФЭ N составляет 2^k , то говорят, что имеет место ПФЭ типа "2 в степени k ".

Условия эксперимента представляют в виде таблицы, называемой матрицей плана эксперимента, или кратко планом эксперимента. Строки матрицы называют вектор-строками, столбцы — вектор-столбцами. Для простоты записи в матрице символ "1" обычно опускают, оставляя лишь знаки "плюс" или "минус". В табл.3.3 в качестве примера приведен план ПФЭ типа 2^k при $k = 2$.

Таблица 3.3

Матрица плана ПФЭ при числе факторов $k = 2$

Номер опыта	\hat{x}_1	\hat{x}_2
1	–	–
2	–	+
3	+	–
4	+	+

В матрице (табл. 3.3) столбцы \hat{x}_1 и \hat{x}_2 задают условия опытов, т.е. в соответствии со знаками этих столбцов должны устанавливаться уровни факторов при проведении опытов.

Важнейшими свойствами матриц ПФЭ являются симметричность, условие нормировки и ортогональность.

Симметричность достигается обеспечением условий

$$\sum_{i=1}^N (\hat{x}_j)_i = 0, j = 1, \dots, k, \quad (3.27)$$

где j — номер фактора, $j = 1, \dots, k$;

i — номер опыта, $i = 1, \dots, N$.

Условие нормировки выражается соотношением

$$\sum_{i=1}^N [(\hat{x}_j)_i]^2 = N. \quad (3.28)$$

Ортогональность обеспечивается при выполнении равенств

$$\sum_{i=1}^N (\hat{x}_j)_i (\hat{x}_l)_i = 0; \quad j, l = 1, \dots, k; \quad j \neq l. \quad (3.29)$$

Если хотя бы одно из условий (3.27)-(3.29) не выполняется, то это означает, что матрица ПФЭ составлена неверно.

ПФЭ позволяет количественно оценить эффекты взаимодействия, т.е. учесть один из видов нелинейности. Для определения коэффициентов при взаимодействии факторов, как будет показано далее, пользуются правилом умножения столбцов матрицы планирования.

Однако из ПФЭ нельзя извлечь информацию о квадратичных членах. Нетрудно убедиться, что вектор-столбцы для квадратичных членов $(x_j)^2$ будут совпадать между собой. Легко доказать, что оценка коэффициента b_0 оказывается смешанной и справедливо соотношение

$$b_0 \rightarrow \beta_0 + \beta_{11} + \dots + \beta_{kk} \quad (3.30)$$

Выражение (3.30) означает, что коэффициент b_0 содержит эффекты, обусловленные как свободным членом β_0 , так и квадратичными членами $\beta_{jj} (j = 1, \dots, k)$.

Для оценок других коэффициентов справедливы соотношения

$$\left. \begin{array}{l} b_1 \rightarrow \beta_1; \\ b_2 \rightarrow \beta_2; \\ \dots \\ b_k \rightarrow \beta_k. \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

3.7. Планирование ПФЭ и его выполнение

Планирование ПФЭ с любым числом факторов k сводится к записи в матрицу всех неповторяющихся сочетаний уровней этих факторов. Чтобы сделать это быстро и безошибочно, рекомендуется такой прием (при варьировании факторов на двух уровнях). Записать числа от нуля до значения $(2^k - 1)$ в двоичной системе счисления, а затем цифре "ноль" поставить в соответствие знак "минус", а цифре "единица" – знак "плюс".

Пример 3.3. При значении $k = 4$ спланировать ПФЭ, предназначенный для получения линейной модели объекта.

Решение. Для получения модели вида (3.26) факторы достаточно варьировать на двух уровнях $(-1; +1)$. Общее число опытов ПФЭ при $k = 4$ определится как $N = 2^4 = 16$.

Запишем в таблицу числа от нуля до значения $(2^4 - 1 = 15)$ в двоичной системе счисления (табл.3.4, а).

Таблица 3.4

Получение матрицы плана ПФЭ с помощью записи чисел в двоичной системе счисления

а					б				
Число 0 ... (N-1)	Разряд для фактора				Номер опыта	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	\hat{x}_4
	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	\hat{x}_4					
0	0	0	0	0	1	-	-	-	-
1	0	0	0	1	2	-	-	-	+
2	0	0	1	0	3	-	-	+	-
3	0	0	1	1	4	-	-	+	+
4	0	1	0	0	5	-	+	-	-
5	0	1	0	1	6	-	+	-	+
6	0	1	1	0	7	-	+	+	-
7	0	1	1	1	8	-	+	+	+
8	1	0	0	0	9	+	-	-	-
9	1	0	0	1	10	+	-	-	+
10	1	0	1	0	11	+	-	+	-
11	1	0	1	1	12	+	-	+	+
12	1	1	0	0	13	+	+	-	-
13	1	1	0	1	14	+	+	-	+
14	1	1	1	0	15	+	+	+	-
15	1	1	1	1	16	+	+	+	+

Заменяя в полученной таблице (табл.3.4, а) цифру "нуль" знаком "минус", а цифру "единица" — знаком "плюс", получим требуемую матрицу ПФЭ (табл.3.4, б).

Нулевые уровни факторов x_{j0} выбирают обычно равными номинальным (средним) значениям, а интервалы варьирования λ_j — равными допускам (предельным отклонениям) соответствующих первичных параметров x_j . Для первичных параметров радиоэлектронных устройств и технологических процессов обычно имеет место условие

$$\Delta x_j \ll x_{j\text{ном}},$$

где Δx_j — отклонение (допуск) j -го первичного параметра от его номинального значения.

Поэтому в большинстве практических случаев даже линейная часть модели вида (3.24) оказывается пригодной для дальнейшего инженерного анализа объектов исследования.

Если линейная модель (линейная часть модели) оказывается непригодной, то ее дополняют членами вида $b_{jl}\hat{x}_j\hat{x}_l$ ($j, l=1, \dots, k; j \neq l$), причем в модель включают наиболее значимые эффекты и снова проверяют пригодность модели.

Любой эксперимент сопровождается погрешностями (ошибками воспроизводимости). Для оценки воспроизводимости осуществляют параллельные опыты, т.е. каждый i -й опыт матрицы планирования выполняют в конечном итоге несколько раз. Число серий n характеризует параллельность опытов матрицы планирования. Каждая серия должна включать N неповторяющихся опытов матрицы планирования. Число параллельных опытов, а следовательно, и число серий опытов n рекомендуется выбирать из условия $n \geq 2-5$.

Отметим, что оценка воспроизводимости опытов по сути сводится к расчету так называемой дисперсии воспроизводимости. Если эта дисперсия известна априорно или же каким-либо способом может быть оценена до проведения эксперимента, то параллельные опыты не обязательны.

С целью уменьшения влияния детерминированных факторов при реализации плана ПФЭ проводят так называемую рандомизацию, т.е. опыты каждой серии выполняют не по порядку, как они записаны в матрице планирования, а в случайной последовательности. Случайная последовательность опытов каждой серии должна выбираться по таблицам случайных чисел (табл.П1.4, прил.1). Делается это следующим образом. Выбирается произвольный фрагмент (участок) таблицы случайных чисел

и последовательно просматриваются его строки или столбцы с любого места. Последовательность (очередность) проведения опытов назначается в соответствии с очередностью появления чисел $1, \dots, N$ при просмотре участка таблицы. Числа, большие по значению, чем номера опытов, пропускаются. Повторяющиеся числа учитываются лишь первый раз, а далее также пропускаются.

Пример 3.4. Для исследования влияния на выходной параметр технологического процесса двух факторов (x_1 и x_2) используется ПФЭ типа " 2^2 " (табл.3.3). Так как опыты трудоемки, принято решение провести три серии параллельных опытов. Необходимо рандомизировать опыты каждой серии.

Решение. В таблице случайных чисел (табл.П1.4, прил.1) просмотрим однозначные случайные числа, принимая во внимание значения от 1 до 4 (так как в матрице всего 4 опыта). Просмотр начнем, например, с начала 1-й строки таблицы и будем двигаться по строкам. Нетрудно убедиться, что в первой серии опыт под номером 1 в матрице ПФЭ должен выполняться третьим. Аналогичным образом определяют очередность остальных опытов первой серии затем переходят к рандомизации опытов второй серии и т.д.

Полученная очередность опытов каждой серии с учетом рандомизации приведена в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Условия и очередность выполнения опытов ПФЭ типа " 2^2 " при $k = 2$

Номер опыта			Очередность выполнения опытов		
			серия 1	серия 2	серия 3
1	-	-	3	3	1
2	-	+	2	4	3
3	+	-	1	2	4
4	+	+	4	1	2

Выполнение ПФЭ состоит в последовательном проведении опытов каждой серии. В пределах серии опыты выполняются в очередности, полученной в результате рандомизации.

Для проведения опыта исследователь должен для всех факторов принудительно установить такие их натуральные (в своей размерности) значения, которые соответствуют кодированным значениям этих факторов, указанным в матрице планирования для выполняемого опыта. После этого нужно измерить значение отклика и записать результат в ту строку, в соответствии с которой устанавливались уровни факторов.

3.8. Статистическая обработка результатов ПФЭ

Будем предполагать, что модель получают в виде выражения

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j \hat{x}_j + \sum_{\substack{l,j=1 \\ l \neq j}}^k b_{jl} \hat{x}_j \hat{x}_l + \dots, \quad (3.32)$$

причем экспериментатора могут интересовать не все коэффициенты из ряда b_j и b_{jl} ; $j, l = 1, \dots, k$; $j \neq l$, а лишь какая-то их часть.

Общий вид плана и результатов эксперимента приведен в табл.3.6.

Таблица 3.6

Форма записи результатов опытов ПФЭ

Номер опыта	\hat{x}_1	...	\hat{x}_k	Значение отклика y_i в параллельных опытах		
				1-я серия	...	n -я серия
1	–		–	$(y_1)_1$...	$(y_1)_n$
2	–		+	$(y_2)_1$...	$(y_2)_n$
...						
N	+		+	$(y_N)_1$...	$(y_N)_n$

Последовательность выполнения статистической обработки и проверки пригодности для практики построенной модели такова.

1. Определяются среднее значение и дисперсия отклика в i -м опыте (строке) по формулам

$$M(y_i) = \frac{\sum_{u=1}^n (y_i)_u}{n}; \quad (3.33)$$

$$D(y_i) = \frac{\sum_{u=1}^n [(y_i)_u - M(y_i)]^2}{n-1}, \quad (3.34)$$

где $(y_i)_u$ — значение отклика в i -м опыте (строке) u -й серии опытов (см. табл.3.6);

n — число параллельных опытов (серий опытов).

2. Выполняется проверка однородности дисперсий $D(y_i)$. Для этого определяется расчетное значение критерия Кохрена

по формуле (при одинаковом числе повторных опытов в строках матрицы плана)

$$G_{\text{расч}} = \frac{D(y_i)_{\text{max}}}{\sum_{i=1}^N D(y_i)}. \quad (3.35)$$

С критерием $G_{\text{расч}}$ связаны степени свободы: для числителя $f_1 = n - 1$, для знаменателя $f_2 = N$.

Проверяется условие

$$G_{\text{расч}} < G_{\text{кр}}, \quad (3.36)$$

где $G_{\text{кр}}$ — критическое (табличное) значение критерия Кохрена, найденное для заданной доверительной вероятности γ при числе степеней свободы f_1 и f_2 (табл.П. 1.5 прил.1).

Если условие (3.36) выполняется, то дисперсии однородны и статистическая обработка продолжается. Если оно не выполняется, то дисперсии неоднородны. В этом случае требуются дополнительные параллельные опыты, или же необходимо повысить точность задания значений факторов и измерения значения отклика.

3. Определяется дисперсия воспроизводимости опытов (воспроизводимости отклика) по выражению

$$D(y) = \frac{\sum_{i=1}^N D(y_i)}{N}. \quad (3.37)$$

4. Подсчитываются оценки коэффициентов b_0, b_i, b_{jl} по формулам

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N M(y_i)}{N}; \quad b_j = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{x}_j)_i M(y_i)}{N}; \quad (3.38)$$

$$b_{jl} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_j)_i (\hat{x}_l)_i M(y_i)}{N}; \quad j, l = 1, \dots, k; j \neq l, \quad (3.39)$$

где $(\hat{x}_j)_i, (\hat{x}_l)_i$ — кодированные значения соответственно j -го и l -го факторов в i -м опыте (строке) матрицы плана.

5. Выполняются проверки значимости коэффициентов b_0, b_j, b_{jl} .

Для выполнения проверки можно построить доверительный интервал I_γ , соответствующий доверительной вероятности γ , для каждого коэффициента из числа b_0, b_j, b_{jl} .

$$I_\gamma = \{b^* - \Delta b; b^* + \Delta b\}, \quad (3.40)$$

где b — оценка коэффициента, рассчитанная по формулам (3.38)-(3.39);

Δb — возможная ошибка, возникающая от замены истинного значения коэффициента его оценкой.

Ошибка Δb полагается одинаковой для всех коэффициентов:

$$\Delta b = t_\gamma \sqrt{\frac{D(y)}{N(n-1)}}, \quad (3.41)$$

где t_γ — табличное значение критерия Стьюдента при доверительной вероятности γ и числе степеней свободы $f = N(n-1)$, с которым определялась дисперсия $D(y)$ (см. табл. П1.6 прил. 1).

Коэффициент (его расчетное значение) значим, если построенный доверительный интервал не содержит точку $b = 0$. В данном случае это равносильно условию

$$|b_v| > \Delta b; \quad v = 0, j, jl.$$

Если интервал I_γ содержит точку $b = 0$, или, что то же самое, $|b_v| \leq \Delta b$, то коэффициент b_v с доверительной вероятностью γ не значим, так как отличным от нуля он мог оказаться за счет погрешностей эксперимента.

6. Принимая во внимание только значимые коэффициенты, записывается безразмерный полином вида (3.24).

Выполняется проверка адекватности этой модели и делается заключение о ее пригодности для практики. Для этого вначале подсчитывается дисперсия адекватности по формуле

$$D_{\text{ад}}(y) = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2}{N-d} = \frac{\sum_{i=1}^N [y_{i\text{расч}} - M(y_i)]^2}{N-d}, \quad (3.42)$$

где Δy_i — разность между рассчитанным по полученной модели и экспериментальным значениями y в i -й строке (опыте);

d — число значимых коэффициентов модели;

$U_{i\text{расч}}$ — значение отклика по построенной модели в i -й строке (опыте).

Затем определяется расчетное значение критерия Фишера

$$F_{\text{расч}} = \frac{D_{\text{ад}}(y)}{D(y)}. \quad (3.43)$$

С критерием $F_{\text{расч}}$ связаны степени свободы: для числителя $f_1 = N - d$; для знаменателя $f_2 = N (n - 1)$.

Проверяется условие

$$F_{\text{расч}} < F_{\text{кр}}, \quad (3.44)$$

где $F_{\text{кр}}$ — критическое (табличное) значение критерия Фишера, найденное для заданной доверительной вероятности γ при числе степеней свободы f_1 и f_2 (табл. П1.7, прил. 1).

Если условие (3.44) выполняется, то построенная модель адекватна результатам эксперимента.

При невыполнении условия (3.44) модель неадекватна и пользоваться ею на практике нельзя.

7. Осуществляется переход к размерному полиному вида (3.23). Для этого необходимо в построенном полиноме вида (3.24) кодированные значения факторов $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ заменить соотношениями (3.25) и выполнить необходимые преобразования.

Заключение об адекватности модели (3.24), сделанное в п. 6, в равной степени относится и к модели вида (3.23). Поэтому можно вначале от модели (3.24) сделать переход к модели (3.23), а затем проверить ее адекватность. От этого вывод об адекватности модели не изменится.

Процесс статистической обработки результатов активных факторных экспериментов обычно выполняют на ЭВМ. С реализацией статистической обработки на ПЭВМ можно ознакомиться в работе [34].

Для лучшего понимания алгоритма статистической обработки ниже рассмотрен пример, в котором для иллюстрации использована обработка результатов “ручными” приемами.

Пример 3.5. Для исследования выходного параметра технологического процесса при числе первичных параметров $k = 2$ был спланирован ПФЭ типа 2^k и выполнено 3 серии параллельных опытов. Использовались следующие значения нулевых уровней и интервалов варьирования факторов (в условных единицах):

$$\begin{aligned} x_{10} &= 2,8; & \lambda_1 &= 0,25; \\ x_{20} &= 30; & \lambda_2 &= 5. \end{aligned}$$

Результаты эксперимента представлены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Результаты эксперимента

Номер опыта, i	\hat{x}_1	\hat{x}_2	Результаты параллельных опытов			$M(y_i)$	$D(y_i)$
			$(y_i)_1$	$(y_i)_2$	$(y_i)_3$		
1	-	-	8	7	9	8	1
2	-	+	20	22	18	20	4
3	+	-	17	16	15	16	1
4	+	+	30	34	32	32	4

Требуется построить модель, описывающую выходной параметр технологического процесса, проверить ее пригодность для практики и осуществить переход к размерному полиному.

Решение. По формулам (3.33) и (3.34) подсчитываем среднее значение и дисперсии в каждом опыте матрицы. Например, для опыта номер 1 имеем

$$M(y_1) = \frac{8+7+9}{3} = 8; \quad D(y_1) = \frac{(8-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2}{3-1} = 1.$$

Результаты расчета величин $M(y_i)$ и $D(y_i)$ внесены в табл.3.7. Применяя критерий Кохрена, нетрудно убедиться, что опыты воспроизводимы, так как при $\gamma=0,95$ (табл.П.1.5, прил.1)

$$G_{\text{расч}} = 0,4 < G_{\text{кр}} = 0,68.$$

По формуле (3.37) находим дисперсию воспроизводимости опытов:

$$D(y) = 2,5.$$

Для иллюстрации, используя формулы (3.38) и (3.39), определим коэффициенты как для линейных эффектов (b_i), так и для эффекта взаимодействия (b_{12}).

Имеем

$$b_0 = \frac{8+20+16+32}{4} = 19; \quad b_1 = \frac{(-1)8+(-1)20+(+1)16+(+1)32}{4} = 5;$$

Аналогично получаем $b_2=7$ и

$$b_{12} = \frac{(-1)(-1)8 + (-1)(+1)20 + (+1)(-1)16 + (+1)(+1)32}{4} = 1.$$

Проверяем значимость коэффициентов. По табл.П1.6 прил.1 при $\gamma=0,95$ и числе степеней свободы $f = N(n-1) = 4 \cdot 2 = 8$ находим $t_\gamma \approx 2,31$.

Определяем Δb доверительного интервала по формуле (3.41)

$$\Delta b = 2,31 \cdot \sqrt{\frac{2,5}{4(3-1)}} \approx 1,29.$$

Легко убедиться, что коэффициенты b_0 , b_1 , и b_2 значимы, а коэффициенты b_{12} незначимы, так как для него условие $|b_{12}| > \Delta b$ не выполняется.

Линейная модель запишется в виде

$$y = 19 + 5\hat{x}_1 + 7\hat{x}_2. \quad (3.45)$$

Проверим адекватность этой модели. По формуле (3.42) подсчитаем дисперсию адекватности. Для получения значений $y_{i\text{расч}}$, используемых в формуле (3.42), в записанную модель (3.45) подставляем кодированные значения факторов \hat{x}_j согласно матрице плана (табл.3.7). Например, для первого опыта (строки) матрицы имеем

$$y_{i\text{расч}} = 19 + 5(-1) + 7(-1) = 7.$$

Аналогично находим

$$y_{2\text{расч}} = 21; \quad y_{3\text{расч}} = 17; \quad y_{4\text{расч}} = 31.$$

Определяем дисперсию адекватности

$$D_{\text{ад}}(y) = \frac{(7-8)^2 + (21-20)^2 + (17-16)^2 + (31-32)^2}{4-3} = 4.$$

Расчетное значение критерия Фишера находим по выражению (3.43):

$$F_{\text{расч}} = \frac{4}{2,5} = 1,6.$$

По табл.П1.7 прил.1 для доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ по значениям числа степеней свободы $f_1 = N - d = 1$ и $f_2 = N(n - 1) = 8$ находим $F_{\text{кр}} \approx 5,32$.

Так как условие (3.44) выполняется ($1,6 < 5,32$), то линейная модель вида (3.45) адекватна результатам эксперимента и ею можно пользоваться на практике.

Осуществляем переход к размерному полиному, используя соотношение (3.25), значения нулевых уровней и интервалов варьирования факторами x_1 и x_2 .

Получаем

$$y = 19 + 5 \cdot \left(\frac{x_1 - 2,8}{0,25} \right) + 7 \left(\frac{x_2 - 30}{5} \right) = -79 + 20x_1 + 1,4x_2.$$

3.9. Дробный факторный эксперимент (ДФЭ)

При малом числе факторов ($k \leq 5$) оправданы опыты с перебором всех возможных сочетаний уровней факторов, т.е. полный факторный эксперимент (ПФЭ). В ПФЭ без учета параллельных опытов $N = 2^k$.

С увеличением k число опытов N растет очень быстро. Так, например, при $k = 10$ число опытов $N = 2^{10} = 1024$. При исследовании параметров радиоэлектронных устройств и технологических процессов число влияющих факторов может быть больше 5-7. Поэтому проблема сокращения числа опытов стоит достаточно остро. При этом задача заключается в том, чтобы не только уменьшить число опытов, но и получить достаточное количество информации об объекте исследования.

Уменьшить число опытов можно за счет использования избыточности ПФЭ. Число опытов в нем обычно больше, чем число значимых, интересующих исследователя коэффициентов.

Модель объекта в случае рассмотрения неполного кубического полинома имеет вид (при $k=3$)

$$y = b_0 + b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2 + b_3\hat{x}_3 + b_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2 + b_{13}\hat{x}_1\hat{x}_3 + b_{23}\hat{x}_2\hat{x}_3 + b_{123}\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3. \quad (3.46)$$

Матрица плана ПФЭ для получения этого уравнения приведена в табл.3.8 (столбцы $\hat{x}_1 - \hat{x}_3$).

Таблица 3.8

Матрица плана ДФЭ при $k=4$

Номер опыта	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	$\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}_4$
1	-	-	-	-
2	-	-	+	+
3	-	+	-	+
4	-	+	+	-
5	+	-	-	+
6	+	-	+	-
7	+	+	-	-
8	+	+	+	+

Предположим, что при выбранных интервалах варьирования поведение объекта с требуемой точностью описывается линейной моделью. В этом случае в уравнении (3.46) нелинейные члены $b_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2$, $b_{13}\hat{x}_1\hat{x}_3$, $b_{23}\hat{x}_2\hat{x}_3$, $b_{123}\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$, характеризующие взаимодействие факторов, могут не учитываться.

Поэтому вместо одного из взаимодействий (например, $b_{123}\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$) в план ПФЭ для исследования может быть введен

новый фактор \hat{x}_4 , записанный в последнем столбце матрицы (табл.3.8), причем знаки этого столбца должны соответствовать знакам произведения $\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$. Нетрудно установить, что полученная матрица (четыре фактора, восемь опытов) является половиной другого плана ПФЭ, а именно плана ПФЭ типа 2^4 , содержащего 16 опытов.

Таким образом, для оценки влияния четырех факторов $\hat{x}_1 \dots \hat{x}_4$ можно воспользоваться половиной ПФЭ типа 2^4 или, как говорят, полуреplikой (1/2 реплики от ПФЭ типа 2^4). Если за счет незначимых взаимодействий факторов вводят дополнительно 2 новых фактора, например \hat{x}_4 и \hat{x}_5 , то полученный план будет уже представлять 1/4 часть от плана ПФЭ типа 2^5 (так как новом плане пять факторов). Какую именно четвертую часть представляет этот план, зависит от знаков столбцов \hat{x}_4 и \hat{x}_5 , определяемых знаками взаимодействий факторов $\hat{x}_1 - \hat{x}_3$, вместо которых вводятся новые факторы \hat{x}_4 и \hat{x}_5 . При большом числе факторов могут использоваться реплики более высокой дробности: 1/8, 1/16, 1/32 и т.д.

Эксперимент, который реализует часть ПФЭ, называют дробным факторным экспериментом (ДФЭ). Дробные реплики принято обозначать как 2^{k-p} , где k — общее число факторов плана ДФЭ, а p — число факторов, введенных в план вместо незначимых взаимодействий. Так, например, дробная реплика, приведенная в табл.3.8, запишется в виде 2^{4-1} .

ДФЭ предусматривает проведение меньшего числа опытов по сравнению с ПФЭ, что является экономически более целесообразным. Опытов тем меньше, чем более высокой дробности выбирается реплика.

3.10. Планирование ДФЭ

Распространение описанной процедуры получения плана ДФЭ на матрицы любых размерностей позволяет сформулировать следующее правило.

Чтобы ввести в план исходного эксперимента новый фактор, не увеличивая числа опытов, его необходимо представить в виде вектор-столбца, характеризующего такое взаимодействие исходных факторов, влиянием которого можно пренебречь. Значения фактора, введенного в план эксперимента, должны изменяться в соответствии со знаками этого столбца [1, 14, 15].

Правильно построенный план ДФЭ точно так же, как и план ПФЭ, должен обладать свойствами симметричности, нормировки и ортогональности, т.е. для матриц плана должны выполняться условия (3.27)-(3.29).

Взаимодействие исходных факторов, вместо которого вводится новый фактор, принято называть генерирующим соотношением. В рассмотренном выше примере генерирующее соотношение равно $\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3$.

Если исходные факторы образуют несколько малозначимых взаимодействий, то в план исходного эксперимента могут быть введены несколько новых факторов. В этом случае имеются несколько генерирующих соотношений.

В ДФЭ оценки коэффициентов модели оказываются смешанными. Для определения характера смешивания коэффициентов можно воспользоваться **определяющим контрастом**. Определяющий контраст получают умножением генерирующего соотношения на фактор, который введен в план с помощью этого генерирующего соотношения. Для ДФЭ типа 2^{4-1} (см. табл.3. 8) определяющий контраст запишется как

$$(\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3) \hat{x}_4 = \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4.$$

Для определения характера смешивания коэффициентов регрессионной модели последовательно рассматривают произведения определяющего контраста на факторы и их произведения. Например, для коэффициентов b_1 и b_{12} получим

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234}; \quad (3.47)$$

$$b_{12} \rightarrow \beta_{12} + \beta_{34}. \quad (3.48)$$

Первая запись означает, что коэффициент b_1 содержит эффект как за счет фактора x_1 , так и за счет взаимодействия факторов x_2 , x_3 и x_4 . Вторая запись означает, что коэффициент b_{12} содержит эффект как за счет взаимодействия факторов x_1 и x_2 , так и за счет взаимодействия факторов x_3 и x_4 .

Из выражений вида (3.47), (3.48) следует равенство оценок коэффициентов b_1 и b_{234} , b_{12} и b_{34} .

ДФЭ преимущественно используется для получения линейных моделей. Однако, если по результатам ДФЭ в линейную модель вводится какое-либо взаимодействие, надо обязательно рассмотреть характер смешивания коэффициентов, чтобы не включить в модель по сути один и тот же коэффициент дважды, например b_{12} и b_{34} в случае справедливости записи (3.48).

При планировании ДФЭ важным является вопрос, какое или какие из взаимодействий следует выбрать для введения

вместо них в исходный план новых факторов. Этот вопрос становится тем сложнее, чем большее число факторов участвует в эксперименте.

Так, в случае четырех факторов при выборе полуреплики 2^{4-1} возможны уже восемь решений:

$$\begin{array}{cccc} \hat{x}_4 = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}_4 = \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 & \hat{x}_4 = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_3 & \hat{x}_4 = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 = -\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}_4 = -\hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 & \hat{x}_4 = -\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_3 & \hat{x}_4 = -\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 \end{array}$$

Если априорная информация о силе влияния эффектов взаимодействий отсутствует, то при введении в исходный план нового фактора выбирают для него вектор-столбец с большим порядком взаимодействия, так как обычно такие эффекты менее значимы, чем эффекты низших порядков. Если же имеется информация о силе эффектов взаимодействия, то она должна быть использована при выборе генерирующего соотношения.

При планировании ДФЭ обычно возникает вопрос, какой план ПФЭ, следовательно, и число факторов, следует выбирать в качестве исходного.

В конструировании и технологии РЭУ вначале получают линейные модели объектов исследования. Во многих случаях эти модели оказываются пригодными для дальнейшего инженерного анализа. Число опытов матрицы, необходимое для оценки коэффициентов линейной модели при k факторах, должно быть не менее чем $k + 1$ (коэффициенты при переменных $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ и свободный член). Кроме того, хотя бы один опыт (степень свободы) необходимо иметь для проверки адекватности линейной модели. Поэтому минимальное число опытов ДФЭ, необходимое для получения линейной модели и проверки ее адекватности, должно быть не менее чем $k + 2$. Зная значение величины $k + 2$, необходимо из ряда чисел 4, 8, 16, 32, ... выбрать ближайшее большее. Оно укажет минимальное число опытов плана ПФЭ, который может быть выбран в качестве исходного плана.

Пример 3.6. Необходимо построить план ДФЭ для исследования влияния на выходной параметр технологического процесса пяти факторов. Информация о силе эффектов взаимодействия факторов отсутствует.

Решение. Построим план ДФЭ применительно к получению линейной модели. Определим минимальное число опытов исходного плана ПФЭ. Так как $k + 2 = 7$, то оно равно восьми. Значит, в качестве исходного нужно выбрать план типа 2^3 , а для его построения использовать три фактора.

Информация о силе влияния факторов на выходной параметр технологического процесса отсутствует, поэтому выбираем

любые три фактора и строим план ПФЭ типа “ 2^3 ” (табл.3.9, столбцы \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3). При наличии информации следовало бы выбрать наиболее существенно влияющие факторы.

Таблица 3.9

Построение дробного факторного плана в случае пяти факторов

Номер опыта	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	$\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}_4$	$\hat{x}_1\hat{x}_2 \rightarrow \hat{x}_5$
1	–	–	–	–	+
2	–	–	+	+	+
3	–	+	–	+	–
4	–	+	+	–	–
5	+	–	–	+	–
6	+	–	+	–	–
7	+	+	–	–	+
8	+	+	+	+	+

Вместо эффектов взаимодействий осталось ввести в исходный план ПФЭ два фактора (\hat{x}_4 , \hat{x}_5). Так как информация о силе эффектов взаимодействия отсутствует, то один из факторов, например \hat{x}_4 вводим за счет взаимодействия высшего порядка, построенного из факторов в исходном плане ПФЭ, т.е. вместо произведения $\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3$. Второй фактор \hat{x}_5 вводим вместо одного из произведений $\hat{x}_1\hat{x}_2$, $\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_3$, и $\hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3$, например вместо произведения $\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2$.

Знаки столбцов \hat{x}_4 и \hat{x}_5 (табл.3.9) необходимо проставить с учетом знаков произведений, вместо которых были введены эти факторы.

Легко убедиться, что построенный план ДФЭ представляет собой 1/4 плана ПФЭ типа 2^5 . Если линейная модель, построенная по результатам опытов этого плана, окажется неадекватной, то в данном случае имеется возможность ввести один-два наиболее влияющих эффекта взаимодействия факторов и проверить адекватность новой модели.

При решении практических задач матрицы ДФЭ могут быть спланированы для числа факторов $k > 4$. Как было показано, исходный план должен иметь не менее чем $k + 2$ опытов. В случае трех факторов в качестве исходного плана должен быть принят план, имеющий восемь опытов, который представляет собой ПФЭ типа 2^3 . И все три фактора должны быть использованы в качестве исходных. Факторов, которые должны быть введены в исходный план ПФЭ вместо малозначимых взаимодействий, не остается.

3.11. Выполнение ДФЭ и обработка его результатов

Выполняются ДФЭ аналогично ПФЭ, т.е. при необходимости проводятся серии параллельных опытов, а принцип рандомизации опытов реализуется для опытов каждой серии.

Статистическая обработка результатов ДФЭ отличается от статистической обработки ПФЭ лишь числом и составом определяемых коэффициентов будущей математической модели.

При статистической обработке результатов ДФЭ обычно интересуются коэффициентами линейной модели $b_0, b_j; j = 1, \dots, k$. Если впоследствии выяснится, что она неадекватна результатам эксперимента, иногда есть возможность дополнить эту модель некоторыми нелинейными членами (членами с произведением факторов). Однако, в этом случае необходимо помнить, что максимальное число коэффициентов, включаемых в математическую модель, не должно превышать $N - 1$, где N — количество опытов матрицы ДФЭ.

Рассмотренные выше планы ПФЭ и ДФЭ относят к планам первого порядка (линейным планам), так как они позволяют найти отдельные оценки коэффициентов линейной регрессионной модели.

В ряде случаев в конструировании и технологии РЭУ могут использоваться планы второго порядка, с более чем двумя уровнями факторов для нахождения оценок коэффициентов регрессионной модели второго порядка (квадратичной).

С этими, а также некоторыми другими планами, используемыми на практике, можно ознакомиться в работах [1, 15].

Глава 4. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И СТАБИЛЬНОСТИ ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Серийнопригодность конструкций

Чтобы использовать конструкцию РЭУ по назначению, надо чтобы ее выходной параметр y лежал в определенных пределах от y_{\min} до y_{\max} , т.е. должно выполняться условие

$$y_{\min} \leq y \leq y_{\max}. \quad (4.1)$$

Из-за наличия производственного разброса параметров элементов в ряде случаев выходной параметр может выходить за пределы указанного диапазона. Свойство конструкции РЭУ иметь его в диапазоне, описанным выражением (4.1), непосредственно после сборки конструкции называют серийнопригодностью.

На практике серийнопригодность описывают процентом выхода годных к эксплуатации устройств непосредственно после процесса их сборки и регулировки, если последняя предусмотрена технологией. При этом предполагается, что комплектующие элементы исправны, а технология сборочных и регулировочных работ совершенна. Негодные изделия возникают вследствие неблагоприятного сочетания разброса

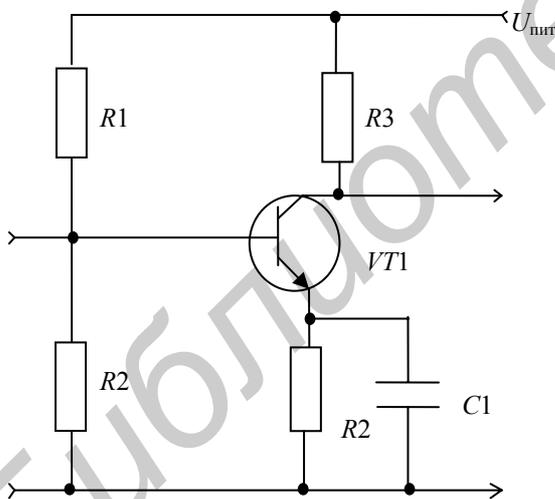


Рис.4.1. Усилительный каскад

вероятность

первичных параметров. Пример – усилительный каскад с использованием транзистора (рис.4.1.) За счет неудачного сочетания производственных отклонений параметров элементов (резисторов, транзистора, конденсатора) коэффициент усиления каскада K_y может выйти за пределы заранее оговоренных норм.

Для количественной оценки процента выхода годных к эксплуатации устройств используют

$$P(y_{\min} \leq y \leq y_{\max}). \quad (4.2)$$

Для ее нахождения в инженерной практике обычно используют гипотезу о нормальном законе распределения выходного параметра. С учетом этой гипотезы вероятность численно равна заштрихованной площади на рис.4.2.

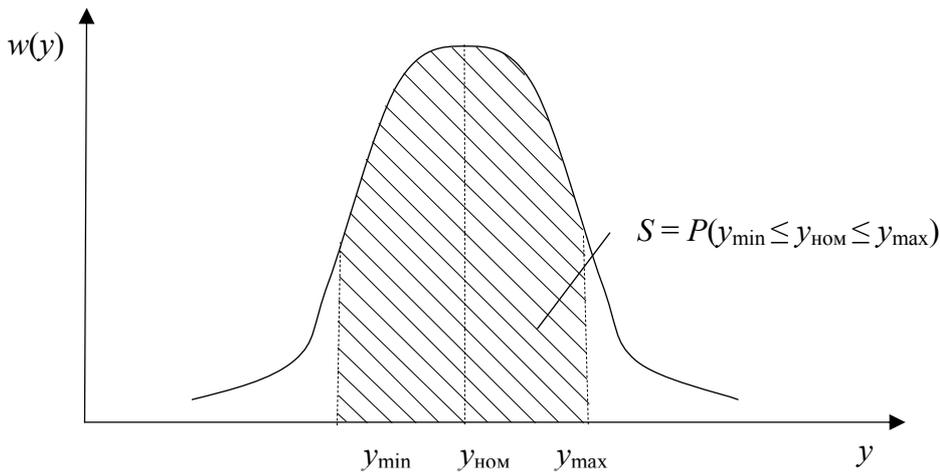


Рис.4.2. К вопросу об определении процента выхода годных к эксплуатации устройств

Указанную вероятность можно подсчитать как

$$P(y_{\min} \leq y \leq y_{\max}) = \Phi\left(\frac{y_{\max} - y_{\text{ном}}}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{y_{\min} - y_{\text{ном}}}{\sigma_y}\right), \quad (4.3)$$

где σ_y – среднее квадратическое отклонение выходного параметра y ; предполагается, что отклонения вызываются производственной погрешностью первичных параметров, а величина σ_y и есть характеристика отклонений параметра y , обусловленных производственной погрешностью первичных параметров;

Φ – функция стандартного нормального распределения.

4.2. Виды допусков, устанавливаемых на параметры

В общем случае под допуском понимают характеристику параметра, которая ограничивает (регламентирует) его предельные отклонения.

В конструировании и технологии РЭУ различают электрические и механические допуски в зависимости от того, на какие параметры они устанавливаются. Кроме того, различают производственный, ремонтный и эксплуатационный допуски.

Производственный допуск регламентирует предельные отклонения (разброс, погрешность) параметра, обусловленные чисто производственными причинами. Производственные отклонения параметров иногда называют также начальными отклонениями или технологическими отклонениями. По этой причине производственные допуски называют также *технологическими допусками*.

Эксплуатационный допуск регламентирует предельные отклонения параметра, обусловленные как чисто производственными причинами, так и действием факторов окружающей среды

и процессов старения. Значение эксплуатационного допуска на изделие обычно указывается в технической документации.

Ремонтный допуск, в отличие от эксплуатационного, не учитывает процессы старения. По значению этого допуска выполняется приемка изделий в условиях производства.

Допуски могут ограничивать разброс параметров, вызываемый действием отдельных эксплуатационных факторов. В зависимости от того какой фактор рассматривается, различают: температурный допуск, допуск старения (здесь фактор — время) и т.д.

Температурный допуск на параметр — это характеристика параметра, регламентирующая его разброс, обусловленный действием температуры в заданном диапазоне. Аналогично может быть дано определение и другим допускам (допуску старения и т.п.).

В КиТРЭУ используют как симметричные относительно номинального значения так и несимметричные допуски.

Примеры симметричных допусков: $R = 1 \text{ кОм} \pm 10\%$;
 $U = (5 \pm 0,25) \text{ В}$.

Примеры несимметричных допусков: $C = 1 \text{ мкФ} \begin{matrix} +30\% \\ -10\% \end{matrix}$;
 $l = 100 \begin{matrix} +0,5 \\ -0,1 \end{matrix} \text{ мм}$; $d = 10 \begin{matrix} +0,2 \\ -0,1 \end{matrix} \text{ мм}$.

На параметры могут устанавливаться как двухсторонние, так и односторонние допуски.

Приведенные выше примеры симметричных и несимметричных допусков являются также примерами двухсторонних допусков. В случае параметра d ограничение с левой стороны (снизу) также имеет место, но значение этой характеристики равно нулю и поэтому может не записываться.

Односторонние допуски устанавливают в тех случаях, когда одна из границ параметра (верхняя или нижняя) не играет принципиальной роли. Например, для биполярного транзистора требование к параметру $h_{21Э}$ может указываться в виде $h_{21Э} \geq 20$, а для коэффициента пульсации $K_{п}$ источника питания — в виде $K_{п} < K_{пдоп}$, где $K_{пдоп}$ — допустимое значение коэффициента пульсации.

На практике для задания допусков используются следующие характеристики (рис.4.3)

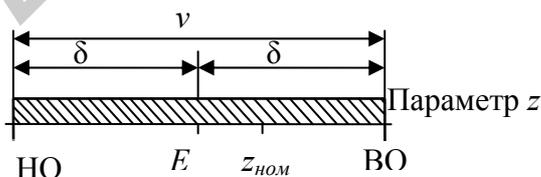


Рис.4.3. Параметры поля допуска

1. Нижнее (НО) и верхнее (ВО) предельные отклонения.
2. Ширина поля допуска v .
3. Половина поля допуска δ .
4. Координата середины поля допуска E .

Характеристики связаны между собой соотношениями

$$v = VO - HO,$$

$$\delta = v/2,$$

$$E = (HO + VO)/2,$$

$$VO = E + \delta,$$

$$HO = E - \delta.$$

Следует помнить, что характеристики v и δ всегда положительные. Координата E в общем случае может не совпадать с номинальным значением параметра.

Для задания допуска на параметр используется одна или несколько из перечисленных характеристик. Указанные характеристики могут быть заданы натуральными значениями параметра, либо абсолютными отклонениями параметра относительно номинального значения, либо относительными отклонениями, выраженными обычно в процентах относительно номинального значения параметра.

В качестве примера укажем с помощью перечисленных характеристик допуск на емкость конденсатора, для которого $C = 20 \text{ мкФ} \begin{smallmatrix} +30\% \\ -10\% \end{smallmatrix}$.

В табл. 4.1 приведены значения характеристик с учетом различных способов их задания и значения $C_{\text{ном}} = 20 \text{ мкФ}$.

Таблица 4.1

Пример записи характеристик, задающих допуски

Характеристика, задаваемая допуск	Способ задания характеристики		
	натуральным значением параметра C , мкФ	абсолютным отклонением ΔC , мкФ	относительным отклонением $\Delta C/C$, %
НО	18	-2	-10
ВО	26	+6	+30
v	8	8	40
δ	4	4	20
E	22	2	10

Для линейных и угловых размеров допуски задают, как правило, с помощью абсолютных отклонений соответствующих параметров.

4.3. Точность и стабильность параметров

4.3.1. Точность выходных параметров

Точность выходного параметра характеризует степень приближения его истинного значения к номинальному при отклонениях первичных параметров, соответствующих производственным погрешностям. Неточность выходных параметров обуславливается производственными отклонениями первичных параметров, иногда говорят начальными или технологическими отклонениями. Наличие производственных погрешностей первичных параметров — объективная закономерность [1, 6, 14 и др.], поэтому всегда может иметь место отклонение истинного значения выходного параметра от номинального.

На практике для оценки точности как свойства пользуются производственной погрешностью выходного параметра. В силу того, что производственные погрешности первичных параметров являются случайными, случайной является также и производственная погрешность выходного параметра. Отметим, что понятие случайности производственных погрешностей как первичных, так и выходных параметров, не означает "полный хаос". Значения параметров или их погрешностей всегда ограничиваются характеристиками, называемыми производственными допусками.

В практике нередко под точностью параметра понимают близость рассматриваемого параметра к его номинальному значению, не уточняя причин, которые вызвали отклонение от номинального уровня.

4.3.2. Стабильность выходных параметров

При эксплуатации РЭУ на них оказывают влияние фактор времени и различные внешние воздействия. Наиболее характерные виды воздействий — тепловые, механические, действие влаги. Под влиянием времени и внешних воздействий в физических структурах элементов РЭУ происходят явления, приводящие к изменению их параметров. Это вызывает изменение выходных параметров. Степень изменения выходных параметров под влиянием времени и воздействующих факторов оценивают таким свойством, как стабильность.

Стабильность — это свойство параметра сохранять свое значение неизменным (постоянным) относительно начального значения при воздействии факторов среды и с течением времени. Когда говорят “низкая стабильность выходного параметра”, то имеют в виду, что этот параметр заметно изменяется при воздействии указанных причин. В зависимости от того, какой дестабилизирующий фактор рассматривается при анализе, можно говорить о температурной стабильности, стабильности при действии

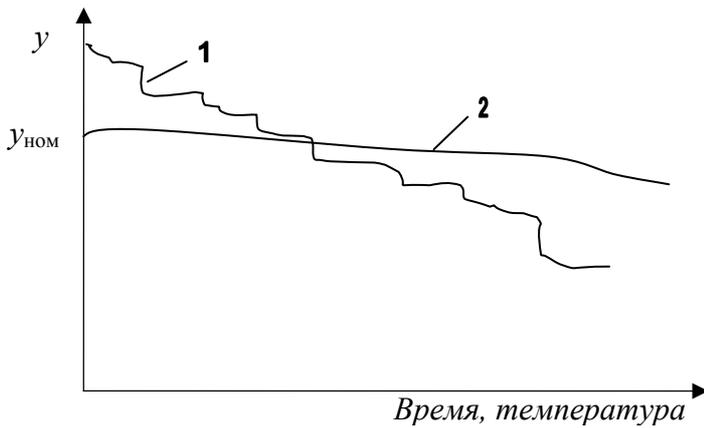


Рис.4.4. Реализации изменения выходного параметра: 1 — параметр относительно точен, но имеет низкую стабильность; 2 — параметр менее точен, но обладает заметно большей стабильностью; $y_{ном}$ — номинальное (среднее) значение выходного параметра

влаги и т.д. Если во внимание принимаются лишь процессы старения, то можно говорить о временной стабильности.

Высокая точность выходного параметра вовсе не означает его высокую стабильность и, наоборот, высокая стабильность выходного параметра не есть гарантия его точности (рис.4.4).

На практике стабильность выходных параметров обычно оценивают по отдельным эксплуатационным факторам. При

рассмотрении таких факторов, как температура и время, используют температурный допуск и допуск старения. При рассмотрении других факторов используют допуски, ограничивающие отклонения выходного параметра, обусловленные действием рассматриваемых факторов.

Совместную оценку точности и стабильности выходных параметров выполняют с помощью эксплуатационного допуска.

Рассмотренные свойства точности и стабильности характерны не только для выходных, но и для любых параметров вообще, в том числе и для первичных.

4.3.3. Описание точности и стабильности параметров элементов

Для описания точности параметров элементов на практике пользуются производственным допуском. Например, в записи на этикетке резистора “сопротивление 1 кОм $\pm 10\%$ ”, допуск 10% есть производственный допуск. Он характеризует начальные, или технологические отклонения сопротивления резистора.

Стабильность параметров элементов оценивают по отдельным эксплуатационным факторам. Важнейшие эксплуатационные факторы — температура и время. Для описания температурной и временной стабильности параметров элементов на практике пользуются температурными коэффициентами (ТК) и коэффициентами старения (КС).

ТК показывает, как изменяется параметр элемента с изменением температуры на один градус. Обычно ТК показывает

относительное изменение, выраженное в процентах. В этом случае размерность ТК: $[ТК] = \% / ^\circ\text{C}$.

КС показывает, как изменяется параметр элемента при эксплуатации элемента в течение 1 ч. Обычно для КС используется размерность: $[КС] = \% / \text{ч}$.

В силу объективно действующих причин ТК и КС параметров элементов являются случайными величинами. Поэтому для элементов данного типа можно говорить о среднем значении коэффициента и о степени рассеивания коэффициента. Практика показывает, что ТК и КС имеют распределение, близкое к нормальному закону (рис.4.5).

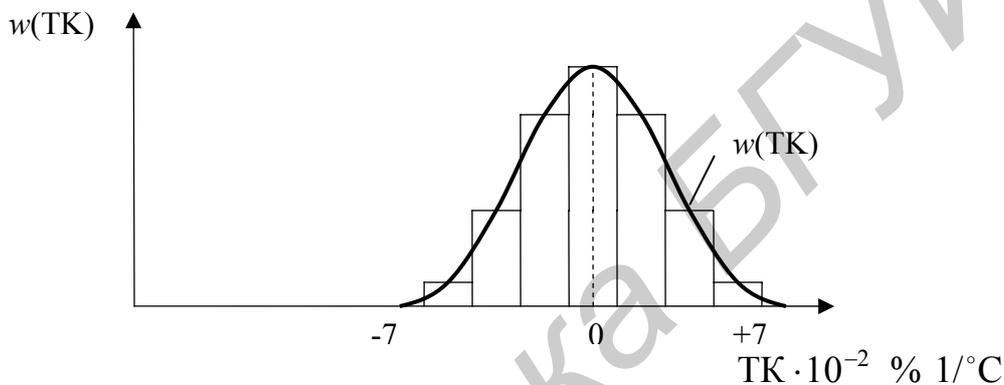


Рис.4.5. Гистограмма распределения температурного коэффициента резисторов типа МЛТ

Замечено, что ТК могут иметь различные значения для диапазона отрицательных ($+20^\circ\text{C}$ и ниже) и положительных ($+20^\circ\text{C}$ и выше) температур. Например, для резисторов типа МЛТ:

$$ТК = \pm 7 \cdot 10^{-2} \% / \text{град } \text{C} \text{ при } t = +20^\circ \dots +100^\circ \text{C};$$

$$ТК = \pm 12 \cdot 10^{-2} \% / \text{град } \text{C} \text{ при } t = -60^\circ \dots +20^\circ \text{C}.$$

В технической документации не редко информация о КС задается не в явном виде, а, например, в виде записи “изменение емкости конденсатора при эксплуатации в течение 2000 ч не более чем на минус 5%”. Из указанной записи легко определить численное значение КС. Предельные отклонения емкости составляют:

$$\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\min} = -5\%; \left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\max} = 0\%;$$

Тогда предельными отклонениями КС емкости будут значения:

$$КС_{\min} = \frac{(\Delta C/C)_{\min}}{t_{\text{экс}}} = \frac{-5}{2000} = -2,5 \cdot 10^{-3} \% / \text{ч};$$

$$КС_{\max} = \frac{(\Delta C/C)_{\max}}{t_{\text{экс}}} = \frac{0}{2000} = 0 \% / \text{ч}.$$

Принимая гипотезу о нормальном распределении КС, можно определить такие характеристики, как среднее значение и половина поля рассеивания КС.

$$M(KC) = \frac{KC_{\min} + KC_{\max}}{2} = -1,25 \cdot 10^{-3} \% \text{ 1/ч};$$

$$\delta(KC) = KC_{\max} - M(KC) = 0 - (-1,25 \cdot 10^{-3}) = 1,25 \cdot 10^{-3} \% \text{ 1/ч}.$$

4.4. Методы анализа точности выходных параметров

4.4.1. Уравнения производственных погрешностей выходных параметров

Пусть для РЭУ или технологического процесса известна математическая модель вида

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad (4.4)$$

где y — выходной параметр;
 x_1, \dots, x_n — первичные параметры;
 n — количество учитываемых первичных параметров.

Будем считать, что абсолютные производственные отклонения первичных параметров значительно меньше, чем сами параметры, т.е.

$$\Delta x_i \ll x_i.$$

Тогда можно записать

$$y + \Delta y \approx \varphi(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n). \quad (4.5)$$

Разложим уравнение (4.5) в ряд Тейлора в точке

$$X_0 = \{x_{10}, \dots, x_{n0}\},$$

где x_{i0} — среднее значение i -го первичного параметра; $i=1, \dots, n$.

Получим

$$y + \Delta y = \varphi(x_{10}, \dots, x_{n0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} (\Delta x_i)^2 + \dots \quad (4.6)$$

Вычтя из уравнения (4.6) уравнение (4.4) и отбросив члены 2-го и высшего порядков малости, получим

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i. \quad (4.7)$$

Это выражение называется уравнением абсолютной производственной погрешности выходного параметра. В приведенном уравнении Δx_i есть абсолютные производственные погрешности первичных параметров, $i = 1, \dots, n$.

Величины $\partial\varphi/\partial x_i$ называют абсолютными коэффициентами чувствительности, они показывают, как реагирует величина Δy на значение отклонений Δx_i .

Разделив уравнение (4.7) на выражение (4.4), получим уравнение относительной производственной погрешности выходного параметра

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{\varphi} \cdot \frac{x_i}{x_i} = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\Delta x_i}{x_i}. \quad (4.8)$$

При выполнении этой операции с целью выявления величины $\Delta x_i/x_i$ произведено умножение и деление на x_i .

Отношение

$$B_i = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{\varphi} \right]_0 \quad (4.9)$$

называют относительным коэффициентом чувствительности или **коэффициентом влияния**. Он характеризует степень влияния относительной погрешности первичного параметра на относительную погрешность выходного параметра. Нижний индекс “ноль” указывает, что после дифференцирования и до умножения на x_i/φ в полученное уравнение необходимо подставить средние значения x_1, \dots, x_n , если в выражении они еще останутся.

4.4.2. Методы определения производственных допусков на выходные параметры

Для количественной оценки точности выходных параметров можно использовать $M(y)$ — математическое ожидание (среднее значение) выходного параметра y и $\sigma(y)$ — среднее квадратическое отклонение выходного параметра y , причем $\sigma(y)$ характеризует разброс выходного параметра, обусловленный только производственными погрешностями первичных параметров (иногда говорят начальными или технологическими отклонениями).

В инженерной практике чаще пользуются характеристиками вида

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right), \sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right).$$

Они имеют тот же самый смысл, что и характеристики $M(y)$ и $\sigma(y)$, но относятся к $\Delta y/y$.

В промышленности вместо характеристики $\sigma(\Delta y/y)$ обычно применяют $\delta(\Delta y/y)$, представляющую собой половину поля рассеивания относительного производственного отклонения выходного параметра.

Характеристика $\sigma(\Delta y/y)$ используется в качестве половины поля производственного допуска.

Производственный допуск на выходной параметр может устанавливаться, исходя из служебного назначения радиоэлектронного устройства или технологического процесса. Но при инженерном проектировании часто поступают следующим образом.

Вначале определяют, какой производственный разброс выходного параметра будет иметь место при заданной вероятности. Затем полагают допуск численно равным значению этого разброса. Если заказчика значение допуска устраивает, то задача его установления решена, и допуск будет гарантироваться с такой вероятностью, с которой подсчитывался производственный разброс выходного параметра.

Производственный допуск на выходной параметр может рассматриваться как характеристика оценки его точности. В настоящее время в инженерной практике существует два основных метода определения производственных допусков на выходные параметры:

- а) расчетно-аналитический метод с учетом вероятностного рассеивания первичных параметров;
- б) метод Монте-Карло (метод статистических испытаний).

Кроме указанных методов иногда используют метод "min-max". Этот метод широко использовался ранее, но не оправдал себя, и сейчас его применяют в основном для поверочных расчетов (предварительных прикидок).

4.5. Определение производственного допуска методом "min-max"

Этот метод иначе называют "определением допусков, исходя из наихудшего случая рассеивания первичных параметров". Исходными данными являются:

- а) производственные (технологические) допуски первичных параметров, обычно в виде значений относительных производственных погрешностей $\Delta x_i/x_i$; $i = 1, \dots, n$;
- б) уравнение относительной производственной погрешности выходного параметра в виде

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \sum_{i=1}^n B_i \frac{\Delta x_i}{x_i},$$

- где B_i — коэффициент влияния i -го первичного параметра;
- $\Delta x_i/x_i$ — относительное производственное отклонение (разброс, погрешность) i -го первичного параметра;
- n — количество учитываемых первичных параметров.

Суть метода состоит в следующем.

Вначале определяется максимальное отклонение выходного параметра, которое он может принять в левой (отрицательной) стороне относительно номинального значения. Затем определяют максимальное отклонение выходного параметра в правой (положительной) стороне.

При подсчете указанных отклонений пользуются непосредственно уравнением относительной производственной погрешности выходного параметра, подставляя в него предельные (наихудшие) значения относительных отклонений первичных параметров. При этом предполагается, что известны или каким-либо образом найдены значения коэффициентов влияния B_i .

Допуск на выходной параметр устанавливается с учетом рассчитанных отклонений для левой и правой стороны. Проиллюстрируем это примером.

Пример 4.1. В качестве выходного параметра делителя напряжения (рис.4.6) будем рассматривать коэффициент деления K_d .

Не трудно убедиться, что для этого параметра справедливо

$$y \rightarrow K_d = \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} + 1.$$

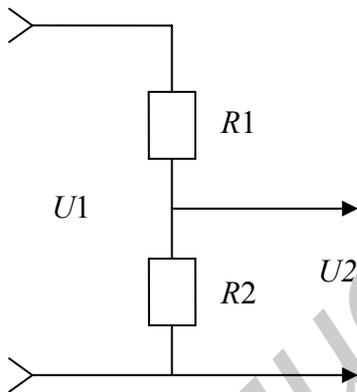


Рис.4.6. Электрическая схема делителя напряжения

Пусть информация о первичных параметрах (резисторах R_1, R_2) задана в виде:

$$R_1 = 3 \text{ кОм} \pm 10\% ;$$

$$R_2 = 2 \text{ кОм} \pm 10\% .$$

Установим, используя метод "min-max", допуск на коэффициент деления рассматриваемого делителя.

Решение. 1. Получаем уравнение относительной производственной погрешности для коэффициента деления.

Для этого вначале определим коэффициенты влияния резисторов R_1 и R_2 , воспользовавшись выражением (4.9).

Получим

$$B_{R_1} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{3}{3 + 2} = 0,6.$$

Аналогично

$$B_{R_2} = -\frac{R_1}{(R_2)^2} \cdot \frac{R_2 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} = -0,6.$$

Заметим, что коэффициенты влияния первичных параметров могут быть как положительными, так и отрицательными; как меньше единицы, так и больше единицы.

2. Пользуясь выражением (4.8) записываем уравнение относительной производственной погрешности выходного параметра (коэффициента деления K_d).

$$\frac{\Delta K_d}{K_d} = 0,6 \frac{\Delta R1}{R1} - 0,6 \frac{\Delta R2}{R2}.$$

3. С учетом предельных отклонений относительных производственных погрешностей сопротивлений резисторов, т.е. величин $\Delta R1/R1$ и $\Delta R2/R2$, находим максимальное значение относительной погрешности коэффициента деления в левой стороне (или, как говорят иначе, "в минимуме"). Получим

$$\left(\frac{\Delta K_d}{K_d} \right)_{\max-\min} = \left| \begin{array}{l} \Delta R1/R1 = -10\% \\ \Delta R2/R2 = +10\% \end{array} \right| = 0,6(-10) - 0,6(+10) = -12\%.$$

Обратим внимание, что максимальному отклонению выходного параметра "в минимуме" соответствуют относительное отклонение -10% для сопротивления резистора $R1$ и значение $+10\%$ — для сопротивления резистора $R2$.

4. Аналогично находим максимальное значение величины $\Delta K_d/K_d$ в правой стороне (иначе, "в максимуме"). Получим

$$\left(\frac{\Delta K_d}{K_d} \right)_{\max-\max} = 0,6(+10) - 0,6(-10) = +12\%.$$

Здесь использованы значения относительных отклонений $+10\%$ для параметра $R1$ и значение -10% для параметра $R2$.

5. Производственный допуск на коэффициент деления в окончательном виде может быть установлен, как

$$\Delta_{пр} = (-12...+12)\% = \pm 12\%.$$

Основным недостатком метода "min-max" является то, что он дает в большинстве случаев завышенное значение допуска, причем, допуск завышен тем больше, чем большее число первичных параметров входит в математическую модель устройства или процесса. Следствием этого являются неоправданно жесткие требования к диапазонам изменения (допускам) первичных параметров. Вероятность возникновения наихудшего случая, как правило, крайне мала и реальный разброс выходных параметров оказывается намного меньше, чем предсказанный по методу "min-max".

Достоинством метода является его простота. Если полученный допуск устраивает заказчика, то нет необходимости применять более сложные методы.

4.6. Анализ точности выходных параметров вероятностным методом

4.6.1. Выбор критериев оценки точности

Расчетно-аналитический метод определения производственных допусков с учетом вероятностного рассеивания первичных параметров кратко называют иногда вероятностным методом расчета допусков.

Обратимся к уравнению относительной производственной погрешности выходного параметра

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} \approx \sum_{i=1}^n B_i \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}},$$

где B_i – коэффициент влияния i -го первичного параметра.

Знак "пр" — подчеркивает производственный характер относительных погрешностей.

При вероятностном методе записанным уравнением воспользоваться сразу не представляется возможным, так как неясно, какие конкретно численные значения $(\Delta x_i/x_i)_{\text{пр}}$ необходимо подставлять в записанное уравнение в силу случайности этих величин.

В силу этого $(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ также оказывается случайной, и для количественного ее описания используют две характеристики:

$M(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ – математическое ожидание (среднее значение) относительной производственной погрешности выходного параметра;

$\sigma(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ – среднее квадратическое отклонение $(\Delta y/y)_{\text{пр}}$.

Указанные характеристики могут использоваться для оценки точности выходного параметра. В промышленности в качестве комплексной оценки точности выходных параметров используется производственный допуск на выходной параметр, который устанавливается на основе двух выше записанных характеристик.

4.6.2. Расчетные соотношения, используемые для оценки точности выходных параметров

Эти соотношения получают для характеристик $M(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ и $\sigma(\Delta y/y)_{\text{пр}}$. Используют записанное выше уравнение относительной производственной погрешности выходного параметра.

При получении инженерных формул принимают во внимание теоремы теории вероятностей, смысл которых можно выразить следующими формулами [7]:

$$M\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n M(x_i);$$

$$M(\alpha x) = \alpha M(x), \quad \alpha = \text{const};$$

$$D(x+z) = D(x) + D(z) + 2r_{xz}\sigma(x)\sigma(z),$$

- где x_i, x, z – случайные величины;
 n – количество случайных величин;
 r_{xz} – коэффициент парной корреляции между параметрами x и z .
 M – знак математического ожидания случайных величин;
 D, σ – знаки дисперсии и среднего квадратического отклонения случайных величин.

Последняя из формул записана для случая двух случайных величин, однако подобное справедливо и для случая любого их количества.

С учетом записанных выше формул, интересующие нас расчетные соотношения запишутся в виде

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n B_i M\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}}; \quad (4.10)$$

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2 \sigma^2\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^n r_{ij} B_i B_j \sigma\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}} \sigma\left(\frac{\Delta x_j}{x_j}\right)_{\text{пр}}}, \quad (4.11)$$

- где $M\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}}$ – математическое ожидание (среднее значение) относительной производственной погрешности i -го первичного параметра;
 $\sigma\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}}$ – среднее квадратическое отклонение относительной производственной погрешности i -го первичного параметра;
 B_i – коэффициент влияния i -го первичного параметра;
 r_{ij} – коэффициент парной корреляции между i -м и j -м первичным параметром.

Смысл $\sigma(\Delta x_j/x_j)_{\text{пр}}$ и B_j аналогичен вышеуказанным, но только для j -го первичного параметра.

Запись $i < j$ под знаком второй суммы означает, что берутся неповторяющиеся сочетания пар параметров x_i и x_j .

В промышленности при определении производственного допуска вместо характеристики $\sigma(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ пользуются характеристикой $\delta(\Delta y/y)_{\text{пр}}$, представляющей собой половину поля рассеивания относительной производственной погрешности выходного параметра. Эта величина с учетом выражения (4.11) может быть определена как

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = \rho \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2 \delta^2\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}} K_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^n r_{ij} B_i B_j \delta\left(\frac{\Delta x_j}{x_j}\right)_{\text{пр}} \delta\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{пр}} K_i K_j}, \quad (4.12)$$

где $\delta(\Delta x_i/x_i)_{\text{пр}}$ – половина поля рассеивания относительной производственной погрешности i -го первичного параметра (половина поля производственного допуска на первичный параметр);

ρ – коэффициент гарантированного обеспечения допуска; зависит от вероятности P_Γ , с которой гарантируется производственный допуск (табл. 4.2);

K_i – коэффициент относительного рассеивания i -го первичного параметра; показывает, в какой степени рассеивание i -го первичного параметра отличается от нормального закона распределения (табл. 4.3).

Смысл $\delta(\Delta x_j/x_j)_{\text{пр}}$, B_j , K_j аналогичен вышеуказанным, но только для j -го первичного параметра.

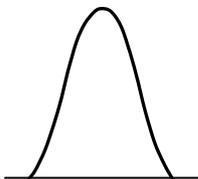
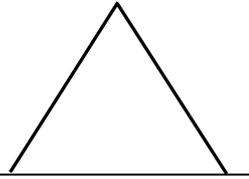
Запись $i < j$ под знаком второй суммы, как и ранее, означает, что берутся неповторяющиеся сочетания пар параметров x_i и x_j .

Таблица 4.2

Значение коэффициента ρ в зависимости от вероятности P_Γ

Вероятность P_Γ	0,80	0,90	0,95	0,99
Коэффициент ρ	0,43	0,59	0,65	0,86
Вероятность P_Γ	0,9973	0,999	0,9999	0,99999
Коэффициент ρ	1	1,1	1,3	1,47

Значение коэффициентов относительного рассеивания
первичных параметров

Закон распределения первичного параметра	Нормальный 	“Треугольника” 	Равномерный 
Коэффициент относительного рассеивания, K_i, K_j	1	1,225	$\sqrt{3} \approx 1,73$

В окончательном виде производственный допуск устанавливается как

$$\Delta_{\text{пр}} = \underbrace{M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}}_{\substack{\text{систематическая} \\ \text{составляющая} \\ \text{допуска}}} \pm \underbrace{\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}}_{\substack{\text{случайная} \\ \text{составляющая} \\ \text{допуска}}} \quad (4.13)$$

Сопоставляя уравнения (4.12) и (4.13) можно заметить, что половина поля рассеивания $(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ используется в качестве половины поля производственного допуска. Поэтому допуск $\Delta_{\text{пр}}$ гарантируется с такой вероятностью $P_{\text{г}}$, которая соответствует случайной составляющей допуска $\delta(\Delta y/y)_{\text{пр}}$.

4.6.3. Примеры анализа точности выходного параметра

Пример 4.2. Выполним анализ точности постоянной RC -цепи при следующих исходных данных:

$$R = 1 \text{ кОм} \pm 10\%; \quad C = 10 \text{ мкФ}_{-10\%}^{+30\%}.$$

Кроме того, установим производственный допуск на постоянную RC -цепи, который бы гарантировался с вероятностью $P_{\text{г}}=0,9973$. Используемые для RC -цепи элементы дискретные.

Решение. 1. В качестве выходного параметра в данном случае выступает постоянная цепи τ :

$$y \rightarrow \tau = RC.$$

2. Определим коэффициенты влияния параметров R и C . Воспользуемся формулой (4.9). В нашем случае $\varphi \rightarrow \tau$. Получим

$$B_R = C \frac{R}{RC} = 1; \quad B_C = R \frac{C}{RC} = 1.$$

3. Запишем исходные данные, необходимые для подсчета характеристик $M(\Delta\tau/\tau)_{\text{пр}}$, $\delta(\Delta\tau/\tau)_{\text{пр}}$. Воспользуемся рис.4.7.

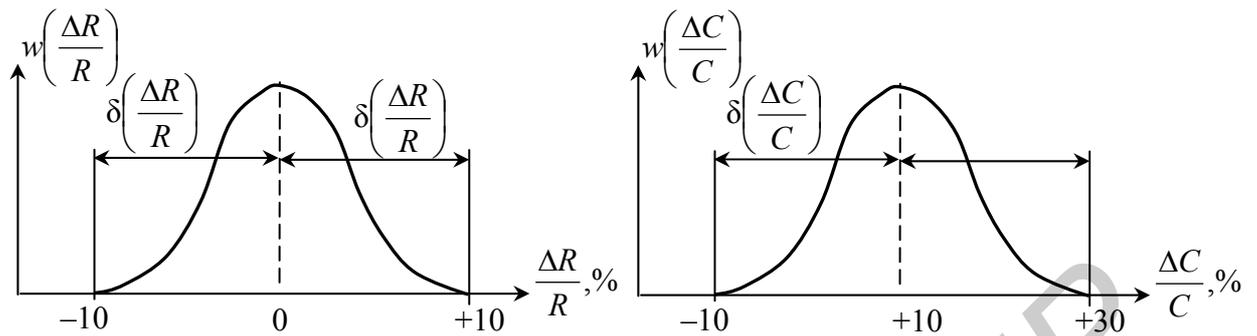


Рис.4.7. Кривые распределения параметров

Из условий примера и рис.4.7. находим

$$M\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 0; \quad \delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 10\%;$$

$$M\left(\frac{\Delta C}{C}\right) = \frac{\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\text{н}} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\text{в}}}{2} = \frac{-10 + (+30)}{2} = +10\%$$

$$\delta\left(\frac{\Delta C}{C}\right) = \left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\text{в}} - M\left(\frac{\Delta C}{C}\right) = 30 - 10 = 20\%$$

где $(\Delta C/C)_{\text{н}}$, $(\Delta C/C)_{\text{в}}$ – нижнее и верхнее предельные отклонения параметра $\Delta C/C$.

$K_{R1} = 1$, так как можно воспользоваться гипотезой о нормальном распределении параметра R . Аналогично $K_C = 1$.

Коэффициент $\rho = 1$, так как $P_r = 0,9973$. Коэффициент парной корреляции $r_{R,C} = 0$, так как элементы дискретные.

4. По выражению (4.10) рассчитываем значение $M(\Delta\tau/\tau)_{\text{пр}}$. Получим

$$M\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_{\text{пр}} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (+10) = +10\%.$$

5. По формуле (4.12) рассчитываем значение $\delta(\Delta\tau/\tau)_{\text{пр}}$. Получим

$$\delta\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)_{\text{пр}} = 1\sqrt{1^2 \cdot 10^2 \cdot 1^2 + 1^2 \cdot 20^2 \cdot 1^2} = \sqrt{500} \approx 22,4\%.$$

6. Записываем производственный допуск на постоянную RC -цепи.

$$\Delta_{\text{пр}} = (10 \pm 22,4\%) = (-12,4\% \dots + 32,4\%).$$

При этом допуск $\Delta_{\text{пр}}$ гарантируется с вероятностью $P_r=0,9973$.

Пример 4.3. Требуется установить производственный допуск на коэффициент деления делителя напряжения, выполненного на дискретных элементах и в интегральном исполнении. Электрическая схема, значения параметров элементов R_1 и R_2 соответствуют исходным данным примера 4.1 (разд.4.5).

Решение. 1. Выполним анализ для делителя, построенного на дискретных элементах.

Определим коэффициенты влияния параметров R_1 и R_2 .

Ранее было найдено (см. пример 4.1), что $B_{R_1}=0,6$, а $B_{R_2}=-0,6$.

Исходные данные для определения производственного допуска таковы:

$$M\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\text{пр}} = M\left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)_{\text{пр}} = 0; \quad \delta\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)_{\text{пр}} = \delta\left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)_{\text{пр}} = 10\%$$

Выберем вероятность $P_r = 0,9973$, тогда $\rho = 1$.

Допуски на сопротивления резисторов относительно велики, поэтому можно воспользоваться гипотезой о нормальном распределении параметров. Следовательно, коэффициенты относительного рассеивания $K_{R_1} = K_{R_2} = 1$.

Коэффициент корреляции $r_{R_1 R_2}$ принимаем равным нулю, так как резисторы дискретные.

Применяя формулы (4.10) и (4.12), находим

$$M\left(\frac{\Delta K_d}{K_d}\right)_{\text{пр}} = 0, \text{ так как } M\left(\frac{\Delta R_i}{R_i}\right) = 0, \quad i = 1; 2;$$

$$\delta\left(\frac{\Delta K_d}{K_d}\right)_{\text{пр}} = 1 \cdot \sqrt{0,6^2 \cdot 10^2 \cdot 1^2 + (-0,6)^2 \cdot 10^2 \cdot 1^2} = \sqrt{72} \approx 8,5\%.$$

Тогда

$$\Delta_{\text{пр}} = (0 \pm 8,5)\% = \pm 8,5 \%$$

2. Выполним анализ точности для случая интегрального исполнения делителя.

Известно, что при интегральной технологии резисторы получают в одном технологическом цикле, поэтому между параметрами резисторов существует тесная, близкая к функциональной зависимости, корреляционная связь.

Экспериментально установлено, что для интегральных резисторов коэффициент корреляции $r \rightarrow 0,85 \dots 0,95$. Примем в расчетах $r_{R_1, R_2} = 0,9$.

Остальные исходные данные такие же, как и для случая исполнения делителя на дискретных элементах:

$$M\left(\frac{\Delta R1}{R1}\right)_{\text{пр}} = M\left(\frac{\Delta R2}{R2}\right)_{\text{пр}} = 0; \delta\left(\frac{\Delta R1}{R1}\right)_{\text{пр}} = \delta\left(\frac{\Delta R2}{R2}\right)_{\text{пр}} = 10\%.$$

$K_{R1} = K_{R2} = 1$, ибо распределение параметров интегральных элементов, как правило, близко к нормальному закону. Как и ранее, примем $P_r = 0,9973$, тогда $\rho = 1$.

Как и в п.1, $M(\Delta K_d/K_d)_{\text{пр}} = 0$, так как допуски на параметры резисторов $R1$ и $R2$ симметричны.

По формуле (4.12) подсчитаем значение величины $\delta(K_d/K_d)_{\text{пр}}$.

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\Delta K_d}{K_d}\right)_{\text{пр}} &= \left| \begin{array}{l} \rho = 1, \text{ т.к.} \\ P_r = 0,9973 \end{array} \right| = \\ &= \sqrt{0,6^2 \cdot 10^2 \cdot 1^2 + (-0,6)^2 \cdot 10^2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0,9 \cdot 0,6 \cdot (-0,6) \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1} = \\ &= \sqrt{7,2} \approx 2,7 \%. \end{aligned}$$

3. В случае дискретного исполнения резисторов, допуск на коэффициент деления делителя установим в виде

$$\Delta_{\text{пр}} = M\left(\frac{\Delta K_d}{K_d}\right)_{\text{пр}} \pm \delta\left(\frac{\Delta K_d}{K_d}\right)_{\text{пр}} = (0 \pm 8,5) \%.$$

В случае интегрального исполнения делителя получим

$$\Delta_{\text{пр}} = (0 \pm 2,7) \% = \pm 2,7 \%.$$

Таким образом, корреляция параметров в данном случае сыграла положительную роль. При одной и той же гарантированной вероятности допуск на коэффициент деления интегрального делителя может быть установлен заметно жестче, чем в случае делителя на дискретных элементах.

4.7. Анализ точности выходных параметров методом Монте-Карло

4.7.1. Назначение метода

Этот метод иначе называют методом статистических испытаний.

Применительно к анализу точности выходных параметров позволяет оценить $M(y)$ — математическое ожидание (среднее значение) выходного параметра и $\sigma(y)$ — среднее квадратическое отклонение выходного параметра.

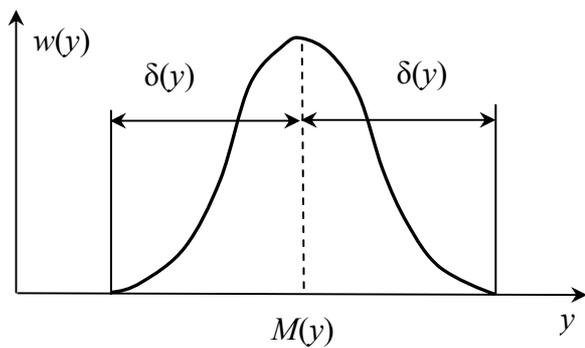


Рис.4.8. Кривая распределения выходного параметра

Зная $M(y)$ и $\sigma(y)$, можно назначить допуск на выходной параметр y , выраженный размерностью самого параметра или его относительным отклонением, отклонением, обычно выражаемым в процентах.

На практике при назначении допуска пользуются гипотезой о нормальном распределении выходного параметра (рис.4.8).

Тогда по "правилу трех сигм" половина поля допуска $\delta(y)$ на выходной параметр может быть записана как

$$\delta(y) \approx 3\sigma(y). \quad (4.14)$$

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{\delta(y)}{M(y)} 100\%. \quad (4.15)$$

Так как мы воспользовались "правилом трех сигм", то этот допуск будет гарантироваться с вероятностью $P_r = 0,9973$.

4.7.2. Сущность метода

Основу метода Монте-Карло составляет процесс получения случайных реализаций устройства или процесса [16]. Каждая реализация описывается значением выходного параметра рассматриваемого устройства или процесса. Ей соответствует определенное сочетание первичных параметров и новое значение выходного параметра.

Значения первичных параметров для той или иной реализации устанавливаются не произвольно, а с учетом их вероятностного описания, т.е. используют характеристики

$$M(x_i), \sigma(x_i), w(x_i); i=1, \dots, n,$$

где n – число первичных параметров, принимаемых во внимание при рассмотрении устройства или процесса.

Значения выходного параметра в каждой реализации определяются, как правило, новой комбинацией (сочетанием) первичных параметров (рис.4.9).

На рис.4.9 штриховкой обозначены поля допусков первичных параметров.

Получив N реализаций устройства или процесса, можно сформировать ряд

$$y_1, y_2, \dots, y_N.$$

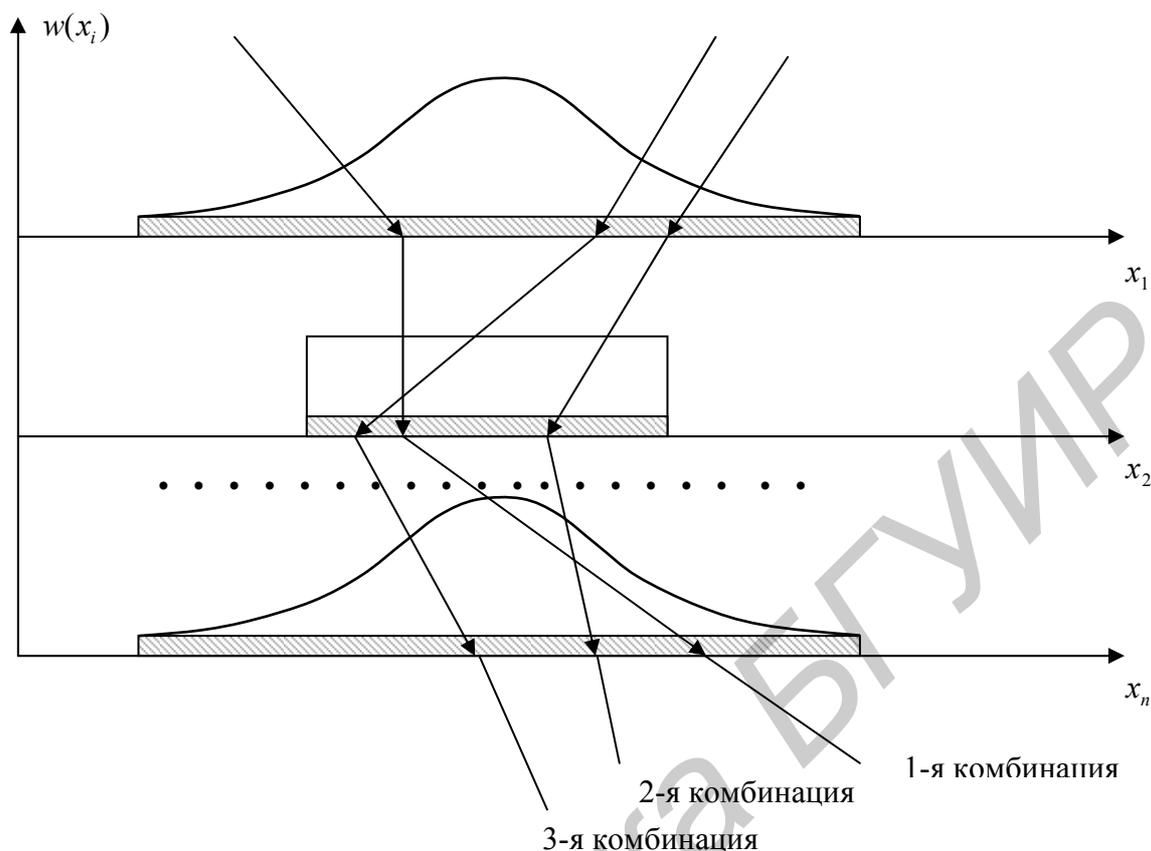


Рис.4.9. Получение случайной комбинации первичных параметров

Статистическая обработка этого ряда позволяет определить характеристики $M(y)$ и $\sigma(y)$.

При практической реализации метода Монте-Карло используют математическое или физическое моделирование устройств или процессов.

4.7.3. Метод Монте-Карло с использованием математического моделирования

При математическом моделировании используют модель устройства или процесса в виде выражения

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad (4.16)$$

где n — количество принятых во внимание первичных параметров.

Метод Монте-Карло с использованием математического моделирования реализуют, как правило, на ЭВМ. Исходными данными должны быть:

- а) количество первичных параметров n ;
- б) вероятностное описание первичных параметров, т.е. характеристики $M(x_i)$, $\sigma(x_i)$, $w(x_i)$; $i=1, \dots, n$;
- в) требуемое число реализации устройства или процесса N .

Последовательность действий на практике такова:

1. Уточняют требуемое число N . В инженерной практике для определения этой величины часто пользуются выражением

$$N \geq \frac{4[\sigma(y)]^2}{\Delta^2}, \quad (4.17)$$

где Δ — заданная до проведения моделирования допустимая погрешность (ошибка) в определении характеристики $M(y)$;

$\sigma(y)$ — среднее квадратическое отклонение выходного параметра.

Формула (4.17) предполагает, что по результатам испытаний математическое ожидание $M(y)$ с ошибкой Δ гарантируется с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$; число 4 в указанной формуле есть не что иное, как t_γ^2 , так как при $\gamma = 0,95$ $t_\gamma = 1,96 \approx 2$ (см. табл.2.3).

2. Используя генераторы случайных чисел (подпрограммы для ЭВМ), получают случайную комбинацию первичных параметров для первой реализации устройства или процесса.

3. Подставляют полученную комбинацию значений первичных параметров в математическую модель $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ и рассчитывают значение y , соответствующее первой реализации.

4. Действия, описанные в пунктах 2...3, повторяют N раз. В итоге получают ряд

$$y_1, y_2, \dots, y_N.$$

5. Выполняют статистическую обработку полученного ряда и находят характеристики $M(y)$, $\sigma(y)$.

6. При необходимости устанавливают значение допуска на выходной параметр.

При определении значения N предполагается известным $\sigma(y)$. Если же $\sigma(y)$ неизвестно, то поступают следующим образом. Задаются определенным числом реализаций устройства или процесса N_1 ($N_1 \geq 500 \dots 1000$).

Выполняют N_1 реализаций. Оценивают значение $\sigma(y)$ и проверяют условие (4.17). Если оно выполняется, то заданная точность в определении $M(y)$ уже достигнута. В противном случае увеличивают число реализаций процесса или устройства, корректируют значение $\sigma(y)$ и вновь по условию (4.17) проверяют, достигнута ли заданная точность.

4.7.4. Метод Монте-Карло с использованием физического моделирования

В тех случаях, когда трудно получить математическую модель $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ или же когда она не отражает действительной картины процесса (объекта), используют физические модели. При реализации метода Монте-Карло на таких моделях область рассеивания первичных параметров разбивается на 4-6 интервалов и в качестве представителя интервала выбирается значение, близкое к его середине (рис.4.10).

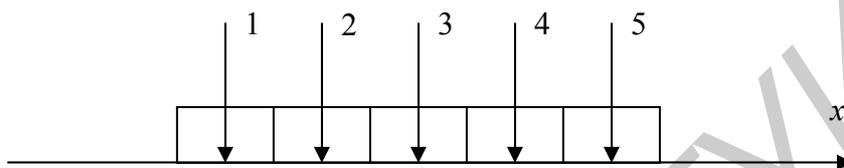


Рис.4.10. Разбиение диапазона рассеивания первичного параметра на интервалы

При физическом моделировании для получения случайной комбинации значений первичных параметров используются лишь эти 4-6 значений первичного параметра. Такого разбиения области рассеивания первичного параметра вполне достаточно для решения практических задач.

При физическом моделировании с учетом полученной случайной комбинации значений первичных параметров, осуществляют их изменение на физической модели и измеряют значение выходного параметра, соответствующее той или иной реализации объекта. Для таких РЭУ, как резисторы и конденсаторы, осуществить изменение параметров можно путем параллельного или последовательного включения дополнительных элементов такого номинального значения, чтобы суммарное значение интересующего параметра соответствовало значениям при моделировании (точкам 1-5 на рис.4.10).

Для некоторых элементов РЭУ (отдельные типы диодов и др.) осуществляют имитирование, т.е. подключают к рассматриваемому элементу элементы другого функционального назначения, приводящие к изменению параметра рассматриваемого элемента.

Если по каким-либо причинам воздействовать на изменение первичных параметров нельзя и не удастся имитировать изменение, то осуществляют случайную замену элементов устройства (модели).

При реализации метода Монте-Карло на физических моделях осуществляют замену таких элементов как транзисторы, интегральные микросхемы, импульсные трансформаторы и др.

4.8. Анализ стабильности выходных параметров радиоэлектронных устройств и технологических процессов

4.8.1. Стабильность выходных параметров и принцип ее оценки

Стабильность выходных параметров — это свойство РЭУ или ТП. Она характеризует степень неизменности (постоянство) выходного параметра в условиях воздействия факторов окружающей среды и процессов старения (фактор — время), причем подразумевается неизменность выходного параметра относительно своего начального значения в нормальных условиях эксплуатации.

Замечено, что применительно к многим видам РЭУ нестабильность, обусловленная такими факторами, как температура и время, составляет не менее 90...95% общей нестабильности выходных параметров, причем на долю температуры приходится до 60...70%. Поэтому, если изделие эксплуатируется не в каких-то специфических условиях, то в инженерных расчетах, как правило, принимают во внимание эти два важнейших фактора — температуру и время.

Известно, что для количественной оценки температурной и временной стабильности первичных параметров (параметров элементов, каскадов и т.п.) могут использоваться температурные коэффициенты и коэффициенты старения. В принципе подобные коэффициенты можно было бы использовать и для количественной оценки температурной и временной стабильности выходных параметров РЭУ и ТП. Однако в промышленности для этого пользуются температурными допусками, допусками старения и т.д., в зависимости от того, влияние каких факторов необходимо описать.

В основу оценки стабильности выходного параметра положено уравнение относительной погрешности, обусловленной действием того или иного эксплуатационного фактора.

Предположим, что известна математическая модель РЭУ или ТП в виде выражения

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Тогда, по аналогии с получением уравнения относительной производной погрешности выходного параметра, можно получить уравнение относительной погрешности выходного параметра, обусловленной действием эксплуатационных факторов. Вид интересующего нас уравнения таков:

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_j = \sum_{i=1}^n B_i \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_j, \quad (4.18)$$

где B_i — коэффициент влияния i -го первичного параметра;
 $(\Delta x_i/x_i)_j$ — относительное изменение i -го первичного параметра, вызываемое действием j -го эксплуатационного фактора.

Индекс j подчеркивает конкретный эксплуатационный фактор. Приведенное уравнение относительной погрешности использовать сразу для оценки стабильности выходных параметров не представляется возможным в силу случайного характера $(\Delta x_i/x_i)_j$. Однако это уравнение позволяет получить рабочие формулы, используемые при определении температурных допусков, допусков старения и т.п.

4.8.2. Определение температурных допусков и допусков старения

Здесь и далее при анализе стабильности выходных параметров примем во внимание два важнейших фактора: температуру и время. Экспериментально установлено, что температурные и временные изменения первичных параметров носят случайный характер и сопровождаются различного рода выбросами (флуктуациями), как показано на рис.4.11.

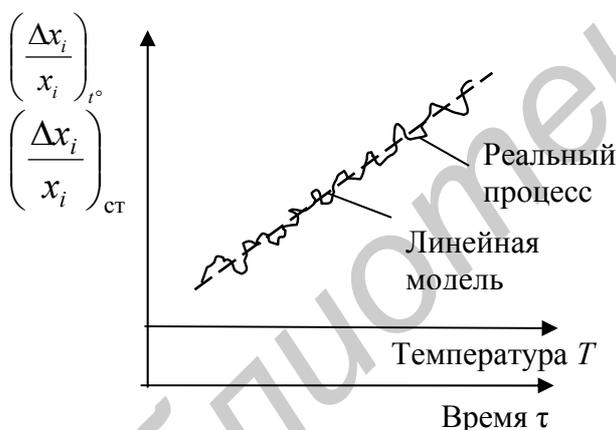


Рис.4.11. Случайный характер температурных и временных изменений первичных параметров

Чтобы выполнять инженерные расчеты, указанные изменения принимают за квазидетерминированные процессы, в которых прослеживается тенденция изменения параметров, и аппроксимируют какими-либо математическими моделями. В инженерной практике популярна аппроксимация линейными моделями. С учетом линейной аппроксимации можно записать

$$\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{t^\circ} = \alpha_i \Delta t; \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)_{\text{ст}} = c_i \Delta \tau, \quad (4.20)$$

где α_i — температурный коэффициент i -го первичного параметра, показывающий, как изменяется первичный параметр при изменении температуры на один градус; обычно имеет размерность [%/град С];

$$\Delta t = t_{\text{ср}} - 20^\circ \text{С},$$

где $t_{\text{ср}}$ – температура окружающей среды;

c_i – коэффициент старения i -го первичного параметра; характеризует степень изменения первичного параметра за каждый час времени эксплуатации, имеет размерность [% / ч];

$\Delta\tau$ – рассматриваемый интервал времени.

Так как для РЭУ обычно задается диапазон рабочих температур, то условно различают две их области: положительную и отрицательную (рис.4.12).

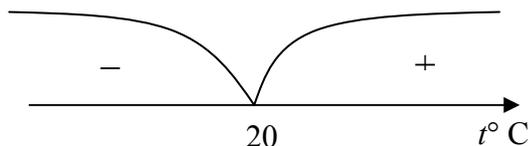


Рис.4.12. Положительная и отрицательная области температур

В инженерных расчетах в качестве $t_{\text{ср}}$ принимают: для отрицательной области – наименьшую, а для положительной – наибольшую из возможных температур.

Следует помнить, что значения коэффициентов α_i для этих областей могут отличаться. Например, для ре-

зисторов типа МЛТ:

$$\alpha_i = \pm 7 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ\text{C} \text{ при } t = +20 \dots 100^\circ\text{C};$$

$$\alpha_i = \pm 12 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ\text{C} \text{ при } t = -60 \dots +20^\circ\text{C}.$$

В таких случаях анализ температурной стабильности выходных параметров будет идти по двум ветвям, а окончательное решение о температурном допуске должно приниматься с учетом допуска как для области отрицательных, так и для области положительных температур.

В справочной литературе коэффициенты старения c_i иногда в явном виде не указываются. Приводятся лишь изменения первичного параметра, приходящиеся, например, на 5000 ч.

Подставив (4.19) и (4.20) в уравнение относительных погрешностей, обусловленных действием j -го эксплуатационного фактора, можно записать

$$\left(\frac{\Delta y}{y} \right)_{t^\circ} = \sum_{i=1}^n B_i \alpha_i \Delta t = \Delta t \sum_{i=1}^n B_i \alpha_i = \Delta t \cdot \alpha_\Sigma; \quad (4.21)$$

$$\left(\frac{\Delta y}{y} \right)_{\text{ст}} = \sum_{i=1}^n B_i c_i \Delta \tau = \Delta \tau \sum_{i=1}^n B_i c_i = \Delta \tau \cdot c_\Sigma \quad (4.22)$$

В выражениях (4.21) и (4.22) величины α_Σ и c_Σ , могут рассматриваться соответственно как суммарный температурный коэффициент и суммарный коэффициент старения функционального узла при условии, что первичными параметрами являлись параметры элементов.

В этих выражениях случайными являются α_Σ и c_Σ , поэтому для их описания используют две характеристики: математическое

ожидание и половину поля рассеивания соответствующего коэффициента.

Математические выражения для определения характеристик $M(\alpha_\Sigma)$ и $\delta(\alpha_\Sigma)$ могут быть получены с использованием теорем теории вероятностей по аналогии с получением характеристик $M(\Delta y/y)_{\text{пр}}$, $\delta(\Delta y/y)_{\text{пр}}$, используемых при анализе точности выходных параметров (см. подразд.4.6.2):

$$M(\alpha_\Sigma) = \sum_{i=1}^n B_i M(\alpha_i); \quad (4.23)$$

$$\delta(\alpha_\Sigma) = \rho \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2 \delta^2(\alpha_i) K_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^n r_{ij} B_i B_j \delta(\alpha_i) \delta(\alpha_j) K_i K_j}, \quad (4.24)$$

где $M(\alpha_i)$ – математическое ожидание (среднее значение) температурного коэффициента i -го первичного параметра;

$\delta(\alpha_i)$, $\delta(\alpha_j)$ – половина поля рассеивания температурного коэффициента i -го и j -го первичных параметров;

B_i , B_j – коэффициенты влияния i -го и j -го первичных параметров;

K_i , K_j – коэффициенты относительного рассеивания температурных коэффициентов i -го и j -го первичных параметров (см. табл.4.3);

ρ – коэффициент гарантированного обеспечения допуска; зависит от вероятности, с которой гарантируется допуск (см. табл.4.2);

r_{ij} – коэффициент парной корреляции между температурными коэффициентами i -го и j -го первичных параметров.

Запись $i < j$ под знаком второй суммы означает, что берутся неповторяющиеся сочетания первичных параметров, причем $i \neq j$.

Формулы для расчета характеристик $M(\alpha_\Sigma)$ и $\delta(\alpha_\Sigma)$ могут быть получены из выражений (4.23) и (4.24) путем замены величины α_Σ на c_Σ , а величин α_i на c_i . Смысл параметров в новых формулах аналогичен параметрам формул (4.23) и (4.24).

Температурный допуск Δ_t и допуск старения $\Delta_{\text{ст}}$ определяют как

$$\Delta_t = [M(\alpha_\Sigma)_\pm \pm \delta(\alpha_\Sigma)_\pm]; \quad (4.25)$$

$$\Delta_{\text{ст}} = \Delta\tau [M(\alpha_\Sigma) \pm \delta(c_\Sigma)]. \quad (4.26)$$

Нижние индексы \pm в выражении (4.25) означают, что температурный допуск Δ_t определяется отдельно для областей отрицательных (Δ_{t-}) и положительных (Δ_{t+}) температур, а окончательное решение о температурном допуске принимается на основе анализа этих значений.

Температурный допуск Δ_t и допуск старения $\Delta_{ст}$ гарантируется с такой вероятностью, с которой подсчитывались половины полей рассеивания коэффициентов α_Σ и c_Σ .

Пример 4.4. Предположим, что с использованием формул (4.23) и (4.24) для выходного параметра узла получены значения характеристик $M(\alpha_\Sigma)$ и $\delta(c_\Sigma)$ для области положительных температур:

$$M(\alpha_\Sigma)_+ = -5 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ\text{C}; \quad \delta(\alpha_\Sigma)_+ = 9 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ\text{C};$$

для области отрицательных температур:

$$M(\alpha_\Sigma)_- = -4 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ\text{C}; \quad \delta(\alpha_\Sigma)_- = 12 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ\text{C};$$

Требуется определить значение температурного допуска на выходной параметр узла при его работе в диапазоне температур от -10 до $+40^\circ\text{C}$.

Решение. Определяем пределы температурных отклонений выходного параметра, пользуясь формулой (4.25). Получим для области положительных температур при $t = +40^\circ\text{C}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{t+} &= \Delta t \cdot \alpha_{\Sigma+} = \Delta t [M(\alpha_\Sigma)_+ \pm \delta(\alpha_\Sigma)_+] = \\ &= (40 - 20) \cdot (-5 \pm 9) \cdot 10^{-2} = (-1,0 \pm 1,8)\% = (-2,8... + 0,8)\%; \end{aligned}$$

для области отрицательных температур при $t = -10^\circ\text{C}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{t-} &= \Delta t \cdot \alpha_{\Sigma-} = \Delta t [M(\alpha_\Sigma)_- \pm \delta(\alpha_\Sigma)_-] = \\ &= (-10 - 20) \cdot (-5 \pm 9) \cdot 10^{-2} = (1,2 \pm 3,6)\% = (-2,4... + 4,8)\%. \end{aligned}$$

Тогда значение общего температурного допуска определится как

$$\Delta_t = (-2,8... + 4,8)\%.$$

Нетрудно установить, что

$$\Delta_t = (-2,8... + 4,8)\% = (1 \pm 3,8)\%.$$

Следовательно, среднее значение $M(\Delta y/y)_t$ и половина поля рассеивания $\delta(\Delta y/y)_t$ относительной температурной погрешности выходного параметра будут иметь значения

$$M(\Delta y/y)_t = +1\%; \quad \delta(\Delta y/y)_t = 3,8\%.$$

Подробный пример определения температурного допуска на выходной параметр приведен выше (см. подразд.4.9.3) при рассмотрении примера установления эксплуатационного допуска.

На рис.4.13 пояснено действие температуры. Из него видно, что при каждой конкретной температуре из заданного диапазона ($-10\dots+40^\circ\text{C}$) плотность распределения относительной температурной погрешности $(\Delta y/y)_t$ примерно соответствует нормальному закону распределения. При изменении температуры в любую сторону от значения $+20^\circ\text{C}$ происходит смещение и увеличение поля рассеивания относительных температурных погрешностей. Так, в рассмотренном примере при изменении температуры от -10 до $+40^\circ\text{C}$ среднее значение температурной погрешности перемещается от $+1,2$ до $-1,0\%$, а половина поля рассеивания увеличивается от нуля при $t = +20^\circ\text{C}$ до $3,6\%$ при $t = -40^\circ\text{C}$.

Результирующее распределение температурных погрешностей при определенном диапазоне температур ($-10\dots+40^\circ\text{C}$) показано на рис.4.13 (кривая *a*). Правая и левая ветви образованы кривыми нормального распределения, но с различными значениями параметра σ . При определении допусков требуется установить пределы изменения выходных параметров РЭУ или

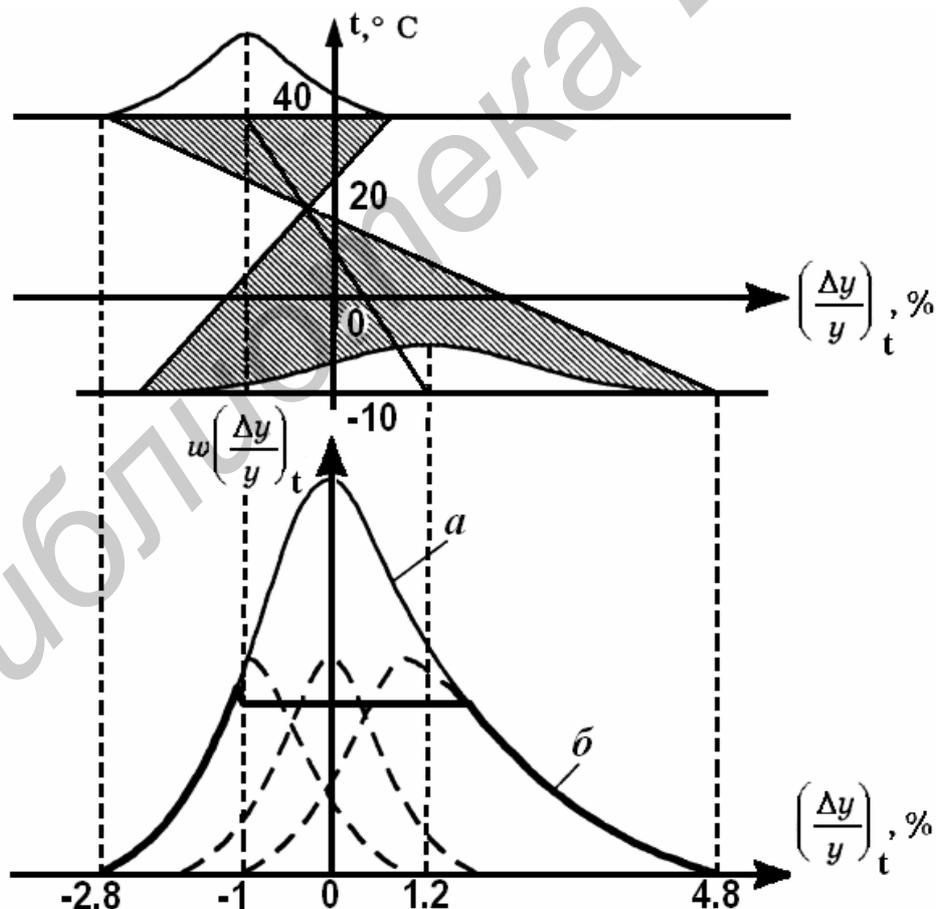


Рис. 4.13 Законы распределения относительных температурных погрешностей выходных параметров РЭУ: *a*—реальный закон; *b*—аппроксимирующий закон

технологических процессов под воздействием температуры, а не закон распределения температурных погрешностей. Из примера видно, что для такого расчета достаточно лишь знать количественные характеристики нормальных распределений при крайних рабочих температурах. Это позволяет для простоты аппроксимировать реальный закон распределения относительных температурных погрешностей выходного параметра композицией закона равной вероятности и двух законов нормального распределения с различными значениями σ (рис.4.13, кривая б).

Отметим, что в основу определения температурного допуска было положено предположение о линейном изменении первичных параметров под воздействием температуры.

В работе [17] показано, что в случае, когда температурные изменения первичных параметров нелинейны и в заданном диапазоне температур выше, нежели при линейном характере изменения, то для исключения ошибок при определении температурных допусков необходимо температурные коэффициенты первичных параметров определить по формуле

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)_{\max}}{\Delta t_{\text{РЭУ}}}, \quad (4.27)$$

где $(\Delta x_i/x_i)_{\max}$ — максимальное значение относительного изменения первичного параметра x_i в крайних точках рабочего диапазона температур, указанное в документации на элемент;

$\Delta t_{\text{РЭУ}}$ — максимальный перепад температур относительно нормальной ($+20^\circ \text{C}$) для РЭУ, в котором применяется элемент, характеризуемый первичным параметром x_i .

Ясно, что должно выполняться условие

$$\Delta t_{\text{эл}} > \Delta t_{\text{РЭУ}},$$

где $\Delta t_{\text{эл}}$ — максимальный перепад температур относительно нормальной, указанный в технических условиях на элемент.

Во время эксплуатации РЭУ (ТП) под воздействием непрерывно меняющейся температуры и других факторов среды происходит смещение и изменение полей рассеивания суммарных погрешностей выходных параметров. В этом случае суммарный закон распределения выходных параметров случаен и может принимать любую форму. Однако для определения эксплуатационного допуска, как показано в работе [17], важно знать лишь возможные пределы изменения выходных параметров под воздействием эксплуатационных факторов и старения.

4.9. Определение эксплуатационных допусков

4.9.1. Исходные предпосылки

Эксплуатационный допуск обычно устанавливают на основе знания производственного допуска, температурного допуска, допуска старения и других в зависимости от того, какие факторы принимаются во внимание.

Для аппаратуры, работающей в обычных условиях, в большинстве случаев принимают во внимание два важнейших фактора — температуру и старение (время). Если аппаратура должна функционировать в специфических условиях, то факторы, характеризующие эти условия, должны быть приняты во внимание в первую очередь.

Аналогично находят ремонтный допуск, только при этом не учитывают допуск старения. Так как эксплуатационный и ремонтный допуски ограничивают разброс, вызванный действием совокупности факторов, то их иногда называют суммарными допусками.

При эксплуатации РЭУ под воздействием меняющихся сочетаний дестабилизирующих факторов происходит смещение и изменение поля рассеивания суммарного разброса выходного параметра. В этом случае закон распределения суммарной погрешности выходного параметра оказывается случайным и в зависимости от сочетания эксплуатационных факторов может принимать любую форму. Однако, для определения эксплуатационных и ремонтных допусков важно лишь знать предельный разброс выходного параметра. Поэтому при расчетах суммарных допусков необходимо учесть возможные сочетания эксплуатационных факторов, наиболее неудачные с точки зрения разброса выходного параметра.

Эксплуатационный допуск может рассматриваться в качестве комплексной оценки точности и стабильности выходных параметров.

Его значение обычно включается в техническую документацию на устройство или технологический процесс.

В дальнейшем, при иллюстрации методики установления эксплуатационного допуска примем во внимание два важнейших эксплуатационных фактора — температуру и старение.

4.9.2. Методика определения эксплуатационного допуска

Рекомендуемая последовательность действий такова.

1. Определяют максимальные пределы смещения среднего значения суммарной относительной погрешности выходного параметра, относительно среднего значения производственного

допуска. Суммирование ведется отдельно для положительных и отрицательных средних значений допусков старения и температурных допусков.

Применять общее суммирование с компенсацией средних значений здесь будет неправильным, так как компенсация характерна лишь для частных случаев (отдельных временных или температурных сечений).

Расчет ведут по формулам

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+} = M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}+} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{t+} \quad (4.29)$$

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-} = M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}-} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{t-} \quad (4.30)$$

где $M(\Delta y/y)_{\Sigma+}$ — сумма положительных средних значений;

$M(\Delta y/y)_{\Sigma-}$ — сумма отрицательных средних значений.

Если $M(\Delta y/y)_{\text{ст}}$ является положительной, то она подставляется в формулу (4.29). В формулу же (4.30) в этом случае подставляется значение $M(\Delta y/y)_{\text{ст}} = 0$. Если $M(\Delta y/y)_{\text{ст}}$ отрицательна, то ее значение используется в формуле (4.30), в формулу (4.29) в этом случае подставляется значение $M(\Delta y/y)_{\text{ст}} = 0$.

Что касается $M(\Delta y/y)_t$, то принимают во внимание значения, получаемые при крайних положительных и отрицательных температурах. В формулу (4.29) подставляют положительное значение $M(\Delta y/y)_t$, а в формулу (4.30) отрицательное значение, независимо от того, какой области температур они соответствуют. Если же $M(\Delta y/y)_t$, найденные для областей положительной и отрицательной температур одного знака, то поступают по аналогии с $M(\Delta y/y)_{\text{ст}}$.

2. Определяют половину поля рассеивания суммарной относительной погрешности выходного параметра, пользуясь формулой

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} = \sqrt{\delta^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} + \delta^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}} + \delta^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{t\pm}}. \quad (4.31)$$

Индексы “пр”, “t” “ст” имеют тот же смысл, что и выше.

Знаки \pm при нижнем индексе t означают, что из значений $\delta(\Delta y/y)_t$, найденных для области положительных и отрицательных температур, берется большее.

Характеристика $\delta(\Delta y/y)_{\Sigma}$ гарантируется с такой же вероятностью, с которой подсчитывались составляющие подкоренного выражения. Если эти составляющие подсчитывались с разными вероятностями, формула (4.31) принимает другой, более сложный вид.

3. Устанавливают значение эксплуатационного допуска как

$$\Delta_3 = \xi \{ [M(\Delta y/y)_{\Sigma} - \delta(\Delta y/y)_{\Sigma}] \dots [M(\Delta y/y)_{\Sigma} + \delta(\Delta y/y)_{\Sigma}] \}, \quad (4.32)$$

где ξ – коэффициент запаса, учитывающий влияние неучтенных факторов (давление, влажность и т.д.).

Согласно работе [17], нестабильность выходных параметров РЭУ, обусловленная неучтенными при расчете факторами, не превышает 5...10%. На этом основании значение коэффициента ξ берут с некоторым запасом: $\xi = 1,05 \dots 1,2$.

Эксплуатационный допуск гарантируется с такой вероятностью, с которой определялось значение $\delta(\Delta y/y)_{\Sigma}$.

4.9.3. Пример расчета эксплуатационного допуска

Пример 4.5. Определим эксплуатационный допуск на выходной параметр RC -цепи (постоянную τ) при следующих исходных данных:

$$R = 1 \text{ кОм} \pm 5\%; C = 1 \text{ мкФ} \begin{matrix} +20\% \\ -10\% \end{matrix}.$$

В RC -цепи будут использованы дискретные элементы. Диапазон рабочих температур $t = -10 \dots +40^\circ\text{C}$. Интервал времени $\Delta T = 10000 \text{ ч}$. Вероятность гарантированного обеспечения допуска $P_{\Gamma} = 0,9973$.

Решение. 1. Определяем производственный допуск.

Математическая модель RC -цепи имеет вид

$$y \rightarrow \tau = RC.$$

Находим коэффициенты влияния параметров R и C , применяя формулу (4.9). Нетрудно убедиться, что

$$B_R = B_C = 1.$$

На основании исходных данных получаем сведения, необходимые для определения производственного допуска

$$M\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 0; \quad \delta\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = 5\%;$$

$$M\left(\frac{\Delta C}{C}\right) = \frac{\left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\text{H}} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\text{B}}}{2} = \frac{-10 + 20}{2} = 5\%;$$

$$\delta\left(\frac{\Delta C}{C}\right) = \left(\frac{\Delta C}{C}\right)_{\text{B}} - M\left(\frac{\Delta C}{C}\right) = 20 - 5 = 15\%,$$

где $(\Delta C/C)_{\text{H}}$ – нижнее предельное отклонение относительной погрешности емкости конденсатора $\Delta C/C$;

$(\Delta C/C)_{\text{B}}$ – верхнее предельное отклонение $\Delta C/C$.

Для параметра R или, что тоже самое, для параметра $\Delta R/R$, воспользуемся гипотезой о равномерной модели (равномерном законе распределения), так как его предельные отклонения относительно малы. Следовательно, его относительного рассеивания $K_R = \sqrt{3}$ (см. табл.4.3).

Для параметра C воспользуемся гипотезой о нормальной модели, ибо поле допуска достаточно широкое. Следовательно, $K_C = 1$.

Так как элементы R и C дискретные, то считаем, что корреляционная зависимость между ними отсутствует. Поэтому принимаем $r_{R,C} = 0$.

Коэффициент гарантированного обеспечения допуска p принимаем равным единице (см. табл.4.2), ибо по условию примера $P_r = 0,9973$.

2. Пользуясь формулами (4.10) и (4.12), определяем значение характеристик $M(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ и $\delta(\Delta y/y)_{\text{пр}}$. Получим

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5\%;$$

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = 1 \sqrt{1^2 \cdot 5^2 (\sqrt{3})^2 + 1^2 \cdot 15^2 \cdot 1^2} = \sqrt{300} \approx 17,3\%.$$

Следовательно, производственный допуск $\Delta_{\text{пр}}$ может быть установлен в виде

$$\Delta_{\text{пр}} = (5 \pm 17,3)\%.$$

3. Определяем температурный допуск.

Из справочной информации на элементы R и C , находим их температурные коэффициенты. Предположим, что эти коэффициенты имеют следующие значения:

$$\alpha_{R+} = \pm 7 \cdot 10^{-2} \text{ \%}/^\circ \text{C при } t = +20 \dots +100^\circ \text{C};$$

$$\alpha_{R-} = \pm 12 \cdot 10^{-2} \text{ \%}/^\circ \text{C при } t = -60 \dots +20^\circ \text{C};$$

$$\alpha_C = (-8 \dots -2) \cdot 10^{-2} \text{ \%}/^\circ \text{C во всем диапазоне температур.}$$

Анализируя эту информацию, выделяем характеристики, $M(\alpha_i)$ и $\delta(\alpha_i)$, необходимые для определения температурного допуска. Для простоты записи размерность [% / °C] опущена.

Получим

$$M(\alpha_{R+}) = 0; \delta(\alpha_{R+}) = 7 \cdot 10^{-2};$$

$$M(\alpha_{R-}) = 0; \delta(\alpha_{R-}) = 12 \cdot 10^{-2};$$

$$M(\alpha_C) = -5 \cdot 10^{-2}; \delta(\alpha_C) = 3 \cdot 10^{-2}.$$

Так как элементы RC -цепи дискретные, будем считать, что корреляционная зависимость между температурными

коэффициентами параметров R и C отсутствует. Следовательно, коэффициент корреляции между температурными коэффициентами α_R и α_C можно принять равным нулю, т.е. $r_{R,C}^{(\alpha)} = 0$.

На основе экспериментальных исследований установлено, что распределение температурных коэффициентов α_i и коэффициентов старения c_i для параметров элементов РЭУ близко к нормальному закону. Поэтому воспользуемся гипотезой о нормальном распределении этих коэффициентов. Пользуясь табл.4.3, выбираем значения коэффициентов относительно рассеивания величин α_R и α_C . Получаем

$$K_R^{(\alpha)} = 1; K_C^{(\alpha)} = 1.$$

Пользуясь формулами (4.23) и (4.24), определяем значения $M(\alpha_\Sigma)$ и $\delta(\alpha_\Sigma)$ для положительной области температур. Используем значение $\rho = 1$, так как $P_r = 0,9973$ (см. табл.4.2). Получим

$$M(\alpha_{\Sigma+}) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) \cdot 10^{-2} = -5 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ \text{C};$$

$$\delta(\alpha_{\Sigma+}) = 1 \cdot \sqrt{1^2 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1^2 + 1 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1^2} \approx 7,6 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ \text{C}.$$

С использованием выражения (4.25) находим температурный допуск для этой области температур.

$$\Delta_{t+} = (40 - 20) \cdot (-5 \cdot 10^{-2} \pm 7,6 \cdot 10^{-2}) \approx (-1,0 \pm 1,5)\%.$$

Выполняя аналогичные операции для области отрицательных температур, получаем

$$M(\alpha_{\Sigma-}) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) \cdot 10^{-2} = -5 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ \text{C};$$

$$\delta(\alpha_{\Sigma-}) = 1 \cdot \sqrt{1^2 \cdot (12 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1^2 + 1 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1^2} \approx 12,4 \cdot 10^{-2} \% / ^\circ \text{C};$$

$$\Delta_{t-} = (-10 - 20) \cdot (-5 \cdot 10^{-2} \pm 12,4 \cdot 10^{-2}) \approx (1,5 \pm 3,7)\%.$$

4. Анализируя температурные допуски, соответствующие областям положительных и отрицательных температур, определяем общий температурный допуск на выходной параметр (постоянную τ RC-цепи). Имеем:

$$\Delta_{t+} = (-1,0 \pm 1,5)\% = (-2,5 \dots +0,5)\%;$$

$$\Delta_{t-} = (1,5 \pm 3,7)\% = (-2,2 \dots +5,2)\%.$$

Следовательно, в качестве общего температурного допуска необходимо принять

$$\Delta_t = (-2,5 \dots +5,2)\% = (1,35 \pm 3,85)\%.$$

При определении эксплуатационного допуска необходимо будет определить

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma^+}, M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma^-} \text{ и } \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma}.$$

Для подсчета $M(\Delta y/y)_{\Sigma^+}$ необходимо взять положительное среднее значение, а для подсчета $M(\Delta y/y)_{\Sigma^-}$ – отрицательное среднее значение температурного допуска из допусков, полученных для областей положительных и отрицательных температур. В качестве значения $\delta(\Delta y/y)_t$ необходимо взять большее значение из $\delta(\Delta y/y)$, полученных для областей положительной и отрицательной температур.

5. Определяем допуск старения.

Для этого по документации на элементы находим коэффициенты старения. Предположим, что найдено:

$$c_R = (1 \dots 5) \cdot 10^{-4} \% / \text{ч};$$

$$c_C = (-0,1 \dots 5,5) \cdot 10^{-4} \% / \text{ч}.$$

Анализируя информацию о коэффициентах старения, выделяем характеристики $M(c_R)$, $\delta(c_R)$, $M(c_C)$, $\delta(c_C)$, используемые в расчетах при определении допуска старения. Получим

$$M(c_R) = 3 \cdot 10^{-4} \% / \text{ч}; \delta(c_R) = 2 \cdot 10^{-4} \% / \text{ч};$$

$$M(c_C) = 2,5 \cdot 10^{-4} \% / \text{ч}; \delta(c_C) = 3 \cdot 10^{-4} \% / \text{ч}.$$

Так как по условию примера, элементы R и C дискретные то будем считать, что корреляционная зависимость между коэффициентами старения параметров R и C отсутствует. Поэтому для коэффициента корреляции между коэффициентами старения этих параметров справедливо равенство $r_{R,C}^{(c)} = 0$.

Для коэффициентов относительного рассеивания коэффициентов старения параметров R и C примем

$$K_R^{(c)} = 1; K_C^{(c)} = 1,$$

ибо, как отмечалось в п.3 решения данного примера, можно воспользоваться гипотезой о нормальном распределении коэффициентов c_R и c_C .

Подсчитываем, пользуясь выражением, аналогичным (4.23) значения характеристики $M(c_{\Sigma})$. Получим

$$M(c_{\Sigma}) = 1 \cdot 3 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} = 5,5 \cdot 10^{-4} \% / \text{ч}.$$

Определяем половину поля рассеивания величины c_{Σ} , обусловленную действием процессов старения (времени). Пользуемся

выражением, аналогичным (4.24). Здесь, как и выше, используем значение $\rho = 1$, т.к. $P_r = 0,9973$. Получим

$$\delta(\alpha_\Sigma) = 1 \cdot \sqrt{1^2 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 1^2 + 1^2 \cdot (3 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 1^2} \approx 3,6 \cdot 10^{-4} \% / \text{ч.}$$

Тогда с использованием выражения (4.26) допуск старения можно определить как

$$\Delta_{\text{ст}} = 10000 \cdot (5,5 \cdot 10^{-4} \pm 3,6 \cdot 10^{-4}) = (5,5 \pm 3,6)\%.$$

Следовательно, можно записать

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}} = 5,5\%; \quad \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}} = 3,6\%.$$

6. По формулам (4.29) и (4.30) подсчитываем значения характеристик $M(\Delta y/y)_{\Sigma+}$ и $M(\Delta y/y)_{\Sigma-}$. Получим

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+} = 5 + 1,5 + 5,5 = 12\%; \quad M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-} = 5 - 1 + 0 = 4\%.$$

7. Для определения значения $\delta(\Delta y/y)_\Sigma$ пользуемся формулой (4.31), ибо составляющие

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}, \quad \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_t, \quad \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}$$

подсчитывались с одной и той же вероятностью $P_r = 0,9973$.

Выше (см. п. 2-5) было получено

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = 17,3\%, \quad \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_t = 3,7\%, \quad \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}} = 3,6\%.$$

Поэтому

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_\Sigma = \sqrt{17,3^2 + 3,7^2 + 3,6^2} \approx 18,1\%.$$

8. Устанавливаем эксплуатационный допуск на выходной параметр, пользуясь выражением (4.32). Выбираем значение коэффициента запаса ξ ; причем $\xi = 1,1$.

Тогда эксплуатационный допуск

$$\Delta_9 = 1,1 \cdot [(4 - 18,1) \dots (12 + 18,1)] \approx (-15,5 \dots 33,1)\%.$$

При этом эксплуатационный допуск Δ_9 гарантируется с вероятностью $P_r = 0,9973$.

Последнюю запись можно представить в виде

$$\Delta_9 = (-15,5 \dots +33,1)\% \approx (8,8 \pm 24,3)\%.$$

4.10. Обеспечение требований к точности выходных параметров

4.10.1. Разработка требований к точности выходных параметров

Задачи, в которых на основе допусков на первичные параметры определяется допуск на выходной параметр, называют задачами анализа допусков. Задачи, в которых на основе заданных требований к точности выходного параметра необходимо назначить допуски на первичные параметры, называют задачами синтеза допусков [17].

Решение первого вида задач было рассмотрено в разд.4.4-4.9. Сейчас рассмотрим задачи второго вида.

Для их решения надо знать, какие требования предъявляются к точности выходного параметра.

Заказчик обычно задаёт требования к эксплуатационному допуску, например, в виде половины поля рассеивания суммарной относительной погрешности выходного параметра

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} \rightarrow \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma}.$$

Разработка же требований к точности выходного параметра должна быть произведена инженером конструктором-технологом в процессе проектирования устройства или процесса. Причем следует помнить, что в соответствии с разработанными требованиями к точности выходного параметра будут назначены технологические (начальные или производственные) отклонения первичных параметров.

Задача разработки требований к точности выходного параметра может быть решена на основе использования выражения

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} = \sqrt{\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}\right]^2 + \left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}\right]^2 + \sum_{j=1}^m \left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_j\right]^2}, \quad (4.33)$$

где индекс “ j ” – означает j -й эксплуатационный фактор;

m – число принимаемых во внимание факторов окружающей среды.

При инженерном проектировании устройства или технологического процесса могут быть оценены характеристики стабильности выходного параметра. Тогда разработанное требование к точности выходного параметра показывает, какая доля отклонения выходного параметра от начального значения может приходиться на производственный (технологический) разброс, при

условии, что разброс параметра при эксплуатации не превысит заданного значения

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_3 \rightarrow \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_\Sigma.$$

Из формулы (4.33) следует, что требование к точности выходного параметра может быть записано в виде

$$\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = \sqrt{\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_\Sigma\right]^2 - \left\{\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}\right]^2 + \sum_{j=1}^m \left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_j\right]^2\right\}}. \quad (4.34)$$

Из выражения (4.34) видно, что задача обеспечения требований к точности выходного параметра имеет смысл, когда подкоренное выражение больше нуля, т.е. когда

$$\left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_\Sigma\right]^2 > \left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}\right]^2 + \sum_{j=1}^m \left[\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_j\right]^2. \quad (4.35)$$

В случае невыполнения условия (4.35) надо принять меры по повышению стабильности выходного параметра.

Требование к точности в данном случае разрабатывалось с учетом того, что средние значения относительных отклонений, обусловленные действиями старения и факторов окружающей среды, равны нулю. Если это так, то процедура разработки требования усложняется, и её рассмотрения выходит за пределы данного учебника.

4.10.2. Обеспечение требований к точности выходных параметров

Эта задача состоит в назначении таких производственных допусков на первичные параметры, которые обеспечат заданные требования к производственному допуску на выходной параметр.

Нетрудно понять, что данная задача не имеет однозначного решения. Это означает, что найдётся много сочетаний (комбинаций) производственных допусков на первичные параметры, обеспечивающих требований к точности выходного параметра.

Простейшим способом решения рассматриваемой задачи является метод перебора производственных допусков первичных параметров. Реализация этого способа сводится к следующему. Назначают производственные допуски на первичные параметры и рассчитывают допуск на выходной параметр, а далее проверяют соответствие этого допуска требованию к точности последнего. На практике, как правило, определяют несколько сочетаний (комбинаций), обеспечивающих заданное требование к точности, а искомую комбинацию находят с учетом экономических затрат (табл.4.4).

Обеспечение производственного допуска на выходной параметр методом перебора допусков на первичные параметры

Номер сочетания (комбинации)	Допуски на первичные параметры				Производственный допуск на выходной параметр	Затраты (3)
	x_1	x_2	...	x_k		
1	$\delta_1^{(1)}$	$\delta_2^{(1)}$...	$\delta_k^{(1)}$	$[\delta(\Delta y / y)]^{(1)}$	$z^{(1)}$
...
N	$\delta_1^{(N)}$	$\delta_2^{(N)}$...	$\delta_k^{(N)}$	$[\delta(\Delta y / y)]^{(N)}$	$z^{(N)}$

Выполняя перебор, следует иметь ввиду два обстоятельства:

а) производственные допуски на параметры отдельных элементов, определяются технологией изготовления, и инженер не в силах повлиять на их значения без организации процедуры отбора элементов с заданным уровнем точности параметров;

б) производственные допуски на параметры некоторые элементов соответствуют значениям из дискретного ряда чисел: ± 20 , ± 10 , ± 5 , ...

При реализации этого способа, допуски на первичные параметры должны назначаться с учетом коэффициентов влияния этих параметров. В частности, чем ниже коэффициент влияния этих параметров, тем более грубый допуск может быть назначен. Примерным критерием назначения производственного допуска является обратная величина коэффициента влияния первичного параметра.

Задачи обеспечения требований к точности выходного параметра могут также решаться экспериментально с использованием теории планирования эксперимента [17].

При разработке требований к точности выходного параметра и их обеспечении при проектировании подразумевается, что выполняется увязка вероятности, соответствующей требованию к точности, с вероятностью, с которой гарантируется производственный допуск на выходной параметр.

4.11. Способы определения коэффициентов влияния

4.11.1. Аналитические способы

Коэффициенты влияния необходимы для подсчета характеристик $M(\Delta y / y)$ и $\delta(\Delta y / y)$ при анализе точности и стабильности выходных параметров. Как отмечалось ранее, коэффициенты, используемые в формулах для подсчета этих характеристик,

зависят от вида математической модели $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ и от номинальных значений первичных параметров.

При заданном виде модели и выбранных номинальных значениях первичных параметров, коэффициенты влияния первичных параметров являются детерминированными величинами, т.е. представляют собой фиксированные числа. Коэффициент влияния может быть как положительным, так и отрицательным, как больше единицы, так и меньше единицы.

На практике для определения коэффициентов влияния используют две группы методов:

- а) расчетно-аналитические;
- б) экспериментально-расчетные.

Коэффициент влияния B_i i -го первичного параметра при аналитических методах может быть подсчитан с помощью выражения (4.9).

Пример 4.6. Определим коэффициенты влияния резисторов R_1 и R_2 делителя напряжения (рис.4.14), рассматривая в качестве выходного параметра y коэффициент деления делителя K_d .

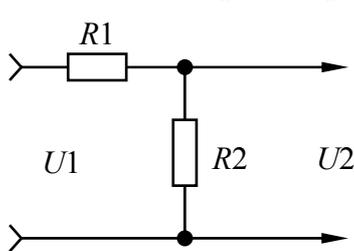


Рис.4.14. Делитель напряжения

$$y \rightarrow K_d = \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}.$$

Параметры элементов:

$$R_1 = 2 \text{ кОм} \pm 5\%; R_2 = 3 \text{ кОм} \pm 5\%.$$

Решение. Воспользуемся записанной формулой для коэффициента деления K_d . Принимая во внимание, что $\varphi \rightarrow K_d$, $x_i \rightarrow R_i$ ($i = 1; 2$) получим

$$B_{R_1} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{2}{2 + 3} = 0,4;$$

$$B_{R_2} = -\frac{R_1}{(R_2)^2} \cdot \frac{R_2 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} = -0,4.$$

Пример 4.7. Определим коэффициенты влияния параметров R и C RC -цепи, выходным параметром которой является постоянная времени $\tau = RC$.

Решение. В данном примере $\varphi \rightarrow \tau = RC$.

С учетом этого, определяем

$$B_R = C \frac{R}{RC} = 1; B_C = R \frac{C}{RC} = 1.$$

Нетрудно показать, что если выходной параметр y может быть представлен в виде выражения

$$y = \text{const} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

то коэффициенты влияния могут быть определены как

$$B_i = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пример 4.8. Определим коэффициенты влияния параметров L и C колебательного контура, рассматривая в качестве выходного параметра y резонансную частоту $f_{\text{рез}}$. Значение параметров L и C :

$$L = 10 \text{ мкГн} \pm 10\%; \quad C = 100 \text{ пФ} \pm 5\%.$$

Решение. В данном случае $y \rightarrow f_{\text{рез}}$.

Известно, что

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Это выражение можно представить в виде

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi} L^{-0,5} \cdot C^{-0,5}.$$

Из последней записи видно, что

$$B_L = -0,5; \quad B_C = -0,5.$$

Если выходной параметр y может быть представлен в виде отношения

$$y = \frac{Q(x_1, \dots, x_n)}{H(x_1, \dots, x_n)} = \frac{Q}{H}, \quad (4.36)$$

где Q , H – многочлены, содержащие не обязательно все x_i , причем их степень может быть любой,

то коэффициент влияния i -го первичного параметра может быть подсчитан с помощью выражения

$$B_i = m \frac{Q(x_i)}{Q} - l \frac{H(x_i)}{H}, \quad (4.37)$$

где $Q(x_i)$ и $H(x_i)$ – части многочленов Q и H , содержащие только x_i ;

m, l – максимальные степени x_i соответственно в многочленах $Q(x_i)$ и $H(x_i)$.

Пример 4.9. Определим с помощью последней формулы коэффициентов влияния резисторов R_1 и R_2 делителя напряжения, рассмотренного в примере 4.6.

Решение. Ранее было принято, что $\varphi \rightarrow K_{\text{д}}$.

По аналогии с выражением (4.36) можно записать

$$K_{\text{д}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{H}{Q}.$$

В данном случае: $Q = R_1 + R_2$, $H = R_2$.

Применим формулу (4.37), выбрав, например, в качестве x_i параметр $R1$.

Тогда

$$Q(R1) = R1; H(R1) = 0; m = 1; l = 0.$$

Следовательно

$$B_{R1} = 1 \frac{R1}{R1+R2} - 0 \frac{0}{R2} = \frac{R1}{R1+R2} = \frac{2}{2+3} = 0,4.$$

Этот результат, как видим, совпадает с результатом, полученным в примере 4.6.

Коэффициенты влияния могут быть также определены методом приращения. В этом случае пользуются формулой

$$B_i \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_i} \frac{x_{i\text{ном}}}{y_{i\text{ном}}} = \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - y_{i\text{ном}}}{\Delta x_i} \frac{x_{i\text{ном}}}{y_{i\text{ном}}}. \quad (4.38)$$

Точность определения коэффициентов B_i тем меньшая, чем сильнее выражено нелинейное влияние первичного параметра x_i на выходной параметр y и чем больше задаваемое приращение Δx_i .

Пример 4.10. Определим коэффициент влияния резистора $R2$ делителя напряжения (см. рис.4.14), рассмотренного в примере 4.6, и считая выходным параметром коэффициент деления K_D .

Решения. Напомним, что в условиях этого примера

$$y = K_D = \frac{R1 + R2}{R2};$$

$$R1 = 2 \text{ кОм} \pm 5\%; R2 = 3 \text{ кОм} \pm 5\%.$$

Для определения коэффициенты влияния B_{R2} первичному параметру $R2$ дадим малое приращение $\Delta R2 = 0,1 \text{ кОм}$ и воспользуемся формулой (4.38). Получим

$$B_{R2} \approx \frac{(2+3,1)/3,1 - (2+3)/3}{0,1} \cdot \frac{3}{(2+3)/3} \approx -0,387.$$

Этот результат немного отличается от результата, полученного в примере 4.6 ($B_{R2} = -0,4$).

4.11.2. Экспериментально-расчетный способ

При этом способе пользуются макетом устройства или реализацией технологического процесса. Рассматриваемому первичному параметру x_i дают малое приращение. Значения остальных первичных параметров считают соответствующими номинальным уровням, или же, если нет технических сложностей, задают их номинальные значения. После выполнения операции приращения

контролируют значение выходного параметра y . Коэффициент влияния первичного параметра определяют по формуле

$$B_i = \frac{\Delta y}{\Delta x_i} \cdot \frac{x_{i \text{нач}}}{y_{\text{нач}}},$$

Где $x_{i \text{нач}}$, $y_{i \text{нач}}$ – соответственно значения первичного параметра x_i и выходного параметра y до выполнения операции приращения;

Δy_i – изменения (приращение) выходного параметра с учетом знака после выполнения операции приращения первичного параметра x_i .

Если все первичные параметры (включая параметр x_i) до выполнения операции приращения x_i устанавливались равными номинальным уровням, то справедливы равенства

$$x_{1 \text{нач}} = x_{1 \text{ном}}, \dots, x_{i \text{нач}} = x_{i \text{ном}}, \dots, x_{n \text{нач}} = x_{n \text{ном}};$$

$$y_{i \text{нач}} = y_{\text{ном}}.$$

Глава 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ РЭУ

5.1. Причины обострения проблема надежности РЭУ

В настоящее время проблема надежности РЭУ заметно обострилась. Объясняется это следующим:

1. РЭУ заметно усложнились в схемотехническом отношении.
2. Ужесточились условия, в которых эксплуатируются современная радиоэлектронная аппаратура. Они часто характеризуются большим перепадом температур, высоким или низким давлением, наличием механического воздействия и т.д.
3. Повысились требования к точности функционирования РЭУ.
4. Повысилась «цена» отказа РЭУ: он может привести к серьезным техническим и экономическим потерям.
5. В ряде случаев человек-оператор не имеет непосредственного контакта с РЭУ (электронные датчики контроля хода технологических процессов в агрессивных средах, РЭУ на непилотируемых летательных объектах и т.п.).

5.2. Основные понятия и определения теории надежности

Теория надежности – это научная дисциплина, занимающаяся вопросами обеспечения высокой надежности технических изделий при наименьших затратах.

Основными понятиями теории надежности являются понятия «надежность» и «отказ».

Под надежностью понимают свойство изделия сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции, в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.

Надежность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения изделия и условий его применения может включать **безотказность, долговечность, ремонтпригодность и сохраняемость** или определенные сочетания этих свойств.

Нередко под надежностью в узком смысле слова понимают безотказность изделия.

Многие понятия и определения теории надежности базируются на таких понятиях, как работоспособность и безотказность [18–20].

Безотказность – свойство изделия непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки. Под работоспособным состоянием (кратко – *работоспособностью*) понимают состояние изделия, при котором оно способно выполнять предписанные ему функции, имея значения выходных параметров в пределах норм, оговоренных в технической документации.

Долговечность – свойство изделия сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Ремонтопригодность – свойство изделия, заключающееся в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость – свойство изделия сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность изделия выполнять требуемые функции, в течение и после хранения и (или) транспортирования.

С точки зрения восстанавливаемости различают восстанавливаемые и невосстанавливаемые изделия. **Восстанавливаемые** изделия в случае возникновения отказа подвергаются ремонту и далее снова используются по назначению. **Невосстанавливаемые** изделия не подлежат либо не поддаются ремонту по техническим или экономическим соображениям.

В теории надежности различают надежность устройств и надежность входящих в него элементов. Устройства чаще являются изделиями восстанавливаемыми. Элементы – обычно изделия невосстанавливаемые.

РЭУ, как системы, с точки зрения надежности могут быть простыми и сложными. Для **простой** отказ системы в целом наступает в случае выхода из строя хотя бы одного из элементов (пример – телевизор). Для **сложной** системы в случае отказа ее составных частей происходит снижения эффективности ее функционирования, так как функцию вышедшего из строя устройства может взять на себя оператор. Например, при отказе устройства автоматического поворота антенны эту функцию берет на себя человек, выполняя операцию поворота вручную.

5.3. Понятие отказа. Классификация отказов

Под *отказом* понимают полную или частичную потерю изделием работоспособности вследствие ухода одного или нескольких параметров за пределы установленных норм.

Под *наработкой* в общем случае понимают продолжительность работы изделия, выраженную в часах, циклах переключения или других единиц в зависимости от вида и функционального назначения изделия. Например, для интегральной микросхемы наработка выражается в часах, для переключателя – в циклах переключения, для счетчика бета-излучения – в импульсах и т.д. При этом, если изделие работает с перерывами, то в суммарную наработку включается только периоды работы (функционирования) изделия.

Под *наработкой до отказа* понимают суммарную наработку изделия от момента вступления в работу (эксплуатацию) до возникновения первого отказа.

В настоящее время существуют различные схемы классификации отказов. Одна из схем, широко используемая в теории и практике надежности РЭУ, представлена в табл.5.1.

Таблица 5.1

Классификация отказов РЭУ и их элементов

Классификационный признак	Вид отказа
Характер возникновения отказа	Внезапный Постепенный
Время существования отказа	Постоянный Временный Перебегающий (временные отказы, следующие один за другим)
Характер проявления отказа	Явный Неявный
Зависимость отказов между собой	Зависимый Независимый
Причина возникновения отказа	Конструктивный Производственный Эксплуатационный Деградационный

Внезапный отказ (ранее называемый также мгновенным) – это отказ, характеризующийся скачкообразным изменением значения одного или нескольких параметров изделия.

Под *постепенным* (ранее называемым также параметрическим) понимают отказ, возникающий в результате постепенного, обычно непрерывного и монотонного изменения значения одного или нескольких параметров изделия.

Четкой границы между внезапным и постепенным отказами провести не удастся. В [21] дано следующее определение внезапного отказа: это отказ, наступление которого не может быть предсказано предварительным контролем или диагностированием.

Сбой (временный отказ) – это самоустраняющийся отказ или однократный отказ, устраняемый незначительным вмешательством оператора.

Перемежающийся отказ – это многократно возникающий самоустраняющийся отказ одного и того же характера.

Под **явным** понимают отказ, обнаруживаемый визуально или штатными методами и средствами диагностирования при подготовке объекта к применению или процессе его применения по назначению.

Под **неявным** (скрытым) отказом понимают отказ, не обнаруживаемый визуально или штатными средствами и методами контроля и диагностирования, но выявляемый при проведении технического обслуживания или специальными методами диагностирования.

Независимым называют отказ, не обусловленный другими отказами.

Зависимым называют отказ, обусловленный другими отказами.

Под **конструктивным** понимают отказ, возникающий по причине, связанной с несовершенством или нарушением установленных правил и (или) норм проектирования.

Под **производственным** понимают отказ, связанный с несовершенством или нарушением установленного процесса изготовления или ремонта.

Под **эксплуатационным** понимают отказ, возникающий по причине, связанной с нарушением установленных правил или условий эксплуатации.

Под **деградационным** понимают отказ, обусловленный естественными процессами старения, изнашивания, коррозии и усталости при соблюдении всех установленных правил и норм проектирования, изготовления и эксплуатации.

5.4. Схема соединения элементов в устройстве с точки зрения надежности

В теории и практике надежности РЭУ различают три схемы (модели) соединения элементов с точки зрения надежности.

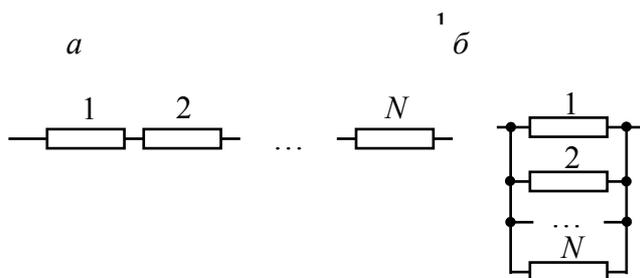


Рис.5.1. Схемы (модели) соединения элементов в устройстве с точки зрения надежности:
a – последовательное соединение;
б – параллельное соединение;
N – количество элементов в устройстве

1. Последовательное соединение элементов (рис.5.1, *a*). В этом случае отказ РЭУ возникает в случае отказа хотя бы одного из элементов.

2. Параллельное соединение элементов (рис.5.1, *б*). В этом случае отказ устройства наступает лишь при отказе всех элементов. Эта модель обычно характерна для устройств или частей РЭУ, имеющих резервирование.

Например, параллельное соединение элементов характерно для многожильного монтажного провода, если каждый проводник (жилу) рассматривать как элемент.

3. Смешанное соединение элементов. Это сочетание двух видов соединений.

5.5. Причины отказов РЭУ

Замечено, что на долю ошибок проектирования РЭУ приходится до 40...50% всех отказов (табл.5.2).

Отказы из-за ошибок (дефектов) производства возникают в 30...40% случаев (табл.5.3).

На долю ошибок оператора приходится (по зарубежным данным) примерно 20...30% всех отказов РЭУ.

Таблица 5.2
 Распределение отказов в зависимости от ошибок проектирования

Причина отказа	Примерно число отказов, %
Недостатки электрических схем	До 30
Недостатки механической конструкции	Примерно 10
Неправильный учет возможностей оператора	Нет данных
Неправильный выбор элементов	10
Неправильный выбор режимов работы элементов	10

Замечено, что примерно в 75...80% случаев различные причины отказов дают о себе знать в виде отказа комплектующих элементов. Это накладывает заметный психологический отпечаток на потребителей относительно истинных причин отказов.

Распределение отказов в зависимости от ошибок производства

Причина отказа	Примерно число отказов, %
Плохая механическая сборка :	
чисто механическая	5
герметизация	5
упаковка и транспортировка	5
Дефекты монтажа	20...25
Другие технологические операции	10

5.6. Модели законов распределения времени до отказа

По своей физической сущности отказы элементов и устройств являются событиями случайными. Поэтому для количественного описания отказов и вообще показателей надежности пригодны приемы теории вероятностей [22].

Анализируя отказы, нетрудно установить, что случайной величиной, описывающей отказы, является время до отказа (в общем случае наработка до отказа).

Установлено, что *время до отказа*, или, что то же самое, *время безотказной работы*, неплохо описывается следующими моделями законов распределения:

- а) экспоненциальной;
- б) моделью Вейбулла;
- в) нормальной;
- г) логарифмически нормальной.

Для экспоненциальной модели плотность распределения времени до отказа описывается выражением (рис.5.2)

$$w(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \lambda > 0, t \geq 0, \quad (5.1)$$

где λ – параметр модели (распределения).

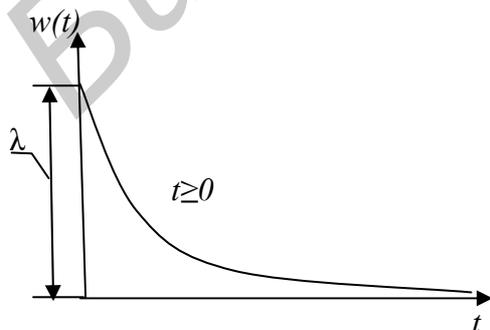


Рис.5.2 Экспоненциальное распределение времени до отказа

В теории и практике надежности РЭУ часто употребляют термин «**экспоненциальный закон надежности**», имея в виду, что время до отказа распределено по экспоненциальной модели.

Для модели Вейбулла плотность распределения времени до отказа

описывается выражением

$$w(t) = \rho \beta t^{\beta-1} e^{-\rho t^\beta}, \quad (5.2)$$

где ρ , β – параметры модели (распределения).

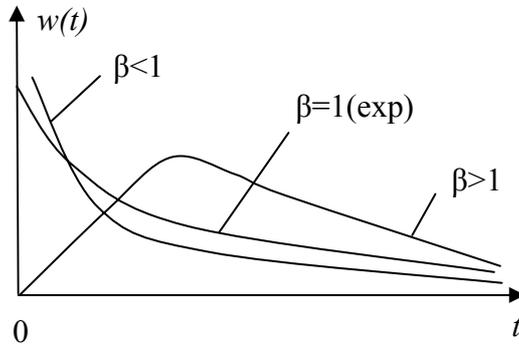


Рис.5.3. Распределение времени до отказа по закону Вейбулла

Параметр β называют коэффициентом формы. От значения этого коэффициента во многом зависит график функции $w(t)$ (рис.5.3).

При значении $\beta = 1$ имеем дело с чисто экспоненциальным распределением, оно является частым случаем модели Вейбулла. При $\beta = 2 \dots 3$ распределение Вейбулла в значительной степени приближается к нормальному

распределению.

Для нормальной модели плотность распределения времени до отказа описывается выражением

$$w(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_{cp})^2}{2\sigma_t^2}}, \quad (5.3)$$

где t_{cp} , σ_t – параметры модели (распределения).

Здесь t_{cp} – среднее время безотказной работы;

σ_t – среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы.

Для нормальной модели вид функции $w(t)$ показан на рис.5.4.

В случае нормальной модели говорят об усеченном распределении, ибо область отрицательных значений времени до отказа отбрасывают (отсекают), как не имеющую физического смысла.

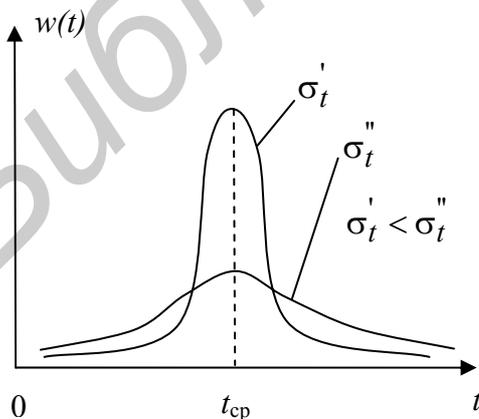


Рис.5.4. Распределение времени до отказа по нормальному закону

Для логарифмически нормальной модели характерно то, что по нормальному закону распределено не время до отказа, а логарифм этого времени.

Проводя испытания элементов или устройств на надежность и фиксируя время до отказа каждого изделия, получим ряд

Проводя испытания элементов или устройств на надежность и фиксируя время до отказа каждого изделия, получим ряд

значений случайной величины – времени до отказа. Общепринятыми приемами математической статистики для времени до отказа можно построить гистограмму распределения (рис.5.5) и попытаться восстановить вид функции $w(t)$.

Величины w_i^* определяют по формуле

$$w_i^* = \frac{n(\Delta t_i)}{N \cdot \Delta t_i}, \quad (5.4)$$

где N – общее число испытываемых изделий;

$n(\Delta t_i)$ – число изделий, отказавших на интервале времени Δt_i ;

Δt_i – ширина i -го временного интервала.

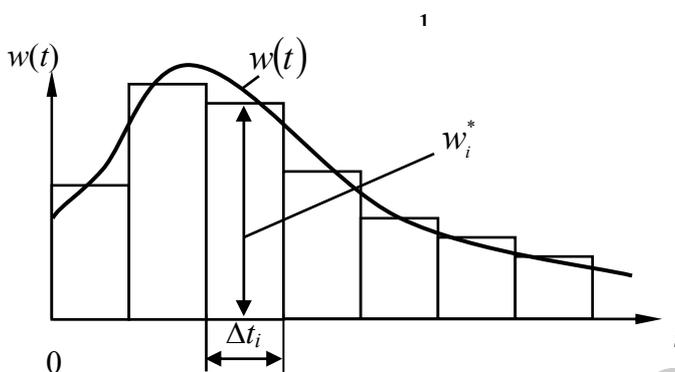


Рис.5.5. Гистограмма распределения времени до отказа

С увеличением количества испытываемых изделий N и уменьшением ширины интервалов Δt_i , гистограмма все более и более приближается к плотности распределения $w(t)$.

Характеристика $w(t)$ на практике не находит широкого применения в

качестве показателя надежности изделий, однако, без знания этой характеристики трудно определить интересующие нас показатели безотказности.

5.7. Показатели надежности РЭУ и их элементов

Надежность является комплексным свойством изделия. Для описания различных сторон этого свойства на практике пользуются *показателями надежности*, представляющими собой количественные характеристики одного или нескольких свойств, определяющих надежность изделия.

Используют единичные и комплексные показатели надежности. Под *единичным* понимают такой показатель, который характеризует одно из свойств, составляющих надежность изделия. *Комплексный* показатель характеризует несколько свойств, составляющих надежность изделия.

Для количественного описания различных сторон надежности как свойства обычно используют несколько групп показателей.

Первая группа – показатели безотказности. К основным показателям этой группы относятся:

вероятность безотказной работы $P(t_3)$ в течение заданного времени t_3 ;

вероятность отказа $q(t_3)$ в течение заданного времени t_3 ;

интенсивность отказов λ ;

средняя наработка до отказа (среднее время безотказной работы в случае, если наработка выражается временем) $T_{\text{ср}}$;

средняя наработка на отказ (кратко – наработка на отказ) T_0 ;

параметр потока отказов μ ;

гамма-процентная наработка до отказа T_γ .

Под **интенсивностью отказов** понимают условную плотность времени до отказа изделия, определяемую при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не возник.

Под **параметром потока отказов** понимают отношение математического ожидания числа отказов восстанавливаемого изделия за достаточно малое время работы к значению этого времени.

Под **гамма-процентной наработкой до отказа** понимают наработку, в течение которой отказ в изделии не возникает с вероятностью γ , выраженной в процентах, т.е. эта есть такая минимальная наработка до отказа, которую будут иметь γ процентов изделий данного вида. Например, запись в технической документации: “90-процентная наработка до отказа составляет не менее 250 ч” означает, что у 90% изделий данного вида в течение суммарной наработки, равной 250 ч, отказ не возникнет.

Показатели этой группы, кроме показателя T_0 , используют как для устройств, так и для элементов. Показатель T_0 применяется только для восстанавливаемых устройств. Большинство показателей будут рассмотрены ниже.

Вторая группа – показатели ремонтпригодности. Основными показателями этой группы являются:

вероятность восстановления изделия $v(\tau)$ за заданное время τ ;

среднее время восстановления (математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния изделия после отказа) $T_{\text{в}}$.

Ясно, что показатели данной группы имеют смысл только для восстанавливаемых изделий. Для элементов РЭУ эти показатели не используют, ибо элементы являются, как правило, изделиями невосстанавливаемыми.

Далее показатели этой группы также будут рассмотрены подробно.

Третья группа – показатели долговечности. К ним относятся: Средний ресурс (математическое ожидание ресурса);

гамма-процентный ресурс;
средний срок службы (математическое ожидание срока службы);

гамма-процентный срок службы.

Под **ресурсом** понимают суммарную наработку изделия от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние. Под **предельным** понимают состояние изделия, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна, либо восстановление его работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно. Критерий предельного состояния изделия устанавливается в нормативно-технической или проектной документации. Под **гамма-процентным** понимают ресурс, который обеспечивается с вероятностью γ , выраженной в процентах, т.е. это такой минимальный ресурс, который будут иметь гамма процентов изделий данного вида.

Под **сроком службы** понимают календарную продолжительность от начала эксплуатации изделия или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние. **Гамма-процентный срок службы** — это такой срок службы, который обеспечивается с вероятностью γ , выраженной в процентах, т.е. это минимальный срок службы, который будут иметь гамма процентов изделий данного вида.

Показатели этой группы используют как для устройств, так и для элементов.

Четвертая группа — показатели сохраняемости. К ним относят:

средний срок сохраняемости (математическое ожидание срока сохраняемости);

гамма-процентный срок сохраняемости.

Под **сроком сохраняемости** понимают календарную продолжительность хранения и (или) транспортирования изделия, в течение которой сохраняются в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность изделия выполнять заданные функции. По истечении срока сохраняемости изделие должно соответствовать требованиям безотказности, долговечности и ремонтпригодности, установленным нормативно-технической документацией на изделие.

Гамма-процентный срок сохраняемости — это срок сохраняемости, достигаемый изделием с заданной вероятностью γ , выраженной в процентах, т.е. это такой минимальный срок сохраняемости, который будут иметь гамма процентов изделий данного вида. Показатели этой группы также используют, как для устройств, так и для элементов.

Пятая группа — комплексные показатели надежности. Показатели этой группы выступают в виде эксплуатационных коэффициентов надежности, используемых для устройств. Основными коэффициентами являются:

- коэффициент готовности;
- коэффициент технического использования;
- коэффициент простоя.

Подробно эти коэффициенты рассматриваются в разделе 5.14.

Заметим, что в отличие от показателей пятой группы, показатели первых четырех относятся к единичным показателям надежности.

5.8. Вероятность безотказной работы и вероятность отказа

Вероятность безотказной работы определяется в предположении, что в начальный момент времени (момент начала исчисления наработки) изделие находится в работоспособном состоянии.

Под вероятностью безотказной работы изделия за время t_3 понимают вероятность вида

$$P(t_3) = \text{Вер}\{T \geq t_3\}, \quad (5.5)$$

где T — случайное время безотказной работы изделия (время до отказа).

Запись «Вер» здесь и далее означает «вероятность».

Причем здесь и далее слова «за время t_3 » означают интервал времени от 0 до t_3 включительно.

Безотказная работа изделия и его отказ — события противоположные, составляющие полную группу событий. Поэтому для вероятности отказа изделия за произвольное время t можно записать:

$$q(t) = 1 - P(t). \quad (5.6)$$

С другой стороны, вероятность отказа можно представить как

$$q(t) = \text{Вер}\{T < t\}. \quad (5.7)$$

Рассматривая выражение (5.7) с учетом определений, вводимых в теории вероятностей, можно прийти к выводу, что

$$q(t) = F(t), \quad (5.8)$$

где $F(t)$ — функция распределения (интегральный закон) времени до отказа, найденная для времени t .

Графики, функций $P(t)$ и $q(t)$ приведены на рис.5.6.

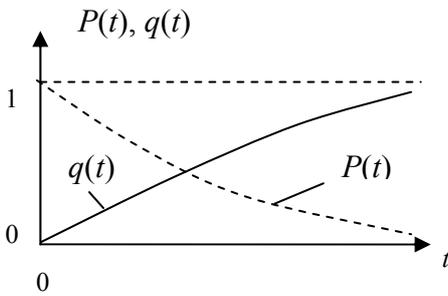


Рис.5.6. Графики функций $P(t)$ и $q(t)$

Зависимость вероятности безотказной работы от времени называют функцией надежности. Эта функция имеет три очевидные свойства:

1. $P(t = 0) = 1$, т.е. предполагается, что в момент времени $t=0$ изделие работоспособно.

2. $P(t = \infty) = 0$. Это означает, что при длительной эксплуатации

изделие обязательно откажет.

3. $P(t)$ — не возрастающая функция. В противном случае мы не нашли бы физического объяснения её возрастанию.

Если известна функция плотности распределения времени безотказной работы $w(t)$, то вероятность безотказной работы изделия за время t_3 может быть определена как

$$P(t_3) = \int_{t_3}^{\infty} w(t) dt, \quad (5.9)$$

а вероятность отказа за время t_3

$$q(t_3) = \int_0^{t_3} w(t) dt. \quad (5.10)$$

Геометрическая интерпретация выражений (5.9) и (5.10) показана на рис 5.7.

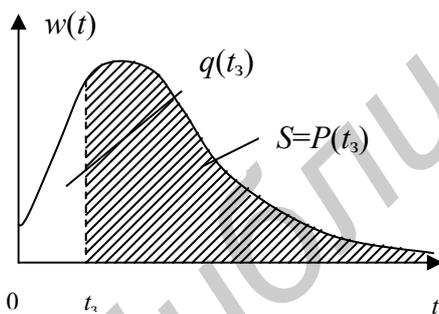


Рис.5.7. К определению вероятности безотказной работы и вероятности отказа

В случае экспоненциального распределения времени безотказной работы, т.е. когда

$$w(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

с использованием выражения (5.9) можно получить

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (5.11)$$

Этой формулой широко пользуются в инженерных расчетах. Она также известна под названием “экспоненциальный закон надежности”.

По результатам испытаний вероятность безотказной работы за время t_3 и вероятность отказа за время t_3 можно определить по формулам

$$P(t_3) = \frac{N - n(t_3)}{N}; \quad q(t_3) = \frac{n(t_3)}{N}, \quad (5.12)$$

где N — количество испытываемых изделий;

$n(t_3)$ — количество изделий, отказавших за время t_3 .

Предполагается, что в начальный момент времени все N изделий работоспособны.

Для получения достоверных оценок объем выборки N должен быть достаточно велик [8, 20, 22].

5.9. Интенсивность отказов

Под *интенсивностью отказов элементов* понимают величину, численно равную

$$\lambda_i^* = \frac{n(\Delta t_i)}{N_{\text{ср}i} \cdot \Delta t_i}, \quad (5.13)$$

где $n(\Delta t_i)$ — количество элементов, отказавших в i -м временном интервале;

Δt_i — ширина i -го временного интервала;

$N_{\text{ср}i}$ — среднее количество элементов, исправно работающих в i -м временном интервале.

Значение $N_{\text{ср}i}$ определяют как

$$N_{\text{ср}i} = \frac{N_{i-1} + N_i}{2}$$

где N_{i-1} , N_i — количество изделий, исправно работающих соответственно к началу и концу i -го интервала.

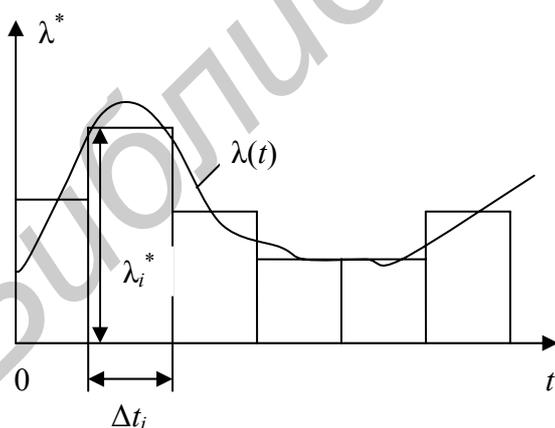


Рис.5.8. Восстановление вида функции $\lambda(t)$

Величина $N_{\text{ср}i}$ может быть как целым, так и дробным числом.

Рассчитанное по формуле (5.13) значение λ_i^* относится к любой точке i -го рассматриваемого интервала.

Для интенсивности отказов может быть построена гистограмма и восстановлен примерный вид функции $\lambda(t)$, (рис.5.8).

Интенсивность отказов устройства можно определить, пользуясь выражением

$$\lambda_{\text{рЭУ}} = \frac{n}{\Delta t}, \quad (5.14)$$

где Δt – время работы (суммарная наработка) РЭУ за рассматриваемый календарный период;

n – число возникших отказов устройства за время работы Δt .

Предполагается, что после возникновения отказа выполняется восстановление работоспособного состояния устройства.

Если располагают выборкой однотипных РЭУ, то для подсчета интенсивности отказов можно пользоваться также выражением (5.13).

Зависимость интенсивности отказов от времени в технике называется λ -характеристикой. Типичный вид λ -характеристики радиоэлектронных устройств приведен на рис.5.9.

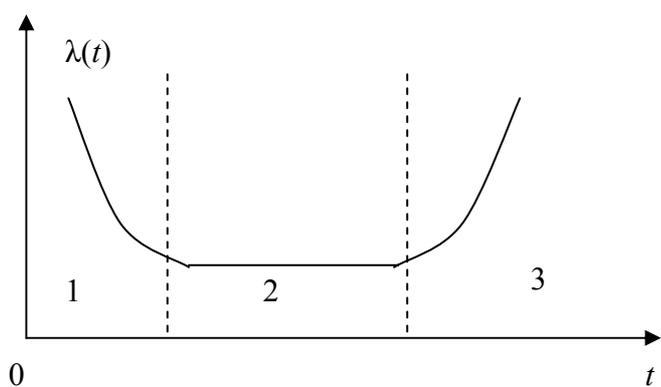


Рис.5.9. Типичный вид λ -характеристики РЭУ

На λ -характеристике можно четко выделить три области.

1. **Период приработки.** Характеризуется повышенным значением интенсивности отказов (большим числом отказов) из-за грубых дефектов производства. На практике обычно стремятся уйти из этой области, организовав в условиях производства термоэлектро-

тренировку, технологический прогон и т.п. Продолжительность этой области для РЭУ составляет десятки-сотни часов.

2. **Период нормальной эксплуатации.** Характеризуется примерным постоянством во времени интенсивности отказов. Инженерные расчеты надежности устройств обычно выполняют для этого периода. Продолжительность данного периода составляет тысячи-десятки тысяч часов.

3. **Область старения.** Характеризуется повышенным числом отказов ввиду старения и износа составных частей изделия. Техническая эксплуатация изделия на этом этапе нецелесообразна.

Между характеристиками изделия $w(t)$, $P(t)$ и $\lambda(t)$ существует следующая связь [23]:

$$\lambda(t) = \frac{w(t)}{P(t)} \quad (5.15)$$

5.10. Нарботка на отказ (средняя наработка на отказ)

Предположим, что РЭУ эксплуатируется в течение определенного календарного периода. Возникающие при эксплуатации

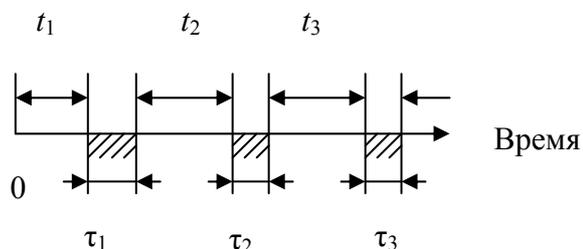


Рис.5.10. Процесс функционирования РЭУ; t_1, t_2, t_3 – интервалы безотказной работы РЭУ; τ_1, τ_2, τ_3 – интервалы по устранению отказов

отказы устраняются, и изделие снова используется по назначению. Этот процесс продолжается до окончания рассматриваемого календарного периода. Изобразим процессы функционирования и устранения отказов РЭУ на временной оси (рис.5.10).

Тогда под наработкой на отказ понимают величину, определяемую как

$$T_0 = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{m}, \quad (5.16)$$

где m — число отказов РЭУ, возникших за рассмотренный календарный период, или, что то же самое, число периодов безотказной работы.

Показатель T_0 имеет смысл только применительно к восстанавливаемым устройствам. Его более полно называют *средней наработкой на отказ*, что понятно из выражения (5.16).

Если поток отказов РЭУ данного типа стационарный, то наработку на отказ T_0 можно определить по нескольким экземплярам, используя формулу

$$T_0 = \frac{\sum_{j=1}^M T_j}{\sum_{j=1}^M m_j}, \quad (5.17)$$

где M — количество экземпляров;

T_j — суммарное время безотказной работы j -го экземпляра;

m_j — количество отказов j -го экземпляра.

Заметим, что в случае экспоненциального распределения времени безотказной работы условие стационарности потока отказов РЭУ, как правило, выполняется [8,20 и др.]

5.11. Среднее время безотказной работы

Надежность однотипных устройств или элементов с точки зрения продолжительности их работы до первого отказа можно оценить *средним временем безотказной работы*, под которым понимают математическое ожидание времени безотказной работы. В общем случае рассматриваемый показатель называют **средней наработкой до отказа**, так как он представляет собой математическое ожидание (среднее значение) случайной величины — наработки до отказа.

Этот показатель используют как для устройств, так и для элементов. Предположим, что на испытание поставлено N изделий, и в процессе испытаний фиксируются интервалы безотказной работы каждого изделия. Тогда среднее время безотказной работы $T_{\text{ср}}$ может быть определено как

$$T_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N}, \quad (5.18)$$

где T_i — время безотказной работы i -го экземпляра рассматриваемого вида изделия.

Чем больше N , тем выше точность оценки величины $T_{\text{ср}}$.

В инженерной практике испытания изделий выполняются в течение ограниченного промежутка времени, и не представляется возможным дождаться отказа всех изделий. В этом случае значение $T_{\text{ср}}$ для неотказавших экземпляров из числа испытываемых полагают равным времени испытаний. Естественно, оценка $T_{\text{ср}}$ оказывается заниженной, но с этим приходится мириться.

Показатели T_0 и $T_{\text{ср}}$ по своей физической сущности различны, однако в случае экспоненциального закона надежности они совпадают по значению.

Можно показать, что величина $T_{\text{ср}}$ определяется формулой

$$T_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} P(t) dt, \quad (5.19)$$

где $P(t)$ — вероятность безотказной работы за время t .

В случае экспоненциального распределения времени до отказа показатель $T_{\text{ср}}$ и совпадающий с ним по значению показатель T_0 соответствуют примерно 37%-ой наработке до отказа ($\gamma \approx 37\%$). Это означает, что примерно 37% изделий данного вида проработают без отказа в течении времени $T_{\text{ср}}$. Хотя из числа неотказавших изделий некоторые могут проработать значительно больше времени.

Доказательство сформулированного вывода таково.

При экспоненциальном распределении времени до отказа вероятность безотказной работы за время t определяется как

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

С учетом того, что $\lambda = 1/T_0$, получим

$$P(t) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{T_0}} = \left. \begin{array}{l} \text{примем} \\ t = T_0 \end{array} \right| = e^{-1} \approx 0,37.$$

Можно также показать, что для гамма-процентной наработки до отказа справедливы соотношения:

$$T_{\gamma=90\%} \approx 0,1 T_{\text{ср}}; \quad T_{\gamma=99\%} \approx 0,01 T_{\text{ср}}.$$

5.12. Параметр потока отказов

Напомним, что под параметром потока отказов понимают отношение математического ожидания числа отказов восстанавливаемого устройства за достаточно малое время к значению этого времени.

Параметр потока отказов μ для момента времени t определяют по формуле

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[n(t + \Delta t) - n(t)]}{\Delta t}, \quad (5.20)$$

где Δt — малый отрезок времени работы устройства;

$n(t)$ — количество отказов РЭУ, наступивших от начального момента времени до значения t .

Разность $n(t + \Delta t) - n(t)$ представляет собой число отказов на отрезке времени Δt .

Статистическую оценку параметра потока отказов $\mu(t)$ можно определить по формуле

$$\mu^*(t) = \frac{n(t_2) - n(t_1)}{t_2 - t_1}, \quad (5.21)$$

где $[t_1, t_2]$ — конечный отрезок времени, причем, $t_1 \leq t \leq t_2$.

5.13. Среднее время восстановления и вероятность восстановления

Под *средним временем восстановления* понимают математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния РЭУ после отказа.

Среднее время восстановления можно определить по аналогии с показателем T_0 (см. подразд.5.10).

Пусть за определенный календарный период эксплуатации РЭУ произошло m отказов. На восстановление РЭУ после возникновения i -го отказа затрачивалось время τ_i (см. рис.5.10). Тогда среднее время восстановления РЭУ может быть подсчитано как

$$T_B = \frac{\sum_{i=1}^m \tau_i}{m}. \quad (5.22)$$

Значение T_B показывает, сколько в среднем затрачивается времени на обнаружение и устранение одного отказа, и характеризует ремонтпригодность РЭУ.

Под **вероятностью восстановления** за заданное время τ_3 понимают вероятность вида

$$v(\tau_3) = \text{Вер}\{T \leq \tau_3\}, \quad (5.23)$$

где T — случайное время восстановления изделия.

Формулы для подсчета значений вероятности $v(\tau_3)$ зависят от закона распределения времени восстановления. Вероятность восстановления может быть определена как

$$v(\tau_3) = \int_0^{\tau_3} w(\tau) d\tau. \quad (5.24)$$

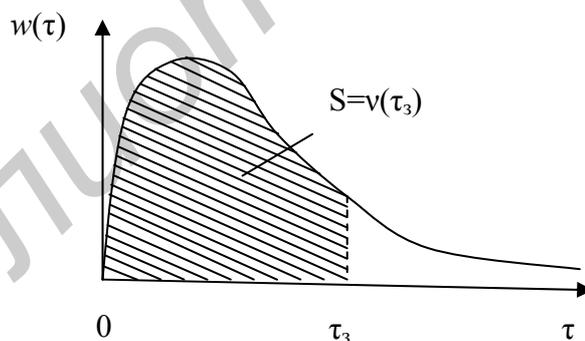


Рис. 5.11. К вопросу об определении величины $v(\tau_3)$

Графическую интерпретацию выражения (5.24) можно понять из рис.5.11.

5.14. Эксплуатационные коэффициенты надежности

Эксплуатационные коэффициенты надежности относятся к комплексным показателям надежности, т.е. показателям характеризующим несколько свойств, составляющих надежность РЭУ.

Под *коэффициентом готовности* K_r понимают вероятность того, что РЭУ окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение РЭУ по назначению не предусматривается.

Коэффициент готовности можно подсчитать по формуле

$$K_r = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{\sum_{i=1}^m t_i + \sum_{i=1}^m \tau_i}. \quad (5.25)$$

где t_i – время безотказной работы между $(i-1)$ и i -м отказом (см. рис. 5.10);

τ_i – время восстановления i -го отказа (см. рис. 5.10);

m – количество отказов за рассматриваемый период.

Разделив числитель и знаменатель приведенной формулы на m и воспользовавшись формулами (5.16) и (5.22), получим

$$K_r = \frac{T_0}{T_0 + T_v}. \quad (5.26)$$

Физически коэффициент K_r показывает средний процент РЭУ данного вида, находящихся в работоспособном состоянии в любой момент времени.

Под *коэффициентом технического использования* $K_{и}$ понимают отношение математического ожидания суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к математическому ожиданию суммарного времени пребывания РЭУ в работоспособном состоянии и простоев, обусловленных техническим обслуживанием и ремонтом за этот же период.

Коэффициент $K_{и}$ может быть подсчитан по формуле

$$K_{и} = \frac{\sum_{i=1}^m t_i}{\sum_{i=1}^m t_i + \sum_{i=1}^m t_{пi}}. \quad (5.27)$$

где $t_{пi}$ – время вынужденного простоя после i -го отказа.

В суммарное время вынужденного простоя в общем случае включается время на обнаружение и устранение отказов, регулировку и настройку РЭУ, время простоя из-за отсутствия запасных элементов и время на проведение профилактических работ.

Физически коэффициент $K_{и}$ характеризует долю времени нахождения РЭУ в работоспособном состоянии относительно общей продолжительности эксплуатации.

Коэффициент простоя $K_{п}$ характеризует расход времени на различные непроизводительные затраты и определяется как отношение суммарного времени вынужденных простоев к общему времени безотказной работы и вынужденных простоев за этот же период эксплуатации:

$$K_{и} = \frac{\sum_{i=1}^m t_{пi}}{\sum_{i=1}^m t_i + \sum_{i=1}^m t_{пi}}. \quad (5.28)$$

В общем случае в суммарное время простоя входят все непроизводительные затраты времени, исключая время хранения и нахождения в резерве.

Можно показать, что между коэффициентами $K_{и}$ и $K_{п}$ имеет место связь

$$K_{и} = 1 - K_{п}.$$

Если в качестве суммарных непроизводительных затрат взять только время на восстановление РЭУ после отказов, то получим коэффициент, характеризующий степень необходимости ремонта. Можно показать, что этот коэффициент $K_{р}$ связан с коэффициентом готовности $K_{г}$ выражением

$$K_{р} = 1 - K_{г}.$$

В литературе [24] коэффициент $K_{р}$ назван коэффициентом ремонтпригодности, что является не совсем удачным, так как большему значению коэффициента $K_{р}$ соответствует худший уровень ремонтпригодности.

5.15. Надежность элементов РЭУ

5.15.1. Интенсивность отказов как основная характеристика надежности элементов

При расчете показателей надежности аппаратуры надо располагать данными о показателях надежности элементов.

Основной характеристикой надежности элементов, приводимой в справочниках (технических условиях и других технических документах), является интенсивность отказов. Выбор этой характеристики в качестве основной объясняется следующим.

Экспериментально было установлено, что время до отказа элементов хорошо описывается экспоненциальной моделью

$$w(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где λ – параметр экспоненциальной модели.

Как отмечалось выше, в случае экспоненциальной модели вероятность безотказной работы за время t определяется выражением

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Ранее также отмечалось, что величины $w(t)$, $P(t)$ и $\lambda(t)$ связаны соотношением

$$\lambda(t) = \frac{w(t)}{P(t)}.$$

Тогда в случае экспоненциального распределения времени безотказной работы получим

$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda = \text{const}. \quad (5.29)$$

Из выражения (5.29) видно, что при экспоненциальном распределении времени до отказа интенсивность отказов постоянна и численно равна параметру экспоненциального распределения. Поэтому интенсивность отказов и параметр экспоненциального распределения обозначены одной и той же буквой – λ . Таким образом, стало возможным в справочниках задать надежность элементов одним числом – значением интенсивности отказов.

Интенсивность отказов элементов определяют обычно опытным путем для номинального электрического режима работы элементов при нормальных условиях эксплуатации (лабораторных условиях). При этом в инженерной практике часто пользуются планом испытаний типа $[N, V, T]$. Этот план означает, что испытывается N элементов, фиксируются отказы V , а испытания проводятся в течение времени T . Оценку интенсивности отказов дают в этом случае с помощью формулы [8]

$$\lambda^* = \frac{V}{\sum_{i=1}^V t_i + (N + V)T}. \quad (5.30)$$

где t_i – время до отказа i -го элемента из числа отказавших;

V – количество отказавших элементов.

Чтобы не совершить большую ошибку при оценке λ^* , значение V должно быть менее 5-10.

Знаменатель формулы (5.30), примерно равный $N \cdot T$, называют количеством отработанных приборо-часов (элементо-часов).

Нетрудно установить, что для того, чтобы подтвердить экспериментально значение $\lambda=10^{-6}$ 1/ч, значение величины $N \cdot T$ должно быть равным 10^7 . Предположим, что $N = 1000$, тогда $T = 10000$ ч, что составляет более года. Поэтому на практике используют ускоренные (обычно форсированные) испытания, позволяющие получить ту же информацию о надежности, но за более короткий срок. Ускорение испытаний может достигать 50...100 и даже более единиц.

В настоящее время для высоконадежных видов элементов при определении значений величины λ используют расчет и прогнозирование, принимая при этом во внимание структурную сложность нового типа элемента и данные из опыта эксплуатации аналогичных элементов.

Размерность интенсивности отказов $[\lambda] = 1/\text{ч} = \text{ч}^{-1}$.

Интенсивность отказов современных элементов занимает примерно диапазон $10^{-10} \dots 10^{-5}$ 1/ч (прил.2).

За рубежом в качестве размерности величины λ используют также процент на 1000 ч работы, что равносильно введению множителя 10^5 .

5.15.2. Коэффициенты электрической нагрузки элементов

Замечено, что надежность элементов зависит от коэффициентов электрической нагрузки, характеризующих степень электрической нагруженности элементов относительно их номинальных или предельных возможностей, указываемых в ТУ.

Количественно коэффициенты электрической нагрузки (часто говорят: коэффициент нагрузки) определяют по соотношению

$$K_{\text{н}} = \frac{F_{\text{раб}}}{F_{\text{ном}}}. \quad (5.31)$$

где $F_{\text{раб}}$ — электрическая нагрузка элемента в рабочем режиме, т.е. нагрузка, которая имеет место на рассматриваемом схемном элементе;

$F_{\text{ном}}$ — номинальная или предельная по ТУ электрическая нагрузка элемента, выполняющего в конструкции функцию схемного элемента.

В качестве нагрузки F выбирают такую электрическую характеристику элемента (одну или несколько), которая в наибольшей степени влияет на его надежность. Например, для резисторов в качестве характеристики берут мощность рассеивания, для конденсаторов — напряжение, прикладываемое к обкладкам.

Пример 5.1. В коллекторную цепь транзистора (рис.5.12) предполагается поставить резистор типа С2–23 со значением сопротивления $1\text{кОм} \pm 10\%$ и номинальной мощностью рассеивания $0,5\text{Вт}$.

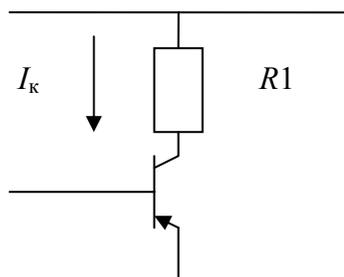


Рис.5.12. К расчету коэффициента нагрузки резистора

Ток, протекающий в коллекторной цепи транзистора $I_{\text{к}}$, равен 10мА . Требуется определить, какое значение коэффициента нагрузки будет иметь место для выбираемого резистора.

Решение. Как отмечалось, для резисторов в качестве характеристики F в формуле (5.31) используют мощность рассеивания. Тогда для коэффициента нагрузки резистора

$$K_{\text{н}} = \frac{F_{\text{раб}}}{F_{\text{ном}}}.$$

По условию примера $R1=1\text{кОм} \pm 10\%$, т.е. может иметь место отклонение сопротивления резистора от номинального значения в пределах заданного производственного (технологического) допуска. Определим значение коэффициента нагрузки для номинального значения сопротивления резистора, равного 1кОм .

Из условий примера имеем $P_{\text{ном}}=0,5\text{ Вт}$.

Определим значение $P_{\text{раб}}$, т.е. то значение мощности рассеивания, которое будет иметь место на схемном элементе $R1$ (см. рис.5.12). Применительно к рассматриваемому примеру

$$P_{\text{раб}} = I_{\text{к}}^2 R1 = \left| \begin{array}{l} I_{\text{к}} = 10\text{мА} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ А} \\ R1 = 1\text{кОм} = 10^3 \text{ Ом} \end{array} \right| = (10 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^3 = 0,1\text{ Вт}$$

Тогда значение коэффициента нагрузки определится как

$$K_{\text{н}} = \frac{F_{\text{раб}}}{F_{\text{ном}}} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2,$$

т.е. в данном случае резистор будет нагружен на 20% от номинальных возможностей.

5.15.3. Формулы для определения коэффициентов электрической нагрузки некоторых элементов

На практике при определении коэффициентов электрической нагрузки конкретного элемента выбирают такую электрическую характеристику (одну или несколько), которая в наибольшей степени влияет на надежность этого элемента. Формулы, которыми можно пользоваться для определения коэффициентов

электрической нагрузки основных элементов РЭУ, приведены в табл.5.4.

Таблица 5.4

Формулы для определения коэффициентов электрической нагрузки элементов

Элемент	Формула для определения K_n	Пояснения
Резистор	$K_n = P_{\text{раб}} / P_{\text{ном}}$	P — мощность
Конденсатор	$K_n = U_{\text{раб}} / U_{\text{ном}}$	U — напряжение
Транзистор биполярный (полевой)	$K_n(I) = I_{\text{к.раб}} / I_{\text{к.мах}}$; $K_n(U) = U_{\text{к.раб}} / U_{\text{к.мах}}$; $K_n(P) = P_{\text{к.раб}} / P_{\text{к.мах}}$	I_k — ток, U_k — напряжение, P_k — мощность, рассеиваемая на коллекторе (стоке)
Диод выпрямительный и импульсный	$K_n(I) = I_{\text{раб}} / I_{\text{махТУ}}$; $K_n(U) = U_{\text{обр.раб}} / U_{\text{обр.махТУ}}$	$U_{\text{обр}}$ — обратное напряжение
Цифровые интегральные микросхемы (ИМС)	$K_n(I) = I_{\text{вых.раб}} / I_{\text{вых.мах}}$; при $U_{\text{пит}} = U_{\text{пит.ном}}$	$I_{\text{вых}}$ — выходной ток ИМС $U_{\text{пит}}$ — напряжение источника питания
Аналоговые (линейно-импульсные) ИМС	$K_n(I) = I_{\text{вых.раб}} / I_{\text{вых.мах}}$; $K_n(P) = P_{\text{раб}} / P_{\text{ном}}$; при $U_{\text{пит}} = U_{\text{пит.ном}}$	$I_{\text{вых}}$ — выходной ток ИМС P — рассеиваемая мощность
Элементы коммутации низковольтные ($U < 300 \text{ В}$)	$K_n = I_{\text{раб}} / I_{\text{ном}}$	I — ток через контакт

Для транзисторов, диодов и аналоговых ИМС в качестве определяющего параметра выбирается тот, для которого $K_n \geq 0,05 \dots 0,1$. Для транзисторов при значениях $K_n^{(I)} > 0,05$ и $K_n^{(U)} > 0,05$ в качестве определяющего параметра используется мощность, рассеиваемая на коллекторе (для полевых транзисторов — на стоке).

5.15.4. Краткая характеристика надежности элементов

Интегральные микросхемы (ИМС). Относятся к классу надежных элементов. При прочих равных условиях гибридные ИМС менее надежны по сравнению с полупроводниковыми из-за наличия в них паяных соединений и навесных компонентов.

В общем случае цифровые ИМС надежнее аналоговых (линейно-импульсных). Объясняется это режимом переключения, в котором работают цифровые ИМС.

Надежность ИМС слабо зависит от степени интеграции, т.е. от числа элементов в ИМС. Объясняется это тем, что значительный вклад в ненадежность ИМС вносят корпус и межсоединения, а таковые имеют, как правило, все ИМС.

Полупроводниковые приборы. Замечено, что примерно 80% отказов полупроводниковых приборов являются постепенными, т.е. отказами в виде постепенного и монотонного ухода параметров за пределы норм, указанных в технической документации.

В общем случае мощные полупроводниковые приборы менее надежны. Это объясняется влиянием тепловой нагрузки на кристалл. Установлено, что надежность мощных полупроводниковых приборов во многом зависит от качества припайки кристалла к корпусу.

Надежность полупроводниковых приборов также зависит от вида технологии изготовления самого прибора, а кроме того — от электрического режима работы (усилительный или ключевой режим).

Резисторы. Относятся к классу высоконадежных элементов (исключая переменные и подстроечные резисторы).

В общем случае резисторы объемного сопротивления надежнее пленочных, однако последние более стабильны. Замечено, что надежность резистора зависит от характера протекающего тока, а также от номинального значения сопротивления. Высокоомные резисторы менее надежны.

Надежность переменных и подстроечных резисторов во многом зависит от качества скользящего контакта.

Конденсаторы. Относятся к классу одних из самых высоконадежных элементов, исключая электролитические конденсаторы.

Замечено, что надежность конденсаторов зависит от их места в электрической схеме (разделительный, блокировочный, контурный или накопительный). Экспериментально установлено, что для конденсаторов справедлив закон "десяти градусов". Суть закона: характеристика надежности конденсаторов уменьшается примерно в два раза на каждые 10 градусов повышения температуры.

Элементы коммутации. Относятся к классу самых ненадежных элементов из-за наличия механических контактов

В справочниках интенсивность отказов для элементов коммутации может задаваться иначе, нежели для элементов, рассмотренных выше, а именно:

- для тумблеров, кнопок, реле и т.п. — значением λ , приходящимся на один контакт при номинальном токе через контакт;
- для переключателей — значением λ , приходящимся на одну контактную группу при номинальном токе через контакты;
- для соединителей (разъемов) — значением λ , приходящимся на один штырь разъема при номинальном токе через штырь;
- для монтажных и соединительных проводов, кабелей — значением λ , приходящимся на каждый метр длины при номинальной плотности тока в проводе.

5.15.5. Учет влияния на надежность элементов электрического режима и условий работы

Справочные значения интенсивностей отказов элементов соответствуют коэффициентам нагрузки $K_n = 1$ и нормальным (лабораторным) условиям эксплуатации. На практике с целью повышения надежности РЭУ коэффициенты нагрузки элементов выбирают меньше единицы, а условия эксплуатации элементов оказываются более жесткими, нежели нормальные. Поэтому возникает задача пересчета справочных значений интенсивностей отказов на конкретный электрический режим и условия эксплуатации.

В общем случае для пересчета пользуются выражением

$$\lambda(v) = \lambda_0 \cdot y(x_1, \dots, x_m),$$

где $\lambda(v)$ — значение интенсивности отказов с учетом электрического режима и условий эксплуатации (символ v подчеркивает это);

λ_0 — справочное значение интенсивности отказов;

$y(x_1, \dots, x_m)$ — пересчетная функция;

x_1, \dots, x_m — факторы, принимаемые во внимание (коэффициент нагрузки, параметры окружающей среды и т.д.);

m — количество факторов.

В настоящее время для пересчетной функции наиболее часто используют выражение (модель) вида

$$y(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m \alpha(x_i), \quad (5.32)$$

где $\alpha(x_i)$ — поправочный коэффициент, учитывающий влияние фактора x_i .

В качестве факторов x_i могут рассматриваться коэффициент нагрузки, температура, давление, характер электрического режима, номинальное значение параметра элемента и т.д.

В инженерной практике часто учитывают влияние двух важнейших факторов — коэффициента электрической нагрузки и температуры. Для определения произведения поправочных коэффициентов для этого случая можно пользоваться номограммами (семейством кривых), построенными для различных видов элементов по результатам экспериментальных исследований (прил.3). Вид этих номограмм показан на рис.5.13.

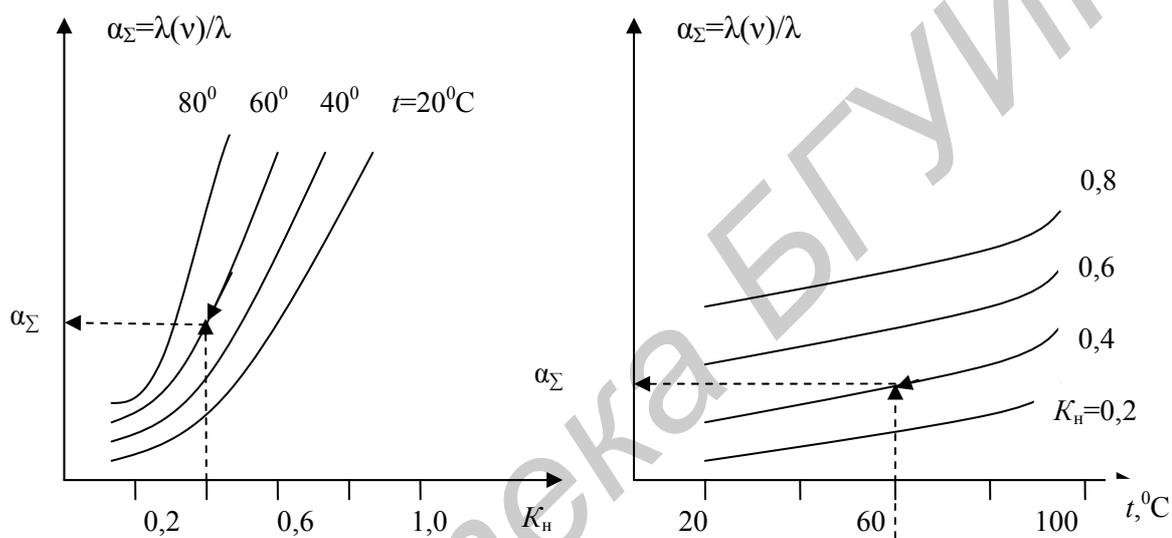


Рис.5.13. Номограммы для определения произведения поправочных коэффициентов в случае учета двух факторов – коэффициента нагрузки и температуры

Общий (иногда говорят суммарный) поправочный коэффициент в этом случае есть произведение двух коэффициентов, т.е.

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha(K_n) \cdot \alpha(t^{\circ}),$$

где $\alpha(K_n)$ — поправочный коэффициент, учитывающий влияние коэффициента нагрузки;

$\alpha(t^{\circ})$ — поправочный коэффициент, учитывающий влияние температуры.

На рис.5.13 показано, как воспользоваться номограммой в случае, когда $K_n=0,4$; $t^{\circ}=60$ °C.

В инженерной практике для учета влияния на надежность элементов только коэффициента электрической нагрузки K_n можно пользоваться примерным соотношением

$$\lambda(v) \approx K_n^b \cdot \lambda_0, \quad (5.33)$$

где b — показатель степени, зависящий от вида и типа элемента ($b \approx 3...5$ для конденсаторов; $b \approx 1...2$ — для других элементов)

Например, если справочное значение интенсивности отказов для кремниевого транзистора типа КТ201 составляет $\lambda_0 = 0,75 \cdot 10^{-6}$ 1/ч, то при коэффициенте нагрузки этого транзистора $K_n = 0,4$ получим (приняв $b=1$)

$$\lambda(v) \approx 0,4 \cdot 0,75 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ 1/ч.}$$

5.16. Оценка показателей надежности проектируемых РЭУ (основные расчетные соотношения)

Эти соотношения получают в предположении, что элементы в РЭУ с точки зрения надежности соединены последовательно (рис.5.14). Кроме того, отказы элементов считаются случайными и

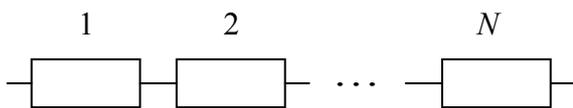


Рис. 5.14. Последовательное соединение элементов в РЭУ (N — количество элементов)

независимыми друг от друга. Тогда с учетом принятых допущений методами теории вероятностей для вероятности безотказной работы устройства за время t_3 можно получить следующее выражение:

$$P_{\Sigma}(t_3) = p_1(t_3) \cdot p_2(t_3) \dots p_N(t_3) = \prod_{i=1}^N p_i(t_3), \quad (5.34)$$

где $p_i(t_3)$ — вероятности безотказной работы элементов, подсчитанные для заданного времени t_3 , $i=1, \dots, N$.

Из выражения (5.34) видно, что для определения показателя безотказности устройства необходимо располагать данными о безотказности элементов, входящих в устройство.

В случае экспоненциального закона надежности элементов

$$p_i(t_3) = e^{-\lambda_i t_3}, \quad (5.35)$$

где λ_i — параметр экспоненциального распределения для i -го элемента, численно равный интенсивности его отказов.

Подставляя выражения вида (5.35) в соотношение (5.34), получим

$$P_{\Sigma}(t_3) = e^{-\lambda_1 t_3} \cdot e^{-\lambda_2 t_3} \dots e^{-\lambda_N t_3} = e^{-t_3 \sum_{i=1}^N \lambda_i}. \quad (5.36)$$

Из выражения (5.36) следует, что вероятность безотказной работы устройства может быть определена с использованием значений интенсивностей отказов элементов.

В выражении (5.36) величину

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N \lambda_i$$

называют суммарной интенсивностью отказов элементов устройства. Из него видно, что чем больше значение λ_{Σ} , тем ниже уровень безотказности устройства.

Выражение вида (5.34) называют основным расчетным для вероятности безотказной работы устройств. Выражение (5.36) — аналог выражения (5.34) применительно к экспоненциальному закону надежности элементов.

Для среднего времени восстановления радиоэлектронного устройства может быть получено выражение

$$T_B = \frac{\sum_{i=1}^N q_i \tau_i}{\sum_{i=1}^N q_i}, \quad (5.37)$$

где q_i — вероятность отказа i -го элемента, подсчитанная для интервала времени t_3 ;

τ_i — среднее время восстановления i -го элемента (значения этих величин можно найти в справочниках для различных видов элементов и классов аппаратуры, прил.4).

Если произведение $\lambda_i \cdot t_3 \ll 1$, что обычно имеет место на практике, то последняя формула может быть представлена в виде

$$T_B = \left| \begin{array}{l} \text{при } \lambda_i \cdot t_3 \ll 1 \\ q_i = q_i(t_3) \approx \lambda_i \cdot t_3 \end{array} \right| \approx \frac{t_3 \sum_{i=1}^N \lambda_i \tau_i}{t_3 \sum_{i=1}^N \lambda_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i \tau_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i}. \quad (5.38)$$

Выражение (5.38) является основным расчетным соотношением для определения среднего времени восстановления РЭУ.

5.17. Ориентировочный (приближенный) расчет показателей надежности проектируемых РЭУ

Существующие методы расчета показателей надежности РЭУ различаются степенью точности учета электрического режима и условий эксплуатации элементов.

При ориентировочном расчете этот учет выполняется приближенно, с помощью обобщенных эксплуатационных

коэффициентов. Значения этих коэффициентов зависят от вида РЭУ и условий их эксплуатации.

Ориентировочный расчет выполняется на начальных стадиях проектирования РЭУ, когда еще не выбраны типы и эксплуатационные характеристики элементов, не спроектирована конструкция и, естественно, отсутствуют результаты конструкторских расчетов (теплового режима, виброзащищенности и т.п.).

Исходными данными при ориентировочном расчете являются: электрическая схема РЭУ (принципиальная, а для цифровых РЭУ в ряде случаев функциональная), заданное время работы t_3 , условия эксплуатации или вид РЭУ.

Ориентировочный расчет выполняют для периода нормальной эксплуатации РЭУ, т.е. для периода, когда общая интенсивность отказа устройства примерно постоянна во времени. В этом случае для определения интенсивности отказов РЭУ пользуются значениями интенсивностей отказов элементов. Общая интенсивность отказов РЭУ определяется путем простого суммирования последних.

При ориентировочном расчете пользуются следующими допущениями (предпосылками):

- а) отказы элементов случайны и независимы;
- б) для элементов РЭУ справедлив экспоненциальный закон надежности, т.е. выражения (5.35);
- в) принимаются во внимание только внезапные отказы, т.е. вероятность с точки зрения отсутствия постепенных отказов равна единице;
- г) учитываются только элементы электрической схемы, а также монтажные соединения, если вид соединений заранее определен;
- д) учет электрического режима и условий эксплуатации элементов выполняется приближенно.

Последовательность ориентировочного расчета:

1. На основе анализа электрической схемы РЭУ формируются группы однотипных элементов.

Признаком объединения элементов в одну группу является функциональное назначение элемента и, в определенной степени, эксплуатационная электрическая характеристика. Например, маломощные транзисторы объединяют в одну группу, мощные – в другую и т.д.

Монтажные соединения составляют отдельную группу. Если вид монтажа (печатный, объемный) определен заранее, то отдельную группу составляют также несущие конструкции (печатная плата и т.д.). Отдельную группу составляют также точки паек (в дальнейшем – пайки).

2. Для элементов каждой группы по справочникам (ТУ, каталогам и т.п.) определяют среднегрупповое значение интенсивности

отказов. Если группу образуют элементы одного типа, то необходимость усреднять значения интенсивностей отказов отпадает.

3. Подсчитывают значение суммарной интенсивности отказов элементов устройства, используя выражение

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{j=1}^k \lambda_{0j} \cdot n_j, \quad (5.39)$$

где λ_{0j} – среднегрупповое значение интенсивности отказов элементов j -й группы, найденное с использованием справочников, $j=1, \dots, k$;

n_j – количество элементов в j -й группе, $j=1, \dots, k$;

k – число сформированных групп однотипных элементов.

4. С использованием обобщенного эксплуатационного коэффициента выполняют приближенный учет электрического режима и условий эксплуатации элементов.

Суммарную интенсивность отказов элементов РЭУ с учетом электрического режима и условий эксплуатации определяют как

$$\lambda_{\Sigma}(v) = \lambda_{\Sigma} \cdot K_{\text{э}} = K_{\text{э}} \cdot \sum_{j=1}^k \lambda_{0j} \cdot n_j, \quad (5.40)$$

где $K_{\text{э}}$ – обобщенный эксплуатационный коэффициент, выбираемый по таблицам в зависимости от вида РЭУ или условий его эксплуатации (табл. 5.5).

Таблица 5.5

Значения обобщенного эксплуатационного коэффициента $K_{\text{э}}$ [25]

Вид РЭУ, условия эксплуатации	Значение $K_{\text{э}}$
Лабораторные условия	1,0
Помещения с регулируемой температурой и влажностью	1,1
Космос (на орбите)	1,5
Наземные стационарные условия	2...4,7 (2,5)
Наземные возимые РЭУ	4...7 (5,0)
Наземные подвижные (переносимые) РЭУ	7...15 (7,0)
Морские защищенные условия	7...12 (7,6)
Морские незащищенные условия	7...15 (10,0)
Бортовые самолетные РЭУ	5...10 (7,0)
Запуск ракеты	10...44 (20,0)

В скобках в табл.5.5 указаны значения, рекомендуемые для использования в расчетах.

5. С использованием гипотезы об экспоненциальном законе надежности подсчитывают другие показатели надежности.

Наработка на отказ

$$T_0 = \frac{1}{\lambda_{\Sigma}(v)}. \quad (5.41)$$

Вероятность безотказной работы за заданное время t_3

$$P_{\Sigma}(t_3) = e^{-t_3 \cdot \lambda_{\Sigma}(v)} = e^{-\frac{t_3}{T_0}}. \quad (5.42)$$

Среднее время безотказной работы устройства (средняя наработка до отказа)

$$T_{\text{ср}} = T_0.$$

В общем случае гамма-процентная наработка до отказа T_{γ} определяется, как решение уравнения

$$P(T_{\gamma}) = \frac{\gamma}{100}.$$

При экспоненциальном распределении времени до отказа

$$T_{\gamma} = -\frac{\ln\left(\frac{\gamma}{100}\right)}{\lambda_{\Sigma}(v)} = -T_0 \ln\left(\frac{\gamma}{100}\right). \quad (5.43)$$

5.18 Расчет показателей надежности проектируемых РЭУ с учетом коэффициентов электрической нагрузки и условий работы элементов в составе устройств

Этот расчет, называемый также уточненным расчетом показателей надежности, выполняют на заключительных стадиях проектирования РЭУ, когда выбраны типы и типоразмеры элементов, спроектирована конструкция и имеются результаты расчета тепловых режимов, виброзащитности и т.п. Напомним, что типоразмер элемента определяется основной электрической эксплуатационной характеристикой элемента (например, для резисторов – мощностью рассеивания, для конденсаторов – допустимым напряжением).

Расчет выполняется при тех же допущениях, что и ориентировочный. Однако электрический режим и условия эксплуатации

элементов учитываются более точно и, кроме того, принимаются во внимание конструктивные элементы устройства (шасси, корпус, провода и т.п.).

Последовательность расчета:

1. Определяют коэффициенты электрической нагрузки элементов РЭУ. Пользуются общей формулой (5.31) или ее конкретными реализациями, приведенными в табл.5.4. В качестве электрической нагрузки $F_{\text{ном}}$ используют номинальные или предельные по ТУ электрические характеристики элементов, выбранные для проектируемой конструкции РЭУ. Электрические характеристики $F_{\text{раб}}$ берут из результатов электрического расчета принципиальной электрической схемы РЭУ или получают путем экспресс-анализа (ориентировочной оценки) электрических нагрузок схемных элементов. Допускается погрешность $\pm(20...30)\%$.

2. Принимают решение о том, какие факторы, кроме коэффициента электрической нагрузки, будут уточнены.

Используя результаты конструкторских расчетов, определяют значения параметров, описывающих учитываемые факторы, причем эти значения желательно иметь для каждого элемента.

3. Формируются группы однотипных элементов (если представляется возможность сделать это).

Признаками объединения элементов в одну группу в данном расчете является не только функциональное назначение элемента, но и примерное равенство коэффициентов электрической нагрузки и параметров, описывающих другие учитываемые эксплуатационные факторы.

Если для элементов одного и того же функционального назначения значения $K_n \leq 0,05$, то такие элементы по коэффициенту электрической нагрузки допускается объединять в одну группу.

2. Определяется суммарная интенсивность отказов элементов с учетом коэффициентов электрической нагрузки и условий их работы в составе устройства. Пользуются формулами

$$\lambda_j(v) = \lambda_{0j} \prod_{i=1}^m \alpha(x_i); \quad (5.44)$$

$$\lambda_{\Sigma}(v) = \sum_{j=1}^k n_j \lambda_j(v), \quad (5.45)$$

где $\lambda_j(v)$ – интенсивность отказов элементов j -ой группы с учетом электрического режима и условий эксплуатации;

λ_{0j} – справочное значение интенсивности отказов элементов j -й группы; $j=1, \dots, k$;

n_j – количество элементов в j -й группе; $j=1, \dots, k$;

- k – число сформированных групп однотипных элементов; в предельном случае каждый элемент РЭУ может составить отдельную группу;
- $\alpha(x_i)$ – поправочный коэффициент, учитывающий влияние фактора x_i ; $i=1, \dots, m$;
- m – количество факторов, принимаемых во внимание.

Напомним, что в качестве факторов x_i могут рассматриваться коэффициенты нагрузки K_n , температура и т.п.

5. По общепринятым формулам для экспоненциального распределения подсчитывают показатели T_0 , $P_\Sigma(t_3)$, $T_{\text{ср}}$, T_γ .

6. Подсчитывают показатели восстанавливаемости РЭУ. Среднее время восстановления подсчитывают по формуле (5.38). Вероятность восстановления РЭУ за заданное время t_3 рассчитывают по выражению (5.24) в предположении, что время восстановления распределено по экспоненциальному закону. Расчетная формула в этом случае принимает вид

$$v(t_3) = 1 - e^{-\frac{t_3}{T_B}}. \quad (5.46)$$

7. При необходимости подсчитывают коэффициент готовности K_Γ и вероятность нормального функционирования $P_{\text{н.ф.}}(t_3)$. Пользуются формулами [24]

$$K_\Gamma = \frac{T_0}{T_0 + T_B}; \quad P_{\text{н.ф.}}(t_3) \approx K_\Gamma \cdot P_\Sigma(t_3).$$

5.19 Примеры оценки показателей надежности проектируемого РЭУ

Пример 5.2. Требуется оценить показатели безотказности усилительного каскада (рис.5.15), функционирующего в составе РЭУ и предназначенного для эксплуатации в наземных стационарных условиях.

Предполагается, что каскад будет изготовлен с использованием печатного монтажа. Заданное время работы $t_3=1000$ ч.

Решение. Выполним ориентировочный расчет показателей надежности этого каскада.

1. Сформируем группы однотипных элементов и для каждой группы по справочникам (прил. 2) определим значение интенсивностей отказов, соответствующее в среднем элементам каждой группы. Для электролитических конденсаторов это значение равно $0,40 \cdot 10^{-6}$ 1/ч, так как тип конденсатора пока не выбран (алюминиевый или танталовый). Для резисторов

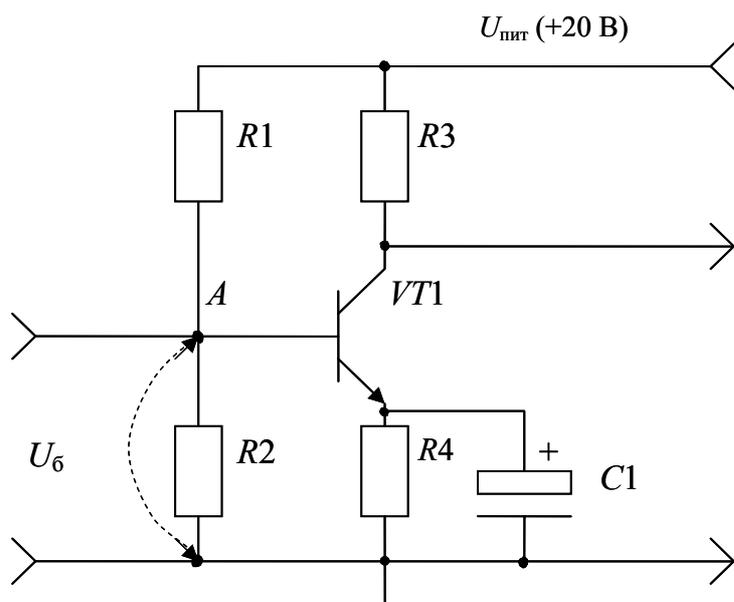


Рис.5.15. Электрическая принципиальная схема усилительного каскада

выбираем значение интенсивности отказов, соответствующее мощности рассеивания менее 0,5 Вт при постоянном токе, поскольку электрический каскад является маломощным, и энергетическая нагрузка элементов в основном определяется режимом по постоянному току. Аналогично выбираются значения интенсивностей отказов для остальных элементов (компонентов). Информация о значениях интенсивностей отказов представлена в табл.5.6.

Таблица 5.6

К примеру ориентировочного расчета показателей надежности

Группа элементов	Количество элементов в j -й группе n_j	Интенсивность отказов для элементов j -й группы $\lambda_{0j}, \times 10^{-6} \text{ 1/ч}$	Произведение $\lambda_{0j} \cdot n_j, \times 10^{-6} \text{ 1/ч}$
Транзистор	1	0,40	0,40
Резистор	4	0,05	0,2
Конденсатор	1	0,40	0,40
Печатная плата	1	0,2	0,2
Пайка	18	0,04	0,72
Σ	—	—	1,92

Число паяк определено как суммарное число выводов элементов и внешних выводов каскада. Из табл.5.6 понятно, как подсчитана суммарная интенсивность отказов элементов каскада. В данном случае пайки рассматриваются как элементы.

$$\lambda_{\Sigma} = 1,92 \cdot 10^{-6} \text{ 1/ч.}$$

2. С помощью обобщенного эксплуатационного коэффициента, найденного по справочным таблицам для наземных стационарных условий (см. табл.5.5), скорректируем величину λ_{Σ} , учтя тем самым приближенно электрический режим и условия работы элементов каскада. Примем $K_9 = 3,0$ (см. табл.5.5). Тогда

$$\lambda_{\Sigma}(v) = 1,92 \cdot 10^{-6} \cdot 3,0 \approx 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/ч.}$$

3. По общепринятым формулам для экспоненциального закона надежности подсчитываем другие показатели безотказности:

а) наработка каскада на отказ

$$T_0 = \frac{1}{\lambda_{\Sigma}(v)} = \frac{1}{5,8 \cdot 10^{-6}} \approx 172400 \text{ ч};$$

б) вероятность безотказной работы за время t_3

$$P_{\Sigma}(t_3) = e^{-t_3 \cdot \lambda(v)} = e^{-1000 \cdot 5,8 \cdot 10^{-6}} \approx 0,994;$$

в) гамма-процентная наработка до отказа (при $\gamma=99\%$)

$$T_{\gamma} = -\frac{\ln\left(\frac{\gamma}{100}\right)}{\lambda_{\Sigma}(v)} = -\frac{\ln 0,99}{5,8 \cdot 10^{-6}} \approx 1733 \text{ ч}.$$

Пример 5.3. Выполним уточненный расчет показателей безотказности усилительного каскада, рассмотренного в примере 5.2 [26].

Параметры элементов:

$$R1=43 \text{ кОм} \pm 10\%; R2=10 \text{ кОм} \pm 10\%;$$

$$R3=1,2 \text{ кОм} \pm 10\%; R4=300 \text{ Ом} \pm 10\%$$

$$C1=10 \text{ мкФ} \begin{matrix} +30\% \\ -10\% \end{matrix}.$$

Для сборки каскада использован печатный монтаж. Тип выбранных резисторов ОМЛТ с номинальной мощностью рассеивания $P_{\text{ном}} = 0,125 \text{ Вт}$ и допуском на сопротивление $\pm 10\%$. Тип выбранного конденсатора К50-6 с допустимым напряжением $U_{\text{ном}} = 6 \text{ В}$. Тип транзистора VT1 – КТ301Д. Напряжение источника питания $U_{\text{пит}} = 20 \text{ В} \pm 10\%$.

Усилительный каскад используется в составе радиоэлектронного устройства, для которого характерны следующие условия эксплуатации:

диапазон рабочих температур – $10 \dots +45 \text{ }^\circ\text{C}$; относительная влажность воздуха до 80% при температуре $+25 \text{ }^\circ\text{C}$; атмосферное давление $93 \pm 13 \text{ кПа}$.

Расчет теплового режима устройства, в котором используется усилительный каскад, показал, что перегрев в нагретой зоне составляет не более $18 \text{ }^\circ\text{C}$, а средний нагрев воздуха в устройстве – примерно $12 \text{ }^\circ\text{C}$.

Решение. 1. Определим, какие значения коэффициентов электрической нагрузки характерны для выбранных элементов усилительного каскада.

Для подсчета указанных коэффициентов воспользуемся формулами табл.5.4. Номинальные или допустимые по ТУ

эксплуатационные электрические характеристики, используемые в формулах табл.5.4 для резисторов и конденсатора, указаны в условии примера, а именно: для резисторов $P_{\text{ном}}=0,125$ Вт; для конденсатора $U_{\text{ном}}=6$ В.

Для транзистора допустимые (предельные) по ТУ электрические характеристики определим из справочных данных на транзистор типа КТ301Д. Получим:

постоянный ток коллектора $I_{\text{к}}=10$ мА;

постоянное напряжение между коллектором и эмиттером $U_{\text{кэ}}=30$ В;

мощность, рассеиваемая на коллекторе при температуре $+60$ °С, $P_{\text{доп}} = 150$ мВт;

мощность, рассеиваемая на коллекторе при температуре $+85$ °С, $P_{\text{доп}} = 58$ мВт;

при повышении температуры от $+60$ до $+85$ °С допустимая мощность снижается линейно, т.е. по закону

$$P_{\text{доп}} = 370,8 - 3,68 \cdot t^{\circ},$$

где t° – температура окружающей среды, °С

Значения электрических характеристик элементов в рабочем режиме определим, выполнив экспресс-анализ (приближенный расчет) электрического режима рассматриваемого усилительного каскада (см. рис.5.15).

Экспресс-анализ для простоты иллюстрации выполним для средних значений параметров элементов. При детальном инженерном анализе следует учитывать экстремальные условия при нагрузке всех элементов. С методикой такого анализа можно ознакомиться, например, в работе [18].

При экспресс-анализе рассматриваемого усилительного каскада следует учесть эквивалентное входное сопротивление цепи база – эмиттер, включенное параллельно резистору $R2$. Это сопротивление ($r_{\text{вх}}$) можно определить как

$$r_{\text{вх}} = r_{\text{б}} + (1 + \beta)R4 \approx (1 + \beta)R4,$$

где $r_{\text{б}}$ – сопротивление тела базы транзистора.

Согласно ТУ транзистор КТ301Д имеет коэффициент усиления по току $\beta=20\dots60$.

В данном примере, по условию, максимальная рабочая температура устройства составляет $+45$ °С, а перегрев в нагретой зоне – до 18 °С. Следовательно, максимальная рабочая температура транзистора может быть $+63$ °С. Поэтому для дальнейшего анализа из справочника взяты значения коэффициента усиления по току, соответствующие именно этой температуре.

Для расчетов примем среднее значение коэффициента

$$\beta = \frac{20 + 60}{2} = 40.$$

Тогда

$$r_{\text{вх}} = (1 + 40) \cdot 300 = 12300 \text{ Ом} = 12,3 \text{ кОм}.$$

Общее сопротивление параллельно включенных резистора R_2 и сопротивления $r_{\text{вх}}$.

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_2 \cdot r_{\text{вх}}}{R_2 + r_{\text{вх}}} = \frac{10 \cdot 12,3}{10 + 12,3} \approx 5,52 \text{ кОм}.$$

Ток, протекающий через резистор R_1 ,

$$I_{R1} = \frac{U_{\text{пит}}}{R_1 + R_{\text{вх}}} = \frac{20}{43 + 5,52} \approx 0,41 \text{ мА}.$$

Напряжение на базе (в точке А)

$$U_{\text{б}} = I_{R1} \cdot R_{\text{вх}} = 0,41 \cdot 5,52 \approx 2,26 \text{ В}.$$

Ток, протекающий через базу транзистора,

$$I_{\text{б}} = \frac{U_{\text{б}}}{r_{\text{вх}}} = \frac{2,26}{12,3} \approx 0,184 \text{ мА}.$$

Ток коллектора транзистора

$$I_{\text{к}} = \beta \cdot I_{\text{б}} = 40 \cdot 0,184 = 7,36 \text{ мА};$$

Мощности, рассеиваемые на резисторах:

на резисторе R_1

$$P_{R1} = I_{R1}^2 R_1 = (0,41 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 43 \cdot 10^3 \approx 7,23 \cdot 10^{-3} \text{ Вт};$$

на резисторе R_2

$$P_{R2} = \frac{U_{\text{б}}^2}{R_2} = \frac{2,26^2}{10 \cdot 10^3} \approx 0,51 \cdot 10^{-3} \text{ Вт};$$

на резисторе R_3

$$P_{R3} = I_{\text{к}}^2 R_3 = (7,36 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1,2 \cdot 10^3 \approx 65 \cdot 10^{-3} \text{ Вт};$$

на резисторе R_4 (предполагая, что $I_{R4} = I_{\text{э}} \approx I_{\text{к}}$)

$$P_{R4} = I_{\text{к}}^2 R_4 = (7,36 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 300 \approx 16,3 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_{C1} = U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 \approx I_{\text{к}} \cdot R_4 = 7,36 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \approx 2,2 \text{ В}.$$

Напряжение на транзисторе

$$U_{VT1} = U_{пит} - (U_{R4} + U_{R3}) = U_{пит} - (U_{R4} + I_{к} \cdot R3) = 20 - (2,2 + 7,36 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2 \cdot 10^3) \approx 8,97 \text{ В.}$$

Мощность, рассеиваемая на транзисторе (коллекторе),

$$P_{VT1} = I_{к} \cdot U_{VT1} = 7,36 \cdot 10^{-3} \cdot 8,97 \approx 0,066 \text{ Вт} = 66 \text{ мВт.}$$

Коэффициент электрической нагрузки резисторов $R1-R4$ и конденсатора $C1$ подсчитываем по формулам табл.5.4 с учетом того, что для резисторов $P_{ном} = 0,125 \text{ Вт}$, а для конденсатора $U_{ном} = 6 \text{ В}$.

Нетрудно убедиться, что для транзистора КТ301Д в рассматриваемой электрической схеме определяющими электрическими характеристиками, влияющими на надежность, являются как ток коллектора, так и прикладываемое к нему напряжение. Поэтому учет электрической нагруженности транзистора выполним с помощью коэффициента электрической нагрузки по мощности. Для подсчета указанного коэффициента необходимо располагать значением $P_{доп}$, соответствующим максимальной рабочей температуре транзистора. Эту температуру определим как

$$t_{V1max}^{\circ} = t_{раб.маx}^{\circ} + \Delta t^{\circ},$$

где $t_{раб.маx}^{\circ}$ – максимальная рабочая температура устройства.

Получим

$$t_{V1max}^{\circ} = 45 + 18 = 63 \text{ }^{\circ}\text{C.}$$

Согласно ТУ, с повышением температуры от $+60$ до $+85 \text{ }^{\circ}\text{C}$ допустимая мощность, рассеиваемая транзистором, изменяется по закону

$$P_{доп}^{(t^{\circ})} = 370,8 - 3,68 \cdot t^{\circ}, \text{ мВт.}$$

Для температуры $t^{\circ} = 63 \text{ }^{\circ}\text{C}$

$$P_{доп}^{(63^{\circ})} = 370,8 - 3,68 \cdot 63 \approx 139 \text{ мВт.}$$

Следовательно, коэффициент нагрузки транзистора

$$K_{н} = \frac{P_{VT1}}{P_{доп}^{(t^{\circ})}} = \frac{66}{139} \approx 0,47.$$

Значения коэффициентов электрической нагрузки, подсчитанные для элементов усилительного каскада, указаны в табл.5.7.

К примеру расчета показателей надежности

Группа элементов (поз. обозн.)	Кол-во элементов в группе n_j	Справочное значение λ_{0j} , $\times 10^{-6}$ 1/ч	Коэф-т электр. нагрузки K_n	Макс. рабочая температура, °С	Произведение поправочных коэф-тов α_Σ	Значение $\lambda_j(v)$, $\times 10^{-6}$ 1/ч	Значение $n_j \cdot \lambda_j(v)$, $\times 10^{-6}$ 1/ч
VT1	1	0,40	0,47	63	1,5	0,600	0,6
R1,R2	2	0,05	<0,1	63	0,15	0,008	0,016
R3	1	0,05	0,52	63	0,7	0,035	0,035
R4	1	0,05	0,13	63	0,2	0,01	0,01
C1	1	0,55	0,37	58	2,0	1,1	1,1
Печат. плата	1	0,2	—	58	1,0	0,2	0,2
Пайка	18	0,04	—	58	3,0	0,12	2,16
Σ	—						$\approx 4,2$

2. При учете электрического режима и условий работы элементов усилительного каскада примем во внимание два важнейших фактора: коэффициенты электрической нагрузки K_n и температуру t° .

Коэффициенты электрической нагрузки элементов были определены выше (см. табл.5.7).

Температуру элементов определим следующим образом: для теплонагруженных элементов (R1-R4 и VT1)

$$t_i^\circ = t_{\text{раб.макс}}^\circ + \Delta t_3^\circ,$$

где $t_{\text{раб.макс}}^\circ$ – максимальная рабочая температура;

Δt_3° – перегрев в нагретой зоне устройства;

для нетеплонагруженных элементов (конденсатор, печатная плата, пайки)

$$t_i^\circ = t_{\text{раб.макс}}^\circ + \Delta t_B^\circ,$$

где Δt_B° – средний перегрев воздуха в устройстве.

Расчетные значения температуры элементов внесены в табл.5.7.

3. Формируем группы однотипных элементов.

В данном случае образуются две группы однотипных элементов с количеством элементов в группе более одного. Первая группа – это резисторы R1 и R2 (для них $K_n < 0,1$), вторая группа – пайки. Отдельные группы образуют элементы R3, R4, C1 и VT1. Самостоятельную группу составляет также печатная плата.

4. Суммарную интенсивность отказов элементов усилительного каскада определяем по формулам (5.44), (5.45). При этом справочные значения интенсивностей отказов элементов каждой группы находим с использованием прил.2, а поправочные коэффициенты, учитывающие влияние коэффициентов электрической нагрузки и температуры, определяем по номограммам, приведенным в прил.3 на рис.ПЗ.1-ПЗ.3.

Результаты расчетов сведены в табл.5.7.

Расчетное значение величины $\lambda_{\Sigma}(v)$ составляет

$$\lambda_{\Sigma}(v) \approx 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/ч.}$$

5. Определяем наработку на отказ:

$$T_0 = 1/\lambda_{\Sigma}(v) = 1/4,2 \cdot 10^{-6} \approx 238100 \text{ ч.}$$

Рассчитываем вероятность безотказной работы усилительного каскада за время $t_3 = 1000$ ч.

Получим

$$P(t_3) = e^{-t_3 \cdot \lambda_{\Sigma}(v)} = e^{-1000 \cdot 4,2 \cdot 10^{-6}} \approx 0,996.$$

6. Определяем гамма-процентную наработку до отказа. Для значения $\gamma = 99\%$

$$T_{\gamma} = -\frac{\ln(99/100)}{4,2 \cdot 10^{-6}} \approx 2393 \text{ ч.}$$

7. Подсчитываем среднее время восстановления T_B по формуле

$$T_B \approx \frac{\sum_{j=1}^k n_j \tau_j \lambda_j(v)}{\sum_{j=1}^k n_j \lambda_j(v)},$$

где τ_j – среднее время восстановления элементов j -ой группы;

k – количество групп однотипных элементов, включая пайки, несущие конструкции и т.п.

Расчет величины T_B с использованием данных прил. 4 и табл. 5.7 сведен в табл. 5.8.

С учетом того, что

$$\sum_{j=1}^k n_j \lambda_j(v) = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/ч,}$$

$$T_B \approx \frac{2,8 \cdot 10^{-6}}{4,2 \cdot 10^{-6}} \approx 0,7 \text{ ч.}$$

К примеру расчета показателей восстанавливаемости

Группа элементов	Количество элементов в группе n_j	Значение $\lambda_j(v), \times 10^{-6}$ 1/ч	Значение τ_j , ч (прил.4)	Произведение $n_j \cdot \tau_j \cdot \lambda_j(v),$ $\times 10^{-6}$
VT1	1	0,6	0,8	0,48
R1, R2	2	0,008	0,5	0,008
R3	1	0,035	0,5	0,018
R4	1	0,01	0,5	0,005
C1	1	1,1	0,55	0,605
Печат. плата	1	0,2	3,0	0,600
Пайка	18	0,12	0,5	1,080
Σ	—	—	—	$\approx 2,8$

8. Подсчитываем значение вероятности восстановления устройства за заданное время τ_3 (примем $\tau_3=1,5$ ч)

$$v(\tau_3) = 1 - e^{-\tau_3/T_B} \approx 0,88.$$

5.20. Расчет показателей надежности при разных законах распределения времени до отказа элементов

Изложенные выше методики оценки показателей надежности проектируемых РЭУ исходят из того, что для элементов имеет место экспоненциальный закон надежности, т.е. время до отказа распределено по экспоненциальному закону

$$w(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}; t \geq 0$$

и, следовательно, для вероятности безотказной работы элементов за время t_3 справедливо выражение

$$p_i(t_3) = e^{-\lambda_i t_3},$$

где λ_i – интенсивность отказов i -го элемента.

Опыт эксплуатации РЭУ, а также проведенные исследования показали, что такое допущение в ряде случаев может привести к заметным ошибкам. Экспериментально было установлено, что время до отказа элементов может быть описано следующими законами (моделями):

а) экспоненциальным (резисторы, конденсаторы, некоторые типы полупроводниковых приборов, интегральных микросхем и др.);

б) законом Вейбулла (многие типы полупроводниковых приборов, интегральных микросхем, механические элементы);

в) нормальным (элементы, функционирование которых связано с заметным износом конструктивных частей – элементы коммутации, механические элементы);

г) логарифмически нормальным (некоторые типы коммутирующих и механических элементов).

Полной информации о законах распределения времени до отказа элементов пока нет. При расчете показателей безотказности РЭУ в случае различных законов распределения времени до отказа элементов пользуются основным расчетным соотношением

$$P_{\Sigma}(t_3) = p_1(t_3) \cdot p_2(t_3) \cdot \dots \cdot p_N(t_3),$$

однако $p_i(t_3)$ определяются с учетом конкретного закона распределения.

Рассмотрим, как подсчитывать $p_i(t_3)$ для законов перечисленных выше.

1. Экспоненциальный закон.

Плотность распределения времени до отказа в этом случае имеет вид

$$w(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t},$$

где λ_i – параметр экспоненциального распределения для i -го элемента, численно равный интенсивности его отказов.

При экспоненциальном распределении учет коэффициентов электрической нагрузки и условий работы элементов, как отмечалось выше, выполняется путем корректировки показателя λ_i с использованием формулы

$$\lambda_i(v) = \lambda_{0i} \prod_{j=1}^m \alpha(x_j),$$

где $\lambda_i(v)$ – интенсивность отказов i -го элемента с учетом коэффициентов электрической нагрузки и условий работы элементов;

λ_{0i} – справочное значение интенсивности отказов i -го элемента;

$\alpha(x_j)$ – поправочный коэффициент, учитывающий влияние фактора x_j ; $j=1, \dots, m$;

m – количество факторов.

Значение $p_i(t_3)$ подсчитывают по выражению

$$p_i(t_3) = e^{-t_3 \lambda_i(v)},$$

где t_3 – заданное время работы РЭУ, а, следовательно, i -го элемента в составе РЭУ.

2. Закон Вейбулла. Плотность распределения времени до отказа в этом случае задается выражением

$$w(t) = \rho\beta t^{\beta-1} e^{-\rho t^\beta},$$

где ρ, β – параметры распределения (β – коэффициент формы).

Справочными показателями надежности должны быть ρ и β .

Учет коэффициентов электрической нагрузки и условий эксплуатации элементов может выполняться путем корректировки параметра ρ , используя выражение

$$\rho_i(v) = \rho_{0i} \prod_{j=1}^m \alpha(x_j), \quad (5.47)$$

где ρ_{0i} – справочное значение показателя ρ_i ;

$\alpha(x_j)$ – поправочный коэффициент для ρ_i , учитывающий влияние фактора x_j .

К сожалению, экспериментальные данные о значениях поправочных коэффициентов для ρ отсутствуют.

Формула для подсчета $p_i(t_3)$ в случае закона Вейбулла может быть получена в виде

$$p_i(t_3) = e^{-t_3^\beta \rho_i(v)}. \quad (5.48)$$

Экспериментально установлено, что для большинства полупроводниковых приборов коэффициент формы β лежит в диапазоне $0,3 \dots 0,7$. Замечено, чем выше культура производства и совершеннее технология изготовления полупроводниковых приборов, тем ниже значение коэффициента формы β .

Если $\beta=1$, то имеем дело с чисто экспоненциальным распределением. Для многих механических элементов коэффициент формы β приближается к $2 \dots 3$, и распределение Вейбулла в этом случае заменяют нормальным распределением.

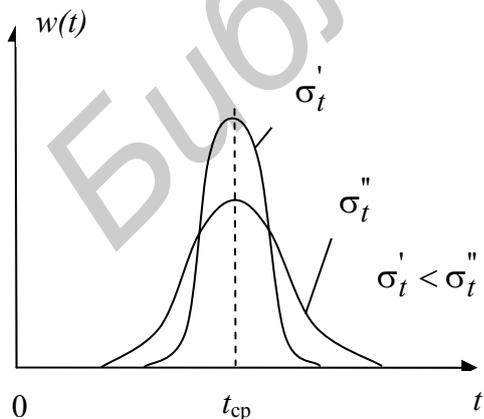


Рис.5.4. График плотности распределения

3. Нормальный закон.

График плотности распределения времени до отказа в этом случае имеет вид, показанный на рис.5.16.

Параметрами распределения являются $t_{ср}$ – среднее время безотказной работы (среднее время до отказа) и σ_t – среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы. Следовательно, в этом случае они должны использоваться в качестве справочных данных о

надежности (безотказности) i -го элемента.

Учет коэффициентов электрической нагрузки и условий эксплуатации элементов можно выполнить путем корректировки показателя t_{cp} , используя выражение

$$t_{cp.i}(v) = \frac{t_{cp.i}^{(0)}}{\prod_{j=1}^m \alpha(x_j)}, \quad (5.49)$$

где $t_{cp.i}(v)$ – среднее время безотказной работы i -го элемента с учетом коэффициента электрической нагрузки и условий работы этого элемента;

$\alpha(x_j)$ – поправочный коэффициент для $t_{cp.i}$, учитывающий влияние j -го фактора (смысл этого коэффициента аналогичен экспоненциальному распределению и распределению Вейбулла);

$t_{cp.i}^{(0)}$ – справочное значение $t_{cp.i}$.

Экспериментальные данные о значениях поправочных коэффициентов для показателя t_{cp} в настоящее время отсутствуют.

Значение $p_i(t_3)$ может быть определено как

$$p_i(t_3) = S = \int_{t_3}^{\infty} w_i(t) dt = F(\infty) - F(t_3) =$$

$$1 - \Phi\left(\frac{t_3 - t_{cp.i}}{\sigma_{ti}}\right) = \left. \begin{array}{l} \text{в зависимости} \\ \text{от свойства} \\ \text{функции} \\ \Phi(\dots) \end{array} \right| = \Phi\left(\frac{t_{cp.i} - t_3}{\sigma_{ti}}\right), \quad (5.50)$$

где $\Phi(\dots)$ – табличная функция стандартного нормального распределения (см. табл. П1.1, прил. 1).

Смысл приведенной формулы понятен из рис. 5.17.

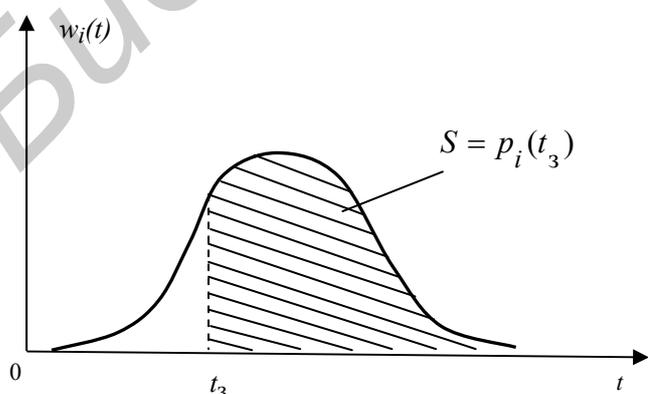


Рис. 5.17. К определению вероятности $p(t_3)$

4. Логарифмически нормальный закон. В случае этого закона необходимо помнить: по нормальному закону распределено не время до отказа, а логарифм этого времени. Значения вероятностей $p(t_3)$ определяют аналогично нормальному закону, используя выражения, приведенные в подразд. 2.2.4.

5.21. Параметрическая надежность РЭУ

5.21.1. Параметрическая надежность и функционирование РЭУ

Под *параметрической надежностью* РЭУ будем понимать вероятность отсутствия в изделии постепенных отказов при его работе в заданных условиях эксплуатации в течение времени t_3 . Понятие параметрической надежности прямо связано с понятием постепенных отказов.

Для аналоговых РЭУ постепенный отказ проявляется в снижении эффективности использования устройств. Например, предположим, что согласно техническим условиям чувствительность радиоприемного устройства должна быть не ниже 100 мкВ/м. Допустим, что с течением времени чувствительность ухудшилась и стала 150 мкВ/м, на слух мы можем это даже не почувствовать. Однако способность радиоприемного устройства принимать слабые сигналы снизилась, т.е. можно говорить о снижении эффективности его использования. В данном случае зафиксировать наступление постепенного отказа можно путем измерения уровня чувствительности с помощью контрольно-измерительных приборов. Но если чувствительность ухудшится еще в большей степени и станет равной, например 900 мкВ/м, то весьма вероятно, что мы и на слух почувствуем: с чувствительностью радиоприемного устройства что-то не так.

Применительно к цифровым РЭУ постепенный отказ может вызвать ложное срабатывание логических элементов или, наоборот, несрабатывание в нужный момент. Поэтому постепенные отказы в цифровых устройствах обычно приводят к искажению или даже потере обрабатываемой информации.

5.21.2. Причины, обуславливающие появление постепенных отказов

Основными причинами, вызывающими возникновение постепенных отказов, являются следующие:

производственный разброс выходного параметра, вызываемый действием производственных погрешностей параметров элементов;

уход выходного параметра от номинального значения из-за процессов старения элементов;

отклонения выходного параметра от номинального значения под воздействием дестабилизирующих факторов (температуры, влажности и т.д.).

Ввиду наличия производственного (технологического) разброса выходной параметр уже может заметно отклониться от номинального значения. В процессе эксплуатации, а также под



Рис.5.18. Изменение выходного параметра при эксплуатации РЭС

приятый, согласно установленному для данных РЭУ графику (так называемых регламентных работ), а также в процессе эксплуатации РЭУ.

5.22. Оценка параметрической надежности РЭУ на этапе проектирования

Точный расчет уровня параметрической надежности проектируемых РЭУ является достаточно сложной задачей. На практике используют приближенные методы, основанные на ряде допущений. Рассмотрим один из методов, но сначала сделаем следующее замечание.

Старение проявляется в сравнительно медленном изменении параметров РЭУ, обычно в одну сторону, хотя скорость старения для разных экземпляров одного и того же вида изделий различна. В интервале времени от $t = 0$ до $t = t_3$ худшим случаем с точки зрения ухода выходного параметра от номинального значения является, как правило, момент времени $t = t_3$. Поэтому в дальнейшем под словами “к моменту времени $t = t_3$ с учетом действия дестабилизирующих факторов” будем понимать худший случай с точки зрения параметрической надежности изделия в интервале времени от $t = 0$ до $t = t_3$ в заданных условиях эксплуатации.

В инженерных расчетах обычно пользуются гипотезой о том, что выходной параметр y в течение времени t_3 , для которого интересуются вероятностью отсутствия постепенных отказов, распределен по нормальному закону. Замечено, что в большинстве случаев выходные параметры РЭУ хорошо описываются этим законом на всем участке эксплуатации от $t = 0$ до $t = t_3$. Однако в процессе эксплуатации, т.е. с изменением времени t , а также под

воздействием дестабилизирующих факторов может произойти дальнейшее изменение выходного параметра. В итоге его значение может достигнуть критической границы и затем выйти за нее (рис.5.18). Наступит постепенный отказ (момент времени $t_{отк}$).

Постепенные отказы выявляют и устраняют в основном в процессе профилактических меро-

воздействием дестабилизирующих факторов изменяются параметры нормального закона. Обычно происходит смещение среднего значения выходного параметра и изменяется степень его рассеивания относительно нового среднего значения (рис.5.19).

Здесь приняты следующие обозначения:

$w(y/t=0)$ – функция плотности распределения выходного параметра y в момент времени $t=0$ без учета действия дестабилизирующих факторов (температуры, влажности и т.п.);
 $w(y/t=t_3)$ – функция распределения выходного параметра y к моменту времени $t=t_3$, с учетом действия дестабилизирующих факторов.

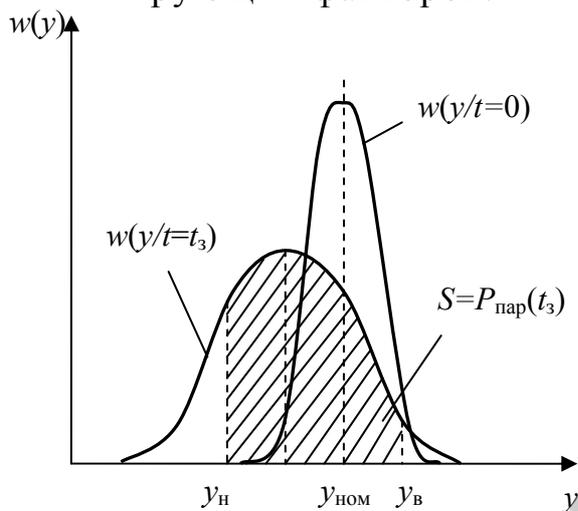


Рис.5.19. Влияние процесса эксплуатации на распределение выходного параметра РЭУ:
 y_n, y_v – нижняя и верхняя допустимые границы

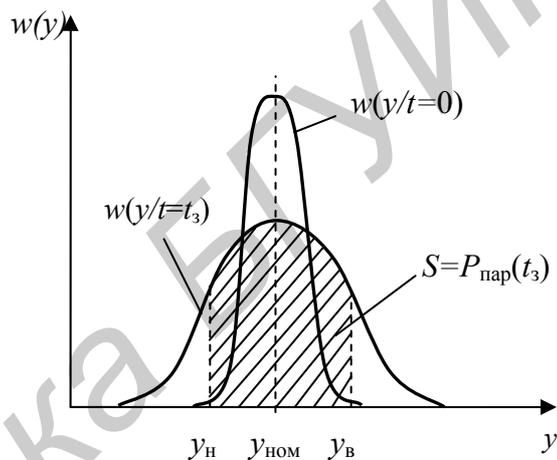


Рис.5.20. Изменение рассеивания выходного параметра при эксплуатации РЭУ

В ряде случаев смещения среднего (номинального) значения выходного параметра не происходит, а изменяется (как правило, возрастает) степень рассеивания этого параметра около среднего значения (рис.5.20). Пусть допуск на выходной параметр y задан, исходя из служебного назначения РЭУ, нижней y_n и верхней y_v границами. Тогда вероятность, с которой гарантируется отсутствие постепенного отказа в течение промежутка времени $(0...t_3)$ численно равна заштрихованной площади (рис.5.19, 5.20).

Воспользуемся гипотезой о нормальном распределении выходного параметра y . Искомую вероятность $P_{\text{пар}}(t_3)$ определим с помощью формулы (см. подразд. 2.2.2, с.20)

$$P(a \leq y \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \quad (5.51)$$

где a, b – нижняя и верхняя границы интересующей области;

- m – математическое ожидание (среднее значение) параметра y ;
 σ – среднее квадратическое отклонение параметра y ;
 $\Phi(\dots)$ – функция стандартного нормального распределения ($m=0$; $\sigma=1$); эта функция подробно рассмотрена в подразд. 2.2.2.

Применительно к рассматриваемой задаче параметры в формуле (5.51) примут значения:

$$a=y_{\text{н}}; \quad b=y_{\text{в}}; \quad m=M(y/t=t_3); \quad \sigma=\sigma(y/t=t_3),$$

где $M(y/t=t_3)$ – среднее значение выходного параметра в момент времени $t=t_3$ с учетом действия дестабилизирующих факторов;

$\sigma(y/t=t_3)$ – среднее квадратическое отклонение выходного параметра в момент времени $t=t_3$ с учетом действия дестабилизирующих факторов.

Тогда вероятность $P_{\text{пар}}(t_3)$, с которой гарантируется отсутствие постепенного отказа, определится как

$$P_{\text{пар}}(t_3) = \Phi\left[\frac{y_{\text{в}} - M(y/t=t_3)}{\sigma(y/t=t_3)}\right] - \Phi\left[\frac{y_{\text{н}} - M(y/t=t_3)}{\sigma(y/t=t_3)}\right]. \quad (5.52)$$

Если при анализе параметрической надежности использовать относительные погрешности выходного параметра, то расчетная формула может быть получена по аналогии с формулой (5.52), согласно рис. 5.21.

В этом случае имеем:

$$a=-\delta; \quad b=\delta; \quad m=M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right); \quad \sigma=\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right);$$

где δ – половина поля допуска относительной погрешности входного параметра, задаваемая исходя из служебного назначения РЭУ.

Тогда, используя выражение (5.51), можно записать:

$$P_{\text{пар}}(t_3) = \Phi\left[\frac{\delta - M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)}{\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)}\right] - \Phi\left[\frac{-\delta - M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)}{\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)}\right]. \quad (5.53)$$

Если процесс эксплуатации РЭУ не вызывает смещения среднего значения относительной погрешности выходного параметра, то

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right) = 0.$$

В этом случае (5.53) упрощается и примет вид

$$P_{\text{нар}}(t_3) = \Phi \left[\frac{\delta}{\sigma \left(\frac{\Delta y}{y} / t = t_3 \right)} \right] - \Phi \left[\frac{-\delta}{\sigma \left(\frac{\Delta y}{y} / t = t_3 \right)} \right] =$$

$$= 2\Phi \left[\frac{\delta}{\sigma \left(\frac{\Delta y}{y} / t = t_3 \right)} \right] - 1. \quad (5.54)$$

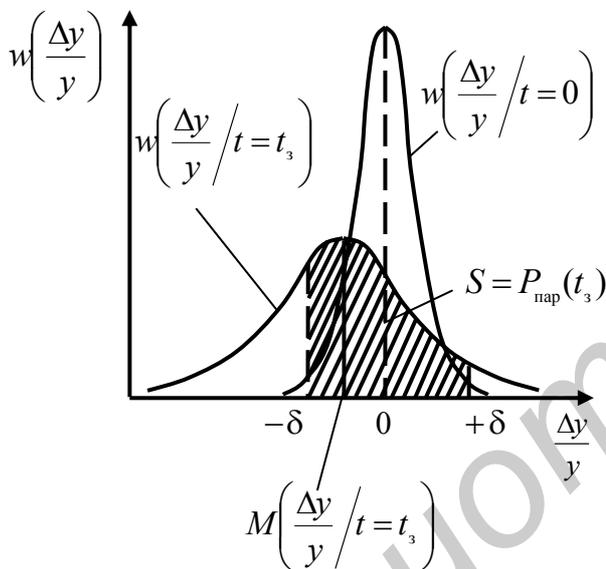


Рис. 5.21. Влияние процесса эксплуатации на распределение относительной погрешности выходного параметра

Для того, чтобы воспользоваться формулами (5.52)-(5.54), необходимо знать, насколько максимально сместится среднее значение выходного параметра или его относительной погрешности при работе РЭУ в заданных условиях эксплуатации в течение времени t_3 , т.е. характеристики $M(y/t = t_3)$ или

$M \left(\frac{\Delta y}{y} / t = t_3 \right)$. Кроме этого, надо располагать сведениями о степени разброса параметра y или величины $\Delta y/y$ для заданных условий эксплуатации и времени t_3 , т.е. характеристиками $\sigma(y/t = t_3)$ или $\sigma \left(\frac{\Delta y}{y} / t = t_3 \right)$. Покажем, как

определить указанные характеристики на примере рассмотрения относительной погрешности $\Delta y/y$. Это прямо связано с расчетом эксплуатационного отклонения величины $\Delta y/y$.

Используя формулу (см. подразд.4.8)

$$M \left(\frac{\Delta y}{y} \right)_{T_{\pm}} = \Delta T \sum_{i=1}^n B_i \cdot M(\alpha_i), \quad (5.55)$$

определяют среднее значение $\Delta y/y$, обусловленное действием температуры. Знаки \pm при нижнем индексе T означают, что эта

характеристика должна подсчитываться отдельно для областей положительной (+) и отрицательной (-) температур.

По формуле

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}} = \Delta\tau \cdot \sum_{i=1}^n B_i \cdot M(c_i) \quad (5.56)$$

подсчитывают среднее значение $\Delta y/y$, обусловленное действием старения.

В формулах (5.55), (5.56) $M(\alpha_i)$ и $M(c_i)$ — среднее значение температурного коэффициента и коэффициента старения i -го первичного параметра.

Далее определяют максимальные смещения среднего значения $\Delta y/y$ относительно среднего значения производственного допуска. Суммирование выполняют отдельно для положительных и отрицательных средних значений $M(\Delta y/y)_T$ и $M(\Delta y/y)_{\text{ст}}$ приемами, рассмотренными в подразд.4.9, используя выражения

$$\left. \begin{aligned} M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)_{\Sigma+} &= M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{T+} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}+}; \\ M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)_{\Sigma-} &= M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{T-} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}-}. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Знаки “+” и “-” подчеркивают, что выполняется суммирование положительных и отрицательных средних значений $M(\Delta y/y)_T$ и $M(\Delta y/y)_{\text{ст}}$.

Для нахождения величины $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$ подсчитывают вначале значение характеристики

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} + \sigma^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{T\pm} + \sigma^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}}, \quad (5.58)$$

где $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}$ — среднее квадратическое отклонение относительной производственной погрешности y ;

$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{T\pm}$ — среднее квадратическое отклонение относительной погрешности y , обусловленной действием температуры;

$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}$ — среднее квадратическое отклонение относительной погрешности y , вызываемой старением.

Знаки \pm при индексе T в формуле (5.58) означают, что значение $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_T$ должно выбираться на основе анализа температурных допусков, рассчитанных для положительной и отрицательной областей температур.

Выражение (5.58) справедливо для случая, когда рассматриваются два дестабилизирующих фактора (время и температура), а также в предположении, что между указанными погрешностями отсутствует корреляция.

Расчет $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}}$ может быть выполнен с использованием выражения (4.11). Для расчета $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_T$ и $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}}$ можно воспользоваться формулами

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_T \approx \frac{1}{3} |\Delta T| \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2 \cdot \delta^2(\alpha_i)}, \quad (5.59)$$

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{ст}} \approx \frac{1}{3} \Delta \tau \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2 \cdot \delta^2(c_i)}. \quad (5.60)$$

Описание параметров, используемых в формулах (5.59) и (5.60), приведено в подразд. 4.8. Формулы записаны для случая гипотезы о нормальном распределении температурных коэффициентов α_i и коэффициентов старения c_i , а также в предположении, что корреляция между температурными коэффициентами первичных параметров отсутствует. Последнее относится и к коэффициентам старения первичных параметров.

Использование указанной гипотезы в большинстве практических случаев оправдано. Если же между температурными коэффициентами первичных параметров существует корреляция, то формула (5.59) примет вид

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_T \approx \frac{1}{3} |\Delta T| \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i^2 \cdot \delta^2(\alpha_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^n r_{ij} B_i B_j \delta(\alpha_i) \delta(\alpha_j)}, \quad (5.61)$$

где r_{ij} — коэффициенты парной корреляции между температурными коэффициентами i -го и j -го первичных параметров.

Запись $i < j$ в выражении (5.61) означает, что рассматриваются все неповторяющиеся сочетания пар первичных параметров, причем $i \neq j$.

В случае учета корреляции между коэффициентами старения первичных параметров формула (5.60) должна быть дополнена слагаемым под квадратным корнем по аналогии с выражением (5.61).

Значения $M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$ и $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$, используемые в формулах (5.52)-(5.54), далее можно определить по выражениям

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right) = \frac{M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+} + M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-}}{2}; \quad (5.62)$$

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right) = \sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} + \frac{M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+} - M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-}}{6}. \quad (5.63)$$

Получение интересующих величин $M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$ и $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$ было показано в предположении учета двух важнейших эксплуатационных факторов – температуры и времени (старения).

Если требуется учесть влияние двух других факторов, не принятых во внимание при расчете, то $M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$ и $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$, определяемые по формулам (5.62) и (5.63), корректируют с помощью коэффициента запаса ξ , умножая на $\xi = 1,05 \dots 1,2$. Значение характеристик $M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$ и $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$, в том числе с учетом коэффициента запаса ξ , можно также определить на этапе расчета эксплуатационного допуска по формуле (4.32), используемой для получения предельных отклонений $\frac{\Delta y}{y}$:

$$\Delta_3 = \xi \left\{ \left[M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-} - \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} \right] \dots \left[M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} + \delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} \right] \right\}.$$

Подсчитав по этой формуле нижнее $\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_н$ и верхнее $\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_в$ предельные отклонения величины $\frac{\Delta y}{y}$, выделяют характеристики $M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$ и $\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right)$, используемые в формулах (5.52)-(5.54):

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right) = \frac{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_н + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)_в}{2}; \quad (5.64)$$

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y}/t=t_3\right) = \frac{\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_\Sigma + \frac{M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+} - M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma-}}{2}}{3}. \quad (5.65)$$

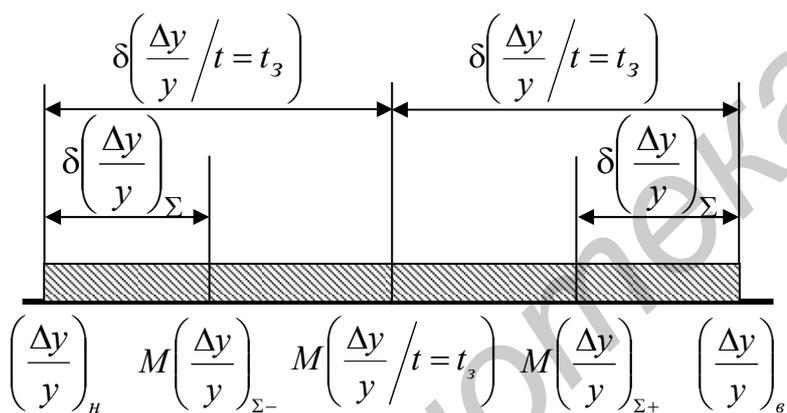


Рис.5.22. Поле эксплуатационного допуска, получаемое расчетным путем

(5.65). Так формула (5.65) справедлива в предположении, что $\delta\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_\Sigma$ подсчитана с гарантированной вероятностью $P_r = 0,9973$.

Коэффициент гарантированного обеспечения допуска в этом случае $\rho = 1$.

Реальные РЭУ в большинстве случаев характеризуются несколькими выходными параметрами. В этих случаях для определения вероятности, с которой гарантируется отсутствие постепенных отказов, можно воспользоваться выражением

$$P_{\text{пар}\Sigma(t_3)} = \prod_{j=1}^L P_{\text{пар} j(t_3)}, \quad (5.66)$$

На рис.5.22 заштрихованный диапазон есть поле эксплуатационного допуска с учетом коэффициента запаса ξ . Предполагается, что все характеристики, указанные на рис.5.22, уже пересчитаны с учетом этого коэффициента. Из рис.5.22. понятен смысл формул (5.64) и

где $P_{\text{нарj}}(t_3)$ – вероятность отсутствия постепенного отказа по j -му выходному параметру;

L – количество выходных параметров, которыми характеризуется параметрическая надежность РЭУ.

Выражение (5.66) записано в предположении, что постепенные отказы по разным выходам параметра РЭУ независимы.

Пример 5.4. Для делителя напряжения, рассмотренного в разд.4.5-4.6, определить вероятность, с которой гарантируется отсутствие постепенного отказа. Заданное время работы делителя $t_3 = 1000$ ч. Диапазон рабочих температур $+10..+50$ °С. Параметры резисторов: $R1 = 3$ кОм $\pm 10\%$, $R2 = 2$ кОм $\pm 10\%$. Типы резисторов – МЛТ. Условие отсутствия постепенного отказа: $\Delta q/q \leq \pm 5\%$. Зависимость выходного параметра (коэффициента деления q) от первичных параметров ($R1$ и $R2$) задается моделью

$$q = \frac{R1 + R2}{R2}.$$

Решение. 1. Значения коэффициентов влияния, подсчитанные по формуле (4.9), равны: $B_{R1} = 0,6$; $B_{R2} = -0,6$.

2. В примере 4.3 (подразд.4.6.3) получено

$$M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\text{пр}} = M\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\text{пр}} = 0$$

3. Для подсчета значения $\sigma(\Delta q/q)_{\text{пр}}$ воспользуемся выражением (4.11), однако вначале по правилу “трех сигм” определим значения $\sigma(\Delta R_i/R_i)$. Получим:

$$\sigma\left(\frac{\Delta R1}{R1}\right) \approx \frac{\delta\left(\frac{\Delta R1}{R1}\right)}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,3\%.$$

Аналогично

$$\sigma\left(\frac{\Delta R2}{R2}\right) \approx 3,3\%.$$

Тогда

$$\sigma\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\text{пр}} = \sqrt{0,6^2 \cdot 3,3^2 + (-0,6)^2 \cdot 3,3^2} \approx 2,8\%.$$

4. Вероятностное описание температурных коэффициентов и коэффициентов старения, полученное на основе анализа справочной информации [17]:

$$M(\alpha_R) = 0; \delta(\alpha_R) = 7 \cdot 10^{-2}\% \text{ } 1/^\circ\text{C при } T = +20...+100^\circ\text{C};$$

$$M(\alpha_R) = 0; \delta(\alpha_R) = 12 \cdot 10^{-2}\% \text{ } 1/^\circ\text{C при } T = +20...-60^\circ\text{C};$$

$$M(C_R) = 3 \cdot 10^{-4} \% \text{ 1/час}; \quad \delta(C_R) = 2 \cdot 10^{-4} \% \text{ 1/час}.$$

5. Определим значение величины $M(\Delta q/q)_T$ для положительной и отрицательной областей температур:

$$M\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{T_+} = M\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{T_-} = 0, \text{ так как } M(\alpha_R) = 0.$$

6. Принимая гипотезу о нормальном распределении температурных коэффициентов и учитывая, что эти коэффициенты некоррелированы (так как резисторы делителя дискретные), по формуле (5.59) подсчитаем значения $\sigma(\Delta q/q)_T$ для положительной (+) и отрицательной (-) областей температур. Получим:

$$\sigma\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{T_+} = \frac{1}{3} \sqrt{0,6^2 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^2 + (-0,6)^2 \cdot (7 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (50 - 20)} \approx 0,6\%;$$

$$\sigma\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{T_-} = \frac{1}{3} \sqrt{0,6^2 \cdot (12 \cdot 10^{-2})^2 + (-0,6)^2 \cdot (12 \cdot 10^{-2})^2 \cdot |10 - 20|} \approx 0,34\%.$$

Для дальнейших расчетов выбираем большее значение

$$\sigma\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_T = 0,6\%.$$

7. Определяем $M(\Delta q/q)_{ст}$ по формуле (5.56).

$$M\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{ст} = 10000 \cdot [0,6 \cdot 3 \cdot 10^{-4} + (-0,6) \cdot 3 \cdot 10^{-4}] = 0$$

8. Принимая гипотезу о нормальном распределении коэффициентов старения и учитывая, что эти коэффициенты некоррелированы, по выражению (5.60) подсчитаем $\sigma(\Delta q/q)_{ст}$.

$$\sigma\left(\frac{\Delta q}{q}\right) = \frac{1000}{3} \cdot \sqrt{0,6^2 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^2 + (-0,6)^2 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^2} \approx 0,57\%.$$

9. С учетом выражения (5.62) и того, что

$$M\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\Sigma_+} = M\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\Sigma_-} = 0, \text{ получим}$$

$$M\left(\frac{\Delta q}{q} / t = t_3\right) = 0.$$

Это означает, что в данном случае не наблюдается смещения центра рассеивания относительной погрешности выходного параметра q .

10. Предположим, что между погрешностями, обусловленными производственными причинами, старением и действием температуры, отсутствует корреляция. Тогда для определения $\sigma\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\Sigma}$ можно использовать формулу (5.58). С учетом того, что $M\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma+} = 0$ и $M\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\Sigma+} = M\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\Sigma-} = 0$, по выражению (5.63) получаем

$$\sigma\left(\frac{\Delta y}{y} / t = t_3\right) = \sigma\left(\frac{\Delta y}{y}\right)_{\Sigma} = \sqrt{2,8^2 + 0,6^2 + 0,57^2} \approx 2,92\%.$$

11. По условию примера $\delta = 5\%$. Определяем вероятность, с которой гарантируется отсутствие постепенного отказа. С учетом замечания, сделанного в п.9, применяем формулу (5.54). Получаем

$$P_{\text{пар}}(t_3) = 2\Phi\left(\frac{5}{2,92}\right) - 1 \approx 1,914 - 1 = 0,914.$$

При расчете использована табл.П1.1, прил.1.

Вероятность того, что в заданных условиях эксплуатации в течение времени $t = t_3$ произойдет постепенный отказ, определится как

$$q_{\text{пар}}(t_3) = 1 - P_{\text{пар}}(t_3) = 1 - 0,914 = 0,086.$$

Это означает, что при эксплуатации делителей в заданных условиях в течение промежутка времени $(0 \dots t_3)$ в среднем из каждых 100 делителей лишь у 8-9 экземпляров выходной параметр (коэффициент деления q) выйдет за пределы $q_{\text{ном}} \pm 5\%$.

Номинальное значение коэффициента деления $q_{\text{ном}}$ определится как

$$q_{\text{ном}} = \frac{R1_{\text{ном}} + R2_{\text{ном}}}{R2_{\text{ном}}} = \frac{3 + 2}{2} = 2,5,$$

где $R1_{\text{ном}}, R2_{\text{ном}}$ — номинальные значения первичных параметров — сопротивлений резисторов $R1$ и $R2$.

5.23. Использование вероятностных моделей старения параметров РЭУ и элементов

Параметры РЭУ являются случайными функциями времени эксплуатации и хранения. В начальный момент, после изготовления изделия, значения его параметров будут случайными вследствие технологических (производственных) погрешностей. Старение и износ проявляются в сравнительно медленном изменении параметров РЭУ, обычно в одну сторону. Как правило, процесс этот необратимый. Реализация этого процесса — монотонное изменение выходных параметров РЭУ во времени. Но скорость старения для различных экземпляров одного и того вида РЭУ обычно различна и зависит от условий его использования и эксплуатации, конструктивного исполнения, и т.п. Время достижения параметром его допустимой границы будет случайным.

Рассмотрим задачу определения закона распределения времени достижения критических границ при постепенных изменениях параметров. Применение общей теории и методов случайных функций в этом случае затруднительно из-за сложности математических выражений.

Для расчетов устойчивости параметров и надежности РЭУ по постепенным отказам выбирают математическую модель процесса старения. Реализации процессов старения, получаемые экспериментально, в общем случае являются нелинейными. Для приближенных инженерных расчетов применяют линейную аппроксимацию действительных кривых, т.е. предполагают линейные изменения параметра в каждом единичном экземпляре РЭУ в пределах среднего времени между двумя отсчетами.

В этом случае для параметра x как функции времени t , можно записать

$$x(t) = \xi + \eta t, \quad (5.67)$$

где ξ, η — независимые случайные величины;
 $\xi = x(t=0)$ — начальное значение параметра $x(t)$; случайность значения ξ определяется производственными причинами;
 η — случайная скорость старения или износа, отражает различие исходных свойств материалов и конструкций.

Сформулируем задачу таким образом. Известны законы распределения величин ξ и η . Требуется найти закон распределения времени t достижения параметром $x(t)$ критической границы $x_{кр}$ что позволяет рассчитать вероятность того, что за время t параметр не достигнет критической границы, т.е. оценить

вероятность, отсутствия за время t постепенного отказа по параметру $x(t)$.

Для решения этой задачи выполним построения, показанные на рис. 5.23.

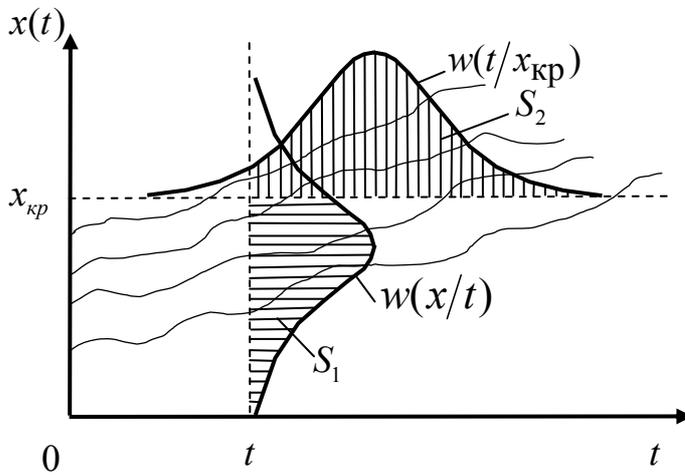


Рис.5.23. К вопросу о нахождении закона распределения времени достижения параметром критической границы

В вертикальном сечении по t имеем распределение параметра $w(x/t)$. В горизонтальном сечении по $x_{кр}$ имеем плотность распределения $w(t/x_{кр})$ случайного времени достижения параметром $x(t)$ критического уровня $x_{кр}$.

Из построений видно, что число реализаций, пересекающих границу $x_{кр}$ для моментов времени, больших t , равно числу реализаций в сечении t при $x < x_{кр}$.

Следовательно, площади S_1 и S_2 (см. рис.5.23) равны между собой. В свою очередь можно записать:

$$S_1 = \text{Вер} \{x(t) < x_{кр}\} = F(x_{кр}/t);$$

$$S_2 = 1 - \text{Вер} \{T < t/x_{кр}\} = 1 - F(t/x_{кр}),$$

где T — случайное время достижения параметром $x(t)$ критической границы $x_{кр}$;

$F(x_{кр}/t)$ — функция распределения параметра $x(t)$, подсчитанная для значения $x(t) = x_{кр}$ в сечении t ;

$F(t/x_{кр})$ — функция распределения времени достижения параметром $x(t)$ критического уровня $x_{кр}$, подсчитанная со значением t .

Из равенства $S_1 = S_2$ получим

$$F(x_{кр}/t) = 1 - F(t/x_{кр}).$$

Отсюда

$$F(t/x_{кр}) = 1 - F(x_{кр}/t).$$

Из последнего выражения видно, что нужно определить значение функции распределения $F(x/t)$ в точке $x(t) = x_{кр}$ для сечения t .

Будем считать, что случайные величины ξ и η , входящие в функцию (5.67), подчиняются нормальным законам. Тогда, согласно [7], сама функция $x(t)$ также будет подчиняться нормальному закону с параметрами

$$m_x = m_\xi + m_\eta \cdot t;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 \cdot t^2},$$

где m , σ — знаки математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

Выразим функцию распределения параметра $x(t)$ через табличную функцию стандартного нормального распределения $\Phi(\dots)$ (прил.1, табл.П1.1).

$$F(x_{кр}/t) = \Phi\left[\frac{x_{кр} - m_x}{\sigma_x}\right].$$

Функция распределения времени достижения критической границы:

$$F(t/x_{кр}) = 1 - F(x_{кр}/t) = 1 - \Phi\left(\frac{x_{кр} - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Вероятность того, что за время t параметр не достигнет критического уровня $x_{кр}$ определится как

$$P(t) = 1 - F(t/x_{кр}) = \Phi\left(\frac{x_{кр} - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Это выражение может быть использовано и в задачах оценки уровня параметрической надежности по параметру $x(t)$.

Пример 5.5. Реализация случайного процесса (сопротивления резистора R) аппроксимируется линейной функцией

$$R(t) = R_0 + ct,$$

где R_0, c — случайные величины, которые подчиняются нормальному закону с параметрами:

$$m_{R_0} = 100 \text{ Ом}; \sigma_{R_0} = 3,3 \text{ Ом}; m_c = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Ом/ч}; \sigma_c = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Ом/ч};$$

Требуется определить вероятность того, что за время $t = 10000$ ч сопротивление резистора не достигнет критического уровня $R_{кр} = 112 \text{ Ом}$.

Решение.

1. Определяем математическое ожидание m_R функции $R(t)$:

$$m_R = m_{R_0} + m_C \cdot t = 100 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 = 104 \text{ Ом}$$

2. Определяем среднее квадратическое отклонение σ_R функции $R(t)$:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_{R_0}^2 + \sigma_C^2 \cdot t^2} = \sqrt{3,3^2 + (1 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 10000^2} \approx 3,5 \text{ Ом}$$

3. Вычисляем вероятность того, что сопротивление резистора за время $t = 1000$ ч не выйдет за пределы $R_{кр} = 112$ Ом.

$$P(t) = \Phi\left(\frac{R_{кр} - m_R}{\sigma_R}\right) = \Phi\left(\frac{112 - 104}{3,5}\right) = \Phi(2,29) \approx 0,987.$$

5.24. Пути обеспечения параметрической надежности РЭУ на этапе проектирования

Обеспечение параметрической надежности является важной частью общих мероприятий по обеспечению надежности при проектировании РЭУ.

При обеспечении параметрической надежности РЭУ особое место отводится оценке отклонений выходных параметров, обусловленных действием производственных погрешностей параметров комплектующих элементов РЭУ, старения и температуры. В зависимости от класса РЭУ первостепенное внимание может быть уделено и другим факторам среды — влажности, радиации и т.п.

При решении задач по обеспечению параметрической надежности РЭУ в большинстве случаев приходится решать задачи и по ее оценке. Для этого используют вероятность, с которой гарантируется отсутствие постепенных отказов. Расчет вероятности основан на анализе точности и стабильности выходных параметров РЭУ. При анализе точности выполняется учет влияния на выходные параметры производственных погрешностей первичных параметров, а при анализе стабильности — учет влияния времени, процессов старения и факторов окружающей среды (температуры, влажности и т.д.).

На практике возможны различные пути обеспечения параметрической надежности. Рассмотрим два из них.

1. На основе анализа точности и стабильности выходного параметра устанавливается эксплуатационный допуск при такой гарантированной вероятности его обеспечения, которая численно равна заданной вероятности отсутствия постепенных отказов.

Если полученное значение допуска отвечает служебному назначению РЭУ, то задача обеспечения параметрической надежности по данному выходному параметру решена. В противном случае необходимо пересмотреть требования к точности параметров элементов (уменьшить их погрешности) или же применить элементы с более высокой стабильностью параметров и затем повторить анализ точности и стабильности выходного параметра. И так до тех пор, пока значение эксплуатационного допуска не будет отвечать служебному назначению РЭУ.

2. Пусть в качестве исходного задано значение эксплуатационного допуска на j -й выходной параметр, установленное исходя из служебного назначения РЭУ.

Будем считать, что эксплуатационный допуск на j -й выходной параметр симметричен и задан значением половины поля допуска $\delta(\Delta y/y)_{\Sigma}$ суммарной относительной погрешности выходного параметра. Тогда задача обеспечения параметрической надежности РЭУ по j -му выходному параметру состоит в том, чтобы выбрать элементы с таким уровнем стабильности (временной, температурной и т.д.) и с такой производственной погрешностью, чтобы нахождение j -го параметра в пределах заданного допуска $\delta(\Delta y/y)_{\Sigma}$ за промежуток времени t_3 гарантировалось с вероятностью не ниже, чем значение $P_{\text{пар}}(t_3)$.

Решить поставленную задачу можно следующим образом. Выбрать типы элементов и по нормативно-техническим документам (ГОСТам, ОСТам, ТУ и т.п.) найти характеристики их стабильности: коэффициенты старения, температурные коэффициенты и т.п. Основываясь на этих характеристиках, рассчитать какой суммарный разброс выходного параметра вызовут действия старения в течение промежутка времени t_3 и эксплуатационных факторов заданного уровня. Предположим, что суммарный разброс характеризуется средним значением $M(\Delta y/y)_{\text{стаб}}$ и половиной поля рассеивания $\delta(\Delta y/y)_{\text{стаб}}$.

Сопоставляя значения $M(\Delta y/y)_{\text{стаб}}$ и $\delta(\Delta y/y)_{\text{стаб}}$ с заданным значением эксплуатационного допуска $\pm \delta(\Delta y/y)_{\Sigma}$ определяют, какая доля допуска (какой разброс) приходится на производственную погрешность выходного параметра. И, наконец, основываясь на рассчитанной производственной погрешности, например, величине половины поля допуска $\delta(\Delta y/y)_{\text{пр}}$, назначают допуски на первичные параметры. Если $\delta(\Delta y/y)_{\text{пр}}$ оказалась настолько малой, что не удастся выбрать разумные и экономически оправданные допуски на параметры элементов, то следует пересмотреть их типы, выбрать элементы с более стабильными параметрами или же, если это оправдано, предусмотреть меры защиты элементов от воздействия факторов окружающей среды.

5.25. Методы повышения надежности РЭУ

5.25.1. Понятие эксплуатационной надежности РЭУ

Надежность РЭУ закладывается на этапе проектирования, должна обеспечиваться на этапе производства и поддерживаться на этапе эксплуатации.

Надежность, которую РЭУ показывают в процессе эксплуатации, называют *эксплуатационной надежностью*. Опыт эксплуатации РЭУ показывает, что эксплуатационная надежность практически всегда ниже того уровня, который получается по результатам расчета при проектировании устройства. Это объясняется как явными ошибками проектирования и несовершенством технологии производства, так и низкой достоверностью справочных данных о надежности элементов.

Изложенные ранее методики оценки показателей надежности РЭУ дают приемлемые для практики результаты в случае выполнения для элементов *принципа статистической устойчивости показателей надежности*. Этот принцип означает, что для элементов данного типа независимо от партий или времени их выпуска должны сохраняться статистические значения показателей надежности, а именно:

$$M(\lambda_i) \approx \text{const};$$

$$\sigma(\lambda_i) \approx \text{const},$$

где M , σ – знаки математического ожидания и среднего квадратического отклонения;

i – номер партии элемента данного типа.

В условиях относительно совершенных технологических процессов и высокой культуры производства этот принцип, как правило, выполняется.

5.25.2. Общая характеристика методов повышения надежности РЭУ

Все методы повышения надежности РЭУ можно условно разбить на две группы методов: схемотехнические и конструкторско-технологические.

Основные методы первой группы:

1. Выбор электрических принципиальных схем, содержащих минимальное число элементов.

2. Выбор электрических принципиальных схем, выходные характеристики которых слабо зависят от изменения напряжения питания и разброса параметров элементов. Это позволяет в значительной степени повысить параметрическую надежность, т.е. свести к минимуму постепенные отказы.

3. Выбор электрических принципиальных схем, устойчивых к воздействию дестабилизирующих факторов, особенно температуры.

Среди методов второй группы необходимо отметить следующие:

1. Правильный выбор коэффициентов электрической нагрузки элементов. Замечено, что для большинства элементов оптимальные значения коэффициентов электрической нагрузки близки к числам $0,2 \dots 0,6$. Их снижение повышает надежность элементов, однако ведет, как правило, к увеличению массы, габаритов, стоимости устройства. Кроме того, чрезмерное уменьшение коэффициентов электрической нагрузки может вызвать нестабильную работу ряда элементов, например, полупроводниковых приборов.

2. Отбраковка потенциально ненадежных элементов в условиях производства РЭУ. Используют как тренировку (термотренировку, электротренировку, электротермотренировку), так и методы индивидуального прогнозирования надежности элементов.

3. Защита элементов РЭУ от воздействия факторов окружающей среды.

Особую группу методов составляет повышение надежности путем резервирования.

Подробное рассмотрение методов повышения надежности РЭУ является предметом учебной дисциплины "Инженерное обеспечение надежности РЭС" и в данном учебнике не приводится. Здесь рассматривается резервирование, его виды и методы оценки показателей безотказности устройств при наличии резервирования, а также дается теоретическое обоснование тренировки как метода снижения интенсивности отказов элементов.

При изучении методов повышения надежности элементов и РЭУ читатель может использовать работы [5, 6, 20, 27, 28].

5.26. Резервирование как метод повышения надежности РЭУ

Резервирование — это введение в структуру устройства дополнительного числа элементов, цепей и (или) функциональных связей по сравнению с минимально необходимыми для функционирования устройства. Цель резервирования — повысить надежность устройства.

В зависимости от того, как подключаются резервные элементы в случае отказа основных, различают следующие виды резервирования:

- 1) постоянное;
- 2) замещением;
- 3) скользящее (может рассматриваться как частный случай резервирования замещением).

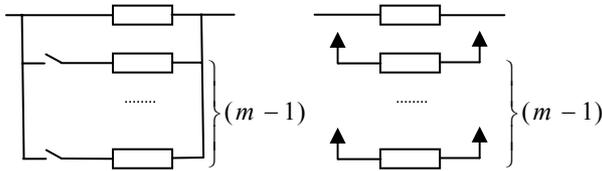


Рис.5.24. Схематическое изображение резервирования замещением:
 $(m-1)$ – количество резервных элементов

При постоянном резервировании резервные элементы постоянно подключены к основным и находятся в одинаковом с ними электрическом режиме. Деление элементов на основные и резервные носит здесь условный характер.

При резервировании замещением основной элемент в случае его отказа отключается от электрической цепи, обычно как по выходу, так и по входу, и вместо него подключается один из резервных элементов.

Переключение может выполняться либо автоматически с помощью переключающих устройств, либо вручную. Условно резервирование замещением изображается одним из способов, указанных на рис.5.24.

Скользящее резервирование — это резервирование замещением, при котором любой резервный элемент может замещать любой основной элемент. Это возможно лишь при их однотипности.

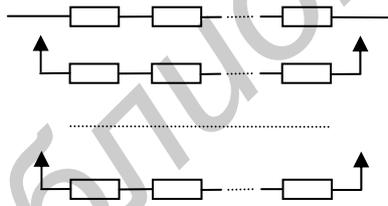


Рис.5.25. Общее резервирование

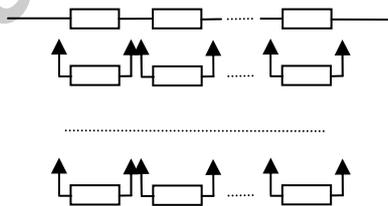


Рис.5.26. Раздельное (поэлементное) резервирование

При рассмотрении резервирования под словом "элемент" следует понимать как комплектующий элемент, так и каскад, функциональный узел, блок и т.д., имея в виду, что резервирование может выполняться на уровне различных частей РЭС.

В зависимости от того, какая часть РЭС резервируется, различают общее (рис.5.25) и раздельное (поэлементное) резервирование (рис.5.26).

При общем резервировании резервируется устройство в целом. При раздельном резервировании РЭС резервируется по частям.

5.27 Характеристика постоянного резервирования

При постоянном резервировании деление элементов на основные и резервные носит условный характер. Различают следующие способы соединения элементов резервируемого узла:

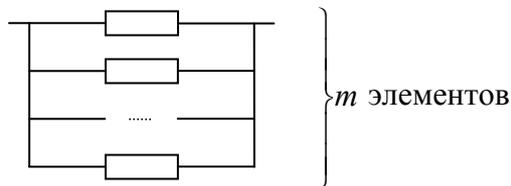


Рис.5.27. Параллельный способ соединения элементов резервируемого узла

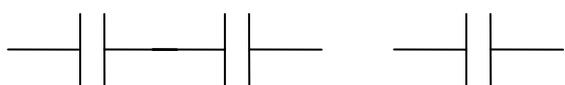


Рис.5.28. Последовательный способ соединения элементов резервируемого узла

1. Параллельный (рис.5.27).

Такой способ соединения используется в случае преобладания отказов типа "обрыв" (например, для резисторов).

2. Последовательный (рис.5.28).

Этот способ применяется тогда, когда преобладают отказы типа "короткое замыкание" (например, для конденсаторов).

3. Смешанный (рис.5.29).

Такой способ применяется тогда, когда отказы типа "обрыв"

и типа "короткое замыкание" примерно равновероятны, например, для полупроводниковых диодов.

На практике рассматриваемое постоянное резервирование используют тогда, когда между какими-то точками электрической схемы необходимо обеспечить наличие определенных свойств (резистивных, емкостных, полупроводящих, усилительных и т.д.), а количественное значение характеристики, описывающей эти свойства, не играет принципиальной роли.

Основными достоинствами постоянного резервирования являются: простота технической реализации и отсутствие даже кратковременного перерыва в работе в случае отказа элементов резервируемого узла. Это особенно важно для вычислительной техники и устройств цифровой обработки информации. Основные недостатки постоянного резервирования:

1) меньший выигрыш в надежности по сравнению с резервированием замещением;

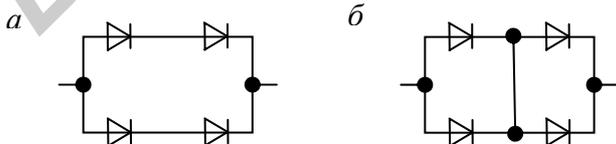


Рис.5.29. Примеры смешанного соединения элементов резервируемого узла:

a - последовательно-параллельная схема;
б - параллельно-последовательная схема

2) изменение электрического режима работы элементов резервируемого узла при отказе хотя бы одного из элементов;

3) отказ резервируемого узла в целом при коротком замыкании

одного из элементов в случае параллельного способа соединения элементов в узле;

4) отказ резервируемого узла в целом при обрыве одного из элементов в случае последовательного соединения элементов в узле.

На практике постоянное резервирование обычно выполняется на уровне комплектующих элементов и каскадов.

5.28. Оценка показателей безотказности устройства при наличии постоянного резервирования

Анализ безотказности выполняют основываясь на том, что для каждого элемента резервируемого узла справедливо выражение

$$p + q_o + q_{кз} = 1, \quad (5.68)$$

где p – вероятность безотказной работы;

q_o – вероятность отказа типа “обрыв”;

$q_{кз}$ – вероятность отказа типа “короткое замыкание”.

Предполагается, что вероятности p , q_o , $q_{кз}$, соответствующие элементу, подсчитываются для одного и того же заданного времени t_3 , т. е.

$$p = p(t_3); \quad q_o = q_o(t_3); \quad q_{кз} = q_{кз}(t_3).$$

Выражение (5.68) означает, что в любой момент времени элемент либо исправен, либо имеет отказ типа “обрыв” или “короткое замыкание”. Указанные три состояния являются несовместными и образуют полную группу событий.

Покажем прием анализа безотказности на примере параллельного способа соединения двух элементов резервируемого узла (рис.5.30).

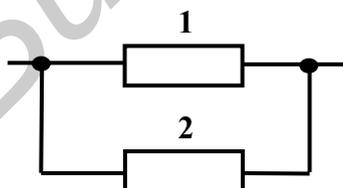


Рис.5.30. Параллельное соединение элементов

Будем предполагать, что элементы резервируемого узла идентичны и имеют характеристики p , q_o , $q_{кз}$.

Рассмотрим состояния, благоприятствующие исправной работе этого резервируемого узла. Всего состояний резервируемого узла девять ($3^2=9$), так как элемент имеет три состояния, а всего элементов два (см. рис.5.30). Из девяти

состояний благоприятствующими безотказной работе узла в целом будут лишь три (табл.5.9).

Состояние резервируемого узла, благоприятствующие его безотказной работе

Номер состояния	Элемент 1	Элемент 2
1	p	p
2	p	q_0
3	q_0	p

В табл.5.9 знаком p обозначено исправное состояние элемента, знаком q_0 – состояние, соответствующее отказу типа “обрыв”.

Так как указанные состояния являются несовместными, то вероятность безотказной работы резервируемого узла в целом может быть подсчитана как сумма вероятностей этих состояний, т.е.

$$P_{1,2}^{\text{пар}}(t_3) = pp + pq_0 + q_0p = p^2 + 2pq_0 \quad (5.69)$$

Если рассматривать далее в составе резервируемого узла три, четыре и т.д. элементов, то можно прийти к формуле вида

$$P_{1,2,\dots,3}^{\text{пар}}(t_3) = \sum_{j=0}^{m-1} C_m^{m-j} p^{m-j} q_0^j \quad (5.70)$$

где m – общее число элементов резервируемого узла;

C_m^{m-j} – биномиальные коэффициенты формулы Ньютона (коэффициенты бинома Ньютона).

Эти коэффициенты могут быть вычислены по формуле

$$C_m^{m-j} = \frac{m!}{(m-j)!j!} \quad (5.71)$$

Следует знать, что

$$C_m^{m-j} = C_m^j,$$

поэтому в формуле (5.70) величина C_m^{m-j} может быть заменена на величину C_m^j .

При использовании формулы (5.71) нужно помнить, что $0! = 1$.

В случае последовательного способа соединения элементов резервируемого узла формула для подсчёта вероятности безотказной работы резервируемого узла примет вид

$$P_{1,2,\dots,3}^{\text{пар}}(t_3) = \sum_{j=0}^{m-1} C_m^{m-j} p^{m-j} q_{\text{кз}}^j \quad (5.72)$$

Нетрудно увидеть, что формула (5.72) получается из формулы (5.70) путём замены вероятности q_0 на вероятность $q_{кз}$.

При смешанном способе соединения элементов резервируемого узла анализ безотказности зависит от конкретной схемы соединения элементов.

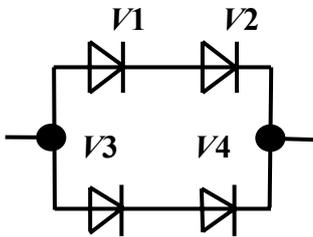


Рис.5.31. Смешанный способ соединения диодов резервируемого узла (последовательно-параллельная схема)

Рассматривая схему соединения диодов (см.рис.5.31), можно увидеть, что две последовательные цепочки соединены между собой параллельно, отсюда и название схемы: последовательно-параллельная.

В литературе [23] описывается прием анализа, основанный на рассмотрении состояний резервируемого узла. Так, в данном примере узел будет иметь

$$3^4=81 \text{ состояние,}$$

ибо каждый диод может принять одно из трех состояний, а в узле соединено четыре элемента.

Но из 81 состояния безотказной работе узла в целом благоприятствуют только 39 [23]. Поэтому можно указать эти состояния, а затем вероятность безотказной работы узла найти как сумму их вероятностей. Однако такой путь длинный, легко допустить неточность. Поэтому предлагается другой, более рациональный, способ.

Суть его состоит в следующем. Вначале диоды последовательной цепочки сворачиваются в один эквивалентный диод (рис.5.32), причем он будет иметь свои характеристики, а именно

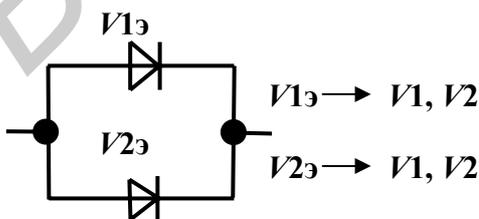


Рис.5.32. Свертка диодов последовательных цепочек в эквивалентный диод

Покажем, как выполнять анализ безотказности на примере смешанного способа соединения (рис.5.31).

Будем предполагать, что диоды резервируемого узла одинаковы и имеют следующие значения характеристик p , q_0 , $q_{кз}$ для времени t_3 :

$$\begin{aligned} p(t_3) &= p = 0,8; \\ q_0(t_3) &= q_0 = 0,1; \\ q_{кз}(t_3) &= q_{кз} = 0,1. \end{aligned}$$

$p_{э}$, $q_{0э}$, $q_{кзэ}$.

Предположим, что показатели безотказности эквивалентного диода $p_{э}$, $q_{0э}$, $q_{кзэ}$ каким-либо образом найдены. Тогда задача определения вероятности безотказной работы резервируемого узла в целом сводится к ранее рассмотренной задаче – параллельному соединению элементов резервируемого узла.

Применим изложенный подход к рассматриваемому примеру (см. рис.5.31).

Применяя формулу (5.69) для случая двух последовательно соединенных элементов, найдем вероятность безотказной работы эквивалентного диода. Получим

$$p_{\text{э}} = p^2 + 2pq_{\text{кз}} = 0,8^2 + 2 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,8.$$

Далее определим для эквивалентного диода характеристики $q_{\text{оэ}}$ и $q_{\text{кзэ}}$. Нетрудно установить, что для последовательного соединения только одно состояние благоприятствует отказу цепочки по типу “короткое замыкание”, а именно – отказ данного типа обоих диодов последовательной цепочки. Поэтому

$$q_{\text{кзэ}} = q_{\text{кз}} \cdot q_{\text{кз}} = q_{\text{кз}}^2 = 0,1^2 = 0,01.$$

Значение характеристики $q_{\text{оэ}}$ найдем, пользуясь соотношением (5.68).

Получим

$$q_{\text{оэ}} = 1 - (p_{\text{э}} + q_{\text{кзэ}}) = 1 - (0,8 + 0,01) = 0,19.$$

Окончательно вероятность безотказной работы всего резервируемого узла (см.рис.5.31) определим, пользуясь рис.5.32 и формулой (5.70) или ее реализацией (5.69) для случая двух параллельно соединенных элементов.

$$P_{\Sigma}(t_3) = P_{V1_{\text{э}}, V2_{\text{э}}}^{(\text{пар})}(t_3) = p_{\text{э}}^2 + 2p_{\text{э}}^2 q_{\text{оэ}} = 0,8^2 + 2 \cdot 0,8 \cdot 0,19 = 0,944.$$

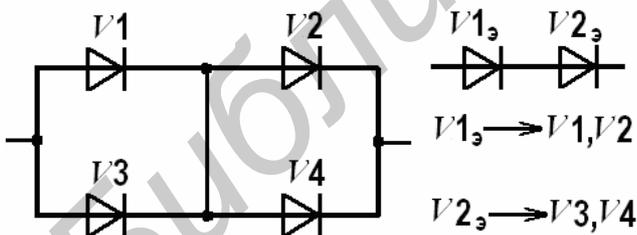


Рис.5.33. Параллельно-последовательная схема соединения элементов резервируемого узла и ее свертка

В случае соединения элементов по параллельно-последовательной схеме выполняется свертка в эквивалентный элемент цепочек из параллельно соединенных элементов (рис.5.33).

Анализ безотказности в этом случае аналогичен

вышерассмотренному примеру.

Заканчивая рассмотрение анализа безотказности устройств при наличии постоянного резервирования, заметим, что при таком резервировании характер отказов элементов играет принципиальную роль с точки зрения безотказности устройств в целом и обязательно должен приниматься во внимание.

5.29. Характеристика резервирования замещением

При резервировании замещением основной элемент в случае его отказа отключается от электрической схемы, и вместо него подключается один из резервных элементов. Для подключения резервного элемента используется переключающее устройство. Такие устройства могут работать в автоматическом режиме либо быть ручными.

Основной характеристикой резервирования, в том числе резервирования замещением, является кратность резерва [18], выражаемая несокращенной дробью и определяемая отношением

$$R = \frac{r}{n}, \quad (5.73)$$

где r – количество резервных элементов, способных замещать основные элементы данного типа; $r = m - n$ (см. рис.5.34);

n – количество основных элементов, резервируемых резервными элементами.

Примеры оценки кратности резерва понятны из рис.5.34.



Рис.5.34. Примеры оценки кратности резерва

Из рис.5.34 видно, что дробь, описывающую кратность резерва, нельзя сокращать, так как будет потеряна информация о характеристике резервирования.

Резервирование с кратностью резерва один к одному называют дублированием.

При резервировании замещением резервные элементы до вступления их в работу могут находиться в одном из трех режимов нагружения:

а) в нагруженном режиме. В этом случае говорят о нагруженном резерве или “горячем” резервировании. Здесь резерв находится в таком же электрическом режиме, как и основной элемент, и его ресурс вырабатывается одновременно с ресурсом основного элемента, точно так же, как и при постоянном резервировании (рис.5.35,а);

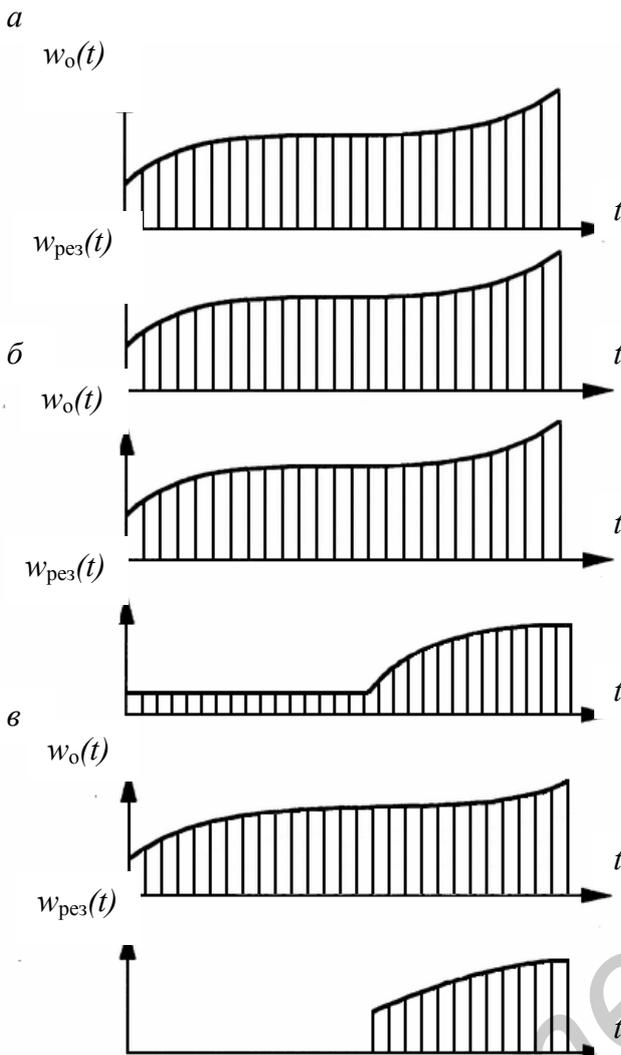


Рис.5.35. Плотность распределения времени безотказной работы резервируемой аппаратуры:
а - нагруженный резерв
б - облегченный резерв
в - ненагруженный резерв

б) в облегченном режиме. В этом случае говорят об облегченном резерве или “тёплом” резервировании. Ресурс резервных элементов начинает расходоваться с момента включения всего устройства в работу, однако интенсивность расхода ресурса резервных элементов до момента включения их вместо отказавших (время τ) значительно ниже, чем в обычных рабочих условиях (рис.5.35,б).

в) в ненагруженном режиме. В этом случае говорят о ненагруженном резерве или “холодном” резервировании. При этом условия, в которых находится резерв, настолько легче рабочих, что практически резервные элементы начинают расходовать свой ресурс только с момента включения их в работу вместо отказавших (рис.5.35,в).

Основные достоинства резервирования замещением:

1) большой выигрыш в надежности по сравнению с постоянным резервированием (в случаях ненагруженного и облегченного резерва);

2) отсутствие необходимости дополнительной регулировки в случае замещения основного элемента резервным, так как основной и резервный элементы одинаковы.

Основные недостатки резервирования замещением:

1) сложность технической реализации и связанное с этим увеличение массы, габаритов и стоимости всего резервируемого РЭУ;

2) перерыв в работе в случае замещения отказавшего элемента;

3) необходимость иметь переключающее устройство высокой надёжности. Для обеспечения этого иногда приходится резервировать сами переключающие устройства, обычно используя постоянное резервирование. На практике считается, что надёжность переключающего устройства должна быть по меньшей мере на порядок выше надёжности резервируемого элемента.

5.30. Анализ безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением (нагруженный резерв)

При анализе следует иметь в виду, что характер отказов элементов при резервировании замещением не играет никакой роли, так как отказавший элемент отключается от электрической схемы и вместо него подключается исправный.

Методы анализа безотказности зависят от того, в каком режиме нагружения находится резерв. Рассмотрим приемы анализа безотказности устройств в случае нагруженного резерва, проиллюстрировав их на примере.

Пример 5.6 Пусть схема (модель) расчета надёжности имеет вид, показанный на рис.5.36.

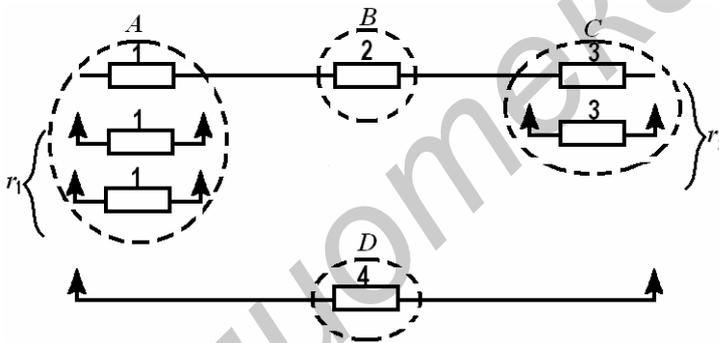


Рис.5.36. Схема расчёта надёжности

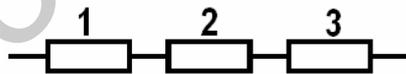


Рис.5.37. Структура элемента 4

Будем считать, что основной и резервные элементы одинаковы, а элемент 4 имеет минимальную функционально необходимую структуру, т.е. эквивалентен цепочке, показанной на рис.5.37.

Предположим, что для заданного времени t_3 работы устройства известны вероятности безотказной работы элементов 1, 2, 3:

$$p_1(t_3) = p_1 = 0,6; \quad p_2(t_3) = p_2 = 0,95; \quad p_3(t_3) = p_3 = 0,8.$$

Решение. Из рис.5.36 видно, что устройство состоит из узла A (представляет собой резервируемую структуру с кратностью резервирования два к одному), узла B (нерезервируемый элемент), узла C (резервируемая структура с кратностью резервирования один к одному) и узла D (резервный элемент для устройства в целом).

1. Определим вероятность безотказной работы элемента 4, помня, что с точки зрения надежности он состоит из трех последовательно соединенных элементов.

С использованием основного расчетного соотношения (5.34) можно определить вероятность безотказной работы элемента 4:

$$p_4 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,6 \cdot 0,95 \cdot 0,8 \approx 0,46.$$

2. Рассмотрим узел A . Вначале определим вероятность отказа элемента 1. Получим

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Нетрудно понять, что отказ узла A в целом произойдет тогда, когда откажут как основной элемент, так и два резервных. Вероятность этого события может быть подсчитана как

$$q_A = q_1 \cdot q_1 \cdot q_1 = q_1^3 = 0,4^3 = 0,064.$$

Здесь и далее считаем надежность переключающих устройств идеальной, т.е. $P_{\text{перекл}} = 1$. В случае произвольного числа резервных элементов r вероятность отказа резервируемого узла подсчитывается по формуле

$$q_y = q^{r+1}.$$

3. Рассмотрим узел C . Определим вероятность отказа элемента типа 3:

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Подсчитаем вероятность отказа узла C , получим

$$q_C = q_3^{r_3+1} = q_3^2 = 0,2^2 = 0,04.$$

4. Подсчитаем вероятность безотказной работы устройства, состоящего из узлов A , B , C . Вначале определим вероятность безотказной работы каждого из них:

$$p_A = 1 - q_A = 1 - 0,064 = 0,936;$$

$$q_B = p_2 = 0,95;$$

$$p_C = 1 - q_C = 1 - 0,04 = 0,96.$$

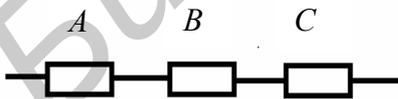


Рис.5.38. Соединение узлов A , B , C

Узлы A , B , C с точки зрения надежности соединены последовательно (рис.5.38).

Следовательно, используя основное расчетное соотношение, их общую вероятность безотказной работы можно определить как

$$P_{ABC} = p_A \cdot p_B \cdot p_C = 0,936 \cdot 0,95 \cdot 0,96 \approx 0,85.$$

5. Подсчитаем вероятность безотказной работы устройства в целом (с учетом узла D). Узел D резервирует узлы A , B , C , что схематически изображено на рис.5.39.

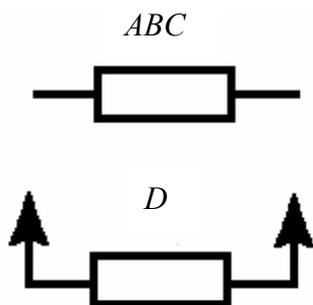


Рис.5.39. Соединение узлов ABC и D

Заметим, что в случае отсутствия какого-либо резервирования данного РЭУ вероятность безотказной работы была бы равна значению 0,45.

5.31. Анализ безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением с облегченным режимом работы резервных элементов

Рассмотрим простейший случай. РЭУ состоит из узла, представляющего собой один основной элемент и один – резервный (рис.5.40).

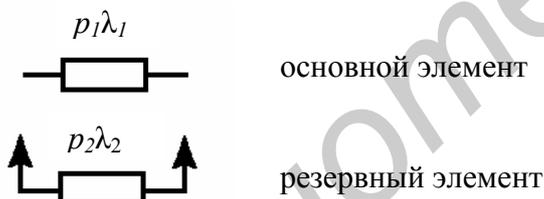


Рис.5.40. Схема резервируемого узла

Нетрудно понять, что отказ устройства в целом наступит при отказе как структуры ABC , так и узла D . Следовательно,

$$\begin{aligned} q_{РЭУ} &= q_{ABC} \cdot q_D = q_{ABC} \cdot q_A = \\ &= (1 - p_{ABC}) \cdot (1 - p_A) = \\ &= (1 - 0,85)(1 - 0,46) = 0,15 \cdot 0,54 \approx 0,08. \end{aligned}$$

Тогда

$$p_{РЭУ} = 1 - q_{РЭУ} = 1 - 0,08 = 0,92.$$

Резервный элемент до момента отказа основного элемента находится в облегченных условиях (режиме). Плотность распределения времени до отказа основного и резервного элементов показана на рис.5.35,б. Предполагаем,

что переключающее устройство действует безотказно. Найдем вероятность безотказной работы за время t узла, показанного на рис.5.40. Введем обозначения:

- p_1 – вероятность безотказной работы за время t основного элемента;
- λ_1 – интенсивность отказов основного элемента;
- p_2 – вероятность безотказной работы резервного элемента за время t в рабочем режиме;
- λ_2 – интенсивность отказов резервного элемента в рабочем режиме;
- p_{20} – вероятность безотказной работы резервного элемента за время t в облегченном режиме;

λ_{20} – интенсивность отказов резервного элемента в облегченном режиме;

τ – момент включения резервного элемента вместо отказавшего основного (см. рис.5.35, б).

Нетрудно установить, что основной элемент имеет два состояния: работает безотказно либо отказал. Резервный элемент имеет четыре состояния: работает безотказно либо отказал в облегченном режиме, работает безотказно либо отказал в рабочем режиме, который может иметь место с момента τ . Значит общее число состояний рассматриваемого узла (см. рис.5.40) будет равно восьми. Из них благоприятными безотказной работе узла в целом будут лишь следующие три состояния:

1) оба элемента работоспособны на интервале времени t ;

2) основной элемент работает безотказно на интервале времени от 0 до t , а резервный отказал в интервале времени от 0 до τ ;

3) основной элемент отказал на интервале времени от 0 до τ , а резервный элемент работает безотказно в интервале от 0 до τ (в облегченном режиме) и в интервале от τ до t (в рабочем режиме).

Тогда вероятность безотказной работы узла в целом за время t определяется как сумма вероятностей указанных трех состояний:

$$p_{\text{зам}(1...2)}^{(0)} = p(1) + p(2) + p(3). \quad (5.74)$$

Легко получить, что

$$\left. \begin{aligned} p(1) &= p_1 p_{20} \\ p(2) &= p_1 (1 - p_{20}) \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

При определении $p(3)$ существенную роль играет момент времени τ . Он случаен и может изменяться от 0 до t .

В работе [23] показано, что для любых значений τ

$$p(3) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_{20} - \lambda_2} (p_2 - p_1 p_{20}). \quad (5.76)$$

Подставляя (5.75) и (5.76) в выражение (5.74), получим

$$p_{\text{зам}(1...2)}^{(0)}(t) = p_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_{20} - \lambda_2} (p_2 - p_1 p_{20}). \quad (5.77)$$

В случае, когда основной и резервный элементы одинаковы, т.е. при

$$p_1 = p_2 = p \text{ и } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

получим

$$p_{\text{зам}(1...2)}^{(0)}(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda t} (1 + \alpha - e^{-\lambda_0 t}), \quad (5.78)$$

где $\alpha = \lambda_0/\lambda$ – коэффициент загрузки элемента.

Формула (5.78) получена в предположении, что для элементов справедлив экспоненциальный закон надежности, т.е. когда

$$p(t) = e^{-\lambda t}.$$

В случае, когда один элемент основной, а $m - 1$ резервные, формула для оценки вероятности безотказной работы узла может быть получена (при одинаковых элементах)[23] в виде

$$p_{\text{зам}(1...m)}^{(0)}(t) = \frac{\prod_{j=0}^{m-1} (1 + \alpha \cdot j)}{\alpha^{m-1} (m-1)!} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i C_{m-1}^i}{1 + \alpha \cdot i} e^{-(1+\alpha i)\lambda t}. \quad (5.79)$$

5.32. Анализ безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением с ненагруженным режимом работы резервных элементов

Для случая $t \leq \tau$ плотность распределения времени до отказа резервного элемента при ненагруженном режиме $w(t) = 0$ (см. рис.5.32, в). В этом режиме ($\lambda_{20} = 0$, $p_{20} = 1$, а $\alpha = 0$).

Выражения для определения вероятности безотказной работы за время t в случае одного основного элемента и $m-1$ резервных элементов, как показано в работе [23], имеют следующий вид:

$$p_{\text{зам}(1...2)}^{(\text{нн})}(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t); \quad (5.80)$$

$$p_{\text{зам}(1...m)}^{(\text{нн})}(t) \approx e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}. \quad (5.81)$$

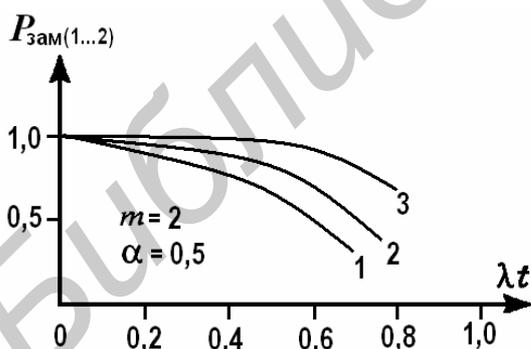


Рис.5.41. Влияние характера режима работы резервного элемента на вероятность безотказной работы узла при $m=2$, $\alpha=0,5$: 1 – нагруженный режим; 2 – облегченный режим; 3 – ненагруженный режим

На рис.5.41 показаны зависимости вероятности безотказной работы узла, состоящего из одного основного и одного резервного элементов, заменяемого способом замещения при различных режимах работы резервного элемента.

Из рис.5.41 видно, что наибольший выигрыш в надежности получается в ненагруженном режиме.

5.33. Теоретическое обоснование тренировки как метода снижения интенсивности отказов элементов

В общем случае возможны два основных направления повышения надёжности элементов:

1) устранение причин отказов при изготовлении элементов путем изучения, усовершенствования технологического процесса и повышения контроля. Для такого усовершенствования необходима замкнутая цепь обратной связи для передачи производственной информации.

2) выявление и удаление элементов с действительными и потенциальными отказами из готовой продукции до поставки ее потребителю.

Наиболее эффективным методом повышения надежности является устранение причин отказов путем усовершенствования технологии. Необходимо всеми силами добиваться более эффективной и оперативной производственной обратной связи. Но известно, что отказы возможны даже в хорошо освоенной продукции. По этой причине перед отправкой элементов заказчику может производиться тренировка, в процессе которой отказавшие элементы отбраковываются из массовой продукции. Ниже приводится теоретическое обоснование тренировки.

Тренировка – это такой метод отбраковки, при котором элементы заставляют работать в определенных условиях окружающей среды и электрической нагрузки, выбранных таким образом, чтобы в процессе работы вызвать отказ у дефектных элементов, не повреждая хороших. К дефектным элементам относятся те, которые могут отказать в течение предполагаемого времени работы элементов.

Перед тренировкой все элементы проверяются на соответствие техническим условиям (ТУ). Если они удовлетворяют требованиям ТУ, то их подвергают тренировке при заданных условиях нагрузки и затем производят повторную проверку соответствия требованиям ТУ. При этом все элементы, не удовлетворяющие требованиям ТУ, считаются отказавшими и удаляются из продукции. Оставшиеся элементы отправляются потребителю. Это позволит снабдить потребителя элементами, которые наверняка будут работать более длительное время.

Рассмотрим, каким образом тренировка позволяет обеспечить потребителя надежными элементами. Для этого воспользуемся распределением Вейбулла и будем считать, что оно достаточно хорошо описывает распределение времени до отказа элементов.

Как указывалось ранее, плотность распределения времени до отказа для распределения Вейбулла задается выражением

$$w(t) = \rho \cdot \beta \cdot t^{\beta-1} e^{-\rho \cdot t^\beta}; \quad \rho > 0, \quad (5.82)$$

где ρ , β – параметры распределения; β называют коэффициентом формы.

Напомним, что интенсивность отказов $\lambda(t)$, как функция времени, связана с характеристикой $w(t)$ зависимостью вида

$$\lambda(t) = \frac{w(t)}{p(t)}, \quad (5.83)$$

где $p(t)$ – вероятность безотказной работы элемента за время t .

Нетрудно убедиться, что в случае распределения Вейбулла

$$p(t) = \int_t^\infty w(t) dt = e^{-\rho \cdot t^\beta}. \quad (5.84)$$

Подставим выражения (5.82) и (5.84) в соотношение (5.83) получим

$$\lambda(t) = \rho \beta t^{\beta-1}. \quad (5.85)$$

На рис.5.42 показаны графики зависимости интенсивности отказов от времени при нескольких значениях вейбулловского параметра формы β . Графики построены с использованием выражения (5.85).

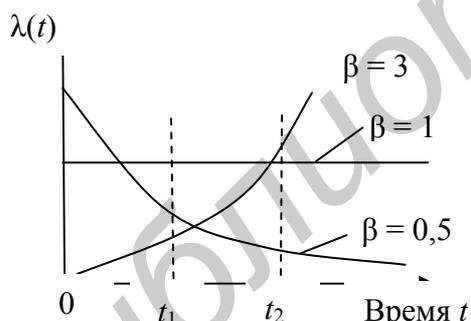


Рис.5.42. Зависимость интенсивности отказов от времени при разных значениях коэффициента формы β

Предположим, что тренировка длится до точки t_1 и наша цель – добиться минимальной средней интенсивности отказов λ в интервале от t_1 до t_2 . Дадим характеристику трем случаям, указанным на рис.5.42.

1. Если $\beta > 1$, то тренировка приведет к увеличению интенсивности отказов за период от t_1 до t_2 по сравнению с интенсивностью за тот же интервал времени, начинающийся

от нуля.

2. Если $\beta = 1$, то средняя интенсивность отказов постоянна на всем интервале времени и тренировка не улучшает и не ухудшает надежности выпускаемой продукции.

3. Если $\beta < 1$, то средняя интенсивность отказов на интервале от t_1 до t_2 ниже, чем она составляет за тот же интервал времени, начинающийся от нуля.

Таким образом, проведение тренировки с целью отбраковки имеет смысл только тогда, когда интенсивность отказов для данного типа элементов уменьшается со временем. Если вейбулловское распределение подходит для описания распределения времени до отказа, то тренировка целесообразна тогда, когда параметр формы $\beta < 1$. При экспоненциальном законе распределения времени до отказа тренировка не дает никакого эффекта, так как оно является частным случаем распределения Вейбулла при $\beta=1$.

Известно [22], что при нормальном распределении времени до отказа интенсивность отказов возрастает со временем. Поэтому для таких элементов как элементы коммутации, механические элементы, функционирование которых сопровождается износом, тренировка не оправдана, ибо для них справедлив нормальный закон распределения времени до отказа.

Чем меньше параметр формы β , тем более эффективной будет тренировка, в течение любого данного отрезка времени и, следовательно, тем меньше будет средняя интенсивность отказов элементов, поставляемых потребителю.

На рис.5.43 приведена, зависимость эффективности тренировки от параметра формы β при разной длительности тренировки. Под эффективностью тренировки понимают отношение количества отказов, возникших при тренировке, к полному числу отказов при эксплуатации, выраженное в процентах.

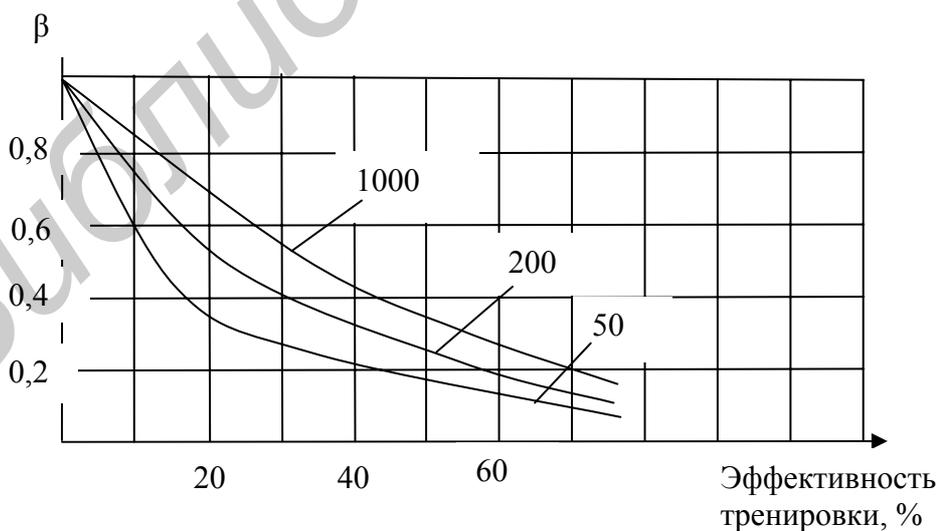


Рис.5.43. Эффективность тренировки в зависимости от параметра формы β (для каждой кривой указана продолжительность тренировки в ч)

Предполагается, что время работы равно 10000 ч, а условия тренировки близки к рабочим. Кривые графиков легко получить из графика распределений Вейбулла на вейбулловской вероятностной бумаге.

Зависимости, подобные приведенным на рис.5.43, можно построить при любых требованиях, предъявляемым к элементам. По ним можно определить, нужна ли тренировка и, если нужна, какова должна быть её продолжительность.

Библиотека БГУИР

Глава 6. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И РЭУ

6.1. Понятие прогнозирования и его классификация

Рассмотренные ранее методы оценки показателей надежности дают удовлетворительные для практики результаты при рассмотрении большого числа изделий. Например, вероятность безотказной работы телевизора $P(t) = 0,95$ для времени $t = 500$ ч означает, что в среднем 5 телевизоров из каждой сотни откажут раньше момента времени $t = 500$ ч. Покупая телевизор, каждый из нас не хотел бы оказаться владельцем одного из пяти неудачных экземпляров.

Роль прогнозирования в настоящее время возрастает в связи с созданием уникальных радиоэлектронных комплексов, обычно в очень малом количестве, а также в связи с повышением требований к надежности РЭУ (космическая аппаратура, аппаратура военной техники и т.п.).

Прогнозировать — значит предсказывать будущее состояние объекта или поведение процесса на основе рассмотрения факторов и явлений, как-то связанных с объектом или процессом.

Результат прогнозирования кратко называют прогнозом. В самом общем случае прогнозирование можно разделить на два вида: эвристическое и математическое.

При эвристическом прогнозировании прогноз получают на основе субъективного взвешивания совокупности факторов, большая часть из которых может носить качественный характер. Результат прогнозирования в данном случае во многом зависит от опыта и интуиции инженера.

При математическом прогнозировании результат формируется на основе получения информации об объекте или процессе с последующей обработкой ее формализованными (математическими) методами. Здесь результат во многом зависит от тех параметров, которые контролируются или измеряются у объекта или процесса, а также от математических методов обработки этой информации.

В литературе приводятся различные схемы классификации методов прогнозирования. Одна из возможных схем классификации методов прогнозирования показана на рис.6.1.

Групповое прогнозирование – это такое прогнозирование, при котором прогноз в равной степени относится к любому экземпляру рассматриваемой выборки. В инженерной практике результат прогнозирования часто получают в виде вероятности того, что

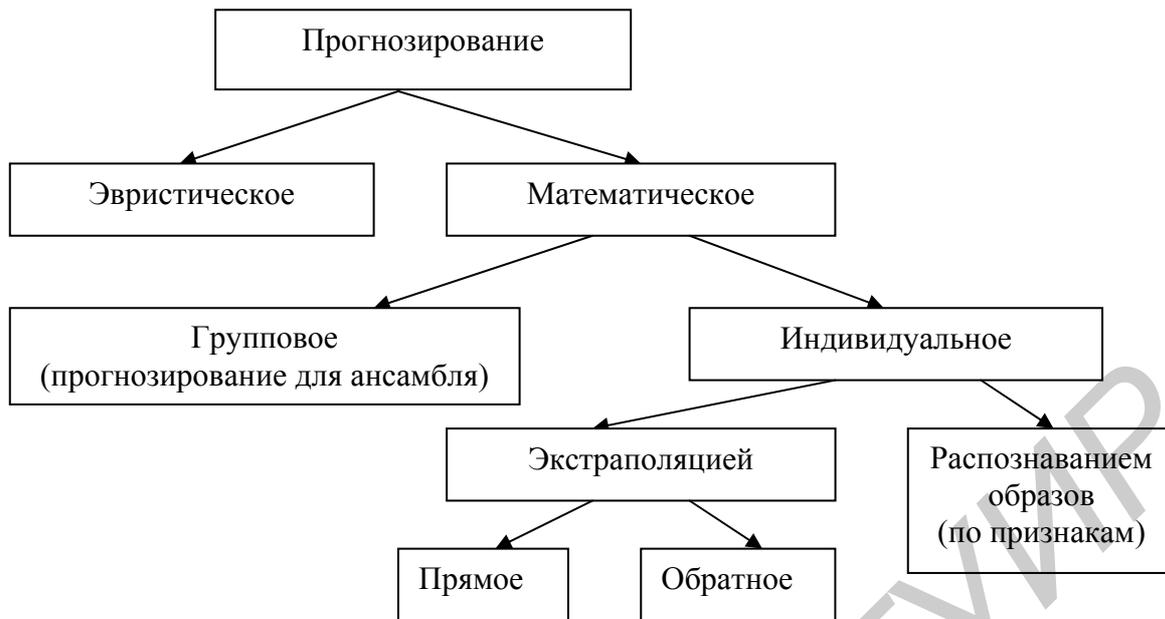


Рис.6.1. Схема классификации методов прогнозирования

основной функциональный параметр объекта или процесса будет находиться в заданном диапазоне, т.е. в виде вероятности

$$P(y_{\min} \leq y \leq y_{\max}),$$

где y – основной функциональный параметр объекта или процесса;

y_{\min}, y_{\max} – границы диапазона.

При **индивидуальном прогнозировании** контролируются определенные параметры конкретного экземпляра изделия или реализации процесса, и по результатам математической обработки контролируемых параметров принимают решение об уровне качества или будущего технического состояния этого экземпляра изделия или процесса. Естественно, результат прогнозирования в данном случае относится к тому экземпляру, параметры которого контролировались и обрабатывались. В дальнейшем конкретный экземпляр будем называть (обозначать) как j -й экземпляр.

6.2. Приемы выполнения эвристического прогнозирования

Одним из приемов эвристического прогнозирования являются методы экспертных оценок. Суть методов состоит в следующем.

Предположим, что надо сделать эвристическое прогнозирование какой либо характеристики элемента, например интенсивности отказов элемента λ , которая будет иметь место в момент времени $t = 2010$ год. В нашем распоряжении имеется множество факторов об интересующем типе элемента и его характеристике λ . Часть из них носит количественный характер, например, значения λ в 1970, 1975, ... годах, а часть – качественный (экономическое состояние предприятий отрасли, перспективы появления новых технологий и т.п.).

Для получения эвристического прогноза формируется группа специалистов-экспертов в количестве n человек из числа разработчиков элемента и его технологии, специалистов предприятий – изготовителей элементов, специалистов по надежности, лиц, эксплуатирующих элементы в составе аппаратуры, специалистов ремонтных организаций и т.д. Сформированной группе экспертов предлагается дать количественную оценку интенсивности отказов λ на основе имеющейся количественной и качественной информации, причем оценка должна быть дана каждым экспертом независимо от других экспертов. Результирующую оценку $\lambda_{\text{пр}}$ характеристики λ далее получают путем усреднения оценок, сделанных разными экспертами. Неплохие результаты дает усреднение с учетом квалификации, опыта и интуиции экспертов. В этом случае пользуются выражением

$$\lambda_{\text{пр}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad (6.1)$$

где λ_i — количественная оценка характеристики λ , сделанная i -м экспертом;

α_i — весовой коэффициент i -го эксперта, устанавливаемый для него в зависимости от квалификации, опыта, интуиции и т.п.

Определение весовых коэффициентов α_i является ответственной и непростой задачей. Обычно их устанавливают так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

В этом случае выражение (6.1) упрощается и принимает вид

$$\lambda_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i.$$

6.3. Характеристика индивидуального прогнозирования с использованием методов экстраполяции

При использовании методов экстраполяции начальное состояние j -го экземпляра объекта или реализации процесса задается значениями основного функционального параметра у этого объекта или процесса, полученными в какие-то начальные моменты времени от t_1 до t_k (рис.6.2).

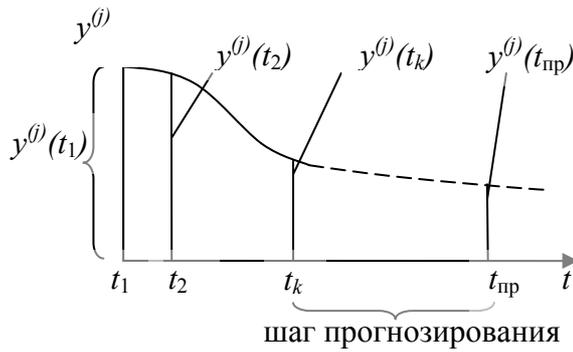


Рис.6.2. К вопросу об индивидуальном прогнозировании методом экстраполяции

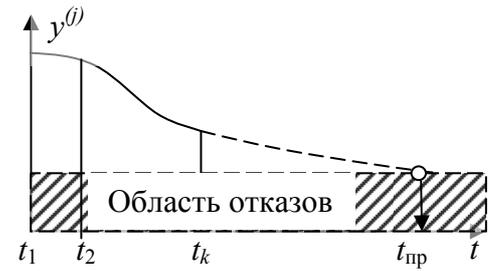


Рис.6.3. К вопросу об обратном прогнозировании

При этом должно выполняться условие

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{\text{пр}},$$

- где t_i – i -й момент времени, в который произведено наблюдение функционального параметра j -го экземпляра; $i=1, \dots, k$;
- $y^{(j)}(t_i)$ – наблюдаемое значение функционального параметра y j -го экземпляра, соответствующее моменту времени t_i ;
- k – количество дискретных отсчетов (наблюдений) функционального параметра j -го экземпляра;
- $t_{\text{пр}}$ – заданное время прогнозирования, т.е. момент времени, для которого интересуются состоянием объекта или процесса.

Значения функционального параметра $y^{(j)}$, полученные в моменты времени t_1, \dots, t_k , будем называть **предысторией** процесса или предысторией функционального параметра j -го экземпляра.

Техническое состояние объекта или процесса в будущий момент времени $t_{\text{пр}}$ описывается значением функционального параметра $y^{(j)}(t_{\text{пр}})$, соответствующим этому моменту времени.

Цель рассматриваемого прогнозирования состоит в том, чтобы по предыстории j -го экземпляра объекта или процесса указать значение его функционального параметра, которое будет соответствовать моменту времени $t_{\text{пр}}$.

Иногда при таком прогнозировании интересуются не значением $y^{(j)}(t_{\text{пр}})$, а моментом времени $t_{\text{пр}} = t_{\text{зам}}$, когда функциональный параметр y j -го экземпляра достигнет определенного критического уровня $y_{\text{кр}}$ (рис.6.3).

Тогда, не дожидаясь отказа, используя результаты прогнозирования, заблаговременно, еще до момента времени $t_{\text{зам}}$ можно заменить устройство другим экземпляром. В таких случаях говорят об обратном прогнозировании.

При прогнозировании методами экстраполяции на промежутке от t_1 до t_k вырабатывается рабочий ресурс РЭУ, поэтому его целесообразно выполнять на этапе эксплуатации устройств.

6.4. Приемы решения задач индивидуального прогнозирования с использованием методов экстраполяции

Решение рассматриваемых задач прогнозирования можно разбить на два этапа.

1. Выбор модели прогнозирования. В качестве моделей прогнозирования используют математические выражения, с помощью которых будут определяться прогнозные значения функционального параметра j -го экземпляра.

2. Экстраполяция процесса. Состоит в предположении, что за пределами предыстории функционального параметра y он будет изменяться по такому же закону, как и на участке предыстории. Заканчивается экстраполяция расчетом с помощью выбранной модели прогнозирования прогнозного значения y для j -экземпляра. При необходимости оценивается точность прогнозирования, обычно находится доверительный интервал для величины $y^{(j)}(t_{\text{пр}})$, т.е. кроме точечного указывают также интервальный прогноз.

Основными требованиями, предъявляемыми к модели прогнозирования, являются следующие:

- а) точность описания параметра y для j -го экземпляра на участке предыстории;
- б) простота математической записи;
- в) несложность получения на практике.

В качестве моделей прогнозирования обычно выбирают элементарные функции или полиномы. Они во многом отвечают указанным требованиям.

Выбор модели прогнозирования осуществляют следующим образом. Наблюдаемые значения параметра y соединяют плавной кривой линией и по ее виду выдвигают предположение о наиболее удачной модели. Если на основе анализа физических особенностей параметра y удастся выявить закон его изменения, то эти данные необходимо в первую очередь использовать при выборе модели прогнозирования. При отсутствии физических представлений о механизме изменения y и неопределенности вида кривой

необходимо проверить для участка предыстории несколько моделей. Лучшей из числа проверяемых считается та модель прогнозирования $\varphi(t)$, для которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^k [y^{(j)}(t_i) - \varphi(t_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (6.2)$$

где $\varphi(t_i)$ — значение функционального параметра y , подсчитываемое по модели $\varphi(t)$ путем подстановки в нее значения $t = t_i$.

С помощью записанного критерия (6.2) в рамках конкретной модели прогнозирования определяются также лучшие значения коэффициентов модели $\varphi(t)$.

В ряде случаев лучшие результаты дает подход, при котором различные наблюдения имеют разный вес: например, более ранние наблюдения могут использоваться с меньшим весом, чем новые. В этом случае метод наименьших квадратов трансформируется в метод "взвешенных наименьших квадратов", являющийся более общим методом. Неизвестные коэффициенты математической модели прогнозирования находят, исходя из условия

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i [y^{(j)}(t_i) - \varphi(t_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (6.3)$$

где α_i — вес i -го квадрата разности, меняющейся от наблюдения к наблюдению, обычно по определенному закону.

При прогнозировании критерий (6.3) широко используется в случаях, когда вес наблюдаемых значений убывает по геометрической прогрессии. По этому вопросу адресуем читателя к работе [29].

Точность и достоверность прогнозирования с использованием методов экстраполяции зависит от длительности предыстории, шага прогнозирования, т.е. интервала ($t_k, t_{\text{пр}}$), а также от вида модели прогнозирования.

О том, насколько можно доверять прогнозному значению, судят по величине доверительного интервала, соответствующего заданной доверительной вероятности γ . Определяя доверительный интервал для величины $y^{(j)}(t_{\text{пр}})$, получают интервальный прогноз

$$I_{\gamma}^{(y)} = [y^{(j)}(t_{\text{пр}}) - \Delta y^{(j)}; y^{(j)}(t_{\text{пр}}) + \Delta y^{(j)}] \quad (6.4)$$

где $y^{(j)}(t_{\text{пр}})$ — точечный прогноз, получаемый для j -экземпляра по модели прогнозирования путем подстановки в нее значения $t = t_{\text{пр}}$;

$\Delta y^{(j)}$ — возможная ошибка в определении $y^{(j)}(t_{\text{пр}})$, т.е. расхождение между точечной оценкой $y^{(j)}(t_{\text{пр}})$ и истинным значением в момент времени $t = t_{\text{пр}}$.

Как отмечается в литературе, доверительный интервал вида (6.4) может быть найден в случае использования линейных моделей прогнозирования и моделей, приводимых к линейной — экспоненциальных, показательных, логарифмических и т.п. [29].

6.5. Общая характеристика индивидуального прогнозирования распознаванием образов

Это прогнозирование основано на использовании, так называемых, информативных параметров. Под информативным параметром понимают такой электрофизический параметр изделия, значение которого в момент времени $t = 0$ несет информацию о техническом состоянии или качестве изделия в будущем, т.е. при $t = t_{\text{пр}}$, где $t_{\text{пр}}$ — заданное время прогнозирования.

Для изделий РЭС использование лишь одного информативного параметра может привести к заметным ошибкам, поэтому на практике используют совокупность информативных параметров, кратко называемых признаками.

Совокупность признаков, измеренная для j -го экземпляра в момент времени $t = 0$, образует как бы образ этого экземпляра. Задача индивидуального прогнозирования состоит в том, чтобы правильно распознать этот образ, т.е. правильно указать техническое состояние или уровень надежности данного экземпляра для будущего момента времени $t = t_{\text{пр}}$. Отсюда понятно и название — индивидуальное прогнозирование распознаванием образов.

При этом виде прогнозирования решение о техническом состоянии изделия принимают путем отнесения его на момент времени $t = t_{\text{пр}}$ к одному из классов по уровню надежности.

В практических приложениях находят широкое применение разновидности методов индивидуального прогнозирования, при которых РЭУ или элементы относят к одному из двух классов:

K_1 — класс надежных экземпляров;

K_2 — класс ненадежных (дефектных) экземпляров.

Следует иметь в виду, что класс экземпляров соответствует моменту времени $t = t_{\text{пр}}$.

Для принятия решения о классе экземпляра на момент времени $t = t_{\text{пр}}$ надо располагать так называемым прогнозирующим

правилом. Это правило должно показывать, как по численным значениям признаков j -го экземпляра, измеренным в момент времени $t = 0$, принимать решение о классе этого экземпляра в момент времени $t = t_{\text{пр}}$.

Прогнозируемое правило ищут в виде

$$\begin{cases} j \in K_1, & \text{если } F(x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}) \geq P_0; \\ j \in K_2, & \text{если } F(x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}) < P_0, \end{cases} \quad (6.5)$$

где $x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)}$ — значения признаков j -го экземпляра в момент времени $t = 0$;

$F(x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)})$ — значение решающей функции, подсчитанное для j -го экземпляра;

k — количество признаков, используемых при решении задачи индивидуального прогнозирования;

P_0 — порог (говорят также критерий) разделения классов, определяемый экспериментально, исходя из условия лучшего разделения классов.

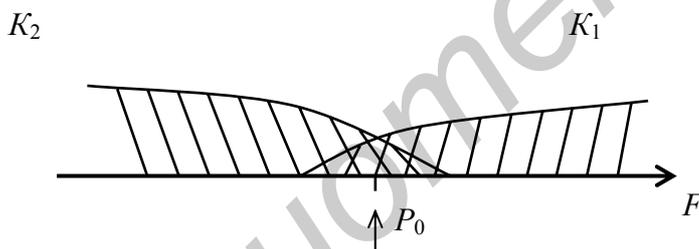


Рис. 6.4. Соответствие решающей функции F классам

экземплярам класса K_2 — меньшие значения (рис.6.4). Решающая функция показывает, какие математические или логические операции надо выполнить со значениями признаков данного экземпляра изделия, и может не иметь конкретного физического смысла.

В результате подстановки значений признаков j -го экземпляра в решающую функцию F получим какое-то число, которое сравнивается со значением порога P_0 . В зависимости от результатов этого сравнения и принимают решение о классе j -го экземпляра.

Для получения прогнозирующего правила нужны предварительные исследования интересующего нас вида изделия. Эти исследования обязательно включают испытания на надежность определенной выборки изделий в течение времени $t = t_{\text{пр}}$.

Прогнозирующие правило записано в предположении, что лучшему техническому состоянию изделий, т.е. экземплярам класса K_1 в среднем будут соответствовать большие значения решающей функции F , а эк-

6.6. Характеристики ошибок прогнозирования в методах индивидуального прогнозирования распознаванием образов

При использовании методов индивидуального прогнозирования распознаванием образов возможны ошибки следующих видов:

а) отнесение по результатам прогнозирования в действительности дефектного экземпляра (класс K_2 к классу надежных экземпляров (класс K_1). Эти ошибки оцениваются вероятностью p_{21} , характеризующей значение риска потребителя. Это значение на практике стремятся свести к минимуму, так как ошибки, связанные с ним, могут вызвать у потребителя массу проблем;

б) отнесение по результатам прогнозирования в действительности надежного экземпляра (класс K_1) к классу ненадежных экземпляров (класс K_2). Эти ошибки характеризуются вероятностью p_{12} , называемой риском изготовителя.

При решении задач прогнозирования пользуются также таким понятием, как вероятность ошибочных решений по результатам прогнозирования $P_{\text{ош}}$. Иногда вместо вероятности ошибочных решений пользуются вероятностью принятия правильных решений $P_{\text{прав}}$, определяемой как

$$P_{\text{прав}} = 1 - P_{\text{ош}} .$$

6.7. Этапы решения задач индивидуального прогнозирования распознаванием образов

6.7.1. Обучающий эксперимент и обучение

Будем предполагать, что с помощью предварительных исследований получены информативные параметры (признаки) РЭУ или элемента. Тогда, чтобы решить задачу индивидуального прогнозирования применительно к этому виду изделий, необходимо выполнить ряд действий, последовательность которых иллюстрируется схемой, показанной на рис.6.5.

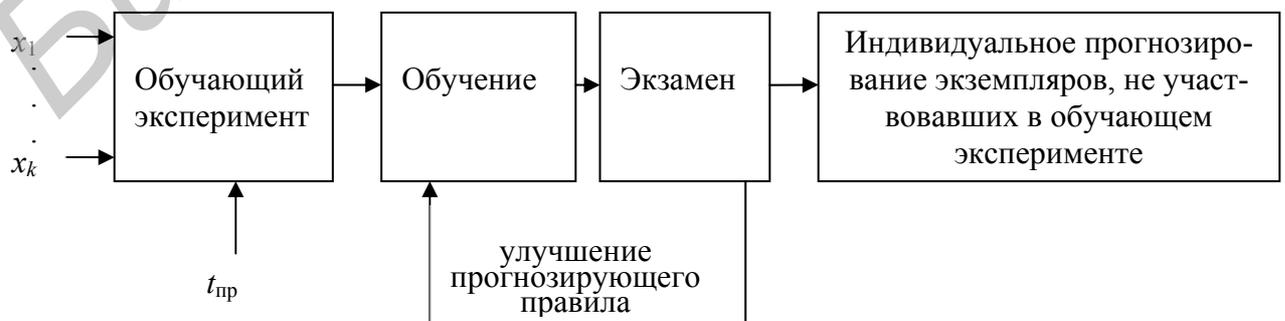


Рис.6.5. Этапы решения задач прогнозирования

Обучающий эксперимент представляет собой испытание на надежность определенной выборки интересующего вида изделий в течение времени $t = t_{\text{пр}}$ в том режиме и условиях работы, которые будут иметь место при реальной их эксплуатации. Результаты обучающего эксперимента обычно представляют в виде табл.6.1.

Таблица 6.1

Рекомендуемая форма записи результатов обучающего экспериментов

Номер экземпляра обучающей выборки	Значения признаков при $t = 0$			Класс экземпляра к моменту времени $t = t_{\text{пр}}$
	x_1	...	x_k	
1	$x_1^{(1)}$...	$x_k^{(1)}$	$K_s^{(1)}$
...
n	$x_1^{(n)}$...	$x_k^{(n)}$	$K_s^{(n)}$

Перед проведением испытаний экземпляры обучающей выборки необходимо пометить. После этого следует произвести контроль значений признаков x_1, \dots, x_k каждого экземпляра и лишь тогда приступить к испытаниям обучающей выборки на надежность. По истечении времени $t = t_{\text{пр}}$ выясняют класс (K_1 или K_2) каждого экземпляра с целью получения информации о соответствии того или иного класса тем или иным значениям признаков.

Если к моменту времени $t = t_{\text{пр}}$ экземпляр не отказал, то его относят к экземплярам класса K_1 , если отказал, то класса K_2 .

Время $t_{\text{пр}}$ может быть достаточно большим (тысячи и даже десятки тысяч часов). Поэтому с целью сокращения времени испытаний используют ускоренные, обычно форсированные, испытания в течение времени $t_y \ll t_{\text{пр}}$, но эквивалентном с точки зрения функционирования и возникновения отказов времени $t_{\text{пр}}$.

Результаты обучающего эксперимента используются на следующем этапе — обучения. Цель этого этапа выбрать метод построения прогнозирующего правила и для каждого экземпляра обучающей выборки подсчитать значение решающей

функции F . Распределение значений решающей функции в зависимости от класса экземпляра (K_1 или K_2) будет соответствовать рис.6.4.

Результаты этапа обучения в виде значений решающей функции, подсчитанных для каждого экземпляра обучающей выборки, используют на этапе экзамена (см. рис.6.5).

6.7.2. Выбор порога разделения классов (экзамен)

Основная цель этого этапа состоит в определении порога разделения классов P_0 , исходя из условия обеспечения наилучших результатов прогнозирования в предположении, что прогнозирующее правило применяется к экземплярам обучающей выборки.

На практике могут использоваться следующие критерии выбора P_0 :

$$\text{а) } P_{\text{прав}} \rightarrow \max \text{ или } P_{\text{ош}} \rightarrow \min; \quad (6.6)$$

$$\text{б) } p_{21} \leq p_{21\text{доп}}, \text{ а } p_{12} \rightarrow \min, \quad (6.7)$$

где p_{21} — риск потребителя;

p_{12} — риск изготовителя;

$p_{21\text{доп}}$ — допустимое в данной задаче значение риска потребителя.

Критерий (6.6) иногда называют критерием Байеса, а критерий (6.7) — критерием Неймана-Пирсона.

При решении практических задач значение $p_{21\text{доп}}$ выбирается достаточно малым (единицы и десятые доли процента). Для выбора P_0 используются результаты предыдущего этапа в виде значений решающей функции F , подсчитанных для каждого экземпляра обучающей выборки.

Последовательность выбора P_0 с учетом критерия (6.5) такова. Задаются несколькими значениями P_0 в зоне перекрытия решающей функции двух классов и вблизи ее (см. рис.6.4). Для каждой выбранной точки P_{0i} подсчитывают вероятность правильных решений $P_{\text{прав}}$. Для этого надо в прогнозирующем правиле вида (6.5) положить $P_0 = P_{0i}$ и применить его для оценки класса экземпляров обучающей выборки. Сопоставляя класс экземпляров по прогнозу при значении порога P_{0i} с действительным классом, можно оценить ошибки прогнозирования и подсчитать значение вероятности правильных решений $P_{\text{прав}}$, соответствующее выбранному порогу P_{0i} , табл.6.2.

Таблица 6.2
Форма записи результатов обучающего эксперимента,
обучения и экзамена

Номер экземп- ляра обучаю- щей выборки	x_i при $t = 0$			Класс при $t = t_{пр}$	Значение решающей функции F	Класс экземпляра по прогнозу при значении P_0 , равном:		
	x_1	...	x_k			P_{01}	P_{02}	...
1				$K_s^{(1)}$	$F^{(1)}$			
2				$K_s^{(2)}$	$F^{(2)}$			
...						
n				$K_s^{(n)}$	$F^{(n)}$			

Описанную процедуру повторяют для остальных точек P_{0i} . В результате этих действий будут получены данные, которые позволят по расчетным точкам построить график зависимости величины $P_{прав}$ от значения P_{0i} , показанный на рис.6.6.

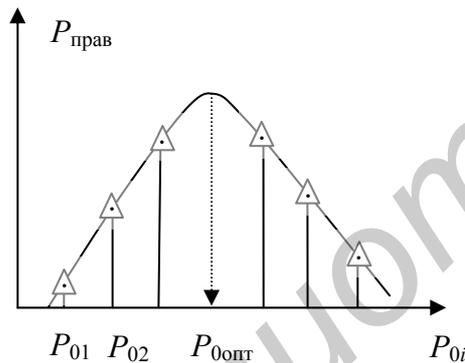


Рис.6.6. К вопросу о выборе порога P_0

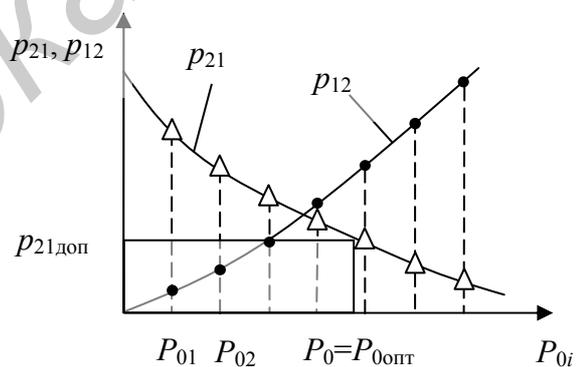


Рис.6.7. Выбор порога P_0 с использованием риска потребителя p_{21} и риска изготовителя p_{12}

Лучшим значением порога P_0 считается такое, при котором вероятность правильных решений $P_{прав}$ принимает максимальное значение. В случае критерия вида (6.7) поступают аналогично, однако по результатам сравнения класса экземпляра по прогнозу с действительным классом подсчитывают значение риска потребителя и риска изготовителя, а далее оптимальное значение P_0 выбирают с помощью графика (рис.6.7). На нем обозначены расчетные точки, полученные соответственно для рисков потребителя p_{21} и изготовителя p_{12} путем сравнений классов экземпляров обучающей выборки по прогнозу (при $P_0=P_{0i}$) с действительным классом экземпляров.

6.7.3. Оценка вероятностей правильных и ошибочных решений

Эта оценка выполняется с использованием экземпляров обучающей выборки путем сравнения класса экземпляров по прогнозу с действительным классом.

Для оценки вероятности правильных решений используют выражение

$$P_{\text{прав}} = \frac{n_{11} + n_{22}}{n}, \quad (6.8)$$

где n_{11} , n_{22} — количество правильно распознанных экземпляров соответственно классов K_1 и K_2 в обучающей выборке;

n — объем обучающей выборки.

Иногда вместо вероятности правильных решений $P_{\text{прав}}$ выполняют оценку вероятности ошибочных решений $P_{\text{ош}}$. Эта оценка может быть дана с использованием выражения

$$P_{\text{ош}} = 1 - P_{\text{прав}} = 1 - \frac{n_{11} + n_{22}}{n} = \frac{n_{21} + n_{12}}{n}, \quad (6.9)$$

где n_{21} , n_{12} — количество неправильно распознанных экземпляров соответственно класса K_2 и класса K_1 в обучающей выборке.

Нетрудно понять, что для изделий обучающей выборки должно выполняться равенство

$$n_{11} + n_{22} + n_{12} + n_{21} = n. \quad (6.10)$$

Риски потребителя p_{21} и изготовителя p_{12} могут быть подсчитаны по выражениям

$$p_{21} = \frac{n(K_2 / \text{реш}K_1)}{n(\text{реш}K_1)}; \quad (6.11)$$

$$p_{12} = \frac{n(K_1 / \text{реш}K_2)}{n(\text{реш}K_2)}, \quad (6.12)$$

где $n(K_2 / \text{реш}K_1)$ — количество экземпляров обучающей выборке класса K_2 , которые ошибочно отнесены к классу K_1 ;

$n(K_1 / \text{реш}K_2)$ — количество экземпляров в действительности класса K_1 , но ошибочно отнесенных к классу K_2 ;

$n(\text{реш}K_S)$ — общее количество решений о классе K_S ($S = 1; 2$).

Определив значения характеристик p_{21} , p_{12} , $P_{\text{прав}}$ или $P_{\text{ош}}$ для экземпляров обучающей выборки, считают, что примерно такие же значения этих характеристик будут иметь место и для выборки (партии) однотипных изделий, не участвовавших в обучающем эксперименте.

6.7.4. Прогнозирование однотипных изделий, не участвовавших в обучающем эксперименте

Экземпляры обучающей выборки использовались для получения прогнозирующего правила. Рабочий ресурс этих экземпляров выработан либо находится на пределе. Поэтому они не могут быть использованы дальше по назначению.

Полученное прогнозирующее правило применяют для индивидуального прогнозирования других однотипных экземпляров изделия исследуемого типа. Применение включает следующее:

- 1) измерение у j -го экземпляра значений признаков до использования его по назначению, т.е. в момент времени $t = 0$;
- 2) подстановку полученных величин в прогнозирующее правило и подсчет значения решающей функции $F^{(j)}$ соответствующей рассматриваемому экземпляру;
- 3) сравнение значения функции $F^{(j)}$ с порогом P_0 и принятие решения о классе данного экземпляра (получение прогноза).

Вероятностные характеристики достоверности прогнозирования для новых однотипных экземпляров будут примерно такими же, как подсчитанные для экземпляров обучающей выборки.

6.8. Рекомендации по выбору информативных параметров (признаков) для элементов РЭУ

Успех в решении задачи индивидуального прогнозирования во многом зависит от удачности выбора информативных параметров. По результатам исследований, выполненных применительно к элементам РЭУ, можно рекомендовать в качестве признаков электрические параметры, указанные ниже:

а) для резисторов постоянного сопротивления — уровень 3-й гармоники при подаче на резистор синусоидального напряжения U ; э.д.с. шумов;

б) для транзисторов в усилительном режиме — коэффициент усиления тока базы в режиме малого сигнала в схеме с общим эмиттером $h_{21Э}$; обратный ток коллектора $I_{К0}$; тангенс угла наклона вольтамперной характеристики p - n переходов;

в) для транзисторов в режиме переключения — коэффициент усиления тока базы в режиме большого сигнала в схеме с общим

эмиттером $h_{21Э}$; напряжения насыщения перехода база-эмиттер $U_{БЭнас}$ и перехода коллектор-эмиттер $U_{КЭнас}$; ток транзисторов в закрытом (запертом) состоянии; емкости $p-n$ переходов;

г) для полупроводниковых диодов — соотношение между сопротивлением в прямом и обратном направлении; тангенсы углов наклона прямой и обратной ветвей ВАХ $p-n$ перехода.

6.9. Методы построения прогнозирующих правил

Метод построения прогнозирующего правила показывает, в каком виде формировать решающую функцию F . Иногда, с учетом метода ее построения, называют сам метод прогнозирования.

Методы построения прогнозирующих правил можно разбить на две группы: параметрические и непараметрические.

Параметрические методы основаны на использовании классических положений теории статистических решений. В этих методах для интересующего экземпляра подсчитывают так называемое отношение правдоподобия в виде

$$\lambda^{(j)} = \frac{w(x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)} / K_1)}{w(x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)} / K_2)}, \quad (6.13)$$

где $w(x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)} / K_1)$ — плотность распределения признаков j -го экземпляра, подсчитанная для класса K_1 ;

$w(x_1^{(j)}, \dots, x_k^{(j)} / K_2)$ — плотность распределения признаков j -го экземпляра, подсчитанная для класса K_2 .

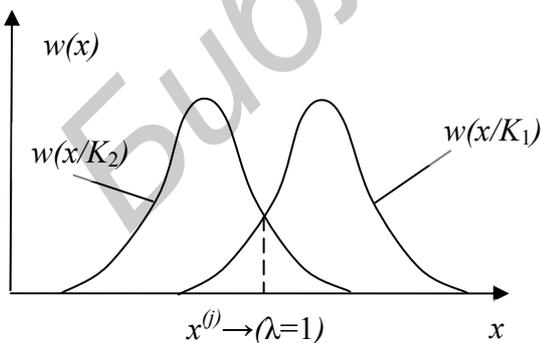


Рис.6.8. К понятию отношения правдоподобия

Отношение правдоподобия характеризует степень приближения признаков j -го экземпляра к классам K_1 или K_2 (рис. 6.8).

Из рис.6.8 понятен смысл λ в случае одного признака.

Применение параметрических методов на практике сопряжено со сложностями вычислительного характера и обычно требует применения средств вычислительной техники.

Непараметрические методы основаны на использовании эвристических алгоритмов формирования решающей функции. На практике находят широкое применение следующие методы, использующие эвристические алгоритмы [6, 14]:

- 1) потенциальных функций;
- 2) дискриминантных функций;
- 3) обобщенного портрета;
- 4) построения эллипса рассеивания;
- 5) стохастической аппроксимации.

В методах, основанных на использовании эвристических алгоритмов, решающая функция F обычно не имеет четкого физического смысла. Эта функция является математическим выражением, построенным из информативных параметров с учетом коэффициентов, рассчитанных по результатам обучающего эксперимента.

6.10. Прогнозирование методом пороговой логики

Хорошо разработанные и широко используемые в практике методы прогнозирования по признакам, такие, как методы статистических решений и потенциальных функций при числе признаков $k > 2$ связаны с громоздкими математическими вычислениями. Это целесообразно лишь на основе применения ЭВМ и в условиях производства не всегда оправдано. Другие же, более простые методы в ряде случаев не обеспечивают допустимых ошибок прогнозирования.

Простым, и в то же время эффективным является метод индивидуального прогнозирования, основанный на принципах пороговой (мажоритарной) логики [31].

Суть метода пороговой логики состоит в преобразовании признаков, измеренных для j -го экземпляра, в двоичные числа (сигналы) и принятии решения о классе экземпляра по набору (комбинации) двоичных сигналов.

При k признаках, используемых для прогнозирования, количество возможных наборов двоичных сигналов T определяется выражением

$$T = 2^k. \quad (6.14)$$

Поэтому прогнозирующее правило для этого метода может быть представлено простой логической таблицей с числом строк не более T . Таблица может использоваться непосредственно в наглядной форме или храниться в запоминающих устройствах.

Преобразование значений признаков x_1, \dots, x_k в двоичные сигналы z_1, \dots, z_k (нуль или единицу) выполняется по соотношениям

$$\left. \begin{array}{l} z_i = 1, \text{ если } x_i \geq x_{i0} \\ z_i = 0, \text{ если } x_i < x_{i0} \end{array} \right\} \text{ при } m_{i1} > m_{i2}; \quad (6.15)$$

$$\left. \begin{array}{l} z_i = 1, \text{ если } x_i \leq x_{i0} \\ z_i = 0, \text{ если } x_i > x_{i0} \end{array} \right\} \text{ при } m_{i1} < m_{i2}, \quad (6.16)$$

где x_{i0} — пороговое значение i -го признака;

m_{iS} — среднее значение i -го признака в классе K_S ($S = 1; 2$).

Прогнозирующее правило для данного метода прогнозирования задается соотношением [31]

$$R = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^k \alpha(z_i) \geq P_0; \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^k \alpha(z_i) < P_0. \end{cases} \quad (6.17)$$

где R — выходной двоичный сигнал (пороговая функция), равный единице для класса K_1 и нулю для класса K_2 ;

$\alpha(z_i)$ — вес i -го двоичного сигнала;

P_0 — порог (критерий) разделения классов, вещественное число.

Вес $\alpha(z_i)$ i -го двоичного сигнала, характеризует ценность сигнала z_i для процедуры прогнозирования и определяется соотношением

$$\alpha(z_i) = \begin{cases} P(K_1 / z_i = 1), & \text{если } z_i = 1; \\ P(K_1 / z_i = 0), & \text{если } z_i = 0, \end{cases} \quad (6.18)$$

где $P(K_1 / z_i = \xi)$ — оценка вероятности того, что изделие принадлежит к классу K_1 при условии, что двоичный сигнал z принял значение $z_i = \xi$; $\xi = 1, 2$.

Оценку вероятностей $P(K_1 / z_i = 1)$ и $P(K_1 / z_i = 0)$ получают из результатов испытаний изделий обучающей выборки, используя следующие выражения:

$$P(K_1 / z_i = 1) = \frac{n(K_1 / z_i = 1)}{n(z_i = 1)}; \quad (6.19)$$

$$P(K_1 / z_i = 0) = \frac{n(K_1 / z_i = 0)}{n(z_i = 0)}, \quad (6.20)$$

где $n(K_1 / z_i = \xi)$ – количество изделий класса K_1 в обучающей выборке, для которых двоичный сигнал z_i принял значение $z_i = \xi$; $\xi = 1, 2$;

$n(z_i = \xi)$ – общее количество изделий в обучающей выборке, для которых двоичный сигнал z_i принял значение $z_i = \xi$; $\xi = 1, 2$.

При использовании метода пороговой логики рекомендуется следующий порядок операций при выполнении обучения, оценки его результатов (экзамена) и прогнозирования однотипных изделий, не участвовавших в обучающем эксперименте:

определение пороговых значений, необходимых для преобразования признаков в двоичные сигналы;

преобразование признаков каждого изделия обучающей выборки в двоичный сигнал;

определение весов двоичных сигналов;

подсчет значения решающей функции для каждого экземпляра обучающей выборки;

построение решающего правила и определение значения порога разделения классов;

представление решающего правила логической таблицей, используемой для выполнения прогнозирования;

прогнозирование однотипных изделий, не участвовавших в обучающем эксперименте.

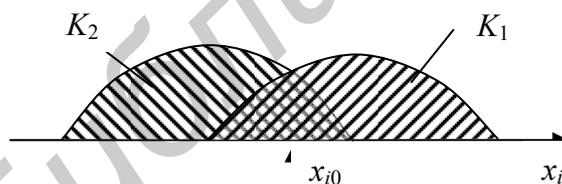


Рис.6.9. Выбор значения величины x_{i0}

Для определения порогового значения i -го признака возможны различные подходы. Простейший способ — выбор в качестве значения величины x_{i0} средней точки зоны перекрытия классов по признаку x_i (рис.6.9). Пре-

образование признаков x_1, \dots, x_k изделий обучающей выборки в двоичные сигналы z_1, \dots, z_k выполняется по выражениям (6.15) или (6.16).

Для определения веса $\alpha(z_i)$ i -го двоичного сигнала с учетом выбранного порогового значения x_i подсчитываются по

соотношениям (6.19) и (6.20) оценки вероятностей $P(K_1 / z_i = 1)$ и $P(K_1 / z_i = 0)$. Эти оценки в соответствии с выражением (6.18) принимаются в качестве веса $\alpha(z_i)$.

Значения решающей функции $F(z_1^{(j)}, \dots, z_k^{(j)})$ j -го экземпляра обучающей выборки определяются по формуле

$$F(z_1^{(j)}, \dots, z_k^{(j)}) = \sum_{i=1}^k \alpha(z_i^{(j)}) \quad (6.21)$$

где $\alpha(z_i^{(j)})$ – значение веса i -го двоичного сигнала z_i взятое для j -го экземпляра.

Для определения порога разделения классов P_0 задаются несколькими точками из области определения решающей функции $F(z_1^{(j)}, \dots, z_k^{(j)})$ для изделий обучающей выборки. Для каждой выбранной точки, пользуясь правилом, задаваемым соотношением (6.17) подсчитывают по формуле (6.8) вероятность правильных решений $P_{\text{прав}}$. В качестве искомого порога разделения классов P_0 берут такое значение, которое отвечает условию (6.6), т.е.

$$P_{\text{прав}} \rightarrow \max.$$

Выбор значения величины P_0 может выполняться также и по условию (6.7), т.е.

$$p_{12} \rightarrow \min \text{ при } p_{21} \leq p_{21\text{доп}}.$$

Представление прогнозирующего правила логической таблицей, используемой для прогнозирования, осуществляется следующим образом. Для всех теоретически возможных наборов (комбинаций) двоичных сигналов z_1, z_2, \dots, z_k подсчитываются по выражению (6.21) значения решающей функции $F(z_1^{(j)}, \dots, z_k^{(j)})$. Используя построенное прогнозирующее правило вида (6.17), определяют, какому классу соответствует тот или иной набор двоичных сигналов. Логическая таблица для прогнозирования оформляется в виде, приведенном на рис.6.10.

Номер набора (комбинации)	Двоичные сигналы			Значение решающей функции, $\sum \alpha(z_i)$	Класс изделия по прогнозу
	z_1	...	z_k		
1	$z_1^{(1)}$...	$z_k^{(1)}$		$K_S^{(1)}$
2	$z_1^{(2)}$...	$z_k^{(2)}$		$K_S^{(2)}$
...

Рис.6.10. Общий вид логической таблицы

С целью уменьшения строк таблицы рекомендуется включать в нее наборы лишь для одного из классов.

Прогнозирование однотипных новых изделий, не участвовавших в обучающем эксперименте, выполняется в следующем порядке:

- а) измерение значений признаков l -го экземпляра;
- б) преобразование признаков l -го экземпляра $x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_k^{(l)}$ по выражениям (6.15) и (6.16) в двоичные сигналы $z_1^{(l)}, z_2^{(l)}, \dots, z_k^{(l)}$;
- в) поиск в логической таблице набора, соответствующего l -му экземпляру, и принятие решения о классе этого экземпляра.

6.11. Пример построения прогнозирующего правила

Предположим, что для элемента РЭУ (например, транзистора) экспериментально получены информативные параметры, например, x_1 и x_2 . Пусть интересуется класс экземпляров на момент времени $t_{\text{пр}} = 5000$ ч.

Будем считать, что был выполнен обучающий эксперимент с использованием ускоренных испытаний в течение времени $t_v = 100$ ч, эквивалентных с точки зрения функционирования и возникновения отказов времени $t_{\text{пр}} = 5000$ ч.

Результаты обучающего эксперимента представлены в табл.6.3.

Таблица 6.3

Результаты обучающего эксперимента, значения решающей функции F и влияние порога P_0 на класс экземпляра по прогнозу

Номер экземпляра обучающей выборки	Значение x_i		Класс при $t=t_{\text{пр}}$	Значение решающей функции F	Класс по прогнозу при P_0 , равном					
	x_1	x_2			-6	-4	-2	0	2	4
1	1,7	13	K_1	$1-1 = 0$	1	1	1	1	2	2
2	1,5	14	K_1	$-1 - 2 = -3$	1	1	2	2	2	2
3	1,2	12	K_1	$-4 + 0 = -4$	1	1	2	2	2	2
4	2,0	12	K_1	$4 + 0 = 4$	1	1	1	1	1	1
5	1,6	9	K_1	$0 + 3 = 3$	1	1	1	1	1	2
6	1,1	17	K_2	$-5 - 5 = -10$	2	2	2	2	2	2
7	1,4	13	K_2	$-2 - 1 = -3$	1	1	2	2	2	2
8	1,2	12	K_2	$-4 - 0 = -4$	1	1	2	2	2	2
9	1,0	12	K_2	$-6 - 0 = -6$	1	2	2	2	2	2
10	1,3	16	K_2	$-3 - 4 = -7$	2	2	2	2	2	2

Требуется построить прогнозирующее правило, обеспечивающее при индивидуальном прогнозировании максимальное значение вероятности принятия правильных решений.

В рассматриваемом примере для простоты иллюстрации процедуры построения прогнозирующего правила взята обучающая выборка объемом 10 элементов. При решении инженерных задач объем обучающей выборки следует выбирать не менее 30-50 экземпляров.

Решение. Нетрудно убедиться (см. табл.6.3), что большему значению признака x_1 в среднем соответствует класс K_1 , а для признака x_2 наоборот (рис.6.11).



Рис.6.11. Связь значений признаков с классом

В качестве эвристического алгоритма для решающей функции F выбираем выражение вида

$$F = 10(x_1 - m_1) - (x_2 - m_2), \quad (6.22)$$

где m_1 — среднее значение признака x_1 в классе K_1 ;

m_2 — среднее значение признака x_2 в классе K_2 .

Легко убедиться, что $m_1 = 1,6$; $m_2 = 12$.

Функция F в записанном виде характеризует близость экземпляра к классу K_1 . Число 10, стоящее перед первым слагаемым, необходимо для того, чтобы примерно уравнивать вклад признаков в решающую функцию. Знак минус перед вторым слагаемым в выражении (6.22) появился в связи с тем, что экземплярам класса K_1 в среднем соответствует меньшее значение признака x_2 .

Подсчитаем значения решающей функции F для всех экземпляров обучающей выборки, используя выражение (6.22). Эти значения помещены в табл.6.3.

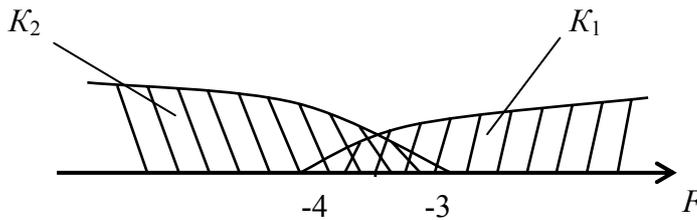


Рис. 6.12. Пересечение значений решающей функции

дадимся пятью значениями величины P_0 и для каждого значения P_0 определим класс экземпляра обучающей выборки по прогнозу, используя прогнозирующее правило вида

$$\left. \begin{aligned} j \in K_1, & \text{ если } 10[x_1^{(j)} - 1,6] - [x_2^{(j)} - 12] \geq P_{0i} \\ j \in K_2, & \text{ если } 10[x_1^{(j)} - 1,6] - [x_2^{(j)} - 12] < P_{0i} \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

В данном случае зависимость вероятности правильных решений от значений величины P_{0i} сложно воспроизвести из-за ограниченности объема обучающей выборки. Однако,

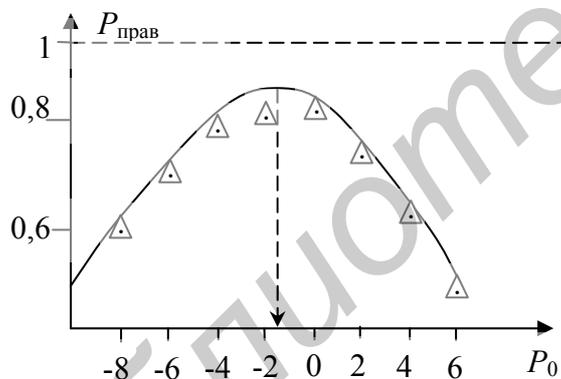


Рис. 6.13. Выбор величины

Тогда в окончательном виде прогнозирующее правило запишется как

$$\left. \begin{aligned} j \in K_1, & \quad 10[x_1^{(j)} - 1,6] - [x_2^{(j)} - 12] \geq -1,5 \\ j \in K_2, & \quad 10[x_1^{(j)} - 1,6] - [x_2^{(j)} - 12] < -1,5 \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Применим это правило для индивидуального прогнозирования однотипных экземпляров, не участвовавших в обучающем эксперименте. Предположим, что экземпляры имеют следующие значения признаков:

Нетрудно убедиться, что значения, подсчитанные для экземпляров классов K_1 и K_2 , пересекаются (рис. 6.12).

Теперь определим оптимальное значение порога разделения классов. Для этого зада-

расширив диапазон значений величины P_{0i} влево и вправо, можно выявить тенденцию изменения вероятности принятия правильных решений (рис. 6.13).

Из рис. 6.13 видно, что в качестве оптимального значения порога можно взять

$$P_0 \approx -1,5.$$

Экземпляр 1: $x_1 = 1,4$; $x_2 = 14$;

Экземпляр 2: $x_1 = 1,6$; $x_2 = 13$.

Применяя правило (6.24), можно убедиться, что по прогнозу экземпляр 1 должен быть отнесен к классу K_2 , а экземпляр 2 — к классу K_1 . Из рис.6.13 следует, что максимальное значение вероятности правильных решений $P_{\text{прав}}$ составляет примерно 0,85. Это означает, что в среднем для 85 процентов экземпляров из каждой партии уровень надежности (класс) будет спрогнозирован верно.

Библиотека БГУИР

Глава 7. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В КОНСТРУИРОВАНИИ И ТЕХНОЛОГИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ

7.1. Понятие задач оптимизации

Любое конструкторско-технологическое решение РЭУ определяется совокупностью параметров. В качестве таких параметров могут рассматриваться параметры электрорадиоэлементов, их свойства, габариты, масса, свойства используемых в конструкции материалов и т.п.

Параметры, определяющие конструкцию, позволяют достигать определенных значений технико-экономических показателей РЭУ. В этом качестве могут рассматриваться надежность, масса, габариты, стоимость и т.п.

Такое конструкторско-технологическое решение, при котором достигается экстремальное (но лучшее) значение интересующего технико-экономического показателя (одного или нескольких), называют оптимальным.

Технико-экономический показатель (один или несколько), по значению которого судят об оптимальности решения, называют целевой функцией. Иногда вместо термина "целевая функция" используют также такие термины, как "критерий оптимизации", "критериальная функция", "функция качества" и т.п.

Параметры конструкторско-технологического решения, от значений которых в значительной степени зависит целевая функция, рассматриваются как оптимизируемые параметры. Их значения, обеспечивающие экстремум целевой функции, называют оптимальными значениями оптимизируемых параметров.

Иногда вместо термина "оптимальное решение" употребляют термин "квазиоптимальное решение" или "псевдооптимальное решение", имея в виду, что истинное значение оптимума достичь сложно и на практике получают некоторое его приближение.

Обозначим целевую функцию F , а параметры, характеризующие конструкторско-технологическое решение и в то же время заметно влияющие на значение функции F , как x_1, \dots, x_n . Тогда условие оптимальности можно записать как

$$F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{ext}, \quad (7.1)$$

где ext — минимум либо максимум значения функции в зависимости от того, что является лучшим;

n — количества оптимизируемых параметров.

В реальных задачах потребителя интересуют многие технико-экономические показатели. Часть из них может войти в состав

целевой функции F , на остальные же могут быть наложены ограничения. Вид этих ограничений обычно таков:

$$Q_j \leq Q_{j\text{доп}} ; \quad (7.2)$$

$$Q_j \geq Q_{j\text{доп}} , \quad (7.3)$$

где $Q_{j\text{доп}}$ — допустимое значение j -го технико-экономического показателя, не вошедшего в состав целевой функции F .

В задачах оптимизации на параметры, характеризующие конструкторско-технологическое решение, могут также накладываться ограничения, исходя из конструкторско-технологических или физических особенностей параметров. Эти ограничения имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} x_{1\min} \leq x_1 \leq x_{1\max} \\ \dots \\ x_{n\min} \leq x_n \leq x_{n\max} \end{array} \right\}, \quad (7.4)$$

где $x_{i\min}$, $x_{i\max}$ — минимальное и максимальное допустимые значения i -го оптимизируемого параметра; $i = 1, \dots, n$.

В отдельных случаях ограничения, накладываемые на оптимизируемые параметры, могут быть односторонними.

Следует помнить, что когда говорят об оптимальном решении, эти слова надо обязательно связывать с целевой функцией, которую имеют ввиду. Ибо оптимальное решение с точки зрения одной целевой функции, например, уровня надежности РЭУ, может оказаться далеко не лучшим с точки зрения другой целевой функции, например стоимости, на значение которой оказывают влияние те же оптимизируемые параметры, что и в случае первой функции.

7.2. Общий порядок решения задач оптимизации

Порядок решения задачи оптимизации в конструировании и технологии РЭУ зависит от ее специфических особенностей. Однако можно сформулировать примерный общий порядок этой процедуры применительно к РЭУ.

1. Выявляются технико-экономические показатели, важнейшие для данного вида РЭУ с позиций создания этого устройства и его использования по назначению.

2. Из выявленных показателей выбираются важнейшие (один или несколько). На их основе строится общий вид целевой функции F . На остальные технико-экономические показатели Q_j , из числа не включенных в целевую функцию F , накладываются ограничения вида (7.2) или (7.3). Причем необходимо уточнить, какой конкретно вид ограничения должен быть наложен на технико-экономический показатель Q_j , $j = 1, \dots$

3. На основе анализа конструкции РЭУ выявляются параметры конструкторско-технологического решения, которые в наибольшей степени влияют на целевую функцию F и на технико-экономические показатели Q_j , не вошедшие в нее. Эти параметры в дальнейшем рассматриваются в качестве оптимизируемых.

Следует помнить, что в дальнейшем конструкторско-технологическое решение будет воплощаться в реальное устройство значениями своих оптимизируемых параметров. На этом же этапе необходимо выявить ограничения, накладываемые на оптимизируемые параметры, исходя из их конструкторских и физических особенностей.

4. Проводят работу по представлению в математической форме целевой функции F и технико-экономических показателей Q_j через оптимизируемые параметры, то есть находят выражения вида

$$\left. \begin{aligned} F &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ Q_1 &= \varphi_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \dots \dots \\ Q_l &= \varphi_{l+1}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \right\}, \quad (7.5)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{l+1}$ — символы функциональных связей;

l — количество технико-экономических показателей, принятых во внимание, но не вошедших в целевую функцию;

x_1, \dots, x_n — оптимизируемые параметры из числа конструкторско-технологических параметров РЭУ;

n — количество конструкторско-технологических параметров, рассматриваемых в качестве оптимизируемых.

Необходимо заметить, что не обязательно в каждое построенное математическое выражение вида (7.5) должны войти все оптимизируемые параметры. Однако каждый из них должен присутствовать хотя бы в одном из выражений. В противном случае параметр не может рассматриваться в качестве оптимизируемого.

5. Выясняется условие оптимальности решения, т.е. в выражении вида (7.1) уточняют характер экстремума.

Следует знать, что большинство математических методов оптимизации предполагает минимизацию целевой функции F . Если в конкретной задаче необходимо искать максимум функции F , то условие поиска оптимума $F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max$ заменяют условием

$$-F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min.$$

6. Выбирают математический метод решения задачи оптимизации с учетом ограничений, накладываемых как на технико-экономические показатели, не вошедшие в целевую функцию, так и на сами оптимизируемые параметры x_1, \dots, x_n .

Решив математически задачу оптимизации, получают оптимальные значения оптимизируемых параметров x_1, \dots, x_n :

$$F(x_{1\text{опт}}, \dots, x_{n\text{опт}}) = \text{ext } F(x_1, \dots, x_n).$$

7. Выполняется интерпретация результатов решения с учетом особенностей рассматриваемого конструкторско-технологического решения.

На этом этапе возможна корректировка оптимальных значений оптимизируемых параметров с учетом их физических особенностей. Однако следует помнить, что корректировка не должна, с одной стороны, заметно увести нас от оптимума, а с другой — нарушить ограничения, наложенные на технико-экономические показатели Q_j , и сами оптимизируемые параметры x_1, \dots, x_n .

7.3. Способы построения целевой функции

В инженерной практике широко используют способ, называемый методом главного критерия или принципом главного критерия [6].

Суть его состоит в том, что из m важнейших технико-экономических показателей выбирается один, наиболее важный (главный). Он используется в качестве целевой функции, т.е.

$$F = Q_1.$$

На остальные технико-экономические показатели Q_2, \dots, Q_m накладываются ограничения вида (7.2) или (7.3):

$$\left. \begin{array}{l} Q_2 \diamond Q_{2\text{доп}} \\ \dots\dots\dots \\ Q_m \diamond Q_{m\text{доп}} \end{array} \right\}. \quad (7.6)$$

В выражениях (7.6) знак \diamond означает, что конкретный вид соотношения уточняется с учетом физических особенностей технико-экономического показателя и его лучшего значения для рассматриваемого вида РЭУ.

Как отмечается в работе [6], практически выделить главный технико-экономический показатель и проранжировать показатели, не вошедшие в целевую функцию F , весьма затруднительно. Установить, какие из них наиболее точно характеризуют качество РЭУ, как правило, нетрудно. Сложнее получить количественную меру их влияния на качество. Решение задач оптимизации в

таких случаях может осуществляться с помощью принципа взвешивания показателей. Этот принцип базируется на приведении показателей к относительным величинам (относительно априорно назначенного некоторого их уровня, исходя из функционирования и потребительских свойств РЭУ). Наиболее простым является подход, при котором целевая функция F формируется в виде выражения

$$F = \prod_{j=1}^m (Q_j^{(i)} / Q_{j0})^{\alpha_j}, \quad (7.7)$$

где $Q_j^{(i)}$ — значение j -го показателя в текущем (i -м) варианте;
 Q_{j0} — экстремальное, но реально достижимое значение j -го показателя;
 α_j — весовой коэффициент j -го показателя ($0 < \alpha < 1$);
 m — число принятых во внимание показателей.

Весовые коэффициенты α_j назначаются, как правило, на основании экспертных оценок. Недостатком выражения (7.7) является, то, что экстремальные (лучшие) значения всех технико-экономических показателей, входящие в него, должны соответствовать либо минимуму, либо максимуму.

Указанного недостатка лишено выражение

$$F = \sum_{j=1}^m \alpha_j q_j, \text{ или } F = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m q_j^{\alpha_j}}, \quad (7.8)$$

где q_j — безразмерное нормированное значение j -го показателя.

Значение q_j могут быть определены, например, с использованием соотношения

$$q_j = \frac{Q_j^{(i)} - Q_j^*}{Q_{je} - Q_j^*}, \quad (7.9)$$

где $Q_j^{(i)}$ — текущее (в i -м варианте) значение j -го показателя;
 Q_j^* — критическое (допустимое) значение j -го показателя;
 Q_{je} — экстремальное, но реально достижимое значение j -го показателя.

Достоинством выражений (7.8) является то, что показатели q_j изменяются в диапазоне (0...1), причем лучшее (экстремальное) значение соответствует точке $q_j = 1$. Поэтому при использовании в качестве целевой функции выражений (7.8) условием оптимальности решения является

$$F \rightarrow \max.$$

Если на весовые коэффициенты α_j наложено условие вида

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1,$$

то экстремальное значение целевой функции F равно

$$F=1.$$

7.4. Краткая характеристика математических методов решения задач оптимизации

Практическое решение задач оптимизации предполагает вначале подготовку исходных данных и получение математических выражений для целевой функции F и для технико-экономических показателей Q_j , не вошедших в целевую функцию F . После этого возникает вопрос о выборе математического метода решения задачи оптимизации.

Выбор этого метода, прежде всего, зависит от наличия либо отсутствия ограничений, накладываемых на технико-экономические показатели Q_j , а также на сами оптимизируемые параметры x_1, \dots, x_n .

Вторым важнейшим фактором, определяющим выбор метода решения задачи оптимизации, является линейный или нелинейный вид уравнений, задающих математические выражения для функций F и Q_j . Если хотя бы одна из функций F или Q_j , имеет нелинейный вид, то это потребует выбора одного из методов, ориентированных на решение задач нелинейного математического программирования.

Напомним, что математическое программирование — раздел математики, занимающийся разработкой методов решения задач оптимизации.

Различают линейное и нелинейное математическое программирование. Линейное рассматривает решение задач оптимизации в случае, когда целевая функция F и функции Q_j , задающие ограничения, имеют линейный характер. Нелинейное рассматривает решение задач оптимизации в случае нелинейного вида хотя бы одной из функций F и Q_j , $j=1, 2, \dots$. Третьим важнейшим фактором, определяющим выбор математического метода решения задач оптимизации, является количество оптимизируемых параметров, участвующих в задаче оптимизации.

Четвертый фактор — наличие или отсутствие ЭВМ большой производительности, что определяет возможность использования численных методов оптимизации.

В случае отсутствия каких-либо ограничений, накладываемых на функцию F и на оптимизируемые параметры x_1, \dots, x_n ,

а также отсутствие функций Q_j , задача оптимизации может быть решена классическими приемами математического анализа. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \end{array} \right\} \quad (7.10)$$

Однако при этом надо доказать, что для решаемой задачи экстремум функции соответствует оптимуму.

При линейном виде целевой функции F на практике широко используют так называемый симплексный метод [32].

Для решения задач оптимизации в случаях наличия функций Q_j и любом виде этих функций и целевой функции F широко используют численные методы оптимизации, являющиеся разновидностью методов нелинейного программирования. Из них на практике широко используют методы штрафных функций, методы случайного поиска, градиентные методы.

Указанные методы имеют много разновидностей, что находит свое отражение даже в их названиях.

Особое место среди методов оптимизации занимает так называемое динамическое программирование. Оно напоминает простой перебор вариантов решения, однако является более эффективным.

7.5. Метод динамического программирования

Этот метод отличается от простого перебора тем, что промежуточные заведомо неудачные решения отбрасываются еще на начальных этапах движения к оптимуму.

Динамическое программирование — шаговый процесс.

Рассматриваемое устройство или процесс разбиваются на составные части (компоненты), и на каждом шаге принимаются во внимание лишь две компоненты.

На первом шаге на основе анализа двух взятых компонент выделяются варианты (ситуации), которые предположительно еще могут привести к получению оптимального решения в целом. Эти выделенные варианты на втором шаге уже рассматриваются как одна новая компонента, а в качестве второй к ним добавляется следующая составная часть устройства или процесса. Так как новых компонент после первого шага может быть несколько, то на втором, а далее и на последующих шагах число рассматриваемых пар компонент также растет.

Проиллюстрируем метод на примере задачи оптимального резервирования.

Пример 7.1. РЭУ включает три составных элемента (функциональных узлов, блоков и т.п.). Требуется определить количество резервных элементов каждого вида, обеспечивающих заданный уровень надежности РЭУ, а именно: для вероятности отказа q должно выполняться условие $q \leq 0,025$, но суммарная стоимость резервируемого устройства Ц должна быть минимальной.

Показатели надежности в виде вероятностей отказа элементов каждого вида и их стоимость, приходящиеся на один элемент (функциональный узел, блок), приведены в табл. 7.1

Таблица 7.1

Элемент	Вероятность отказа элемента, q_i	Стоимость элемента, C_i усл. ед.
1	0,2	5
2	0,1	4
3	0,15	3

Решение. Схема расчета надежности устройства с учетом резервирования приведена на рис. 7.1.

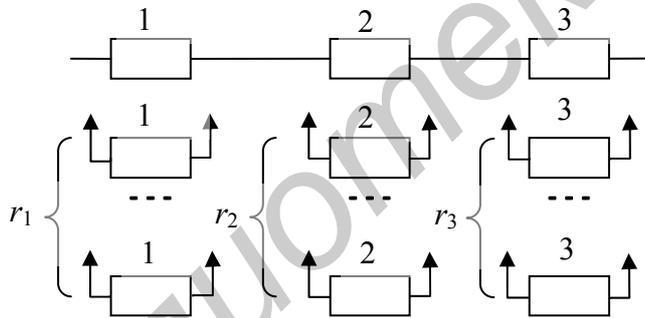


Рис. 7.1. Схема расчета надежности устройства

Из условия примера видно, что в качестве целевой функции F рассматривается суммарная стоимость резервируемого устройства, т.е. $F = Ц$.

Оптимальному решению будет соответствовать условие $F \rightarrow \min$.

Технико-экономическим показателем, не вошедшим в целевую функцию F , является уровень надежности резервируемого устройства. В этом качестве рассматривается вероятность отказа устройства, причем должно выполняться условие $q \leq 0,025$.

При реализации метода динамического программирования на первом шаге в анализ включаем элементы 1-го и 2-го видов.

Далее рассматривают варианты решений, построенных из элементов 1-го и 2-го видов, и строят табл.7.2.

Таблица 7.2

Варианты решений на первом шаге
(с учетом элементов 1-го и 2-го видов)

Характеристики для элемента вида 1	Характеристики для элемента вида 2		
	$r_2=0$ 1/4	$r_2=1$ 0,01/8	$r_2=2$ 0,001/12
$r_1=0$ 0,2/5	0,3/9	0,21/13	0,201/17
$r_1=1$ 0,04/10	0,14/14	0,05/18	0,041/22
$r_1=2$ 0,008/15	0,108/19	0,018/23 *	0,009/27 *

В ячейках табл.7.2 информация записана в виде простой дроби, означает следующее:

числитель — суммарная вероятность отказа элементов 1-го и 2-го видов с учетом резервирования, обозначим как $q_{1,2}$;

знаменатель — суммарная стоимость элементов 1-го и 2-го видов с учетом резервирования, обозначим как $Ц_{1,2}$.

Значения $q_{1,2}$ и $Ц_{1,2}$ подсчитаны по формулам

$$q_{1,2} = q_1^{r_1+1} + q_2^{r_2+1} - q_1^{r_1+1} q_2^{r_2+1} \approx q_1^{r_1+1} + q_2^{r_2+1};$$

$$Ц_{1,2} = Ц_1(1 + r_1) + Ц_2(1 + r_2),$$

где r_1, r_2 — количество резервных элементов соответственно 1-го и 2-го видов.

Из табл. 7.2 видно, что в анализ на 2-м шаге следует включить ячейки (ситуации), помеченные знаками "*". Каждая из этих ситуаций на втором шаге будет рассматриваться как одна компонента.

На втором шаге в анализ включаем элемент вида 3 и снова рассматриваем компоненты, а именно: совместное решение по элементам 1 и 2 и элемент вида 3. Затем строим таблицу с учетом этих двух компонент (табл.7.3).

Таблица 7.3

Характеристики для элемента вида 3	Варианты из табл. 7.2	
	$r_1=2; r_2=1$ 0,018/23	$r_1=2; r_2=2$ 0,009/27
$r_3=0$ 0,15/3	0,168/26	0,159/30
$r_3=1$ 0,023/6	0,041/29	0,032/33
$r_3=2$ 0,003/9	0,021/32	0,012/36

Информация, представленная в табл.7.3, получена с использованием формул

$$q_{1,2,3} = q_{\Sigma} = q_{1,2} + q_3^{r_3+1} - q_{1,2}q_3^{r_3+1} \approx q_{1,2} + q_3^{r_3+1};$$

$$\Pi_{1,2,3} = \Pi_{\Sigma} = \Pi_{1,2} + \Pi_3(1 + r_3),$$

где r_3 — количество резервных элементов 3-го вида.

Из табл.7.3 видно, что оптимальному решению отвечают ситуация

$$r_1 = 2; \quad r_2 = 1; \quad r_3 = 2.$$

При этом суммарная стоимость резервируемого устройства составляют 32 усл. ед, а вероятность отказа устройства $q = 0,021$.

7.6. Алгоритм оптимизации методом случайного поиска

Наиболее простой алгоритм случайного поиска для случая минимизации целевой функции F задается итеративным выражением [33]

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \begin{cases} hs_i r_i, & \text{если } F[x_i^{(k)} + hS_i r_i] \leq F[x_i^{(k)}] \\ 0, & \text{если } F[x_i^{(k)} + hS_i r_i] > F[x_i^{(k)}], \end{cases} \quad (7.11)$$

где k — номер итерации (приближения к оптимуму);

$x_i^{(k)}$ — значение i -го оптимизируемого параметра в k -й интеграции;

$x_i^{(k+1)}$ — значение i -го оптимизируемого параметра в $k+1$ интеграции;

h — шаг поиска оптимума

r_i — случайное число с равномерным законом распределения в диапазоне $(-1 \dots +1)$, используемое для определения значения и направления смещения (рабочего шага) i -го оптимизируемого параметра;

S_i — приращение, установленное для i -го оптимизируемого параметра, называемое также шкальным коэффициентом.

Шкальные коэффициенты S_i определяют по выражению

$$S_i = \frac{x_{i\max} - x_{i\min}}{C_i}, \quad (7.12)$$

где C_i — константы, в общем случае различные по значению для каждого оптимизируемого параметра ($C_i = 5 \dots 30$);

$x_{i\max}, x_{i\min}$ — максимальное и минимальное ограничения, накладываемые на i -й оптимизируемый параметр.

$$x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}. \quad (7.13)$$

Если при оптимизации значение i -го оптимизируемого параметра выходит за допустимые границы ($x_{i\min} \dots x_{i\max}$), то этому параметру присваивается граничное значение

$$x_i = \begin{cases} x_{i\min}, & \text{если } x_i < x_{i\min} \\ x_{i\max}, & \text{если } x_i > x_{i\max} \end{cases} \quad (7.14)$$

В реальных ситуациях на технико-экономических показателях, не вошедшие в целевую функцию F , могут накладываться ограничения вида

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \leq b_j; \quad j = 1, \dots, \ell, \quad (7.15)$$

или

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \geq b_j; \quad j = 1, \dots, \ell, \quad (7.16)$$

где g_j — технико-экономический показатель, являющийся некоторой функцией оптимизируемых параметров; x_1, \dots, x_n ;

b_j — допустимое значение j -го показателя, представляющее собой константу, не зависящую от параметров x_1, \dots, x_n ;

ℓ — количество показателей, на которые наложены ограничения.

Если на любой итерации делается подряд m неудачных попыток, то шаг поиска h уменьшается и дальнейший поиск ведется с новым шагом. Неудачными считаются попытки в следующих случаях:

целевая функция F не убывает, т.е. не имеет место процесс приближения к оптимуму;

значения всех оптимизируемых параметров выходят за допустимые границы $x_{i\min}, x_{i\max}$;

нарушаются ограничения вида (7.15) или (7.16), накладываемые на технико-экономические показатели, не вошедшие в целевую функцию F .

Процесс оптимизации прекращается, если выполняется условие

$$h \leq h_{\min}, \quad (7.17)$$

где h_{\min} — заданная константа, определяющая конец и точность оптимизации.

Чтобы решить задачу оптимизации с помощью описанного алгоритма, начальные значения оптимизируемых параметров в итерации с номером $k = 0$ не должны нарушать ограничения

вида (7.13), (7.15) или (7.16). Структурная схема алгоритма оптимизации методом случайного поиска применительно к решению задач с указанными ограничениями приведена на рис. 7.2. Пояснения некоторых функциональных частей (блоков) структурной схемы приведены в табл. 7.4. В структурной схеме алгоритма и табл. 7.4 использованы обозначения переменных (аргументов), принятые при описании вычислительного алгоритма случайного поиска.

Таблица 7.4

Пояснения функциональных частей структурной схемы алгоритма

Номер функциональной части	Пояснение
1	Ввод исходных данных: n, m, h, h_{\min} ; ввод массивов $x_{i\min}, x_{i\max}$; ввод выбранных начальных значений оптимизируемых параметров $x_i; i=1, \dots, n$.
2	Подсчет целевой функции для начальных значений оптимизируемых параметров (в нулевой итерации).
3, 20, 21	Организация счета и проверки количества неудачных попыток в k -й итерации.
4, 10, 13	Организация счета и проверки количества оптимизируемых параметров, вышедших в k -й итерации за допустимые границы $x_{i\min}, x_{i\max}$.
5	Формирование (генерирование) равномерно распределенного случайного числа в диапазоне $(-1...+1)$ и определение значения оптимизируемого параметра в k -й итерации.
6-9	Проверка выполнения ограничений вида (7.13) и корректировка (при необходимости) значений оптимизируемых параметров в k -й итерации.
14	Проверка выполнения ограничений вида (7.15) или (7.16).
15	Подсчет значения целевой функции в k -й итерации ($k \neq 0$).
16	Проверка характера изменения целевой функции.
22, 23	Проверка условия прекращения поиска, изменение шага поиска оптимума.
11, 12, 18, 19	Организация циклов по переменной i ; i — счетчик оптимизируемых параметров.
24	Печать результатов поиска оптимума.

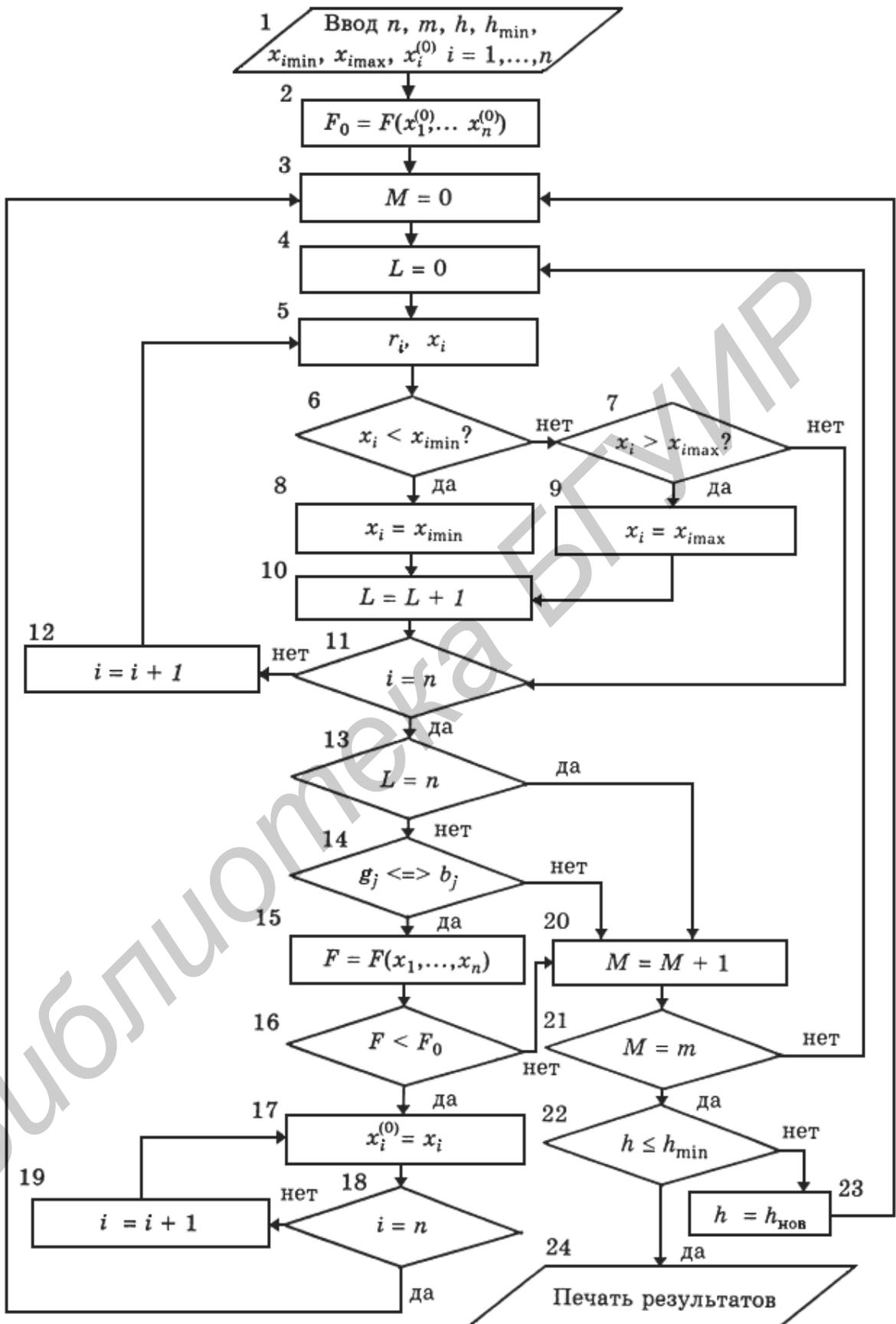


Рис 7.2. Структурная схема алгоритма

Программа для ЭВМ должна предусматривать ввод в нее математических выражений целевой функции F и функций, задающих ограничения вида (7.15) и (7.16). С описанием программы и ее использованием для персональных ЭВМ можно ознакомиться в [34].

7.7. Примеры решения задач оптимизации

Пример 7.2. Предприятие получило заказ на изготовление 1000 печатных плат. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При изготовлении первым способом затраты S для предприятия равны

$$S_1 = 2 + 0,4x_1 + 0,3x_1^2 \quad \text{усл. ед.}, \quad (7.18)$$

а при изготовлении вторым способом

$$S_2 = 1 + 1,2x_2 + 0,1x_2^2 \quad \text{усл. ед.}, \quad (7.19)$$

где x_1, x_2 — количество печатных плат, изготовленных соответственно первым и вторым способами.

Требуется определить, сколько плат следует изготовить каждым из способов, чтобы суммарные затраты предприятия были минимальными.

Решение. 1. Из условия примера видно, что в качестве целевой функции F выступают суммарные затраты предприятия на изготовление партии печатных плат в количестве 1000 шт. Причем должно выполняться условие

$$F = S_1 + S_2 \rightarrow \min.$$

2. Техничко-экономических показателей, на которые накладываются ограничения вида (7.2) или (7.3) в данном случае нет.

3. Оптимизируемыми параметрами являются x_1 и x_2 . Согласно условию примера на параметры x_1 и x_2 должны быть наложены ограничения

$$x_1 + x_2 = 1000, \quad (7.20)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (7.21)$$

4. С учетом затрат S_1 и S_2 целевая функция F представляется через оптимизируемые параметры x_1 и x_2 выражением

$$\begin{aligned} F = S_1 + S_2 &= 2 + 0,4x_1 + 0,3x_1^2 + 1 + 1,2x_2 + 0,1x_2^2 = \\ &= 3 + 0,4x_1 + 0,3x_1^2 + 1,2x_2 + 0,1x_2^2. \end{aligned} \quad (7.22)$$

5. Математическая постановка задачи состоит в определении таких значений x_1 и x_2 , при которых целевая функция (7.22) минимальна при условиях (7.20) и (7.21).

6. Сначала найдем решение задачи чисто аналитическим способом, сводя исследование на условный экстремум функции F к исследованию на безусловный экстремум функции

$$F_1 = 3 + 0,4x_1 + 0,3x_1^2 + 1,2(1000 - x_1) + 0,1(1000 - x_1)^2.$$

Функция F_1 получена путем подстановки в функцию (7.22) выражения $x_2 = 1000 - x_1$, найденного из условия (7.20).

Найдем стационарную точку x_1^* функции F_1 из условия

$$dF_1 / dx_1 = 0$$

$$dF_1 / dx_1 = 0,4 + 0,6x_1 - 1,2 - 0,2(1000 - x_1) = 0 \quad \text{или} \\ 0,8x_1 - 200,8 = 0.$$

откуда $x_1^* = 251$.

Следовательно, $x_2^* = 1000 - x_1^* = 749$.

Так как $\frac{d^2F}{dx_1^2}(x_1^*, x_2^*) > 0$, то функция F в найденных точках

имеет минимальное значение.

7. Найдем решение задачи методом случайного поиска на ЭВМ [34].

Результаты решения при шаге поиска $h = 0,0001$:

$$x_1 = 251,06; \quad x_2 = 748,94; \quad F = 76002,6.$$

С учетом целочисленности величин x_1 и x_2 принимаем

$$x_{1\text{опт}} = 251; \quad x_{2\text{опт}} = 749.$$

Как видим, эти значения совпадают с результатами решения, полученными расчетно-аналитическим способом.

Пример 7.3. РЭС летательного аппарата включает четыре блока. Отказ хотя бы одного из них приводит к отказу РЭС в целом. Для повышения надежности РЭС может использоваться раздельное резервирование по типу замещение для каждого блока. С позиций заказчика (потребителя) РЭС важнейшими являются такие технико-экономические показатели, как надежность (вероятность безотказной работы за заданное время P), масса M , габариты V и стоимость C . Значимость надежности составляет примерно 100%, массы — 80%, габаритов — 60%, стоимости — 30%.

Требуется определить, какое число резервных блоков каждого типа необходимо предусмотреть, чтобы в совокупности обеспечить оптимальные (лучшие) значения указанных технико-экономических показателей для РЭС в целом. В табл. 7.5 приведена информация о блоках.

Таблица 7.5

Значения характеристик, приходящиеся на один блок

Блок	Значение характеристики, приходящееся на один блок			
	Надежность(p_i)	Масса(m_i), кг	Объем(V_i), дм ³	Стоимость (C_i)
1	0,93	2,3	3	75
2	0,80	1,0	5	45
3	0,99	2,5	3,5	35
4	0,95	1,5	4,2	62

В табл.7.6 указаны критические (предельно допустимые) значения технико-экономических показателей Q_i .

Таблица 7.6

Критические значения технико-экономических показателей

Показатель	P	M , кг	V , дм	C , усл.ед.
Значение	0,9	30	50	1000

Решение. 1. Так как по условию примера в той или иной степени важны все четыре технико-экономических показателя, то сформируем целевую функцию в виде первого критерия из числа выражений (7.8), т.е. в виде

$$F = \alpha_P P_0 + \alpha_M M_0 + \alpha_V V_0 + \alpha_C C_0, \quad (7.23)$$

где α_j — весовой коэффициент j -го показателя, $j \rightarrow P, M, V, C$.

Индекс "0" означает, что берутся нормированные значения соответствующих технико-экономических показателей. Эти значения для текущего (i -го) варианта решения будем определять по выражению (7.9). Текущими будем называть варианты, которые рассматриваются в процессе поиска оптимума.

Нормированные значения технико-экономических показателей P, M, V, C включены в целевую функцию (7.23). Однако на сами показатели P, M, V и C должны быть наложены ограничения. С учетом физической сущности этих показателей и данных табл.7.5 вид этих ограничений должен быть таким:

$$P \geq 0,9; \quad M \leq 30 \text{ кг}; \quad V \leq 50 \text{ дм}^3; \quad C \leq 1000 \text{ усл. ед.}$$

2. Весовые коэффициенты α_j функции (7.23) определим, исходя из значимости технико-экономических показателей, указанной заказчиком, и условия

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_j = 1.$$

Для подсчета значений α_j воспользуемся выражением

$$\alpha_j = \frac{\alpha_j [\%]}{\sum_{j=1}^4 \alpha_j [\%]};$$

где α_j — значимость j -го показателя, указанная заказчиком.

Получим: $\alpha_P \approx 0,37$; $\alpha_M \approx 0,3$; $\alpha_V \approx 0,22$; $\alpha_C \approx 0,11$.

3. Для подсчета нормированных значений показателей воспользуемся выражением (7.9). Для этого определим Q_{je} для каждого из них. Для показателей M , V и C примем значения, соответствующие случаю отсутствия резервных блоков.

Пользуясь данными табл. 7.5 находим:

$$M_e = 7,3 \text{ кг}; \quad V_e = 15,7 \text{ дм}^3; \quad C_e = 217 \text{ усл.ед.}$$

Для показателя P (вероятности безотказной работы) примем $P_e = 1$.

4. Нетрудно установить, что оптимизируемыми параметрами в данном примере будут являться r_i — количество резервных блоков каждого типа, $i = 1, \dots, 4$. Установим на r_1, \dots, r_4 ограничения вида (7.4).

Из физических соображений ясно, что $r_{i\min} = 0$. Значения $r_{i\max}$ найдем исходя из того, чтобы не были превышены значения M^* , V^* и C^* , указанные в табл. 7.6 получим

$$r_{1\max}^{(M)} = \frac{M^* - M_e}{m_1} = \frac{30 - 7,3}{2,3} = 9,87 \Rightarrow 9.$$

Аналогично $r_{1\max}^{(V)} = 11$; $r_{1\max}^{(C)} = 10$.

В качестве $r_{1\max}$ принимаем меньшее значение из трех полученных, т.е. $r_{1\max} = 9$.

Применяя рассмотренный подход, находим $r_{2\max} = 6$; $r_{3\max} = 9$; $r_{4\max} = 8$.

5. Представим текущее значение P , M , V и C через оптимизируемые параметры r_1, \dots, r_4 .

Логическая схема (модель) расчета надежности РЭС с учетом резервирования имеет вид, показанный на рис.7.3.

Будем считать, что основные и резервные элементы одинаковы, а резерв нагруженный.

Используя приемы, рассмотренные в подразд.5.30, получим

$$P = (1 - (1 - p_1)^{r_1 + 1}) \dots (1 - (1 - p_4)^{r_4 + 1}) = \prod_{i=1}^4 (1 - (1 - p_i)^{r_i + 1}).$$

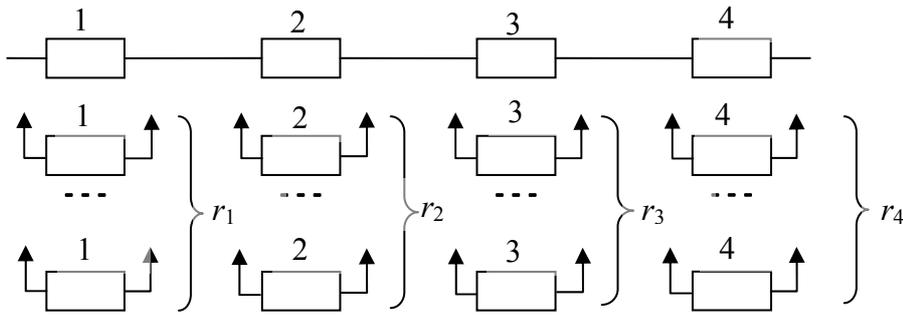


Рис 7.3. Логическая схема резервируемого РЭС

Для показателей M, V и C очевидным является следующее:

$$M = \sum_{i=1}^4 m_i(1 + r_i); \quad V = \sum_{i=1}^4 V_i(1 + r_i); \quad C = \sum_{i=1}^4 c_i(1 + r_i);$$

6. Уточняем условие оптимальности для выражения (7.23). Так как в нем использованы нормированные значения P, M, V и C , то условием оптимальности, как отмечалось в подразд.7.3, является $P \rightarrow \max$.

7. В соответствии с [34] реализуем метод случайного поиска, рассмотренный в подразд.7.6.

Результаты решения на ЭВМ с учетом целочисленности параметров r_1, \dots, r_4 таковы:

$$r_1 = 1; \quad r_2 = 2; \quad r_3 = 0; \quad r_4 = 1.$$

Пример 7.4. Для изготовления несущих конструкций РЭУ трех типов (A, B, C) необходимо выполнить механические, электрохимические и монтажно-сборочные работы. Средние затраты времени, приходящиеся на одно изделие каждого типа по каждому виду работ, указаны в табл. 7.7. В ней же указан общий месячный фонд рабочего времени по каждому виду работ, а также прибыль от реализации одного изделия.

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию в данном месяце, чтобы прибыль от реализации была максимальной. По госзаказу предприятие должно изготавливать не менее 100 изделий типа A в месяц. На изготовление других изделий не имеется никаких ограничений.

Таблица 7.7

Затраты времени, приходящиеся на одно изделие в зависимости от вида работ

Вид работ	Затраты времени (чел.-ч), приходящиеся на одно изделие			Общий месячный фонд рабочего времени (чел.-ч)
	A	B	C	
1. Механические	5	1	3	1408
2. Электрохимические	4	2	1	704
3. Монтажно-сборочные	3	4	2	880
Прибыль (усл.ед.)	10	14	12	

Решение. 1. Предположим, что будет изготовлено x_1 единиц изделий типа A , x_2 — типа B , x_3 — типа C . Тогда для изготовления такого количества изделий потребуются затратить $5x_1 + x_2 + 3x_3$ чел.-ч на выполнение механических работ.

Так как общий месячный фонд рабочего времени для их выполнения не может превышать 1408, должно выполняться ограничение

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 1408.$$

Аналогичные рассуждения относительно возможности выполнения электрохимических и монтажно-сборочных работ приводят к неравенствам

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 704; \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 880.$$

Поскольку ежемесячно предприятие обязано изготавливать не менее 100 изделий типа A и количество изготавливаемых изделий не может быть отрицательным, то должны выполняться условия

$$x_1 > 100; \quad x_2 > 0; \quad x_3 > 0.$$

Суммарная прибыль Π от реализации x_1 изделий типа A , x_2 изделий типа B и x_3 изделий типа C

$$\Pi = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3.$$

Таким образом, математическая постановка задачи такова: имеется система

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 1408; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 704; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 880; \\ x_1 &\leq 100 \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

четырёх линейных неравенств с тремя неизвестными x_1, \dots, x_3 и линейная целевая функция относительно этих же переменных

$$F = \Pi = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3. \quad (7.25)$$

Требуется найти такие неотрицательные значения переменных, рассматриваемых как оптимизируемые параметры, при которых функция (7.25) принимает максимальное значение, но при этом выполняются ограничения вида (7.24).

Так как функция (7.25) содержит только линейные неравенства, сформулированная задача является задачей линейного программирования и может быть решена методом линейного программирования.

Однако подобные задачи могут быть решены и методами нелинейного программирования. Решим сформулированную задачу с помощью метода случайного поиска на ЭВМ.

Целевая функция определяется выражением (7.25). Функции, задающие ограничения описываются первыми тремя неравенствами системы (7.24). Аналогично примеру 7.3 определяем ограничения, накладываемые на оптимизируемые параметры x_1 , x_2 и x_3 .

Результаты решения с учетом целочисленности оптимизируемых параметров x_1, \dots, x_3 таковы:

$$x_1 = 100; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 290.$$

Библиотека БГУИР

Глава 8. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ РЭУ

8.1. Понятие и характеристики систем массового обслуживания

Протекание многих процессов в технологии РЭУ может рассматриваться как функционирование, так называемых, систем массового обслуживания (СМО).

Любая такая система состоит из определенного числа каналов обслуживания. Применительно к технологии РЭУ, в качестве каналов обслуживания могут рассматриваться технологическое оборудование, рабочие места и т.п.

Функционирование системы массового обслуживания состоит в поступлении на ее каналы заявок и их обслуживании. После того, как заявка обслужена, канал освобождается и готов принять очередную заявку.

Основными характеристиками СМО являются;

- 1) процент заявок, получивших отказ в обслуживании;
- 2) пропускная способность СМО. Различают относительную и абсолютную пропускные способности. Относительная пропускная способность показывает, каков процент заявок будет обслужен системой, абсолютная — какое количество будет обслужено в единицу времени;
- 3) вероятность простоя СМО (простоем СМО считают одновременный простой всех каналов);
- 4) среднее время обслуживания одной заявки.

Если бы время обслуживания заявок и интервалы, через которые поступают заявки, были постоянными, то оценка характеристик СМО, указанных в пп.1-3, не представляла бы труда. За счет того, что в общем случае время обслуживания и время поступления заявок случайны, в СМО могут образовываться разряжения и скопления заявок, что может приводить к ее простоям и отказам в обслуживании заявок.

Основной задачей теории массового обслуживания является установление взаимосвязи между характером потока поступающих заявок и основными характеристиками СМО.

8.2. Потоки событий (заявок) и их математическое описание

Под потоком событий или заявок понимают последовательность событий, следующих друг за другом через определенные, в общем случае случайные, промежутки времени.

В инженерной практике широкое применение находят простейшие или стационарные пуассоновские потоки заявок [1, 7, 14].

Название "пуассоновский" связано с тем, что для таких потоков число заявок, попавших на любой фиксированный интервал времени, распределено по закону Пуассона для дискретных случайных величин. Согласно этому закону вероятность того, что за время τ поступит m заявок, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \quad (8.1)$$

где λ — плотность потока заявок (среднее число заявок, приходящихся на единицу времени).

Для краткости простейшие стационарные пуассоновские потоки часто называют простейшими потоками. Такой поток должен отвечать трем следующим условиям:

1) условию стационарности — количественные характеристики потока не зависят от рассматриваемого временного участка. В качестве этой характеристики обычно используют плотность поступления заявок, представляющую собой среднее количество заявок, приходящихся на единицу времени;

2) условию ординарности — заявки поступают по одиночке, а не парами, тройками и т.д.

3) условию отсутствия последействия — время поступления очередной заявки не зависит от времени поступления предыдущей заявки.

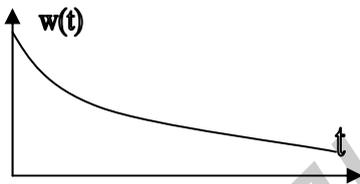


Рис. 8.1. Экспоненциальное распределение времени поступления заявок

Простейшие потоки в инженерных приложениях теории массового обслуживания находят примерно такое же применение, как нормальный закон распределения при вероятностном описании параметров. В теории вероятностей доказано, что для простейшего потока время t между приходом двух соседних заявок распределено по экспоненциальному закону (рис.8.1). Плотность распределения времени t в этом случае задается выражением

$$w(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (8.2)$$

где λ — плотность потока заявок.

8.3. Виды СМО в технологии РЭУ

В зависимости от того, как поступают с заявкой в случае, если все каналы оказались занятыми, различают:

СМО с отказом в обслуживании заявки и СМО с ожиданием.

Для СМО с отказом характерно, что заявка, заставшая все каналы занятыми, немедленно покидает систему.

В СМО с ожиданием заявка, заставшая все каналы занятыми, не покидает систему, а ставится в очередь и при освобождении одного из каналов обслуживается. В СМО с ожиданием на процесс ожидания заявок в очереди могут накладываться или не накладываться какие-либо ограничения. В последнем случае говорят, что имеем дело с "чистой" СМО с ожиданием. Если же на процесс ожидания накладываются какие-либо ограничения, то СМО называют "системой смешанного типа". В таких системах из-за наложенных ограничений возможны случаи, когда заявка получит отказ в обслуживании, т.е. СМО смешанного типа проявляет также признаки СМО с отказом. В системах смешанного типа могут накладываться следующие ограничения:

- а) на количество заявок, стоящих в очереди;
- б) на время пребывания заявки в очереди;
- в) на общее время нахождения заявки в СМО.

В технологии РЭУ чаще всего встречаются СМО смешанного типа.

8.4. Математическое описание СМО с отказом

Рассмотрим систему массового обслуживания с отказом, имеющую n каналов.

Предположим, что поток заявок, поступающих в СМО, простейший и имеет плотность λ . Кроме того, будем считать, что время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону с параметром

$$\mu = \frac{1}{M(T_{об})}, \quad (8.3)$$

где $M(T_{об})$ — математическое ожидание времени обслуживания заявки.

Следовательно, плотность распределения времени обслуживания

$$w(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \quad (8.4)$$

Для рассматриваемой системы возможны следующие состояния:

- x_0 — свободны все каналы;
- x_1 — занят один канал;
- ...
- x_k — занято k каналов;
- ...
- x_n — заняты n каналов.

Данные состояния СМО могут быть описаны дифференциальными уравнениями Эрланга [7]. Решение их позволяет получить формулы для расчета вероятностей состояний, которые постоянны для установившегося режима работы СМО. Такой режим для системы данного вида наступает всегда при времени $t \rightarrow \infty$ [7].

$$P_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{i=0}^n \alpha^i / i!}; \quad 0 \leq k \leq n; \quad (8.5)$$

где p_k — вероятность состояния x_k ;

α — приведенная плотность заявок или коэффициент загрузки канала.

Коэффициент α определяют как

$$\alpha = \lambda M(T_{об}), \quad (8.6)$$

где $M(T_{об})$ — математическое ожидание времени обслуживания одной заявки.

Формулы Эрланга (8.5) получены для случая экспоненциального распределения времени обслуживания, однако, как отмечается в [7], они справедливы при любом другом законе, лишь бы поток заявок был простейшим.

Вероятность необслуживания заявки определяется как

$$P_{необ} = p(x_n) = p_n. \quad (8.7)$$

Относительная пропускная способность q может быть подсчитана как

$$q = 1 - P_{необ}. \quad (8.8)$$

При необходимости величину q можно выразить в процентах. Абсолютную пропускную способность подсчитывают так:

$$Q = \lambda q. \quad (8.9)$$

Среднюю долю времени, которое СМО будет простаивать, можно определить вероятностью состояния x_0 , т.е.

$$P_{простоя} = p(x_0) = p_0. \quad (8.10)$$

Пример 8.1. На участок ремонта технологического оборудования поступают приборы со средней плотностью $\lambda = 2$ ед/ч. Среднее время обслуживания одной единицы оборудования равно 24 мин. Заявка, заставшая все каналы заснятыми получает отказ в обслуживании.

Требуется определить характеристики СМО в предположении наличия одного рабочего места. Кроме того, надо проследить, как меняются характеристики СМО при введении второго рабочего места.

Решение. По условию задачи имеем СМО с отказом.

Будем предполагать, что поток заявок, поступающих в СМО, простейший со средней плотностью λ .

1. Подсчитаем коэффициент загрузки канала или приведенную плотность заявок, используя формулу (8.6)

$$\alpha = \lambda M(T_{об}) = 2 \cdot 0,4 = 0,8.$$

При расчете значения величины α учтено, что 24 мин = 0,4 ч.

2. Найдем характеристики СМО при числе каналов $n=1$. Найдем основные характеристики СМО для случая установившегося режима функционирования. Применяя формулу (8.5), для вероятности необслуживания заявок получим:

$$P_{необ} = p_n = p_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{0,8}{1 + 0,8} \approx 0,44.$$

Относительную пропускную способность q определим как

$$q = 1 - P_{необ} = 1 - 0,44 = 0,56.$$

Следовательно, примерно 56% заявок, поступивших в СМО, будут обслужены.

Найдем вероятность простоя канала p_0 . Применяя формулу (8.10), получим:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \alpha} = \frac{1}{1 + 0,8} \approx 0,56.$$

3. Проследим, как меняются характеристики системы с введением второго канала. Для этого подсчитаем характеристики СМО при значении $n = 2$. Получим:

$$P_{необ} = p_2 = \frac{0,8^2 / 2}{1 + 0,8 + 0,8^2 / 2} \approx 0,15; \quad q = 1 - P_{необ} = 1 - 0,15 = 0,85;$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 0,8 + 0,8^2 / 2} \approx 0,47.$$

Относительная пропускная способность $q = 0,85$ или 85%. Доля времени простоя системы уменьшилась до 47%.

8.5. Математическое описание "чистой" СМО с ожиданием

Пусть для этой системы имеют место те же условия (предпосылки), что и для рассмотренной СМО с отказом. Но здесь характерно то, что на процесс ожидания заявок в очереди не накладывается никаких ограничений. Поэтому данная система имеет бесконечное, но счетное число состояний, а именно:

- x_0 — свободны все n каналов;
 x_1 — занят ровно один канал;
 ...
 x_k — занято k каналов;
 ...
 x — заняты все n каналов;
 x_{n+1} — все каналы заняты и одна заявка в очереди;
 x_{n+2} — все каналы заняты и две заявки в очереди;
 ...
 x_{n+s} — все каналы заняты и s заявок в очереди;
 ...

Решение дифференциальных уравнений Эрланга, описывающих указанные состояния системы, дает следующие формулы для расчета вероятностей состояний для установившегося режима:

$$p_k = \frac{\alpha^k / k!}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}; \quad 0 \leq k \leq n; \quad \alpha < n; \quad (8.11)$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}; \quad s \geq 0; \quad \alpha < n. \quad (8.12)$$

Для рассматриваемой СМО установившийся режим наступает в случае, когда коэффициент загрузки канала $\alpha < n$. Если указанное условие не выполняется, то число заявок, стоящих в очереди, будет неограниченно возрастать, и установившийся режим не наступит.

Для "чистой" СМО с ожиданием иногда интересуются такой характеристикой, как среднее время ожидания заявки в очереди $M(T_{ож})$.

Для установившегося режима, т.е. когда $\alpha < n$, получена следующая формула [14]:

$$M(T_{ож}) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}; \quad \lambda < \mu, \quad (8.13)$$

где μ — плотность потока обслуживания заявок.

Предполагая, что время обслуживания заявок распределено по экспоненциальному закону, плотность их обслуживания можно найти, как

$$\mu = \frac{1}{M(T_{об})}.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, определяется как

$$m_s = \frac{\alpha^{n+1}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}; \quad \alpha < n. \quad (8.14)$$

8.6. Математическое описание СМО смешанного типа с ограничением длины очереди

Пусть имеем СМО с n каналами, а число заявок, стоящих в очереди в СМО, ограничено значением m .

Как и ранее, поток поступающих заявок будем считать простейшим с плотностью λ . Пусть также известно среднее время обслуживания одной заявки $M(T_{об})$. Данная система может иметь следующие состояния:

- x_0 — свободны все каналы;
- x_1 — занят один канал;
- ...
- x_k — заняты k каналов;
- ...
- x_n — заняты все n каналов;
- x_{n+1} — заняты n каналов и одна заявка в очереди;
- ...
- x_{n+s} — заняты n каналов и s заявок в очереди;
- ...
- x_{n+m} — заняты n каналов и m заявок в очереди.

Решение дифференциальных уравнений Эрланга, описывающих указанные состояния системы, дает следующие расчетные формулы для вероятностей состояний этой системы в случае установившегося режима, который наступает при $t \rightarrow \infty$ [7]:

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^j}; \quad 0 \leq k \leq n; \quad (8.15)$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^j}; \quad 0 \leq s \leq m. \quad (8.16)$$

Нетрудно понять, что вероятность необслуживания заявки определяется вероятностью состояния x_{n+m} т.е.

$$P_{\text{необ}} = p(x_{n+m}) = p_{n+m}. \quad (8.17)$$

Доля времени, которое СМО будет простаивать, как и ранее, определится вероятностью p_0 .

Пример 8.2. На участок ремонта радиоэлектронных блоков поступают устройства со средней плотностью 2 блока в час. Среднее время ремонта одного блока равно 27 мин.

Требуется определить характеристики системы в случае одного и двух рабочих мест при условии, что в помещении дополнительно для ожидания можно поставить три блока.

Решение. Согласно условию примера участок ремонта может рассматриваться как СМО смешанного типа с ограничением числа заявок, стоящих в очереди.

Будем считать, что поток заявок, поступающих в СМО, является простейшим, со средней плотностью λ .

1. По условию примера имеем

$$m = 3;$$

$$\lambda = 2 \text{ бл/ч};$$

$$M(T_{\text{об}}) = 27 \text{ мин} = 0,45 \text{ ч.}$$

Следовательно

$$\alpha = \lambda M(T_{\text{об}}) = 2 \cdot 0,45 = 0,9.$$

2. Подсчитаем характеристики СМО при количестве каналов $n=1$ для случая установившегося режима. Воспользуемся формулами (8.16) и (8.17). Вероятность необслуживания

$$P_{\text{необ}} = p_{1+3} \approx 0,16.$$

3. Относительная пропускная способность СМО

$$q = 1 - P_{\text{необ}} = 0,84,$$

т.е. обслужено будет примерно 84% заявок.

4. Абсолютная пропускная способность

$$Q = q\lambda = 1,68 \text{ бл/ч.}$$

5. Средняя доля времени, которое СМО будет простаивать

$$p_0 = p(x_0) = 0,24,$$

т.е. примерно четверть.

6. Если количество каналов $n = 2$, то характеристики СМО для случая установившегося режима будут иметь следующие значения:

$$P_{\text{необ}} \approx 0,009;$$

$$q = 0,991;$$

$$Q \approx 1,98 \text{ бл/ч};$$

$$p_0 = 0,34.$$

Из приведенных характеристик видно, что примерно 99% заявок будет обслужено, но, в то же время, примерно 2,5 часа при продолжительности рабочей смены 7 часов СМО будет простаивать.

Глава 9. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКЦИЙ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

9.1. Статистическое моделирование как метод исследования параметров конструкций и технологических процессов

Как отмечалось ранее, большинство первичных параметров в КиТРЭС являются случайными. По этой причине случайными являются и выходные параметры. Чтобы исследовать поведение конструкций или технологических процессов, надо наблюдать изменение их выходных параметров.

Использование для этих целей реальных конструкций или технологических процессов в большинстве случаев экономически не оправдано или затруднено по техническим и другим соображениям. Эффективным способом решения указанных задач является имитационное (статистическое) моделирование.

При имитационном моделировании получают случайные реализации первичных параметров. Имея эти реализации и зная математическую модель конструкции РЭУ или технологического процесса, можно проследить как изменяется их выходной параметр. Многократно повторяющееся имитационное моделирование может быть названо статистическим, так как об исследуемом выходном параметре получают статистические данные. Используя полученные данные, при необходимости можно оценить основные статистические характеристики выходного параметра — среднее значение и среднее квадратическое отклонение.

Статистическое моделирование параметров должно выполняться с учетом случайности параметров, диапазонов их возможных значений и законов распределения. Ясно, что чем больше реализаций первичных параметров мы получили, тем больше статистических данных будем иметь и о выходном. Следовательно, достовернее будут определены основные характеристики выходного параметра.

При имитационном (статистическом) моделировании имитируются вероятностные характеристики и связи параметров, поэтому такое моделирование называют также вероятностным.

Широкое внедрение ЭВМ создало хорошие предпосылки для статистического моделирования параметров в КиТРЭУ. Наличие в составе математического обеспечения большинства ЭВМ библиотечных программ получения случайных чисел (датчиков случайных чисел) позволяет быстро решать прикладные инженерные задачи.

9.2. Основы моделирования случайных параметров

Значения случайного параметра представляют собой числа. Если случайный параметр является непрерывным, что и имеет место в большинстве случаев, эти числа можно рассматривать как дискретные отсчеты случайного параметра. Статистическое моделирование параметров состоит в генерировании случайных чисел, причем они должны быть получены с учетом характеристик параметров (среднего значения и среднего квадратического отклонения) и законов их распределения.

Получение истинно случайных чисел является достаточно сложной задачей, поэтому в инженерной практике ограничиваются получением псевдослучайных (почти случайных) чисел, которые в основных чертах похожи на истинно случайные.

Алгоритмы и программы позволяют получать чаще всего случайные числа r , равномерно распределенные в интервале $(0...1)$, либо числа x_n с нормальным распределением, математическим ожиданием $m=0$, и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Графики плотностей и функций распределения для указанных случайных чисел показаны на рис.9.1 и 9.2.

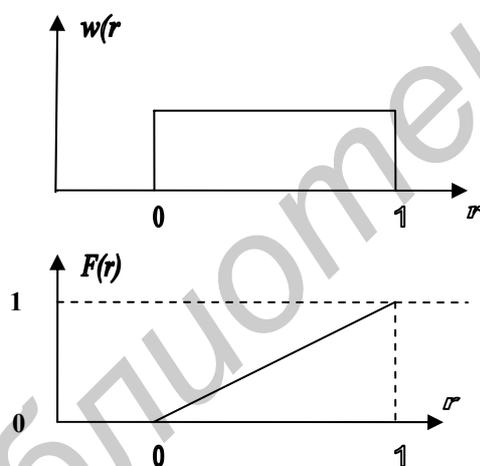


Рис.9.1. Графики плотности распределения и функции распределения для равномерно распределенных случайных чисел в интервале $(0...1)$

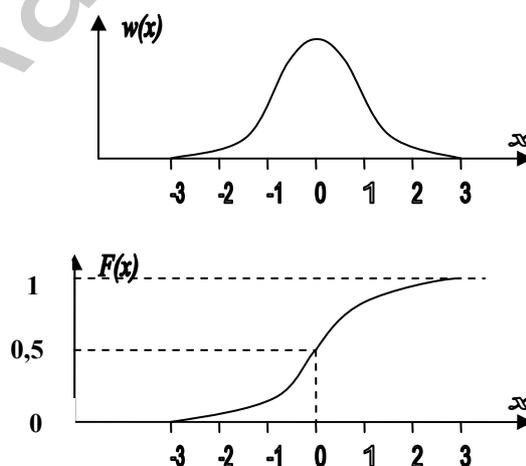


Рис.9.2. Графики плотности распределения и функции распределения для нормально распределенных случайных чисел с параметрами $m=0$, $\sigma=1$

Псевдослучайные равномерно распределенные числа в интервале $(0...1)$ на ЭВМ получают обычно с помощью встроенных функций или библиотечных подпрограмм. Например, в Бейсик-интерпретаторе — это функция *RND*, в алгоритмическом языке Паскаль — это функция *random*, в Фортране, ориентированном на ЭВМ ЕС, — подпрограмма *RANDU*.

Вычислительные алгоритмы получения на ЭВМ псевдослучайных равномерно распределенных в интервале $(0...1)$ случайных чисел подробно рассмотрены в работе [35].

Псевдослучайные нормально распределенные случайные числа с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$ получают из равномерно распределенных, например, по формуле [33]

$$x_n = 0,7745967 \left(\sum_{i=1}^{20} r_i - 10 \right),$$

где r_i — псевдослучайные числа с равномерным законом распределение интервале $(0...1)$.

В вычислительных системах многих ЭВМ нормально распределенные числа с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$ получают по формуле

$$x_n = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6.$$

Случайные числа, распределенные по другим законам, могут быть получены с помощью аналитических преобразований из равномерно распределенных случайных чисел в диапазоне $(0...1)$ или из нормально распределенных случайных чисел с параметрами распределения $m = 0$ и $\sigma = 1$ [33].

9.3. Моделирование случайных чисел с нормальным распределением

Для моделирования чисел с нормальным распределением используют равномерно распределенные случайные числа в диапазоне $(0...1)$. Вычислительные алгоритмы получения чисел с нормальным распределением основаны на реализации прямого метода или методе, использующем центральную предельную теорему.

При прямом методе моделирования используются специальные формулы, позволяющие преобразовывать пару независимых равномерных в диапазоне $(0...1)$ чисел r_1 и r_2 в пару независимых нормальных чисел z_1 и z_2 :

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \sqrt{-2 \ln r_1} \cos 2\pi r_2 \\ z_2 &= \sqrt{-2 \ln r_1} \sin 2\pi r_2 \end{aligned} \right\}.$$

Получаемые числа z_1 и z_2 являются дискретными представителями непрерывной нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $M(z) = 0$ и средним квадратическим отклонением $\sigma(z)=1$, т.е. случайной величины с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$, называемой обычно стандартной нормально распределенной случайной величиной.

Метод чувствителен к корреляции чисел r_1 и r_2 . Для уверенного исключения возможной корреляции равномерных чисел r_1 и r_2 их целесообразно получать с помощью различных программ.

Нормально распределенную случайную величину x с произвольными параметрами m и σ получают, используя формулу

$$x = \sigma z + m, \quad (9.2)$$

где z — стандартная нормально распределенная случайная величина ($m = 0$ и $\sigma = 1$).

Поясним теперь метод моделирования, использующий центральную предельную теорему. Согласно этой теореме сумма достаточно большого количества одинаково распределенных случайных величин имеет закон распределения, близкий к нормальному.

Рассмотрим сумму n независимых случайных величин r_i ($i = 1, \dots, n$) с равномерным распределением:

$$x = \sum_{i=1}^n r_i. \quad (9.3)$$

В соответствии с теоремами о сложении математических ожиданий и дисперсий независимых случайных величин [7] для x можно записать:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \sum_{i=1}^n m_{r_i} = nm_r \\ \sigma_x^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma_{r_i}^2 = n\sigma_r^2 \end{aligned} \right\}, \quad (9.4)$$

где m_r и σ_r — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равномерно распределенной случайной величины в диапазоне $(0 \dots 1)$;

m_x , σ_x — математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение x .

Пронормируем случайную величину x таким образом, чтобы получить стандартную нормально распределенную случайную величину z с параметрами $m=0$ и $\sigma = 1$. Для этого воспользуемся выражением

$$z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}. \quad (9.5)$$

Подставим в данную формулу выражение (9.3) и (9.4), получим

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n r_i - nm_i}{\sqrt{n} \sigma_r}. \quad (9.6)$$

Известно [7], что для равномерного распределения в интервале (0...1) случайной величины

$$m_r = 0,5; \quad \sigma_r = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

С учетом этого получим:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n r_i - n/2}{\sqrt{n/12}}. \quad (9.7)$$

Чем больше слагаемых в выражении (9.7), тем лучше приближение к нормальному закону с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$. Исследования показали, что при $n=12$ метод обеспечивает достаточно хорошее приближение. Формула (9.7) в этом случае принимает вид

$$z = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6. \quad (9.8)$$

Числа x , имеющие нормальное распределение с любыми параметрами m_x и σ_x , получают, как

$$x = \sigma_x z + m_x = \sigma_x \left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right) + m_x. \quad (9.9)$$

9.4. Методы получения случайных чисел с любым законом распределения

Основными методами, используемыми на практике, являются следующие:

- обратного преобразования;
- отбора (исключения);
- Неймана;
- моделирования с помощью порядковых статистик;
- суперпозиции.

Эти методы подробно рассмотрены в [35].

Поясним метод обратного преобразования. Он основан на теореме: если случайная величина x имеет плотность

распределения $w(x)$, то распределение случайной величины r

$$r = F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx \quad (9.10)$$

будет равномерным в интервале $(0 \dots 1)$.

Если функция $F(x)$ непрерывна, то существует обратная ей функция $F^{-1}(r)$. Поэтому, чтобы получить число, принадлежащее случайной величине с плотностью распределения $w(x)$, нужно решить уравнение (9.10) относительно

$$x = F^{-1}(r). \quad (9.11)$$

Графическая интерпретация метода обратного преобразования понятна из рис.9.3.

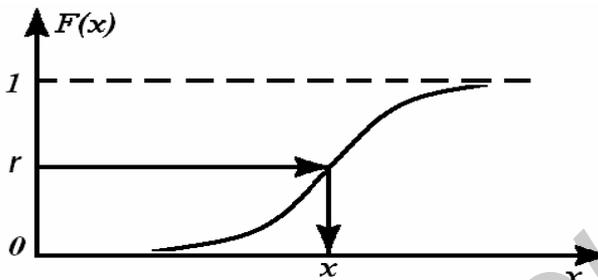


Рис. 9.3 К пояснению метода обратного преобразования

Конкретный способ решения уравнения (9.10) выбирается при рассмотрении свойств функции $w(x)$. Иногда оказывается, что разрешить уравнение (9.10) относительно x не представляется возможным, например, когда интеграл от $w(x)$ не выражается через элементарные функции.

Получить удобные для вычисления формулы позволяет аппроксимация функций $w(x)$ или $F(x)$ многочленами и рядами.

Таким образом, если мы хотим моделировать случайные числа с функцией распределения $F(x)$, то можно поступать так:

- 1) смоделировать число r , имеющее равномерное распределение в диапазоне $(0 \dots 1)$;
- 2) число r с заданным законом распределений получить по формуле обратного преобразования (9.11).

$$x = F^{-1}(r).$$

Пример 9.1. Получить методом обратного преобразования формулу для моделирования случайных чисел с экспоненциальным распределением, плотность распределения для которого

$$w(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \quad x \geq 0; \quad \lambda > 0.$$

Решение. 1. По формуле (9.10) получаем

$$r = F(x) = \int_0^x w(x) dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

2. Решаем полученное уравнение относительно x :

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r).$$

Если величина r равномерно распределена в интервале $(0...1)$, то и $(1 - r)$ также равномерно распределена в том же интервале. Поэтому для моделирования чисел x с экспоненциальным распределением можно пользоваться более компактным выражением

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln r.$$

В табл.9.1 приведены вычислительные алгоритмы получения случайных чисел с законами распределения, широко используемыми при проектировании конструкций и технологии РЭУ.

Таблица 9.1

Вычислительные алгоритмы получения случайных чисел [33]

Закон распределения случайных чисел	Математическое выражение плотности распределения	Способ получения случайных чисел
Равномерный в интервале $[a, b]$	$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \text{ или } x > b \end{cases}$	$x' = (b-a)r + a$
Нормальный с произвольными параметрами m и σ	$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$x' = x_{\text{н}}\sigma + m$
Экспоненциальный с параметром λ	$w(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$	$x' = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-r)$
Логарифмически нормальный с параметрами m и σ	$w(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0$	$x' = e^{\sigma x_{\text{н}} + m}$
Вейбулла с параметрами ρ и β ; β – коэффициент формы	$w(x) = \rho\beta x^{\beta-1} e^{-\rho x^\beta}, \quad x \geq 0$	$x' = \left[-\frac{1}{\rho} \ln(1-r)\right]^{1/\beta}$

В табл.9.1 приняты следующие обозначения:

- x — текущее значение случайной величины (случайного параметра);
- x' — случайное число;
- r — равномерно распределенное случайное число в диапазоне $(0...1)$;
- $x_{\text{н}}$ — нормально распределенное случайное число с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$.

9.5. Моделирование дискретных случайных величин

Пусть x случайная дискретная величина, например, количество отказов РЭУ за календарный период. Будем считать, что она принимает значения x_i с вероятностями p_i , $i = 1, \dots, k$.

Закон распределения случайной дискретной величины может быть представлен рядом распределения (табл.9.2).

Ряд распределения дискретной случайной величины

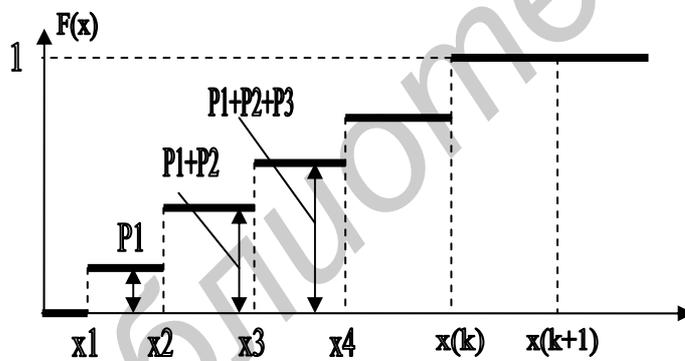
x_i	x_1	x_2	...	x_k
p_i	p_1	p_2	...	p_k

Таблица 9.2

Здесь $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ — значения, которые принимает x с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_k соответственно.

Функция распределения случайной дискретной величины может быть получена как

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq x_1; \quad F(x_{s+1}) = \sum_{i=1}^s p_i; \quad s = 1, \dots, k.$$



Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция. Скачки этой функции происходят в точках, соответствующих значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений (рис.9.4).

Рис.9.4. Функция распределения дискретной величины

Случайную дискретную величину x с законом распределения $F(x)$ можно смоделировать с помощью обратного преобразования (9.11).

Из формулы (9.11) следует, что число x с законом распределения $F(x)$ равно x_s , где индекс s определяется неравенством

$$\sum_{i=1}^{s-1} p_i \leq r \leq \sum_{i=1}^s p_i .$$

Тогда простейший вычислительный алгоритм моделирования случайной дискретной величины имеет следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l}
 1. \text{ если } r < p_1 \rightarrow x = x_1, \text{ иначе} \\
 2. \text{ если } r < p_1 + p_2 \rightarrow x = x_2, \text{ иначе} \\
 \dots \\
 S. \text{ если } r < \sum_{i=1}^s p_i \rightarrow x = x_s, \text{ иначе} \\
 k-1. \text{ если } r < \sum_{i=1}^{k-1} p_i \rightarrow x = x_{k-1}, \text{ иначе} \\
 k. x = x_k.
 \end{array} \right\} \quad (9.12)$$

9.6. Моделирование случайных чисел с биномиальным распределением

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , то вероятность того, что событие A появится ровно m раз, выражается формулой

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (9.13)$$

где $q = 1 - p$.

Эта формула описывает, как распределяются вероятности между возможными значениями некоторой случайной величины — количества появлений события A в n опытах.

В связи с тем, что вероятности $P_{m,n}$ по форме представляют собой члены разложения бинома $(q + p)^n$ распределение вероятностей вида (9.13) называют биномиальным распределением.

Коэффициенты C_n^m подсчитывают по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (9.14)$$

Биномиальное распределение применимо, например, к такой случайной дискретной величине, как количество m отказавших РЭУ при испытании n экземпляров этого устройства.

Для моделирования случайных чисел с биномиальным распределением используют последовательность стандартных равновероятных чисел. Схему независимых испытаний легко моделировать путем имитации последовательности событий A_i :

$$A_i = (r_i < p); \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.15)$$

Если подсчитать количество событий, имевших место при n -кратном использовании выражения (9.15), то получим реализации параметров m с биномиальным распределением.

Указанная процедура моделирования удобна для небольших значений n . Для больших значений n можно использовать нормальную аппроксимацию биномиального закона. При этом параметры нормального закона M_m и σ_m надо принять, как

$$M_m = np; \quad \sigma_m = \sqrt{np(1-p)}. \quad (9.16)$$

Если p при больших n имеет порядок, близкий к значению $1/n$, либо $p < 0,1$, биномиальное распределение сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda = np$.

9.7. Моделирование случайных чисел с распределением Пуассона

Рассмотрим простейший поток событий. Например, применительно к технологии, — это блоки аппаратуры, сходящие с участка настройки после их диагностирования и регулировки. Выделим произвольный участок длиной τ (рис.9.5).

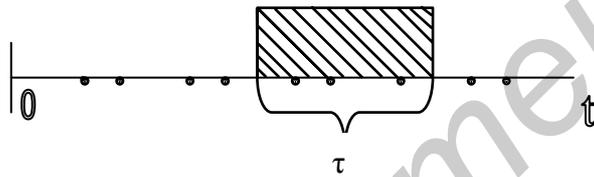


Рис. 9.5. К пояснению распределения Пуассона

На рис.9.5 точками на временной оси показаны моменты выхода с участка настройки блоков. Если поток подчиняется условиям стационарности, ординарности и отсутствия последействия (см. разд.8.2), то число блоков, сошедших с участка настройки на временном интервале τ , распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием

$$a = \lambda\tau, \quad (9.17)$$

где λ — плотность потока блоков, выходящих с участка настройки за единицу времени.

Вероятность того, что за время τ сойдет ровно m блоков, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}. \quad (9.18)$$

Моделирование случайных чисел, распределённых по закону Пуассона со значением математического ожидания $a = \lambda\tau$, можно выполнить следующим образом. Моделируем последовательность

равновероятных на интервале (0...1) чисел. Перемножаем следующие одно за другим числа и проверяем условие:

$$\prod_{i=1}^N r_i < e^{-\lambda\tau}. \quad (9.19)$$

Операцию умножения продолжаем до тех пор, пока указанное условие не будет выполнено. Тогда получим случайное число m , относящееся к распределению Пуассона:

$$m = N - 1.$$

9.8. Моделирование коррелированных случайных параметров с нормальными распределениями

При получении реализаций значений двух зависимых параметров например x и z , будем пользоваться гипотезой о нормальном распределении этих параметров и, кроме того, предполагать, что известен коэффициент парной корреляции между ними.

Для моделирования реализаций двух случайных коррелированных между собой параметров в этом случае воспользуемся функцией условной плотности распределения параметра z , которая имеет вид [7]

$$w(z/x) = \frac{1}{\sigma(z)\sqrt{2\pi(1-r_{xz}^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{xz}^2)}\left[\frac{z-M(z)}{\sigma(z)} - r_{xz}\frac{x-M(x)}{\sigma(x)}\right]^2\right\}, \quad (9.20)$$

где $M(x)$, $M(z)$ — математические ожидания параметров x и z ;

$\sigma(x)$, $\sigma(z)$ — средние квадратические отклонения параметров x и z ;

r_{xz} — коэффициент парной корреляции между x и z .

Рассматривая функцию условной плотности распределения (9.20), можно увидеть, что это есть функция плотности распределения для нормального закона с параметрами не $M(z)$ и $\sigma(z)$, а с математическим ожиданием

$$M(z/x) = M(z) + r_{xz} \frac{\sigma(z)}{\sigma(x)} [x - M(x)] \quad (9.21)$$

и средним квадратическим отклонением

$$\sigma(z/x) = \sigma(z)\sqrt{1-r_{xz}^2}. \quad (9.22)$$

Пусть случайное число x , имеющее нормальное распределение с параметрами $m = M(x)$ и $\sigma = \sigma(x)$, уже получено. Тогда для получения случайного числа z , имеющего нормальное

распределение с параметрами $m = M(z)$ и $\sigma = \sigma(z)$ и коррелированного с x , необходимо по формулам (9.21) и (9.22) произвести смещение параметров $M(z)$ и $\sigma(z)$ с учетом коэффициента парной корреляции, а затем воспользоваться датчиком (подпрограммой) формирования случайных нормально распределенных чисел с параметрами $m = M(z/x)$ и $\sigma = \sigma(z/x)$.

Формулы (алгоритм) получения с помощью ЭВМ реализации значений двух случайных параметров x и z , распределенных по нормальным законам и коррелированных между собой, могут быть приведены к виду [14]

$$x = 0,7745967 \left(\sum_{i=1}^{20} r_i^{(1)} - 10 \right) \sigma(x) + M(x); \quad (9.23)$$

$$z = 0,7745967 \left(\sum_{i=1}^{20} r_i^{(2)} - 10 \right) \sigma(z) \sqrt{1 - r_{xz}^2} + M(z) + r_{xz} \frac{\sigma(z)}{\sigma(x)} [x - M(x)], \quad (9.24)$$

где $r_i^{(1)}$, $r_i^{(2)}$ — последовательности случайных равномерно распределенных чисел в диапазоне $(0...1)$, полученные соответственно в первом и втором циклах.

9.9. Получение коррелированных случайных параметров с любыми законами распределения

Предлагается численный алгоритм получения с помощью ЭВМ коррелированных параметров с любыми законами распределения. Основные принципы, положенные в его основу, были сформулированы в работе [36]. Суть состоит в следующем.

Пусть требуется получить n пар случайных параметров x и z с плотностями распределения $w(x)$, $w(z)$ и коэффициентом парной корреляции r .

Вначале независимо генерируются n значений параметров x и z с плотностями распределения $w(x)$ и $w(z)$, используя для этого приемы, описанные выше и формулы табл.9.1. В результате получают две совокупности случайных чисел, а именно:

$$x_i, i = 1, 2, \dots, n; \quad z_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Подсчитывают, какое значение коэффициента парной корреляции r имеет место между x_i и z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) за счет чисто

случайных причин. Пользуются формулой

$$r_{xz} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(z_i - m_z)}{(n-1)\sigma_x\sigma_z}, \quad (9.25)$$

где x_i, z_i — i -е значение параметра x и соответствующее ему значение параметра z ;

m_x, m_z — математические ожидания x и z ;

σ_x, σ_z — средние квадратические отклонения x и z ;

n — количество пар x и z .

Предположим, что коэффициент r_{xz} оказался равен значению R . Далее проверяется условие

$$|R - r| \leq \varepsilon, \quad (9.26)$$

где ε — выбранная абсолютная ошибка обеспечения заданного значения коэффициента парной корреляции r .

Если условие (9.26) выполняется, то чисто случайно между параметрами x и z обеспечивается заданное значение коэффициента корреляции r . Конечно, вероятность такого события близка к нулю. Если условие (9.26) не выполняется, то поступают следующим образом.

Последовательность (индексацию) значений параметра x в дальнейшем не изменяют. Значения же параметра z случайным образом меняют местами и каждый раз подсчитывают по формуле (9.25) коэффициент парной корреляции r_{xz} .

Перестановки значений параметра z (назовем их итерациями) выполняют до тех пор, пока не будет выполняться условие

$$|r_{xz} - r| \leq \varepsilon. \quad (9.27)$$

На первой итерации из ряда целых чисел от единицы до n случайным образом выбирают два числа, например l и m ($l \neq m$).

Элементы l и m совокупности z_i ($i=1, 2, \dots, n$) меняют местами. С учетом этой перестановки подсчитывают значение коэффициента корреляции r_{xz} и проверяют условие (9.27). Если оно выполняется, то поставленная задача решена. При невыполнении условия (9.27) анализируют, приближает ли новое значение коэффициента корреляции r_{xz} к заданному значению r .

Если да, то перестановка l -го и m -го элементов как бы утверждается. Если выполненная перестановка элементов удаляет нас от значения r , то l -й и m -й элементы возвращаются на свои места.

По аналогии с первой итерацией выполняют все последующие. Итерационный процесс заканчивается, как только будет выполнено условие (9.27).

Известно, что максимальное число неповторяющихся перестановок из натуральных чисел $1, 2, \dots, n$ равно $n!$. Поэтому итерационный процесс не имеет смысла продолжать для итераций, превышающих значение $n!$. В таких случаях надо признать, что при ограниченном числе пар значений x и z достичь требуемого коэффициента корреляции r при выбранной ошибке ε не представляется возможным.

Укрупненная структурная схема алгоритма реализации описанного алгоритма на ЭВМ приведена на рис.9.6.

Пояснение функциональных частей структурной схемы дано в табл.9.3.

Таблица 9.3

Пояснения функциональных частей схемы алгоритма

Номер функциональной части	Пояснение
1	Ввод заданных значений параметров r , ε и n
2, 3	Независимое генерирование параметров x и z или же их ввод с клавиатуры ЭВМ
4, 8	Организация счета числа итераций
5	Подсчет по формуле (9.25) начального значения коэффициента парной корреляции между x и z
6	Проверка условия вида (9.26)
7	Генерирование двух целых равномерно распределенных чисел l и m из диапазона $(1 \dots n)$, причем $l \neq m$
9	Проверка целесообразности продолжения итерационного процесса
10	Сообщение о невозможности обеспечения заданного значения коэффициента корреляции r с ошибкой ε
11	Перемена мест l -го и m -го элементов совокупности z_i ($i = 1, 2, \dots, n$)
12	Проверка условия вида (9.27)
13	Уточнение, приближает ли нас значение коэффициента r_{xz} в данной итерации к достижению заданного значения r
14	Возвращение l -го и m -го элементов совокупности z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на свои места
15	Присвоение текущего значения r_{xz} его начальному значению
16	Печать результатов в случае успешного решения поставленной задачи

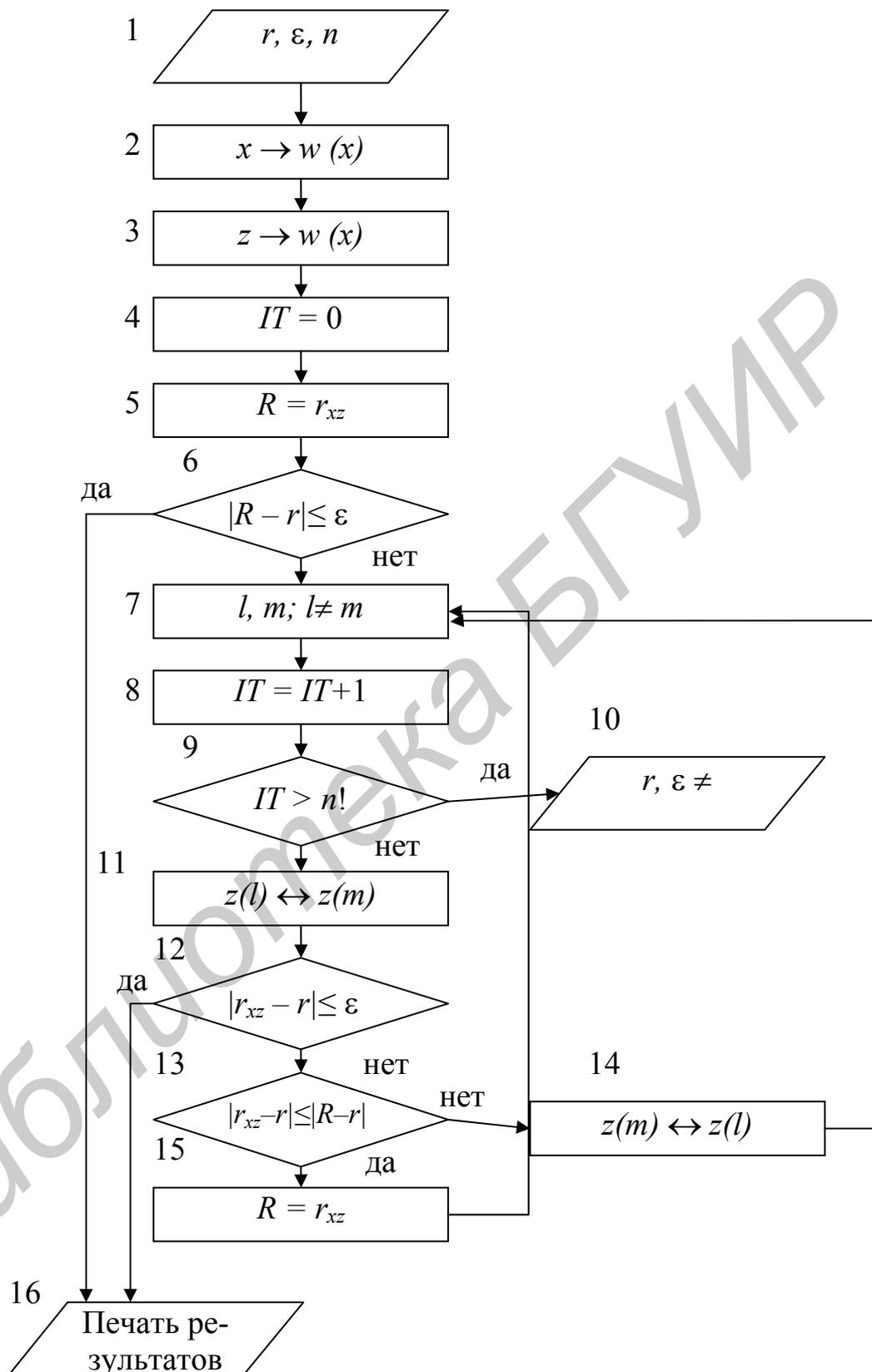


Рис.9.6. Укрупненная структурная схема алгоритма получения коррелированных случайных параметров с любыми законами распределения

Далее приводится программа для ПЭВМ, реализующая описанный алгоритм. Программа написана на языке Бейсик. Для удобства анализа этой программы читателями, в табл.9.4 дан список идентификаторов переменных, участвующих в программе, и их пояснение.

Приведенная программа соответствует случаю ввода переменных x и z с клавиатуры ЭВМ. Вначале вводятся n значений параметра x , а затем параметра z , причем i -му значению x ставится в соответствие i -е значение z .

Программа для моделирования коррелированных параметров с любыми законами распределения

```

2 INPUT N: DIM X(N), A(N)
3 INPUT RS: INPUT EP
4 FOR I = 1 TO N: INPUT X(I): NEXT I: FOR I = 1 TO N: INPUT
Z(I): NEXT I
6 FOR I = 1 TO N: A(I) = X(I): NEXT I: GOSUB 500: XM = AM:
SX = SIG
7 PRINT XM, SX
8 FOR I = 1 TO N: A(I) = Z(I): NEXT I: GOSUB 600: ZM = AM: SZ
=
SIG
9 PRINT ZM, SZ
11 IT = 0: P = 1: FOR I = 1 TO N: P = P*I: NEXT I: PRINT P
12 GOSUB 520: RR = R: PRINT "R нач. =" RR
13 IF ABS(RR-RS)<=EP THEN RXZ = RR: GOTO 200 20 FOR I = 0
TO N: A = RND(N): NEXT I
22 P = 1: FOR I = 1 TO N: P = P*I: NEXT I: PRINT P
30 L = INT (N*RND(1)+1)
40 M = INT(N*RND(1)+1)
50 IF L = M THEN GOTO 40
60 A = Z(L): B = Z(M): Z(L) = B: Z(M) = A: IT = IT+1
65 IF IT>P THEN 207
70 GOSUB 520: RXZ = R
80 E = ABS(RXZ-RS): IF E <= EP THEN 200
100 DEL = ABS(RR-RS): IF E>=DEL THEN 190
110 PRINT "ИТЕРАЦИЯ" IT;: PRINT "R=" RXZ;: PRINT " —
удача»
111 RR = RXZ: GOTO 30
190 PRINT "ИТЕРАЦИЯ" IT;: PRINT "R=" RXZ; PRINT "— не-
удача
195 PRINT "СТАРОЕ" R =" RR: Z(L) = A: Z(M) = B: GOTO 30
200 PRINT "ИТЕРАЦИЯ" IT;: PRINT "R=" RXZ;: PRINT
" — успех

```

```

202 PRINT "ВЫВОД КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПАРАМЕТРОМ
ПОПАРНО" :PRINT " "
205 FOR I=1 TO N: PRINT I;". "; PRINT X(I); Z(I): NEXT I: GOTO
210
207 PRINT "Обеспечить заданное R невозможно"
210 END
500 S = 0: FOR I = 1 TO N: S = S+A(I): NEXT I: AM = S/N
510 S = 0: FOR I = 1 TO N: S = S+(A(I)-AM)*(A(I)-AM):NEXT I:
SIG=S/(N-1)
512 SIG = SQR(SIG): RETURN
520 S = 0: FOR II = TO N: S = S+(X(II)~XM)*(Z(II)-ZM): NEXT II
521 R = S/(SX*SZ*(N-1))
522 RETURN

```

Таблица 9.4

Пояснения параметров вычислительного алгоритма и программы для ЭВМ

Обозначение параметра		Смысл параметра
в вычислительном алгоритме	в программе ЭВМ	
n	N	Число пар x и z
x_i, z_i	X(I), Z(I)	i -е значение x и соответствующее ему значение параметра z
m_x, σ_x	XM, SX	Среднее значение и среднее квадратическое отклонение x
m_z, σ_z	ZM, SZ	Среднее значение и среднее квадратическое отклонение z
r	RS	Заданное (требуемое) значение коэффициента парной корреляции между x и z
ε	EP	Заданная погрешность (ошибка) обеспечения требуемого r
$n!$	P	Значение $n!$ (n -факториал)
—	IT	Счетчик числа итераций (перестановок элементов совокупности z_i)
l, m	L, M	Номера элементов совокупности z_i ($i = 1, \dots, n$), меняемые местами в текущей итерации
R	RR	Начальное значение коэффициента корреляции между x и z
r_{xz}	RXZ	Значение коэффициента корреляции между x и z в текущей итерации
—	Z(L), Z(M)	l - m и m -й элементы z , меняемые местами в текущей итерации
—	E	Значение $ r_{xz} - r $

Продолжение табл.9.4

—	DEL	Модуль разности между последним значением коэффициента корреляции r_{xz} , удачным с точки зрения движения к требуемому значению z , и самим значением r
—	A(N)	Массив размерностью n , используемый в подпрограмме определения средних значений и средних квадратических отклонений x и z
—	A(I)	i -е значение массива A
—	AM, SIG	Среднее значение и среднее квадратическое отклонение, найденные по результатам статистической обработки элементов массива A
—	R	Коэффициент корреляции между x и z , подсчитываемый в соответствующей подпрограмме
—	S	Вспомогательная переменная, используемая в подпрограммах

В качестве примера иллюстрации выполнения рассмотренной программы вводилось 10 значений параметров x и z (табл.9.5).

Таблица 9.5

Данные о параметрах x и z до реализации алгоритма

Но- мер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	3,45	3,7	4	3,1	3,5	3,9	3,4	3,8	3,2	3
z	1,9	1	1,3	1,45	1,55	2	1,2	1,5	1,1	1,8

Коэффициент парной корреляции между x и z имеет значение $R \approx 0,001$, т.е. они в данном случае являются практически некоррелируемыми.

Корреляционное поле параметров для этого случая показано на рис.9.7, а.

Ставилась задача с помощью программы для ЭВМ, реализующей предложенный в работе алгоритм, получить для x и z (см. табл.9.5) коэффициент парной корреляции

$$r = 0,9$$

с ошибкой ε , не превышающей значения 0,05.

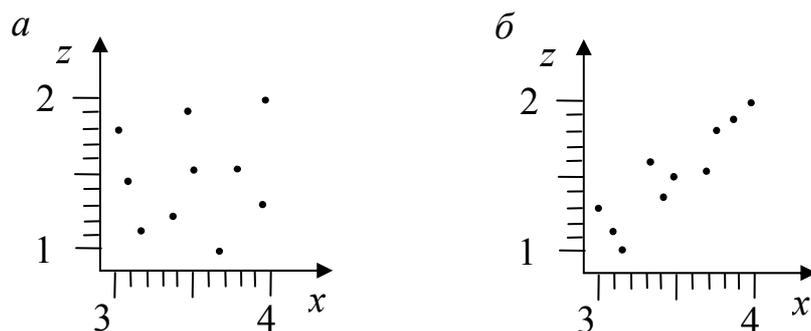


Рис.9.7. Корреляционное поле параметров:
a – до реализации алгоритма; *б* – после реализации алгоритма

Для решения этой задачи на ЭВМ потребовалась 32 итерации. Получено значение коэффициента корреляции между x и z , равное 0,92. Значения x и z , соответствующие этому случаю, записаны попарно в табл.9.6.

Таблица 9.6

Значения пар параметров x и z после реализации алгоритма

Номер пары	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	3,45	3,7	4	3,1	3,5	3,9	3,4	3,8	3,2	3
z	1,3	1,5	2	1,1	1,45	1,9	1,55	1,8	1	1,2

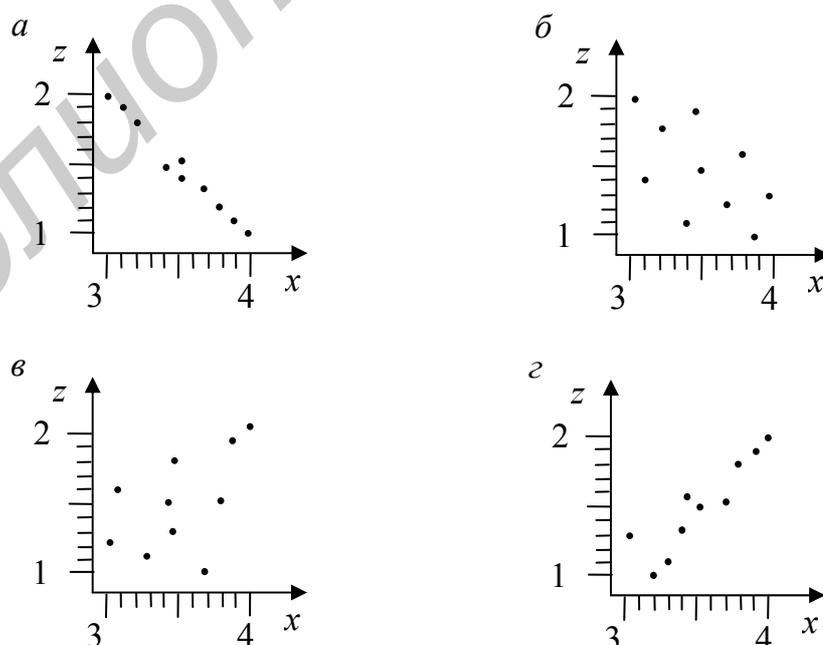


Рис.9.8. Корреляционные поля x и z

Корреляционное поле x и z , построенное по данным табл.9.6, показано на рис.9.7, б.

На рис.9.8 показаны корреляционные поля x и z , полученные для других задаваемых значений коэффициентов корреляции.

Задаваемые значения коэффициентов корреляции, погрешности их обеспечения, реально полученные на ЭВМ значения r , число итераций, за которое достигнуто требуемое значение коэффициентов, а также номера рисунков с видами корреляционных полей указаны в табл.9.7.

Таблица 9.7

Результаты использования алгоритма

Требуемое значение r	Ошибка ε	Полученное значение r	Число итераций	Номер рисунка с видом корреляционного поля
-1	0,05	-0,995	42	9.8, а
-0,6	0,05	-0,62	15	9.8, б
0,6	0,05	0,55	19	9.8, в
1	0,05	0,96	76	9.8, г

9.10. Исследование выходных параметров РЭУ и технологических процессов методом Монте-Карло

Ранее отмечалось, что к вероятностному моделированию относится метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) с использованием математических моделей РЭУ или технологических процессов.

Предположим, что модель задана математическим выражением в виде функции

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n, t), \quad (9.28)$$

где y — выходной параметр;
 x_1, \dots, x_n — первичные параметры;
 t — время (в общем случае может также рассматриваться как первичный параметр).

Поставим задачу определить закон распределения выходного параметра y в различные моменты времени t , если известны пределы изменения первичных параметров x_1, \dots, x_n .

Зафиксируем время $t = t_0$. Возьмем по одному случайному значению для каждого из n первичных параметров, получим их случайную комбинацию

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)},$$

где верхний индекс означает ее номер. Подставив эту комбинацию в математическую модель вида (9.28), найдем первое значение выходного параметра $y^{(1)}$

Повторив процедуру получения случайных комбинаций первичных параметров и подставив их в выражение (9.28) N раз, получим ряд

$$y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}.$$

Он содержит информацию о среднем значении выходного параметра y , степени его рассеивания относительно среднего значения, а также о законе распределения для момента времени $t = t_0$.

Указанная процедура повторяется для других фиксированных моментов времени $t = t_0 + k\Delta t$, $k = 1, 2, \dots$ с выбранным шагом Δt .

Статистическая обработка результатов моделирования в данном случае состоит в определении для каждого момента времени среднего значения и среднего квадратического отклонения выходного параметра, а также в построении для него гистограммы распределения и подборе подходящей модели закона распределения.

На рис.9.9 приведена укрупненная структурная схема алгоритма решения рассмотренной задачи на ЭВМ. Она разработана в предположении, что первичные параметры являются некоррелированными и подчиняются нормальному закону или закону равной вероятности. Ниже приводятся пояснения основных функциональных частей структурной схемы (табл.9.8).

Достоинство метода Монте-Карло состоит в том, что он дает возможность оперировать законами распределения первичных и выходного параметров. Это позволяет получить результаты, обладающие большей достоверностью по сравнению с методами, которые оперируют числовыми характеристиками параметров — средними значениями и средними квадратическими отклонениями.

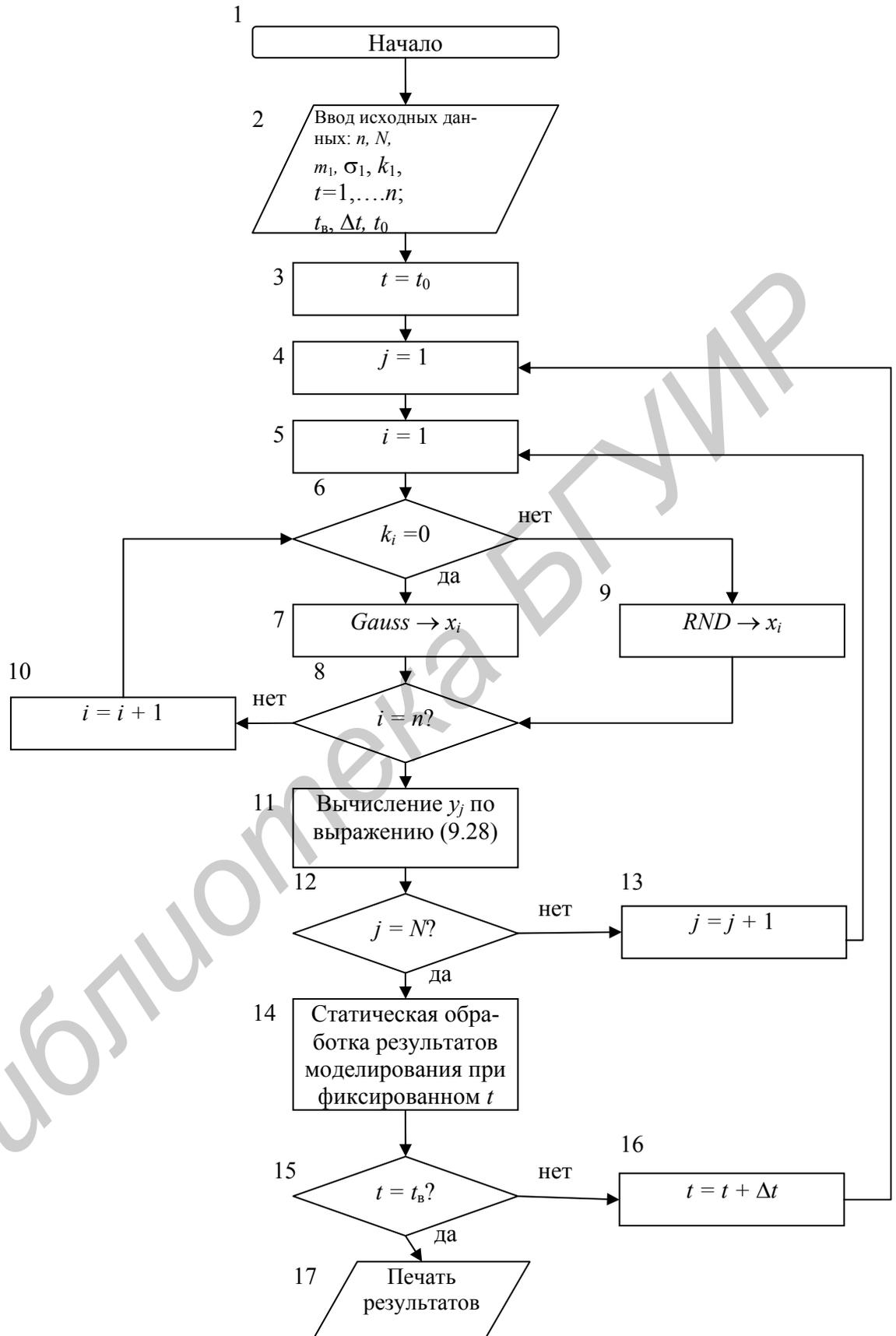


Рис.9.9. Укрупненная структурная схема алгоритма решения задачи на ЭВМ методом Монте-Карло

Пояснения функциональных частей структурной схемы алгоритма решения задачи на ЭВМ методом Монте-Карло

Номер функциональной части	Пояснение
2	<p>Ввод исходных данных: m_i, σ_i и k_i — среднее значение, среднее квадратическое отклонение первичного параметра и код закона его распределения (0 — нормальный закон, 1 — закон равной вероятности); t_0, t_b — начальный и конечный моменты времени, для которых определяют значения параметра y;</p> <p>Δt — выбранный шаг изменения фиксированных моментов времени, (n — количество первичных параметров, N — количество реализаций выходного параметра)</p>
5,8,10	<p>Организация цикла по индексу i. Индексом учитываются первичные параметры x_i, $i = 1, \dots, n$</p>
4,12,13	<p>Организация цикла по индексу j. Индексом учитываются реализации выходного параметра y</p>
3,15,16	<p>Операторы выбора фиксированных моментов времени</p>
6	<p>Оператор выбора вида закона распределения первичного параметра (0 — нормальный закон, 1 — закон равной вероятности)</p>
7	<p>Обращение к датчику нормально распределенных случайных чисел и формирование случайного числа x_i</p>
9	<p>Обращение к датчику равномерно распределенных случайных чисел и формирование случайного числа x_i</p>
14	<p>Статистическая обработка результатов моделирования выходного параметра при фиксированном значении t</p>

9.11. Моделирование производственных погрешностей параметров РЭУ массового производства

При анализе параметров РЭУ на этапе проектирования можно выделить два этапа.

На первом этапе производится расчет или подбор опытным путем номинальных значений первичных параметров. Выбирают такие, которые обеспечивают требуемые значения основных электрических показателей устройства — выходных параметров. При этом не учитывают возможности отклонения фактически получаемых параметров от их номинальных значений в результате наличия множества технологических (производственных) погрешностей.

На втором этапе анализируют влияние технологических погрешностей параметров элементов на значения выходных параметров. На параметры элементов назначают такие производственные допуски, которые обеспечивают требуемое качество функционирования РЭУ по его выходным параметрам. Одна из задач, которые возникают на этом этапе при подготовке массового производства, состоит в следующем.

Известна математическая модель, которая связывает j -й выходной параметр y_j с параметрами элементов x_1, \dots, x_n :

$$y_j = \varphi(x_1, \dots, x_n); \quad j = 1, \dots, m, \quad (9.29)$$

где m — число принятых во внимание выходных параметров, характеризующих функционирование РЭУ.

Работа РЭУ рассматривается в этом случае статически в фиксированный момент времени и при определенных значениях входных сигналов.

В качестве исходных данных должны быть известны вероятностные характеристики отклонений фактического значения x_i от его номинального уровня $x_{i\text{ном}}$. В качестве такого отклонения выступает $\Delta x_i = x_i - x_{i\text{ном}}$, или $\Delta x_i / x_i$. Указанные характеристики могут быть получены экспериментально, путем контроля больших партий элементов, или на основании теоретических соображений, пользуясь документацией на элементы.

В результате решения нужно найти вероятностные характеристики выходных параметров РЭУ. Одной из таких характеристик является вероятность попадания выходного параметра в заданный диапазон от $y_{j\text{min}}$ до $y_{j\text{max}}$. Эта вероятность определяет процент выхода годных изделий по выходному параметру y_j . Приемлемого для практики значения процента выхода годных

изделий можно добиться путем изменения номинальных значений параметров элементов, вида функции (9.29), т.е. структуры РЭУ, характеристик отклонений и допусков параметров элементов. Такие задачи могут быть эффективно решены методом вероятностного моделирования.

Вероятностное моделирование выполняют в соответствии со схемой, фрагмент которой показан на рис.9.10.

При реализации вероятностного моделирования, согласно рис.9.10, математической моделью не учитываются временные изменения характеристик модели (вида математического выражения или ее коэффициентов). Реализация метода включает следующие этапы:

моделирование параметров элементов в соответствии с их законами распределения; если параметры элементов зависимы, то получение их случайных значений должно выполняться согласно условным законам распределения. Эта задача решена и описана в литературе [14] применительно к коррелированным параметрам, распределенным по нормальным законам;

многократное вычисление значений выходного параметра для комбинации случайных значений параметров элементов;

статистическую обработку результатов моделирования, которая позволяет:

1) построить гистограмму и подобрать закон распределения выходного параметра;

2) рассчитать вероятность попадания выходного параметра в заданные границы (допуск);

3) рассчитать отклонения выходного параметра, соответствующие заданной вероятности его попадания в полученный диапазон.

Число необходимых реализаций N выбирается в зависимости от требуемой точности моделирования и может быть определено приемами, указанными в работах [16, 22].

Пример 9.2. Выходной параметр является функцией двух независимых параметров x_1 и x_2 и выражается математической моделью

$$y = x_1 + x_2 + x_1 x_2, \quad (9.30)$$

где $x_1 = 10 \text{ В} \pm 5\%$ — имеет равномерное распределение в пределах поля допуска;

$x_2 = 30 \text{ В} \pm 10\%$ — имеет нормальное распределение.

Требуется получить математические выражения для моделирования случайных параметров x_1 и x_2 и подсчитать значение y в первой реализации процесса (объекта).

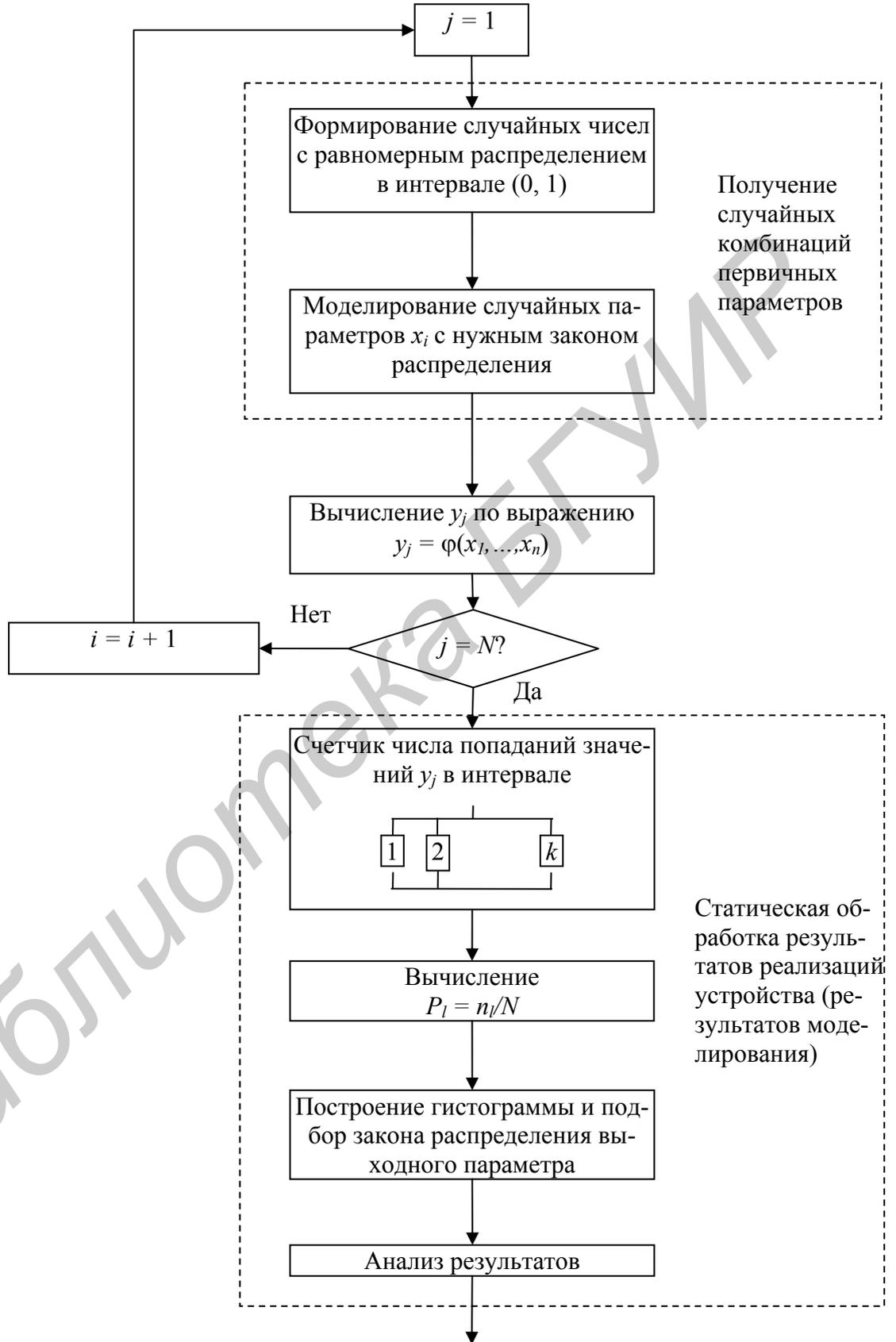


Рис.9.10. Структурная схема вероятностного моделирования

Решение. 1. Определяем предельные граничные значения параметра x_1 : нижняя граница $x_{1Н} = 9,5В$, верхняя — $x_{1В} = 10,5В$. Моделируем равномерно распределенные значения параметра x_1 , используя формулу, приведенную в табл. 9.1. Получим

$$x_1 = (x_{1В} - x_{1Н})r + x_{1Н} = r + 9,5; \quad r \in (0...1). \quad (9.31)$$

2. Определяем предельные значения параметра x_2 . Нижнее отклонение $x_{2Н} = 27В$, верхнее предельное отклонение $x_{2В} = 33В$.

Предполагаем, что все значения x_2 лежат в пределах $\pm 3\sigma(x_2)$ от номинального значения $x_{2НОМ}$, которое совпадает с математическим ожиданием $M(x_2) = x_{2НОМ}$.

Тогда математическое ожидание равно $M(x_2) = 30В$. Пользуясь "правилом трех сигм", вычисляем среднее квадратическое отклонение параметра x_2 . Получим

$$\sigma(x_2) \approx \frac{x_{2В} - x_{2НОМ}}{3} = \frac{33 - 30}{3} = 1 \text{ В.}$$

Моделировать значения параметра x_2 с нормальным распределением в найденных пределах от 27 до 33 В можно по формуле

$$x_2 = x_{Н}\sigma(x_2) + M(x_2) = x_{Н} + 30; \quad -3 \leq x_{Н} \leq +3, \quad (9.32)$$

где $x_{Н}$ — реализации нормально распределенных случайных чисел с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$.

3. Предположим, что моделирование первых значений последовательности равномерно распределенных в интервале (0...1) чисел r и нормальных стандартных чисел $x_{Н}$ дало:

$$r = 0,307; \quad x_{Н} = -0,460.$$

По этим значениям вычисляем x_1 и x_2 , пользуясь выражениями (9.31) и (9.32) соответственно. Получим

$$x_1 = 9,807 \text{ В}; \quad x_2 = 29,54 \text{ В.}$$

Подставляем результаты в модель (9.30) и получаем первое значение выходного параметра $y^{(1)} = 329,046$.

Аналогично могут быть получены значения выходного параметра y для других реализаций процесса (объекта).

В рассматриваемом примере комбинация случайных параметров x_1 и x_2 , а также значение выходного параметра y с целью иллюстрации были получены путем ручного расчета. В реальных ситуациях весь процесс моделирования целесообразно проводить с использованием ЭВМ.

9.12. Моделирование надежности РЭУ

При решении практических задач по обеспечению и оценке показателей надежности РЭУ аналитические расчеты оказываются весьма трудоемкими, либо ими вообще нельзя пользоваться. В этих случаях поставленные задачи удобно решать моделированием на ЭВМ.

Будем предполагать, что РЭУ имеет минимальную функционально необходимую структуру (т.е. резервирование отсутствует), а элементы в РЭУ с точки зрения надежности соединены последовательно (рис.9.11).



Рис.9.11. Последовательное соединение элементов в РЭУ (n – количество)

При имитационном моделировании в памяти ЭВМ для каждого элемента с учетом его закона распределения времени (наработки) до отказа получают случайное значение времени до отказа t_i , $i = 1, \dots, n$. С учетом принятой модели (см. рис.9.11) считают, что отказ РЭУ в j -й реализации наступает при отказе хотя бы одного из n элементов. Поэтому за момент (время) отказа всего РЭУ в j -й реализации принимают минимальное случайное время до отказа $t_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, n$, полученное для i -го элемента в j -й реализации РЭУ. Таким путем получают N реализаций РЭУ и, следовательно, N значений времени до отказа РЭУ в целом t_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Количественные показатели надежности РЭУ определяют путем статистической обработки всех N значений времени до отказа РЭУ t_j , $j = 1, \dots, N$.

Среднее время до отказа (среднее время безотказной работы) РЭУ определяют, как

$$T_{\text{ср}} = \sum_{j=1}^N t_j / N. \quad (9.33)$$

Вероятность безотказной работы за заданное время t_3 вычисляют по выражению

$$P(t_3) = \frac{N - N(t_3)}{N}, \quad (9.34)$$

где $N(t_3)$ — количество РЭУ, отказавших за время t_3 (на интервале времени от $t = 0$ до $t = t_3$).

Для определения $N(t_3)$ необходимо, используя результаты моделирования, подсчитать, сколько экземпляров РЭУ имеют значение времени до отказа t_j меньше, чем заданное время t_3 .

Укрупненная структурная схема алгоритма моделирования надежности РЭУ на ЭВМ приведена на рис.9.12.

Имитационное (статистическое) моделирование надежности РЭУ, для которых справедлива представленная на рис.9.11 модель, можно вычислить с помощью программы для ЭВМ, описанной в [34].

При статистическом моделировании РЭУ, имеющих резервирование, основная трудность состоит в получении модели, по которой выбирается момент отказа РЭУ в целом.

Таблица 9.9

Пояснения функциональных частей структурной схемы алгоритма моделирования надежности РЭУ на ЭВМ

Номер функциональной части	Пояснение
1	Подготовка к работе генератора равномерно распределенных случайных чисел в диапазоне (0...1)
2	Ввод исходных данных (ИД), задающих условия моделирования: количества элементов в составе РЭУ количества реализаций процесса (смоделированных РЭУ); информации о видах законов распределения времени до отказа элементов и параметрах этих законов
3, 10, 11	Организация цикла по переменной j , являющейся счетчиком количества смоделированных РЭУ
4, 6, 7	Организация цикла по переменной i , являющейся счетчиком количества элементов в составе РЭУ
5	Получение случайного значения времени до отказа для i -го элемента в j -й реализации РЭУ
8	Поиск элемента в j -й реализации, имеющего минимальное значение времени до отказа, и присвоение этого значения радиоэлектронному устройству, смоделированному в j -й реализации
9	Вывод на печать (экран дисплея) номера смоделированного РЭУ (номера реализации) и значения его времени до отказа
12	Статистическая обработка результатов моделирования и определение показателей надежности
13	Печать результатов

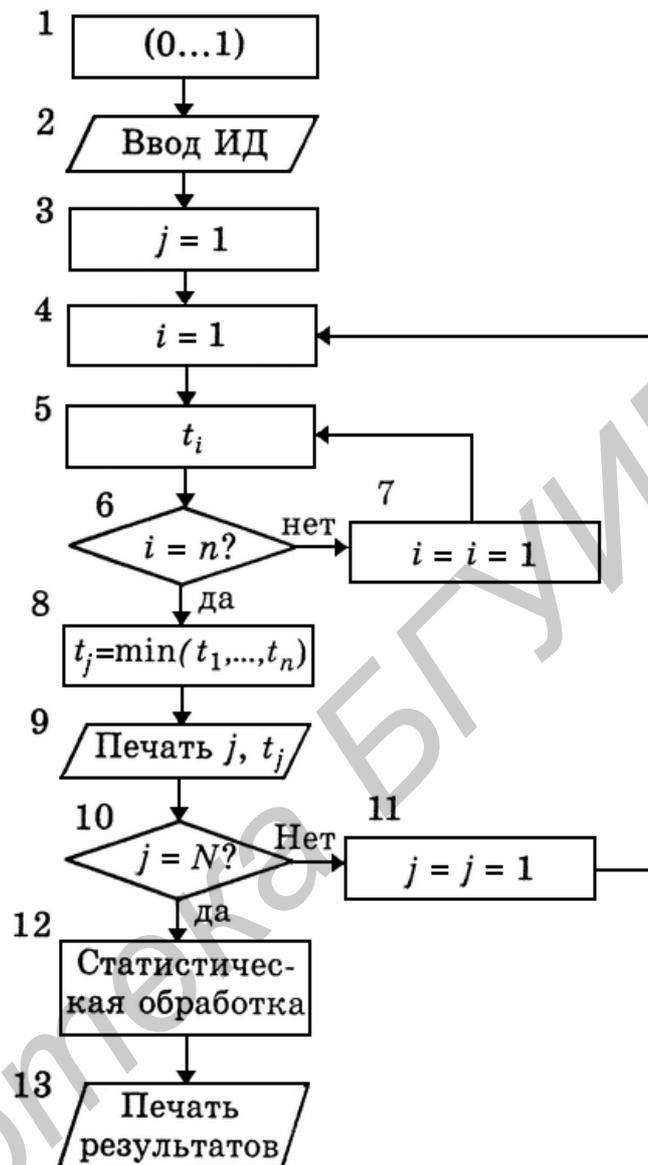


Рис.9.12. Структурная схема алгоритма моделирования надежности РЭУ на ЭВМ

При отсутствии резервирования и справедливости схемы, показанной на рис.9.11, модель определения момента отказа РЭУ выступает в виде выражения

$$t_j = \min \{t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, \dots, t_n^{(j)}\} \quad (9.35)$$

где $t_i^{(j)}$ – время до отказа i -го элемента, полученное для j -й реализации РЭУ.

Модели определения момента отказа РЭУ в случае наличия резервирования определяются как видом резервирования (постоянное или замещением), так и конкретной структурой РЭУ.



Рис. 9.13. Резервируемый узел

В случае постоянного резервирования, рассмотренного в разд.5.27-5.28, за момент наступления отказа принимается время, когда резервируемый узел не будет обеспечивать наличие заданных свойств (резистивных, емкостных, полупроводящих, усилительных и т.д.) между точками электрической схемы (рис.9.13).

В случае резервирования замещением следует рассматривать конкретную схему расчета надежности и с учетом этой схемы получать модель определения момента отказа РЭУ в целом.

Библиотека БГУИР

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перспективы применения в конструировании и технологии РЭУ прикладных математических методов, изучению которых в основном был посвящен учебник, видятся в следующем:

1) использовании и адаптации ранее разработанных математических методов к решению поисковых и проектных задач в конструировании и технологии. Примером этого является использование теории игр и теории статистических решений;

2) разработке математического анализа и синтеза объектов и процессов, ориентированных на численные методы решения прикладных задач; толчком к этому послужило быстрое развитие вычислительной техники и стремительное повышение ее производительности;

3) создании прикладных математических пакетов автоматизированного анализа и синтеза решений на основе существующих и новых математических методов;

4) разработке приемов математического моделирования, отличающихся малой трудоемкостью (числом опытов) экспериментальных исследований и высокой достоверностью описания конструкторско-технологических решений.

Указанные выше направления позволяют в значительной степени совершенствовать новую технологию проектирования конструкций и технологий РЭУ, сущность которой заключается в замене объекта проектирования его математической моделью и ее исследовании с помощью ЭВМ. Здесь физический эксперимент используется лишь для получения математической модели устройства или технологического процесса, а в дальнейшем заменяется вычислительным. Это позволяет на стадии создания РЭУ, используя ЭВМ и ее большие вычислительные возможности, отработать проект с целью повышения его качества и потребительских свойств на этапе эксплуатации.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1**Статистические таблицы**

Таблица П1.1

Значение нормальной функции распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

<i>x</i>	$\Phi(x)$	<i>x</i>	$\Phi(x)$	<i>x</i>	$\Phi(x)$
1	2	3	4	5	6
-4,00	0,0000	-1,91	0,0281	-1,62	0,0526
-3,90	0,0001	-1,90	0,0288	-1,61	0,0537
-3,80	0,0001	-1,89	0,0294	-1,60	0,0548
-3,70	0,0002	-1,88	0,0301	-1,59	0,0559
-3,60	0,0002	-1,87	0,0307	-1,58	0,0571
-3,50	0,0003	-1,86	0,0314	-1,57	0,0582
-3,50	0,0003	-1,85	0,0322	-1,56	0,0594
-3,30	0,0005	-1,84	0,0329	-1,55	0,0606
-3,20	0,0007	-1,83	0,0336	-1,54	0,0618
-3,10	0,0010	-1,82	0,0344	-1,53	0,0630
-3,00	0,0014	-1,81	0,0351	-1,52	0,0643
-2,90	0,0019	-1,80	0,0359	-1,51	0,0655
-2,80	0,0026	-1,79	0,0367	-1,50	0,0668
-2,70	0,0035	-1,78	0,0375	-1,49	0,0681
-2,60	0,0047	-1,77	0,0384	-1,48	0,0694
-2,50	0,0063	-1,76	0,0392	-1,47	0,0708
-2,40	0,0082	-1,75	0,0401	-1,46	0,0721
-2,30	0,0108	-1,74	0,0409	-1,45	0,0735
-2,20	0,0139	-1,73	0,0417	-1,44	0,0749
-2,10	0,0179	-1,72	0,0427	-1,43	0,0764
-2,00	0,0228	-1,71	0,0436	-1,42	0,0778
-1,99	0,0233	-1,70	0,0446	-1,41	0,0793
-1,98	0,0239	-1,69	0,0455	-1,40	0,0808
-1,97	0,0244	-1,68	0,0465	-1,39	0,0823
-1,96	0,0250	-1,67	0,0475	-1,38	0,0838
-1,95	0,0256	-1,66	0,0485	-1,37	0,0853
-1,94	0,0262	-1,65	0,0495	-1,36	0,0869
-1,93	0,0268	-1,64	0,0505	-1,35	0,0885
-1,92	0,0274	-1,63	0,0516	-1,34	0,0901
-1,33	0,0918	-0,89	0,1867	-0,45	0,3264
-1,32	0,0934	-0,88	0,1894	-0,44	0,3300
-1,31	0,0951	-0,87	0,1922	-0,43	0,3336
-1,30	0,0968	-0,86	0,1949	-0,42	0,3372
-1,29	0,0985	-0,85	0,1977	-0,41	0,3409
-1,28	0,1003	-0,84	0,2005	-0,40	0,3446
-1,27	0,1020	-0,83	0,2033	-0,39	0,3483
-1,26	0,1038	-0,82	0,2061	-0,38	0,3520

Продолжение таблицы П1.1

1	2	3	4	5	6
-1,25	0,1056	-0,81	0,2090	-0,37	0,3557
-1,24	0,1075	-0,80	0,2119	-0,36	0,3594
-1,23	0,1093	-0,79	0,2148	-0,35	0,3632
-1,22	0,1112	-0,78	0,2177	-0,34	0,3669
-1,21	0,1131	-0,77	0,2206	-0,33	0,3707
-1,20	0,1151	-0,76	0,2236	-0,32	0,3745
-1,19	0,1170	-0,75	0,2266	-0,31	0,3783
-1,18	0,1190	-0,74	0,2296	-0,30	0,3821
-1,17	0,1210	-0,73	0,2327	-0,29	0,3859
-1,16	0,1230	-0,72	0,2358	-0,28	0,3897
-1,15	0,1251	-0,71	0,2389	-0,27	0,3936
-1,14	0,1271	-0,70	0,2420	-0,26	0,3974
-1,13	0,1292	-0,69	0,2451	-0,25	0,4013
-1,12	0,1314	-0,68	0,2483	-0,24	0,4052
-1,11	0,1335	-0,67	0,2514	-0,23	0,4090
-1,10	0,1357	-0,66	0,2546	-0,22	0,4129
-1,09	0,1379	-0,65	0,2578	-0,21	0,4168
-1,08	0,1401	-0,64	0,2671	-0,20	0,4207
-1,07	0,1423	-0,63	0,2643	-0,19	0,4247
-1,06	0,1446	-0,62	0,2676	-0,18	0,4286
-1,05	0,1469	-0,61	0,2709	-0,17	0,4325
-1,04	0,1492	-0,60	0,2743	-0,16	0,4364
-1,03	0,1515	-0,59	0,2776	-0,15	0,4404
-1,02	0,1539	-0,58	0,2810	-0,14	0,4443
-1,01	0,1562	-0,57	0,2843	-0,13	0,4483
-1,00	0,1587	-0,56	0,2877	-0,12	0,4522
-0,99	0,1611	-0,55	0,2912	-0,11	0,4562
-0,98	0,1635	-0,54	0,2946	-0,10	0,4602
-0,97	0,1660	-0,53	0,2981	-0,09	0,4641
-0,96	0,1685	-0,52	0,3015	-0,08	0,4681
-0,95	0,1711	-0,51	0,3050	-0,07	0,4721
-0,94	0,1736	-0,50	0,3085	-0,06	0,4761
-0,93	0,1762	-0,49	0,3121	-0,05	0,4801
-0,92	0,1788	-0,48	0,3156	-0,04	0,4840
-0,91	0,1814	-0,47	0,3192	-0,03	0,4880
-0,90	0,1841	-0,46	0,3228	-0,02	0,4920
-0,01	0,4960	0,43	0,6664	0,87	0,8078
0,00	0,5000	0,44	0,6700	0,88	0,8106
0,01	0,5040	0,45	0,6736	0,89	0,8133
0,02	0,5080	0,46	0,6772	0,90	0,8159
0,03	0,5120	0,47	0,6808	0,91	0,8186
0,04	0,5160	0,48	0,6844	0,92	0,8212
0,05	0,5199	0,49	0,6879	0,93	0,8232
0,06	0,5239	0,50	0,6915	0,94	0,8264
0,07	0,5279	0,51	0,6950	0,95	0,8289
0,08	0,5319	0,52	0,6925	0,96	0,8315
0,09	0,5359	0,53	0,7019	0,97	0,8340

1	2	3	4	5	6
0,10	0,5398	0,54	0,7054	0,98	0,8365
0,11	0,5438	0,55	0,7088	0,99	0,8389
0,12	0,5478	0,56	0,7123	1,00	0,8413
0,13	0,5517	0,57	0,7157	1,01	0,8438
0,14	0,5557	0,58	0,7190	1,02	0,8461
0,15	0,5596	0,59	0,7224	1,03	0,8485
0,16	0,5636	0,60	0,7257	1,04	0,8508
0,17	0,5675	0,61	0,7291	1,05	0,8531
0,18	0,5714	0,62	0,7324	1,06	0,8554
0,19	0,5753	0,63	0,7357	1,07	0,8577
0,20	0,5793	0,64	0,7389	1,08	0,8599
0,21	0,5832	0,65	0,7422	1,09	0,8621
0,22	0,5871	0,66	0,7454	1,10	0,8643
0,23	0,5910	0,67	0,7486	1,11	0,8665
0,24	0,5948	0,68	0,7517	1,12	0,8686
0,25	0,5987	0,69	0,7549	1,13	0,8708
0,26	0,6026	0,70	0,7580	1,14	0,8729
0,27	0,6064	0,71	0,7611	1,15	0,8749
0,28	0,6103	0,72	0,7642	1,16	0,8770
0,29	0,6141	0,73	0,7673	1,17	0,8790
0,30	0,6179	0,74	0,7704	1,18	0,8810
0,31	0,6217	0,75	0,7734	1,19	0,8830
0,32	0,6255	0,76	0,7764	1,20	0,8849
0,33	0,6293	0,77	0,7794	1,21	0,8869
0,34	0,6331	0,78	0,7823	1,22	0,8888
0,35	0,6368	0,79	0,7852	1,23	0,8907
0,36	0,6406	0,80	0,7881	1,24	0,8925
0,37	0,6443	0,81	0,7910	1,25	0,8944
0,38	0,6480	0,82	0,7939	1,26	0,8962
0,39	0,6517	0,83	0,7967	1,27	0,8990
0,40	0,6554	0,84	0,7995	1,28	0,8997
0,41	0,6591	0,85	0,8023	1,29	0,9015
0,42	0,6628	0,86	0,8051	1,30	0,9032
1,31	0,9049	1,61	0,9463	1,91	0,9719
1,32	0,9066	1,62	0,9474	1,92	0,9726
1,33	0,9082	1,63	0,9484	1,93	0,9732
1,34	0,9099	1,64	0,9495	1,94	0,9738
1,35	0,9115	1,65	0,9505	1,95	0,9744
1,36	0,9131	1,66	0,9515	1,96	0,9750
1,37	0,9147	1,67	0,9525	1,97	0,9756
1,38	0,9162	1,68	0,9535	1,98	0,9761
1,39	0,9177	1,69	0,9545	1,99	0,9767
1,40	0,9192	1,70	0,9554	2,00	0,9772
1,41	0,9207	1,71	0,9564	2,10	0,9821
1,42	0,9222	1,72	0,9573	2,20	0,9861
1,43	0,9236	1,73	0,9583	2,30	0,9892
1,44	0,9251	1,74	0,9591	2,40	0,9918

Продолжение таблицы П1.1

1	2	3	4	5	6
1,45	0,9265	1,75	0,9599	2,50	0,9937
1,46	0,9279	1,76	0,9608	2,60	0,9953
1,47	0,9292	1,77	0,9616	2,70	0,9965
1,48	0,9306	1,78	0,9525	2,80	0,9974
1,49	0,9319	1,79	0,9633	2,90	0,9981
1,50	0,9332	1,80	0,9641	3,00	0,9986
1,51	0,9345	1,81	0,9649	3,10	0,9990
1,52	0,9357	1,82	0,9656	3,20	0,9993
1,53	0,9370	1,83	0,9664	3,30	0,9995
1,54	0,9382	1,84	0,9671	3,40	0,9996
1,55	0,9394	1,85	0,9678	3,50	0,9997
1,56	0,9406	1,86	0,9686	3,60	0,9998
1,57	0,9418	1,87	0,9693	3,70	0,9998
1,58	0,9429	1,88	0,9699	3,80	0,9999
1,59	0,9441	1,89	0,9706	3,90	0,9999
1,60	0,9452	1,90	0,9713	4,00	1,0000

Значения $\Phi(x)$ подсчитаны по формуле [37]

$$\Phi(x) = 1 - f(x) \sum_{i=1}^5 a_i w^i; \quad x \geq 0,$$

где $w = \frac{1}{1+px}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$;

$$p = 0,2316419; \quad a_2 = -0,3565638; \quad a_4 = -1,821256;$$

$$a_1 = 0,3193815; \quad a_3 = 1,781478; \quad a_5 = 1,330274.$$

Если $x < 0$, то $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Таблица П1.2

Преобразование (критерий) Фишера для коэффициента корреляции,
 $F = \text{arth}(r)$

r	F	r	F	r	F
1	2	3	4	5	6
0,00	0,000	0,34	0,354	0,68	0,8290
0,01	0,010	0,35	0,365	0,69	0,8480
0,02	0,020	0,36	0,376	0,70	0,8670
0,03	0,030	0,37	0,388	0,71	0,8870
0,04	0,040	0,38	0,400	0,72	0,9070
0,05	0,050	0,39	0,411	0,73	0,9280
0,06	0,060	0,40	0,423	0,74	0,9500
0,07	0,070	0,41	0,435	0,75	0,9730
0,08	0,080	0,42	0,459	0,76	0,9960
0,09	0,100	0,43	0,459	0,77	1,2030
0,10	0,100	0,44	0,472	0,78	1,4540

0,11	0,110	0,45	0,484	0,79	1,7140
0,12	0,120	0,46	0,490	0,80	1,9860
0,13	0,130	0,47	0,510	0,81	1,1270
0,14	0,140	0,48	0,523	0,82	1,1881
0,15	0,151	0,49	0,536	0,83	1,1881
0,16	0,161	0,50	0,549	0,84	1,2212
0,17	0,171	0,51	0,562	0,85	1,2562
0,18	0,182	0,52	0,576	0,86	1,2933
0,19	0,192	0,53	0,590	0,87	1,3331
0,20	0,202	0,54	0,604	0,88	1,3758
0,21	0,213	0,55	0,618	0,89	1,4219
0,22	0,223	0,56	0,632	0,90	1,4722
0,23	0,234	0,57	0,647	0,91	1,5275
0,24	0,244	0,58	0,662	0,92	1,5890
0,25	0,255	0,59	0,667	0,93	1,6584
0,26	0,266	0,60	0,693	0,94	1,7380
0,27	0,276	0,61	0,708	0,95	1,8318
0,28	0,287	0,62	0,725	0,96	1,9433
0,29	0,298	0,63	0,741	0,97	2,0923
0,30	0,309	0,64	0,758	0,98	2,2976
0,31	0,320	0,65	0,775	0,99	2,6467
0,32	0,331	0,66	0,792		
0,33	0,342	0,67	0,810		

Свойство преобразования $\text{arth}(-r) = -F$.

Таблица П1.3

Значения функции χ^2 в зависимости от вероятности P и числа степеней свободы f [38]

f	Вероятность P					
	0,99	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
1	0,000	0,0004	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37
4	0,297	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36
5	0,554	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35
6	0,872	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35
7	1,239	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35
8	1,646	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34
9	2,09	3,32	4,17	5,38	6,37	8,34
10	2,56	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34
11	3,05	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34
12	3,57	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34
13	4,11	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34
14	4,66	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34
15	5,23	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34

Продолжение таблицы П1.3

f	Вероятность P					
	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64
2	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21
3	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34
4	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28
5	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09
6	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81
7	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48
8	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1
9	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7
10	11,78	13,44	15,90	18,31	21,2	23,2
11	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7
12	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2
13	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7
14	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1
15	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6

Таблица П1.4

Равномерно распределенные случайные числа

03	86	20	27	67	32	16	37	43	08	47	07	84	06	29
92	37	77	33	70	84	72	31	16	33	47	25	83	28	48
15	87	29	77	98	49	89	83	02	14	14	50	02	59	01
77	65	77	71	56	21	68	59	96	64	24	68	30	09	77
50	88	51	57	95	68	34	01	71	99	77	75	20	14	91
78	59	86	69	29	09	63	28	88	16	27	54	96	17	16
27	18	58	50	29	16	61	74	75	08	08	06	11	80	81
38	61	44	74	49	34	82	82	14	09	07	06	19	67	23
57	25	37	84	31	31	66	69	90	32	48	30	77	74	55
72	41	54	60	88	67	11	47	40	11	05	55	67	08	92
84	68	93	28	70	73	60	66	16	23	95	36	13	99	31
05	10	87	55	70	10	67	02	31	90	54	33	44	90	35
35	49	07	85	76	18	92	49	13	89	40	21	81	59	11
62	93	54	33	45	23	18	69	63	69	54	10	75	15	23
88	71	44	98	15	04	18	01	38	39	36	08	45	50	16
68	82	57	25	37	58	57	61	26	70	56	88	36	36	62
78	46	21	70	84	75	90	19	78	27	30	70	46	96	19
01	22	90	32	86	76	97	27	40	84	02	25	05	51	42
00	15	71	31	40	55	26	15	29	08	71	33	79	66	57
90	02	26	88	68	03	16	16	41	42	14	00	53	76	57
57	23	86	06	49	08	37	66	21	60	52	42	04	99	16
05	06	10	80	95	12	21	76	98	50	03	59	80	92	51
66	77	72	89	99	73	78	02	37	32	07	78	26	86	92

Продолжение таблицы П1.5

$f_2 = N$	$f_1 = n - 1$						
	7	8	9	15	35	143	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,1815	0,1736	0,1621	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0292	0,2079	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица П1.6

Значения критерия Стьюдента [38]

Степень свободы, f	Доверительная вероятность γ				
	0,2	0,5	0,8	0,9	0,95
1	2	3	4	5	6
1	0,3249	1,0000	3,0777	6,3138	12,7062
2	0,2887	0,8165	1,8856	2,9200	4,3027
3	0,2767	0,7649	1,6377	2,3534	3,1824
4	0,2707	0,7407	1,5332	2,1318	2,7764
5	0,2672	0,7267	1,4759	2,0150	2,5706
6	0,2648	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469
7	0,2632	0,7111	1,4149	1,8946	2,3646
8	0,2619	0,7064	1,3968	1,8595	2,3060
9	0,2610	0,7027	1,3830	1,8331	2,2622
10	0,2602	0,6998	1,3722	1,8125	2,2281
11	0,2596	0,6974	1,3634	1,7959	2,2010
12	0,2590	0,6955	1,3562	1,7823	2,1788

1	2	3	4	5	6
13	0,2586	0,6938	1,3502	1,7709	2,1604
14	0,2582	0,6924	1,3450	1,7613	2,1448
15	0,2579	0,6912	1,3406	1,7530	2,1314
16	0,2576	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199
17	0,2573	0,6892	1,3334	1,7396	2,1098
18	0,2571	0,6884	1,3304	1,7341	2,1009
19	0,2569	0,6876	1,3277	1,7291	2,0930
20	0,2567	0,6870	1,3253	1,7247	2,0860
21	0,2566	0,6864	1,3232	1,7207	2,0796
22	0,2564	0,6858	1,3212	1,7171	2,0739
23	0,2563	0,6853	1,3195	1,7139	2,0687
24	0,2562	0,6848	1,3178	1,7101	2,0639
25	0,2561	0,6844	1,3163	1,7081	2,0595
26	0,2560	0,6840	1,3150	1,7053	2,0555
27	0,2559	0,6837	1,3137	1,7033	2,0518
28	0,2558	0,6834	1,3125	1,7011	2,0484
29	0,2557	0,6830	1,3114	1,6991	2,0452
30	0,2556	0,6828	1,3104	1,6973	2,0423
32	0,2555	0,6822	1,3086	1,6939	2,0369
34	0,2553	0,6818	1,3070	1,6909	2,0322
36	0,2552	0,6814	1,3055	1,6883	2,0281
38	0,2551	0,6810	1,3042	1,6860	2,0244
40	0,2550	0,6807	1,3031	1,6839	2,0211
42	0,2550	0,6804	1,3020	1,6820	2,0181
44	0,2549	0,6801	1,3011	1,6802	2,0154
46	0,2548	0,6799	1,3002	1,6787	2,0129
48	0,2548	0,6796	1,2994	1,6772	2,0106
50	0,2547	0,6794	1,2987	1,6759	2,0086
55	0,2546	0,6790	1,2971	1,6730	2,0040
60	0,2545	0,6786	1,2958	1,6706	2,0003
65	0,2544	0,6783	1,2947	1,6686	1,9971
70	0,2543	0,6780	1,2938	1,6669	1,9944
80	0,2542	0,6776	1,2922	1,6641	1,9901
90	0,2541	0,6772	1,2910	1,6620	1,9867
100	0,2540	0,6770	1,2901	1,6602	1,9840
120	0,2539	0,6765	1,2886	1,6577	1,9799
150	0,2538	0,6761	1,2872	1,6551	1,9759
200	0,2537	0,6757	1,2858	1,6525	1,9719
250	0,2536	0,6755	1,2849	1,6510	1,9695
300	0,2536	0,6753	1,2844	1,6499	1,9679
400	0,2535	0,6751	1,2837	1,6487	1,9659
500	0,2535	0,6750	1,2832	1,7479	1,9647

Значения критерия Фишера при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ [38]

$f_2 = N(n-1)$	$f_1 = N - d$					
	1	2	3	4	5	6
1	161,45	199,5	215,71	224,58	213,16	233,99
2	18,513	19,00	19,164	19,247	19,296	19,330
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3883	6,2560	6,1631
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8378	3,6875	3,5806
9	5,1174	4,2565	3,8626	3,6371	3,4817	3,3738
10	4,9446	4,1028	3,7083	3,4780	3,2538	3,2172
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2567	3,1059	2,9961
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613
19	4,3808	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283
20	4,3513	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904
26	4,2252	3,3690	2,9751	2,7426	2,5868	2,4741
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591
28	4,1960	3,3404	2,0467	2,7141	2,5581	2,4453
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6886	2,5336	2,4205
40	4,0848	3,2317	2,8387	2,6060	2,4495	2,3359
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2540
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2900	2,1750
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986

$f_2 = N(n-1)$	$f_1 = N-d$					
	7	8	9	10	13	15
1	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91	245,95
2	19,355	19,371	19,385	19,396	19,413	19,429
3	8,8868	8,8452	8,8123	8,7855	8,7446	8,7029
4	6,0942	6,0410	5,9988	5,9644	5,9117	5,8578
5	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351	4,6777	4,6188
6	4,2066	4,1468	4,0990	4,0600	3,9999	3,9381
7	3,7870	3,7257	3,6767	3,6365	3,5747	3,5108
8	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472	3,2840	3,2184
9	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373	3,0729	3,0061
10	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782	2,9130	2,8450
11	3,0123	2,9480	2,8962	2,8536	2,7876	2,7186
12	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534	2,6866	2,6169
13	2,8321	2,7669	2,7144	2,6710	2,6037	2,5331
14	2,7642	2,6887	2,6458	2,6021	2,5234	2,4630
15	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437	2,4753	2,4035
16	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935	2,4247	2,3522
17	2,6143	2,5480	2,4943	2,4499	2,3807	2,3077
18	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117	2,3421	2,2685
19	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779	2,3080	2,2341
20	2,5140	2,4471	2,3928	2,3479	2,2776	2,2033
21	2,4876	2,4205	2,3661	2,3210	2,2504	2,1751
22	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967	2,2258	2,1508
23	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747	2,2036	2,1282
24	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547	2,1834	2,1077
25	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365	2,1649	2,0889
26	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197	2,1479	2,0716
27	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043	2,1323	2,0558
28	2,3593	2,2913	2,2360	2,1900	2,1179	2,0411
29	2,3463	2,2782	2,2229	2,1768	2,1045	2,0275
30	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646	2,0921	2,0148
40	2,2490	2,1802	2,1240	2,0772	2,0035	1,9246
60	2,1665	2,0970	2,0401	1,9926	1,9174	1,8364
120	2,0867	2,0164	1,9588	1,9105	1,8337	1,7505
∞	2,0090	1,9374	1,8799	1,8307	1,7522	1,6664

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица П2.1

Максимальные значения интенсивностей отказов элементов РЭУ (для учебных целей)

Наименование элемента (группа, вид, тип)	Интенсивность отказов $\times 10^{-6}$ 1/ч
1	2
Полупроводниковые (ПП) цифровые интегральные схемы (ИС) 1-й степени интеграции	0,40
ПП цифровые ИС 2-й степени интеграции	0,45
ПП цифровые ИС 3-й степени интеграции	0,50
ПП цифровые ИС 4-й степени интеграции	0,60
ПП аналоговые ИС 1-й степени интеграции	0,45
ПП аналоговые ИС 2-й степени интеграции	0,55
ПП аналоговые ИС 3-й степени интеграции	0,65
Транзисторы полевые малой мощности	0,30
Транзисторы полевые средней мощности	0,35
Транзисторы полевые большой мощности	0,45
Транзисторы кремниевые малой мощности	0,40
Транзисторы кремниевые средней мощности	0,45
Транзисторы кремниевые большой мощности	0,50
Транзисторы германиевые малой мощности	0,45
Транзисторы германиевые средней мощности	0,55
Транзисторы германиевые большой мощности	0,65
Транзисторы маломощные в ключевом режиме	0,40
Транзисторы большой и средней мощности в ключевом режиме	0,60
Диоды высокочастотные кремниевые	0,20
Диоды высокочастотные германиевые	0,30
Диоды импульсные в ключевом режиме	0,15
Диоды выпрямительные маломощные, $I_{\text{ср.выпр}} < 300$ мА	0,20
Диоды выпрямительные средней мощности, $I_{\text{ср.выпр}} = 0 \dots 10$ А	0,50
Диоды-столбы высоковольтные выпрямительные	0,80
Блоки (мосты) выпрямительные кремниевые $I_{\text{ср.выпр}} < 400$ мА	0,40
Блоки (мосты) выпрямительные германиевые $I_{\text{ср.выпр}} > 400$ мА	1,10
Стабилитроны маломощные, $P_{\text{max}} < 1$ Вт	0,9
Стабилитроны средней мощности $P_{\text{max}} < 5$ Вт	1,25
Варикапы	0,20
Светодиоды	0,70
Диоды туннельные и обращенные	0,27
Диоды инфракрасного излучения	0,80
Фотодиоды	0,70
Диоды сверхвысокочастотные	6,00
Оптроны	0,75

1	2
Тиристоры маломощные, $I_{cp} < 2$ А	2,20
Тиристоры маломощные, $I_{cp} = 2...10$ А	4,40
Резисторы постоянные непроволочные, $P_{ном} < 0,5$ Вт, ток постоянный	0,05
Резисторы постоянные непроволочные, $P_{ном} < 0,5$ Вт ток переменный	0,10
Резисторы постоянные непроволочные, $P_{ном} = 1...2$ Вт, ток постоянный	0,08
Резисторы постоянные непроволочные, $P_{ном} = 1...2$ Вт, ток переменный	0,15
Резисторы постоянные проволочные, $P_{ном} < 10$ Вт	0,40
Резисторы постоянные проволочные, $P_{ном} < 50$ Вт	0,80
Резисторы переменные непроволочные	0,50
Резисторы переменные непроволочные, с выключателем	1,30
Резисторы переменные проволочные	1,20
Резисторы переменные проволочные ползункового типа	1,10
Терморезисторы	0,20
Вариаторы	0,40
Фоторезисторы	0,50
Конденсаторы слюдяные	0,03
Конденсаторы танталовые	0,02
Конденсаторы керамические	0,05
Конденсаторы бумажные	0,07
Конденсаторы металобумажные	0,06
Конденсаторы пластиковые	0,07
Конденсаторы нейлоновые	0,01
Конденсаторы электролитические алюминиевые	0,55
Конденсаторы электролитические танталовые	0,25
Индикаторы стрелочные	4,00
Индикаторы цифровые на жидких кристаллах	3,25
Индикаторы цифровые наполненные (серии ИН)	3,50
Индикаторы цифровые вакуумные накальные (серии ИВ)	0,80
Индикаторы цифровые вакуумные люминесцентные серии ИВ)	2,00
Индикаторы цифробуквенные на основе светодиодов одноразрядные	1,00
Индикаторы цифробуквенные на основе светодиодов многозарядные	3,00
Индикаторы люминесцентные сигнальные	3,30
Лампочки сигнальные, накаливания	8,00
Лампочки сигнальные, неоновые	10,00
Кинескопы черно-белого изображения	7,50
Кинескопы цветного изображения	9,50
Трубки осциллографические (ЭЛТ)	10,00

Продолжение таблицы П2.1

	2
Катушки индуктивности, $d_{\text{пров}} < 0,1$ мм	0,30
Катушки индуктивности, $d_{\text{пров}} > 0,1$ мм	0,20
Дроссели, $d_{\text{пров}} < 0,1$ мм	0,30
Дроссели, $d_{\text{пров}} > 0,1$ мм	0,20
Обмотки сетевых трансформаторов, $d_{\text{пров}} < 0,1$ мм	0,75
Обмотки сетевых трансформаторов, $d_{\text{пров}} > 0,1$ мм	0,50
Трансформаторы входные	0,90
Трансформаторы выходные	0,90
Трансформаторы импульсные	0,13
Трансформаторы высоковольтные	2,50
Реле электромагнитные общего применения	2,50**
Реле электромагнитные миниатюрные	0,60**
Герконы	0,30*
Соединители (разъемы) штепсельные	0,20***
Гнезда, клеммы	0,70*
Вилки двухполюсные	0,50
Зажимы	0,01*
Тумблеры, кнопки	0,40**
Переключатели галетные	0,40**
Переключатели малогабаритные	0,30**
Переключатели малогабаритные модульные (П2К) с независимой фиксацией	0,30**
Переключатели малогабаритные модульные (П2К) с зависимой фиксацией	0,37**
Микропереключатели типа МП	0,30*
Штекеры (гнезда) телевизионные	2,12
Лепесток контактный	0,20
Плата (колодка) контактная межблочного монтажа	0,40*
Провод монтажный	0,30****
Кабели (шнуры)	0,60****
Кабели (шнуры) питания	2,00****
Держатели предохранителей	0,20
Предохранители	5,00
Изоляторы	0,50
Шайбы, прокладки изолирующие	0,75
Соединения пайкой, ток постоянный	0,04
Соединения пайкой, ток пульсирующий	0,40
Соединения накруткой	0,02
Платы печатного монтажа	0,20
Линии задержки	0,75
Фильтры пьезокерамические	0,25
Резонаторы кварцевые	0,37
Магнитопроводы ленточные	0,10
Ферритовые элементы	0,01
Головки магнитные малогабаритные	7,50

1	2
Электродвигатели асинхронные, сельсины	12,30
Электродвигатели синхронные	0,51
Электродвигатели постоянного тока	13,40
Батареи однозарядные	43,00
Батареи заряжаемые	2,00
Аккумуляторы	10,30
Датчики электромеханические пассивные	15,00
Конструкции несущие легкоъемных субблоков	0,10
Конструкции несущие РЭА	3,00
Пружины	2,20
Соединения механической пайкой	0,06
Соединения винтами 3...5 мм	0,001

Примечание: Значения интенсивностей отказов элементов, помеченные символом, приведены соответственно:

- * — на один контакт при номинальном токе;
- ** — на одну контактную группу при номинальном токе;
- *** — на один штырек при номинальном токе;
- **** — на каждый метр длины при номинальной плотности тока в проводе (неполный метр длины должен считаться как один метр).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Значения поправочных коэффициентов (составлено для учебных целей)

Таблица ПЗ.1

Значения поправочных коэффициентов α_3 , учитывающих влияние механических воздействий [6]

Условия эксплуатации	Значение α_3
Лабораторные	1,00
Стационарные	1,07
Полевые	1,07
Корабельные	1,37
Автомобильные	1,46
Железнодорожные	1,57
Самолетные	1,65

Таблица ПЗ.2

Значения поправочных коэффициентов α_4 , учитывающих влияние относительной влажности [6]

Относительная влажность	Значение α_4
60...70% при $t = 20...40$ °С	1,00
90...98% при $t = 20...25$ °С	2,0
90...98% при $t = 30...40$ °С	2,5

Таблица ПЗ.3

Значения поправочных коэффициентов α_5 , учитывающих атмосферное давление (высоту над уровнем моря) [6]

Высота, км	Значение α_5	Высота, км	Значение α_5
0...1	1,00	5...6	1,16
1...2	1,05	6...8	1,20
2...3	1,10	8...10	1,25
3...5	1,14	10...15	1,30

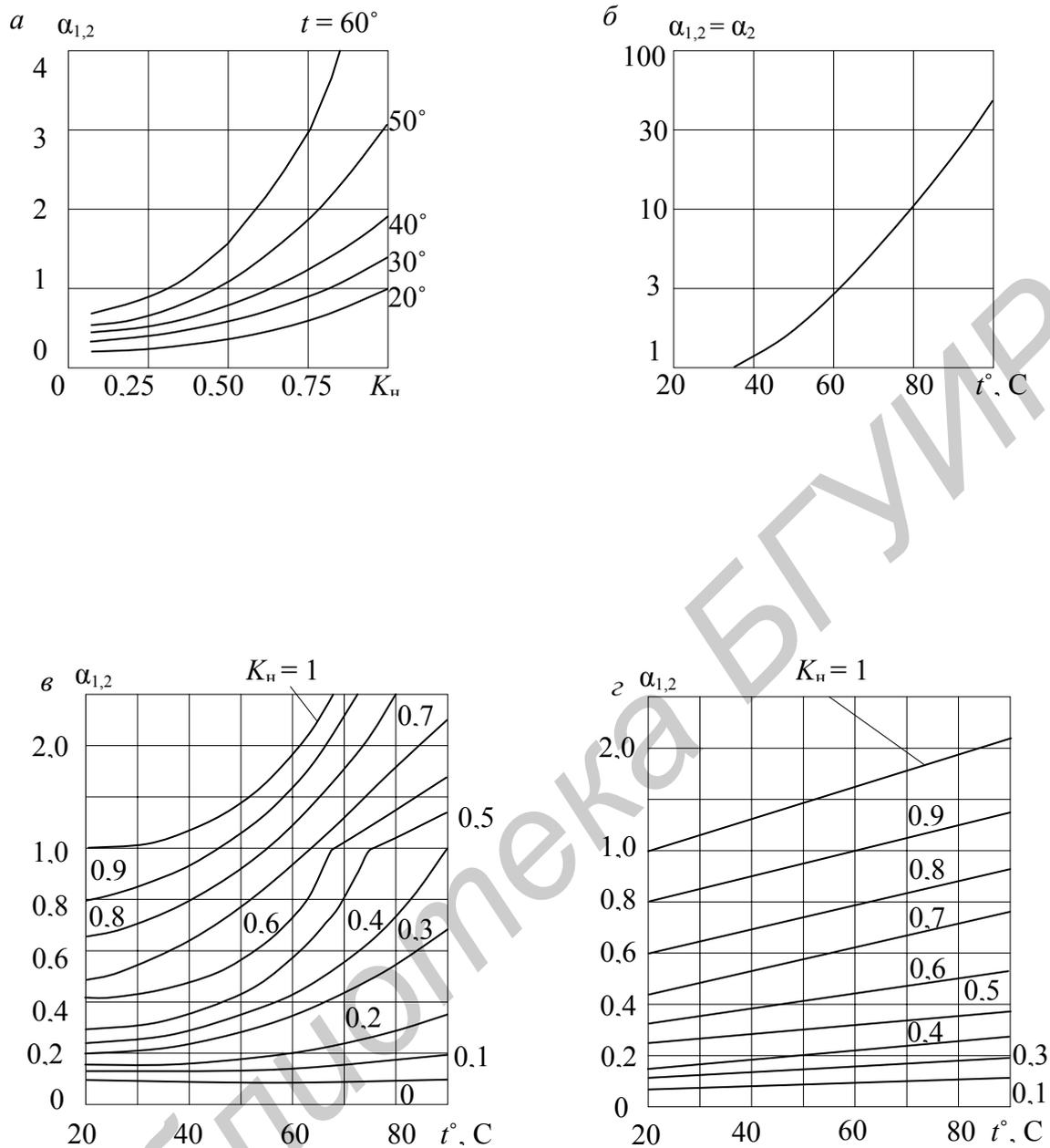


Рис.ПЗ.1. Обобщенные зависимости поправочного коэффициента $\alpha_{1,2}$ от температуры и коэффициента нагрузки:

а) для контактных элементов (разъемов, реле, переключателей и т.п.);

б) для соединений пайкой;

в) для резисторов типов МЛТ и ОМЛТ;

г) для переменных проволочных резисторов

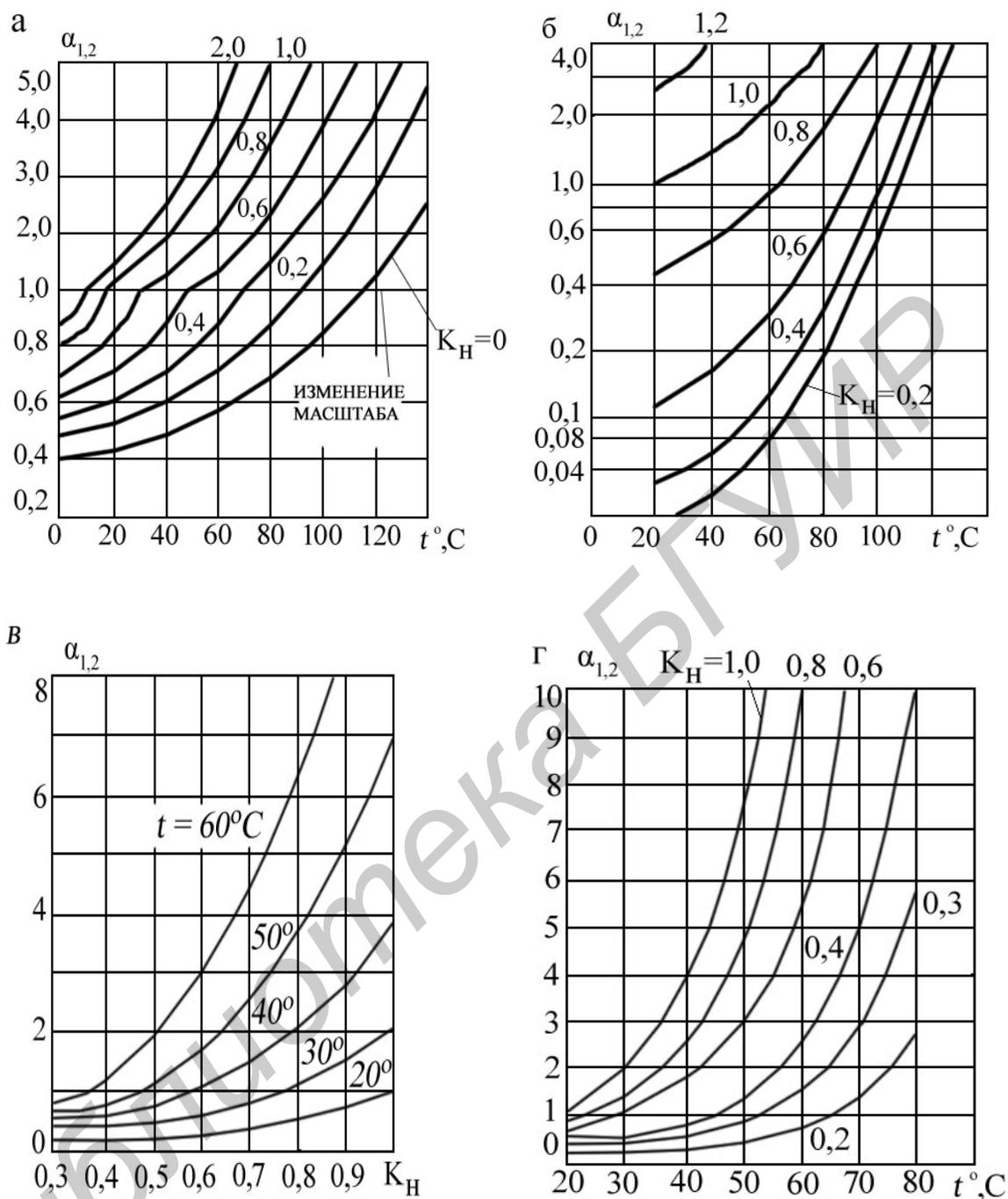


Рис.П3.2. Обобщённые зависимости поправочного коэффициента $\alpha_{1,2}$ от температуры и коэффициента нагрузки:

а - для резисторов;

б - для неполярных конденсаторов;

в - для изделий, имеющих обмотки;

г - для электролитических конденсаторов

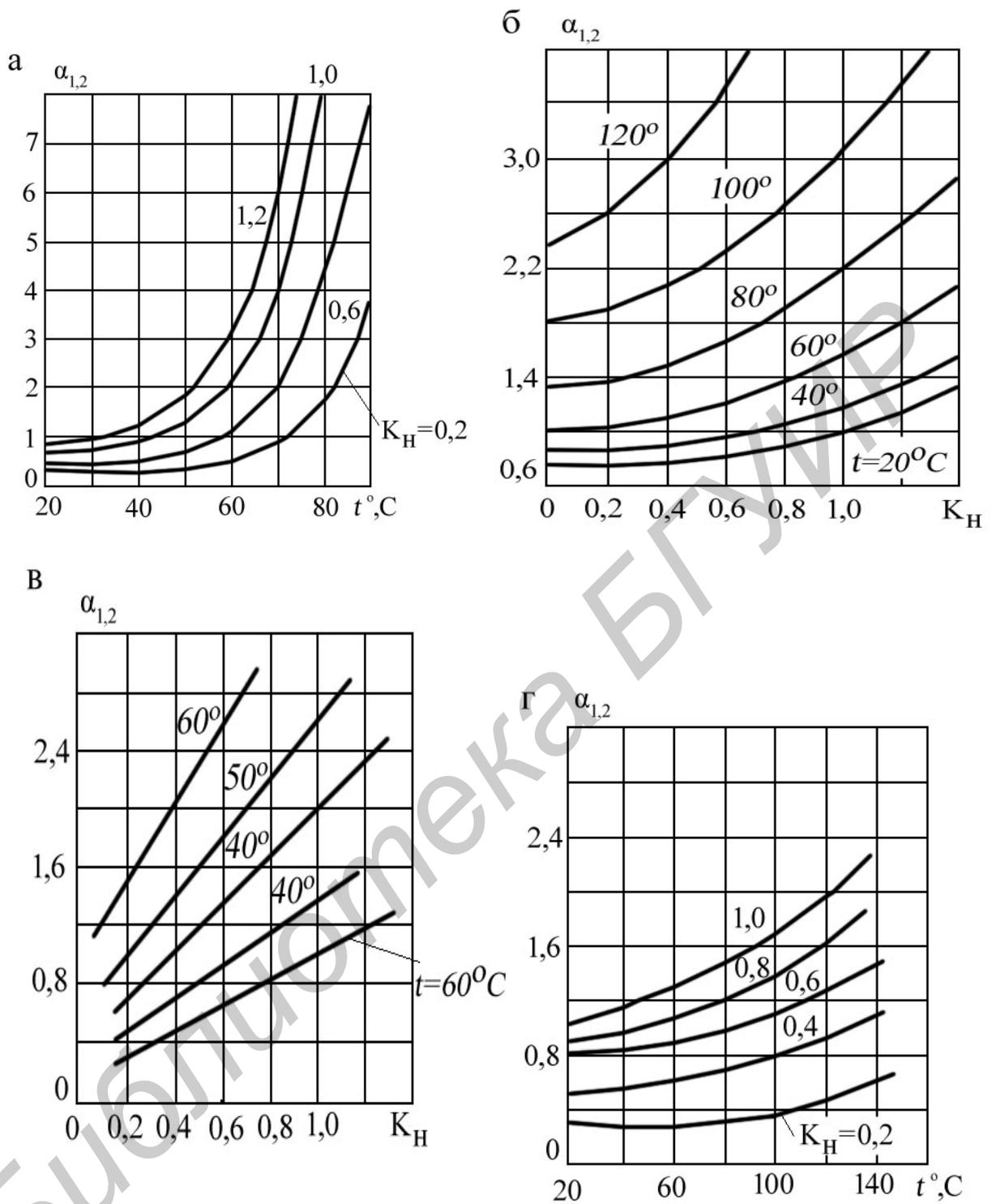


Рис.ПЗ.3. Обобщённые зависимости поправочного коэффициента $\alpha_{1,2}$ от температуры и коэффициента нагрузки для полупроводниковых приборов:

- а) германиевых диодов;**
- б) кремниевых диодов;**
- в) германиевых транзисторов;**
- г) кремниевых транзисторов**

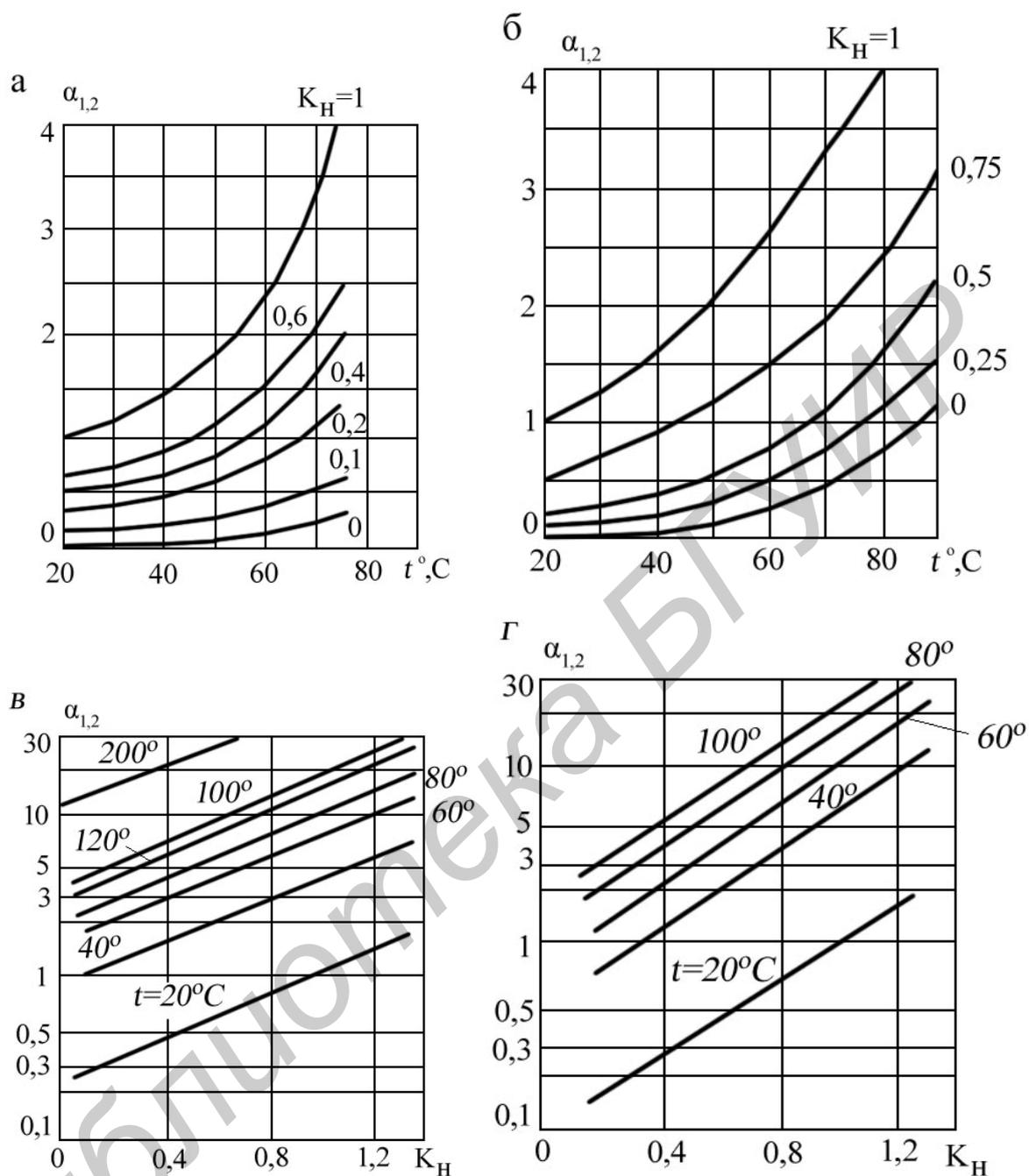


Рис.ПЗ.4. Обобщённые зависимости поправочного коэффициента $\alpha_{1,2}$ от температуры и коэффициента нагрузки:

- а) для кремниевых высокочастотных транзисторов;**
- б) для германиевых высокочастотных транзисторов;**
- в) для полупроводниковых цифровых интегральных микросхем;**
- г) для полупроводниковых линейно-импульсных интегральных микросхем**

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Средние значения случайного времени восстановления τ_i элементов и функциональных частей РЭУ (для учебных целей)

Элемент, функциональная часть РЭУ	τ_i , ч
Цифровые интегральные микросхемы малой и средней степени интеграции	1,5
Цифровые интегральные микросхемы большой и сверхбольшой степени интеграции	0,5
Аналоговые интегральные микросхемы малой и средней степени интеграции	1,2
Транзисторы большой мощности	0,7
Транзисторы средней и малой мощности	0,8
Резисторы постоянные	0,5
Резисторы переменные	1,2
Конденсаторы неполярные	1,1
Конденсаторы электролитические	0,55
Диоды (кроме выпрямительных)	0,6
Диоды выпрямительные	0,4
Блоки (мосты) выпрямительные	0,3
Стабилитроны	0,5
Переключатели	0,7
Соединители (разъёмы)	2,0
Катушки индуктивности	1,3
Трансформаторы	2,2
Дроссели	1,4
Предохранители	0,1
Платы печатного монтажа	3,0
Монтажные провода	0,5
ТЭЗы устройств цифровой обработки информации	0,5
Индикаторные устройства	1,5
Сигнальные и индикаторные лампочки	0,2
Реле	2,6
Тумблеры, кнопки	0,6
Зажимы, гнёзда, клеммы	0,8
Шнуры питания	0,3
Пайки	0,5

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Шаблоны для построения вероятностных сеток и вероятностные сетки (бумага) некоторых законов распределения

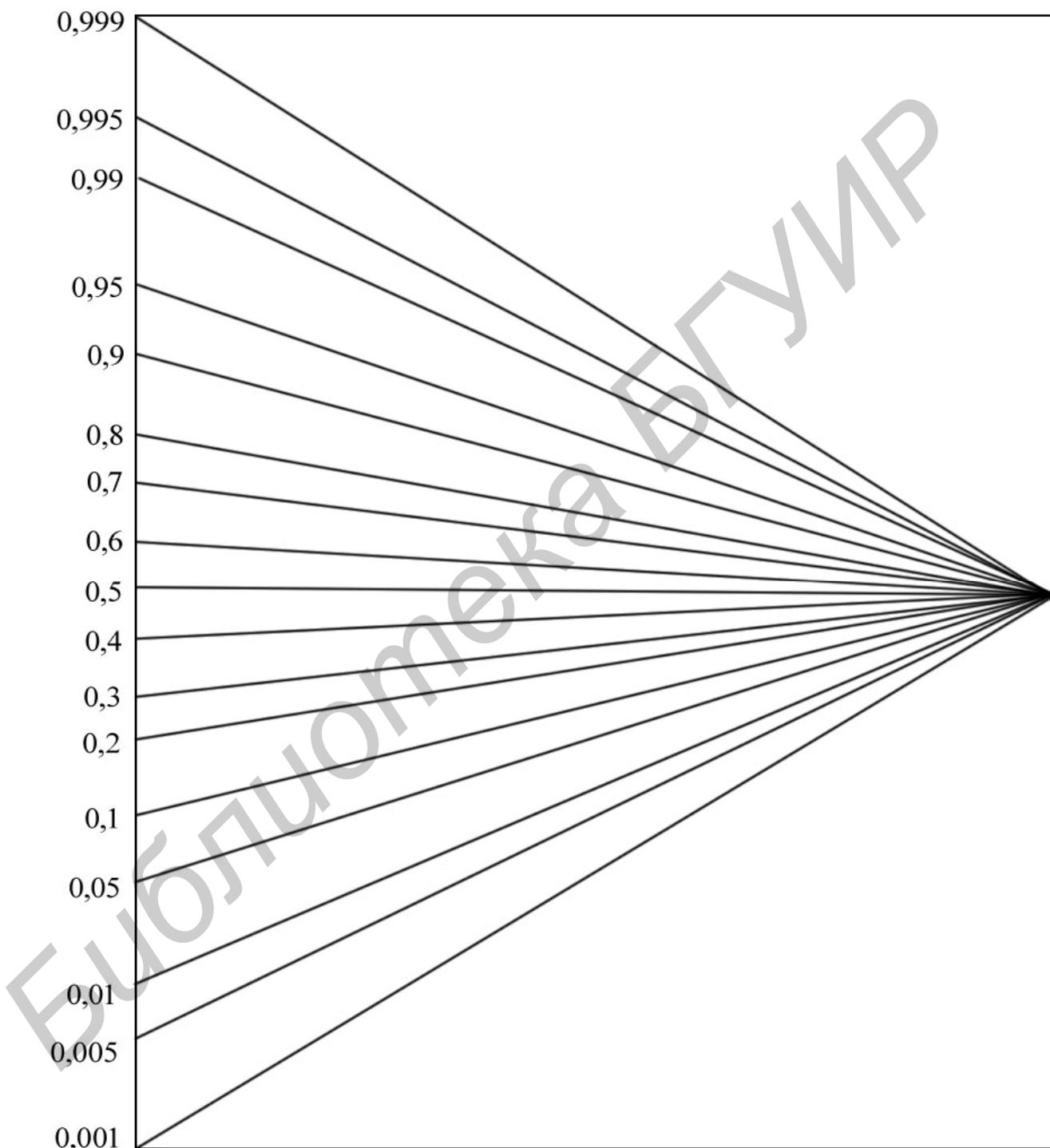


Рис.П5.1. Шаблон для построения шкалы накопленных частот вероятностной бумаги нормального распределения (шкала параметра – равномерная)

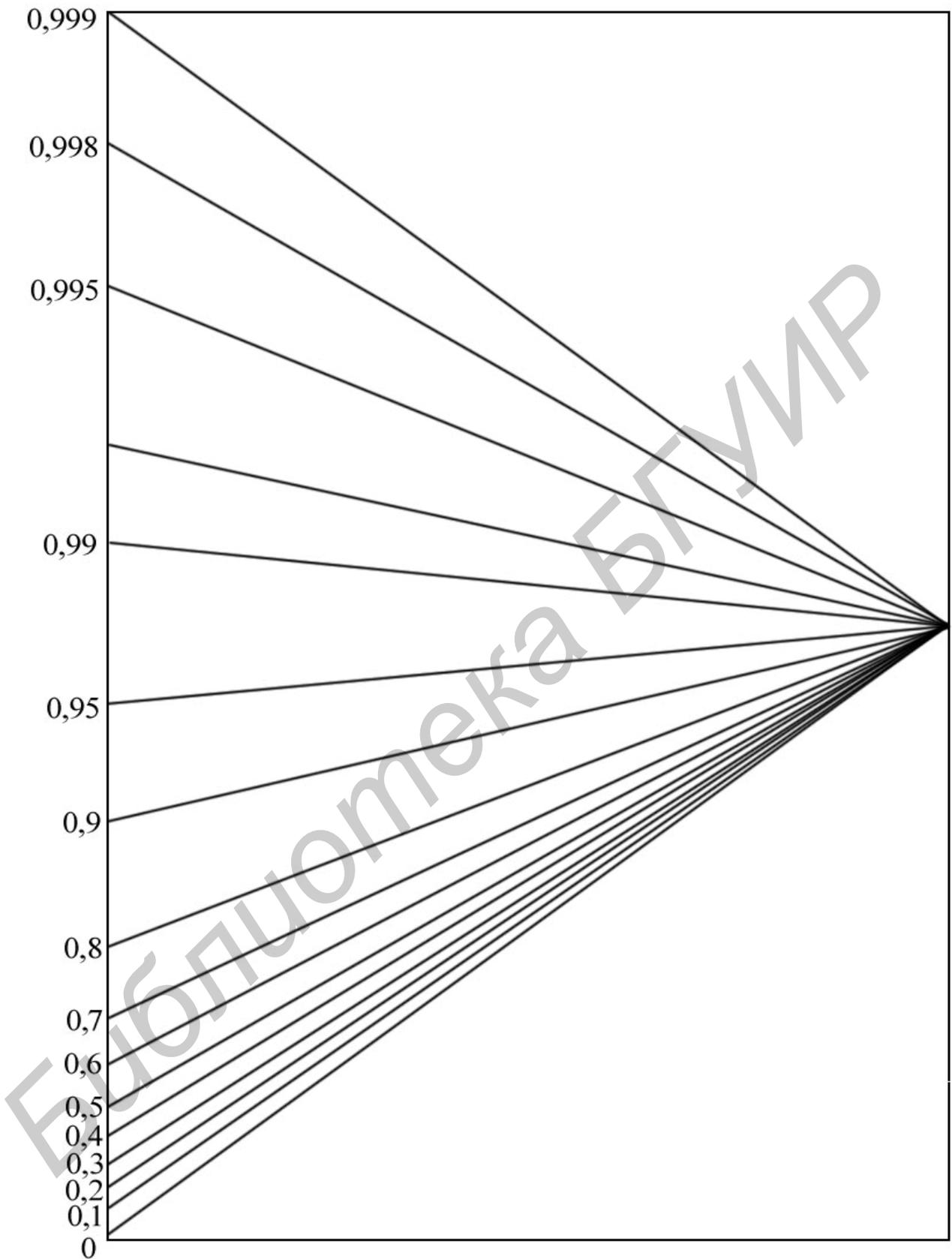


Рис.П5.2. Шаблон для построения шкалы накопленных частот вероятностной бумаги экспоненциального распределения (шкала параметра – равномерная)

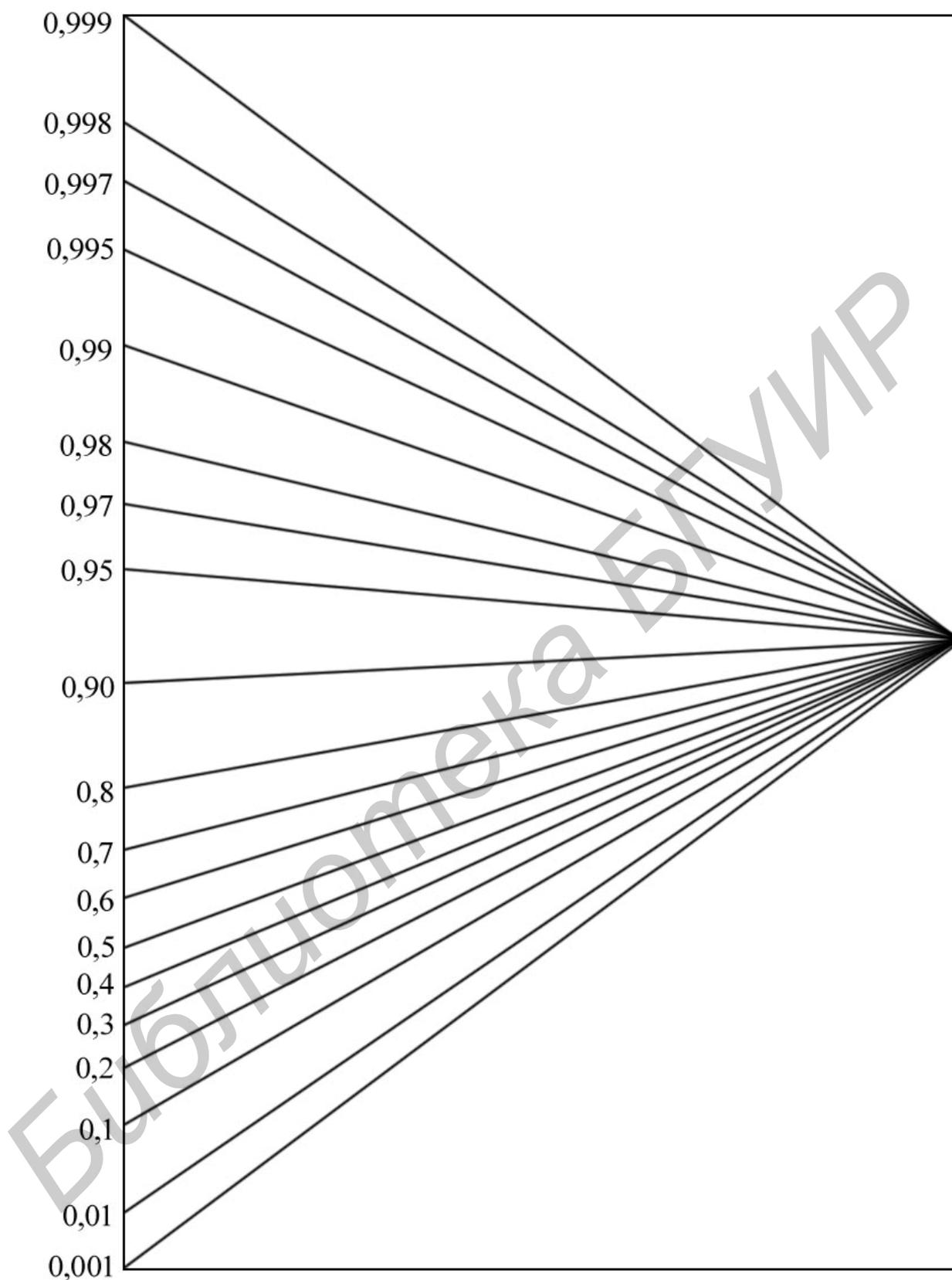


Рис.П5.3. Шаблон для построения шкалы накопленных частот вероятностной бумаги распределения Вейбулла (шкала параметра строится с помощью шаблона, приведенного на рис.5.4)

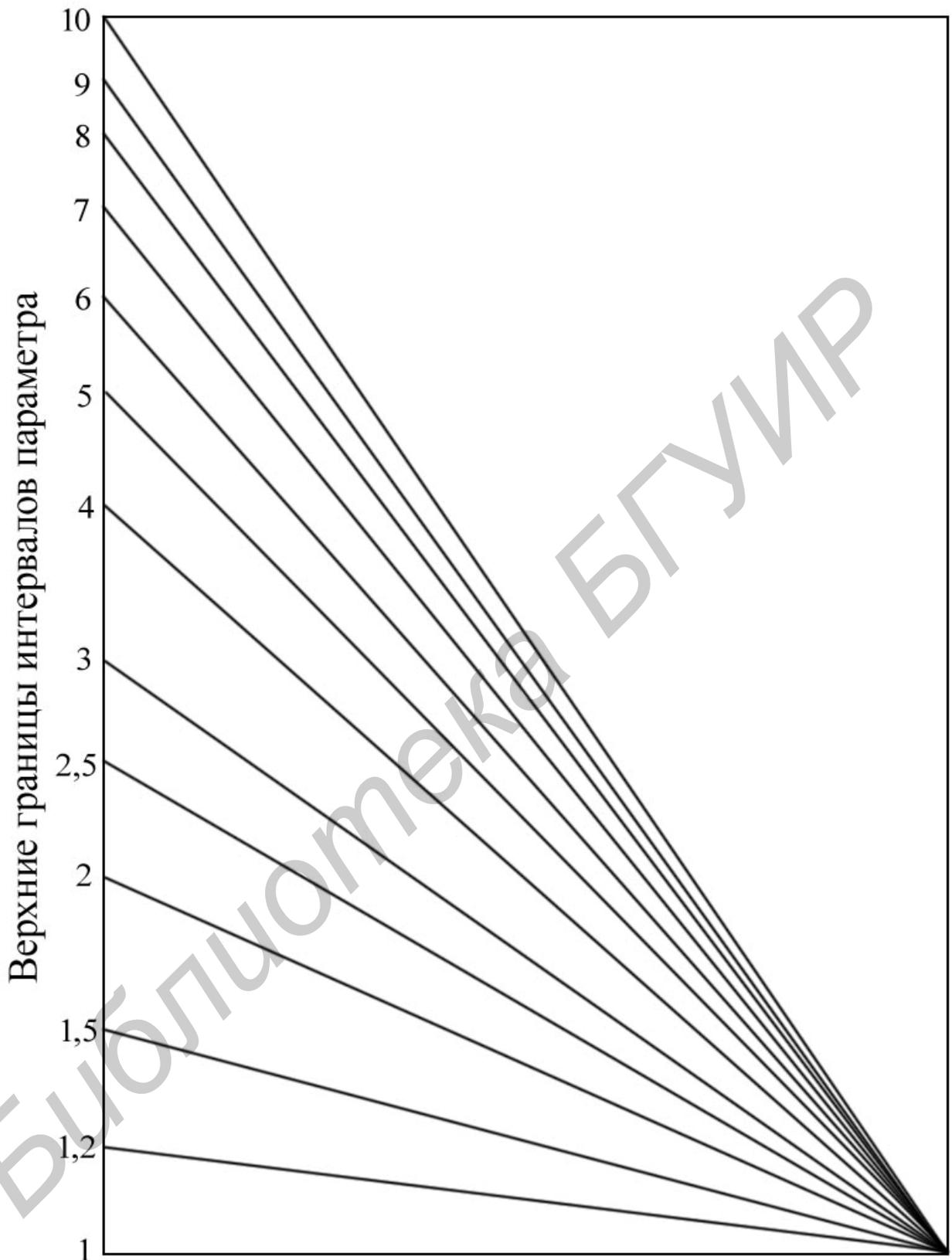
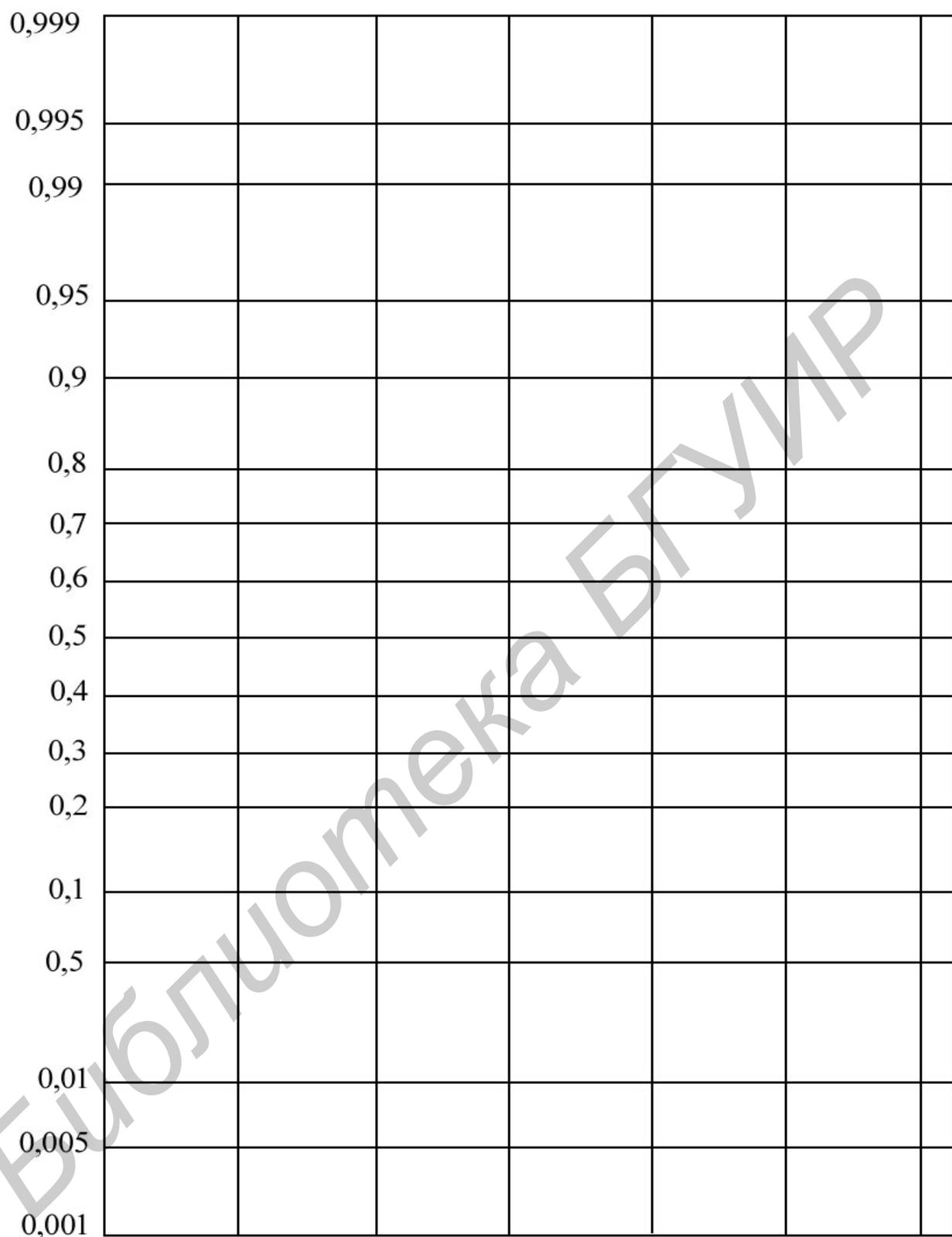


Рис.П5.4. Шаблон для построения шкалы параметра вероятностной бумаги логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла (шкала накопленных частот строится с помощью шаблонов, приведенных на рис.5.1 и рис.5.3)



Значения или верхние границы параметра

**Рис.П5.5. Вероятностная бумага нормального распределения
(шкала абсцисс – равномерная)**

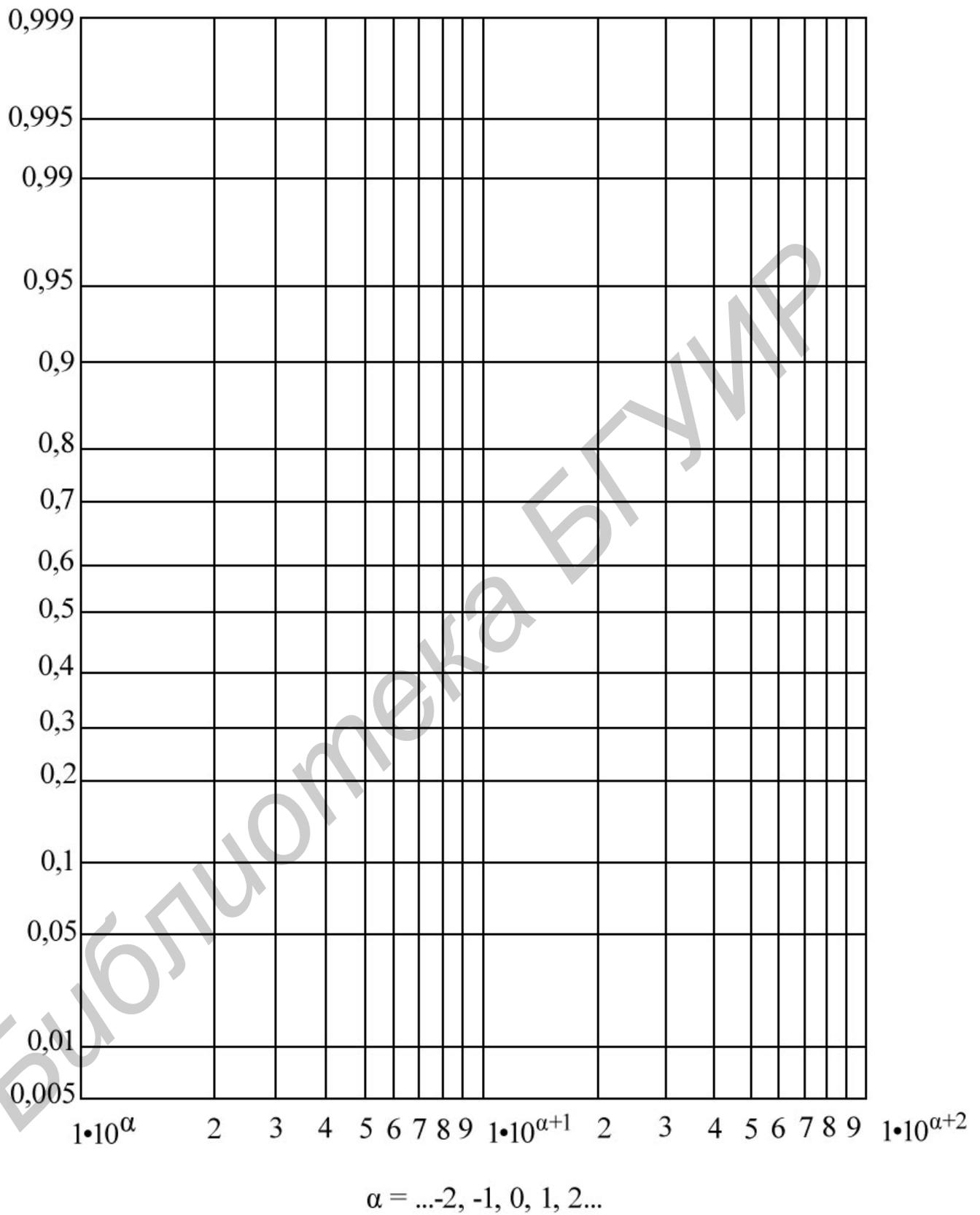
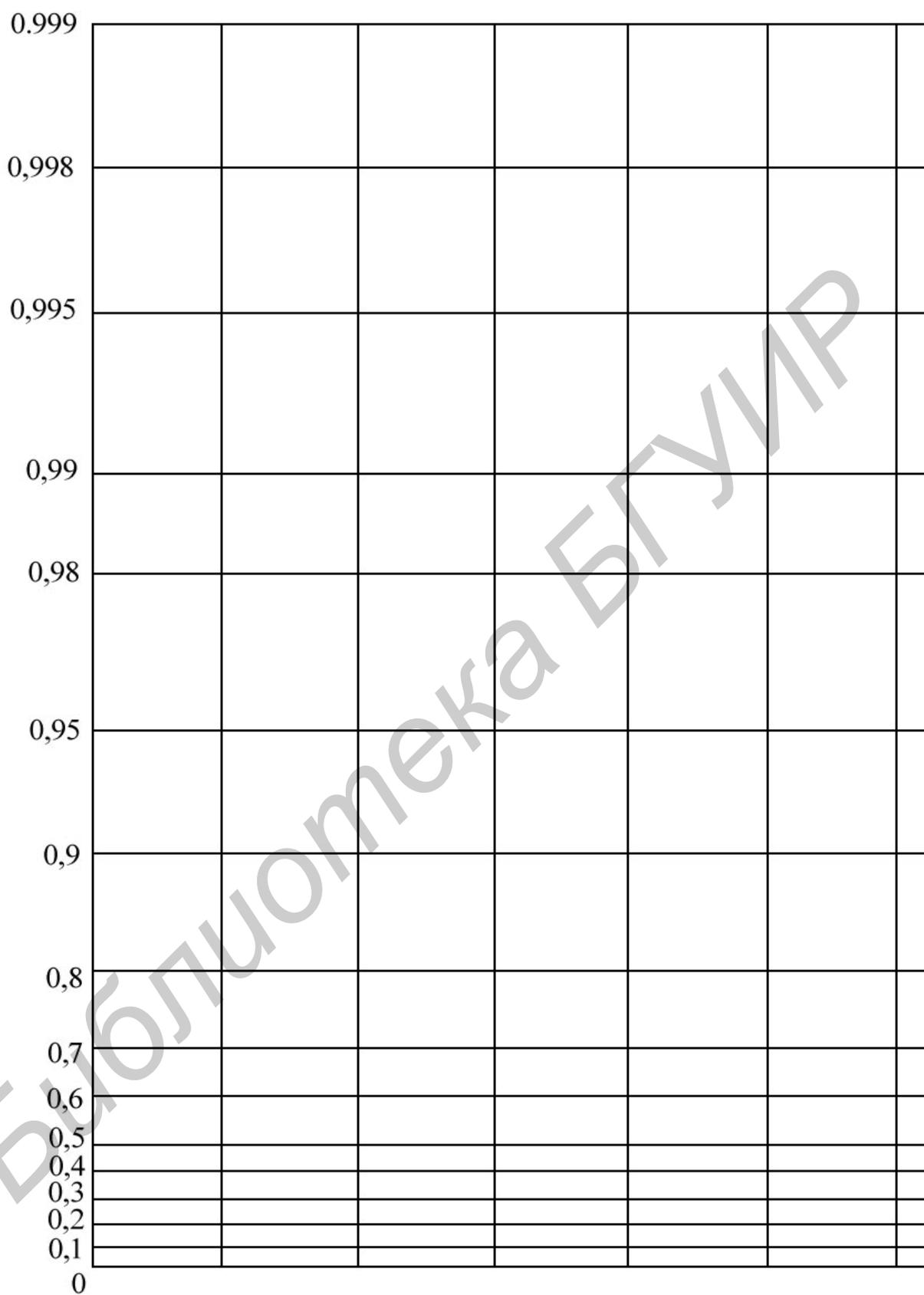


Рис.П5.6. Вероятностная бумага логарифмически нормального распределения (шкала абсцисс строится по шаблону, приведенному на рис.5.4)



Значения или верхние границы интервалов параметра

**Рис.П5.7. Вероятностная бумага экспоненциального распределения
(шкала абсцисс – равномерная)**

ЛИТЕРАТУРА

1. Кофанов Ю.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭС: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 1991. — 359 с.
2. САПР: Системы автоматизированного проектирования: Учеб. пособие для ВТУЗов: В 9 кн. Кн. 1. Принципы построения и структура / И.П.Норенков. — Мн.: Выш. шк., 1987. — 123 с.
3. Варламов Р.Г. Компоновка радиоэлектронной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1975. — 352 с.
4. Конструирование и расчет больших гибридных интегральных схем, микросборок и аппаратуры на их основе / Под ред. Б.Ф. Высоцкого. — М.: Радио и связь, 1981. — 216 с.
5. Микроэлектроника: Учеб. пособие для вузов. В 9 кн./ Под ред. Л.А.Коледова. Кн. 5. И.Я.Козырь. Качество и надежность интегральных микросхем. — М.: Выш. шк., 1987. — 144 с.
6. Яншин А.А. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности ЭВА: Учеб. пособие для вузов. — М.: Радио и связь, 1983. — 312 с.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 576 с.
8. Зажиганов Л.С., Кишьян А.А., Романиков Ю.И. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента. — М.: Атомиздат, 1978. — 232 с.
9. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное руководство. — М.: Наука, 1971. — 192 с.
10. Герасимович А.И. Математическая статистика: Учеб. пособие для инж.-техн. и экон. спец. ВТУЗов. — Мн.: Выш. шк., 1983. — 279 с.
11. Закс Л. Статистическое оценивание — М.: Статистика, 1976. — 598 с.

12. Герчук Я.П. Графики в математико-статистическом анализе. — М.: Статистика, 1972. — 77 с.
13. Шиндовский Э., Шюрц О. Статистические методы управления качеством. — М.: Мир, 1976. — 598 с.
14. Львович Я.Е., Фролов В.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА: Учеб. пособие для ВУЗов. — М.: Радио и связь, 1986. — 192 с.
15. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — 2-е изд. перераб. и доп. М.: Наука, 1976. — 279 с.
16. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. — 4-е изд., дополн. — М.: Наука, 1985. — 78 с.
17. Фомин А.В., Борисов В. Ф., Чермошенский В.В. Допуски в радиоэлектронной аппаратуре. М.: Сов. радио, 1973. — 129 с.
18. Надежность в технике. Основные понятия термины и определения. ГОСТ 27.002-89 — Издательство стандартов, 1990.
19. Надежность и эффективность в технике. Справочник в 10 т. Методология. Организация. Терминология/ Под ред. А.И. Рембезы. — М.: Машиностроение, 1986. — 224 с.
20. Надежность технических систем. Справочник /Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др./ Под ред. И.А. Ушакова — М.: Радио и связь, 1985. — 608 с.
21. European Organization of the Quality Control Glossary. — Bern: EOQC. 1988. — 24 p.
22. Надежность и эффективность в технике. Справочник в 10 т. /Ред. совет: В.С. Авдудевский (пред.) и др. Т. 2. Математические методы в теории надежности и эффективности /Под ред. Б.В. Гнеденко. — М.: Машиностроение, 1987. — 280 с.
23. Широков А.М. Надежность радиоэлектронных устройств. Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1972. — 272 с.
24. Шишонков Н.А., Репкин В.Ф., Барвинский Л.Л. Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной техники /Под ред. Н.А. Шишонка. — М.: Сов. радио, 1964. — 552 с.

25. Harris A.P., Parsons M.F. Duchesne C.J.M. Establishing and confirming R and M. requirements for DND vehicles. "Microelectronics and Reliability, 1980, 20, №1/2, 55-73 — Экспресс-информация. Надежность и контроль качества — М.: — ВИНТИ, 1981, №37.
26. Боровиков СМ. Надежность радиоэлектронных устройств: Учеб. пособие для студентов радиоэлектронных специальностей. — Мн.: БГУИР, 1997. — 80 с.
27. Улинич Р.Б. Практическое обеспечение надежности РЭА при проектировании. — М.: Радио и связь, 1985. — 112 с. (Б-ка инженера по надежности).
28. Чернышев А.А. Основы надежности полупроводниковых приборов и интегральных микросхем. — М.: Радио и связь 1988. — 256 с.
29. Чуев Ю.В. и др. Прогнозирование количественных характеристик процессов. — М.: Сов. радио, 1975. — 398 с.
30. Гаскаров Д.В., Голинкевич Т.А., Мозгалецкий А.В. Прогнозирование технического состояния и надежности радиоэлектронной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1974. — 222 с.
31. Боровиков СМ. Результаты исследования эффективности некоторых алгоритмов индивидуального прогнозирования метода пороговой логики. — В межвуз. сб. "Испытания и защита РЭА." — М.: ВЗМИ, 1982.
32. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — Мн.: Выш. школа, 1993. — 336 с.
33. Фурунжиев Р.И. Вычислительная техника и ее применение: Учеб. пособие для вузов — Мн.: Выш. школа, 1975. — 400 с.
34. Боровиков СМ., Латышев В.Г., Цырельчук Н.А. и др. Лабораторный практикум по курсу "Теоретические основы конструирования, технологии и надежности" для студентов специальности "Проектирование и производство радиоэлектронных средств". В 2-х частях. Ч. 2 /Под ред. СМ. Боровикова. — Мн.: БГУИР, 1997. — 65 с.
35. Цветков А.Ф. Вероятностное моделирование: Учеб. пособие. — Рязань: РРТИ, 1989. — 64 с.

36. Боровиков СМ. Стасюк Д.М. Статистическое моделирование параметров конструкций и технологических процессов. Учеб. пособие для студентов радиотехнических специальностей. — Мн.: БГУИР. 1997. — 46 с.

37. Сборник научных программ на Фортране. Вып. 1. Статистика/ Пер. с англ. (США). — М.: Статистика, 1974. — 316 с.

38. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

Библиотека БГУИР

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ.....	
Глава 1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПАРАМЕТРОВ. СИСТЕМНЫЕ МЕТОДЫ В КОНСТРУИРОВАНИИ И ТЕХНОЛОГИИ РЭУ	7
1.1.Выходные и первичные параметры.....	7
1.2.Конструкторские параметры.....	8
1.3.Единичные и комплексные показатели качества	11
1.4.Методы оценки уровня качества.....	14
1.5.Суть системного подхода к проектированию конструкций и технологии.....	15
Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ.....	18
2.1. Случайный характер параметров и их вероятностное описание.....	18
2.2. Модели законов распределения параметров.....	19
2.2.1.Общие сведения.....	19
2.2.2.Нормальная модель.....	20
2.2.3.Усеченная нормальная модель	22
2.2.4.Логарифмически нормальная модель.....	23
2.2.5.Равномерная модель	24
2.3. Пути вероятностного описания совокупности параметров	26
2.4.Корреляция параметров	27
2.5.Вероятностное описание зависимых параметров.....	29
2.6. Экспериментальное определение вероятностного описания	30
2.6.1.Основные задачи математической статистики.....	30
2.6.2.Требования, предъявляемые к оценкам параметров	31
2.6.3.Определение точечных оценок математических ожиданий и средних квадратических отклонений параметров	32
2.6.4.Определение интервальных оценок параметров	33
2.6.5.Определение требуемого числа наблюдений параметра.....	36

2.6.6. Оценка коэффициентов парной корреляции	37
2.6.7. Определение законов распределения параметров на основе опытных данных	41
2.6.8. Применение вероятностных сеток (бумаги) для проверки гипотез о законах распределения параметров	47
2.7. Применение вероятностного описания параметров для решения инженерных задач	50
2.7.1. Некоторые рекомендации по использованию моделей законов распределения параметров	50
2.7.2. Примеры применения моделей законов распределения параметров	53
Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ	56
3.1. Понятие моделей	56
3.1.1. Общие сведения о моделировании и моделях	56
3.1.2. Регрессионные модели	57
3.2. Метод наименьших квадратов	58
3.3. Нахождение приближающих математических моделей в виде элементарных функций	61
3.3.1. Линейная функция	61
3.3.2. Показательная функция	62
3.3.3. Степенная функция	62
3.3.4. Логарифмическая функция	63
3.3.5. Дробно-линейная функция	63
3.3.6. Гипербола	64
3.3.7. Дробно-рациональная функция	64
3.4. Способы получения математических моделей	64
3.5. Применение пассивного эксперимента для получения математических моделей	65
3.6. Получение математических моделей с помощью активных факторных экспериментов	68
3.6.1. Задачи теории планирования эксперимента	68
3.6.2. Основы теории планирования активных факторных экспериментов	69
3.6.3. Полный факторный эксперимент (ПФЭ)	70

3.7. Планирование ПФЭ и его выполнение.....	72
3.8. Статистическая обработка результатов ПФЭ.....	75
3.9. Дробный факторный эксперимент (ДФЭ).....	81
3.10. Планирование ДФЭ	82
3.11. Выполнение ДФЭ и обработка его результатов	86

Глава 4. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И СТАБИЛЬНОСТИ

ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	87
4.1. Серийнопригодность конструкции	87
4.2. Виды допусков, устанавливаемых на параметры	88
4.3. Точность и стабильность параметров.....	91
4.3.1. Точность выходных параметров	91
4.3.2. Стабильность выходных параметров.....	91
4.3.3. Описание точности и стабильности параметров элементов.....	92
4.4. Методы анализа точности выходных параметров.....	94
4.4.1. Уравнения производственных погрешностей выходных параметров.....	94
4.4.2. Методы определения производственных допусков на выходные параметры.....	95
4.5. Определение производственного допуска методом "min-max".....	96
4.6. Анализ точности выходных параметров вероятностным методом	99
4.6.1. Выбор критериев оценки точности	99
4.6.2. Расчетные соотношения, используемые для оценки точности выходных параметров.....	99
4.6.3. Примеры анализа точности выходного параметра	102
4.7. Анализ точности выходных параметров методом Монте-Карло	105
4.7.1. Назначение метода	105
4.7.2. Сущность метода.....	106
4.7.3. Метод Монте-Карло с использованием математического моделирования.....	107
4.7.4. Метод Монте-Карло с использованием физического моделирования.....	109
4.8. Анализ стабильности выходных параметров радиоэлектронных устройств и технических процессов.....	110

4.8.1. Стабильность выходных параметров и принцип ее оценки.....	110
4.8.2. Определение температурных допусков и допусков старения.....	111
4.9. Определение эксплуатационных допусков.....	117
4.9.1. Исходные предпосылки.....	117
4.9.2. Методика определения эксплуатационного допуска.....	117
4.9.3. Пример расчета эксплуатационного допуска.....	119
4.10. Обеспечение требований к точности выходных параметров.....	124
4.10.1. Разработка требований к точности выходных параметров.....	124
4.10.2. Обеспечение требований к точности выходных параметров.....	125
4.11. Способы определения коэффициентов влияния.....	126
4.11.1. Аналитические способы.....	126
4.11.2. Экспериментально-расчетный способ.....	129
Глава 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ, МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И НАДЕЖНОСТИ РЭУ.....	131
5.1. Причины обострения проблемы надежности РЭУ.....	131
5.2. Основные понятия и определения теории надежности.....	131
5.3. Понятие отказа. Классификация отказов.....	133
5.4. Схемы соединения элементов в устройстве с точки зрения надежности.....	134
5.5. Причины отказов РЭУ.....	135
5.6. Модели законов распределения времени до отказа.....	136
5.7. Показатели надежности РЭУ и их элементов.....	138
5.8. Вероятность безотказной работы и вероятность отказа.....	141
5.9. Интенсивность отказов.....	143
5.10. Нарботка на отказ (средняя наработка на отказ).....	145
5.11. Среднее время безотказной работы.....	146
5.12. Параметр потока отказов.....	147
5.13. Среднее время восстановления и вероятность восстановления.....	147
5.14. Эксплуатационные коэффициенты надежности.....	148

5.15. Надежность элементов РЭУ	150
5.15.1. Интенсивность отказов как основная характеристика надежности элементов	150
5.15.2. Коэффициенты электрической нагрузки элементов	152
5.15.3. Формулы для определения коэффициентов электрической нагрузки некоторых элементов	153
5.15.4. Краткая характеристика надежности элементов	155
5.15.5. Учет влияния на надежность элементов электрического режима и условий работы	156
5.16. Оценка показателей надежности проектируемых РЭУ (основные расчетные соотношения)	158
5.17. Ориентированный (приближенный) расчет показателей надежности проектируемых РЭУ	159
5.18. Расчет показателей надежности проектируемых РЭУ с учетом коэффициентов электрической нагрузки и условий работы элементов в составе устройств	162
5.19. Примеры оценки показателей надежности проектируемого РЭУ	164
5.20. Расчет показателей надежности при разных законах распределения времени до отказа элементов	172
5.21. Параметрическая надежность РЭУ	176
5.21.1. Параметрическая надежность и функционирование РЭУ	176
5.21.2. Причины, обуславливающие появление постепенных отказов	176
5.22. Оценка параметрической надежности РЭУ на этапе проектирования	177
5.23. Использование вероятностных моделей старения параметров РЭУ и элементов	188
5.24. Пути обеспечения параметрической надежности РЭУ на этапе проектирования	191
5.25. Методы повышения надежности РЭУ	193
5.25.1. Понятие эксплуатационной надежности РЭУ	193
5.25.2. Общая характеристика методов повышения надежности РЭУ	193

5.26. Резервирование как метод повышения надежности РЭУ	194
5.27. Характеристика постоянного резервирования	196
5.28. Оценка показателей безотказности устройства при наличии постоянного резервирования	197
5.29. Характеристика резервирования замещением	201
5.30. Анализ безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением (нагруженный резерв)	203
5.31. Анализ безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением с облегченным режимом работы резервных элементов	205
5.32. Анализ безотказности РЭУ при наличии резервирования замещением с ненагруженным режимом работы резервных элементов	207
5.33. Теоретическое обоснование тренировки как метода снижения интенсивности отказов элементов	208
Глава 6. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И РЭУ	212
6.1. Понятие прогнозирования и его классификация	212
6.2. Приемы выполнения эвристического прогнозирования	213
6.3. Характеристика индивидуального прогнозирования с использованием методов экстраполяции	214
6.4. Приемы решения задач индивидуального прогнозирования с использованием методов экстраполяции	216
6.5. Общая характеристика индивидуального прогнозирования распознаванием образов	218
6.6. Характеристики ошибок прогнозирования в методах индивидуального прогнозирования распознаванием образов	220
6.7. Этапы решения задач индивидуального прогнозирования распознаванием образов	220
6.7.1. Обучающий эксперимент и обучение	220
6.7.2. Выбор порога разделения классов (экзамен)	222

6.7.3. Оценка вероятностей правильных и ошибочных решений.....	224
6.7.4. Прогнозирование однотипных изделий, не участвовавших в обучающем эксперименте.....	225
6.8. Рекомендации по выбору информативных параметров (признаков) для элементов РЭУ.....	225
6.9. Методы построения прогнозирующих правил.....	226
6.10. Прогнозирование методом пороговой логики.....	227
6.11. Пример построения прогнозирующего правила.....	231
Глава 7. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В КОНСТРУИРОВАНИИ И ТЕХНОЛОГИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ.....	235
7.1. Понятие задач оптимизации.....	235
7.2. Общий порядок решения задач оптимизации.....	236
7.3. Способы построения целевой функции.....	238
7.4. Краткая характеристика математических методов решения задач оптимизации.....	240
7.5. Метод динамического программирования.....	241
7.6. Алгоритм оптимизации методом случайного поиска.....	244
7.7. Примеры решения задач оптимизации.....	248
Глава 8. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ РЭУ.....	255
8.1. Понятие и характеристики систем массового обслуживания.....	255
8.2. Поток событий (заявок) и их математическое описание.....	255
8.3. Виды СМО в технологии РЭУ.....	256
8.4. Математическое описание СМО с отказом.....	257
8.5. Математическое описание "чистой" СМО с ожиданием.....	259
8.6. Математическое описание СМО смешанного типа с ограничением длины очереди.....	261
Глава 9. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКЦИЙ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	264
9.1. Статистическое моделирование как метод исследования параметров конструкций и технологических процессов.....	264

9.2. Основы моделирования случайных параметров	265
9.3. Моделирование случайных чисел с нормальным распределением.....	266
9.4. Методы получения случайных чисел с любым законом распределения	268
9.5. Моделирование дискретных случайных величин	271
9.6. Моделирование случайных чисел с биномиальным распределением	272
9.7. Моделирование случайных чисел с распределением Пуассона.....	273
9.8. Моделирование коррелированных случайных параметров с нормальными распределениями	274
9.9. Получение коррелированных случайных параметров с любыми законами распределения	275
9.10. Исследование выходных параметров РЭУ и технологических процессов методом Монте-Карло.....	283
9.11. Моделирование производственных погрешностей параметров РЭУ массового производства.....	287
9.12. Моделирование надежности РЭУ	291
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	295
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Статистические таблицы	296
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Интенсивность отказов элементов.....	307
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Значение поправочных коэффициентов.....	311
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Средние значения случайного времени восстановления элементов и функциональных частей РЭУ.....	316
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Шаблоны для построения вероятностных сеток и вероятностные сетки (бумага) некоторых законов распределения.....	317
ЛИТЕРАТУРА.....	324