Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия для всех специальностей,
закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2017

УДК [514.74+512.64](075)
ББК (22.151.5+22.143)я73
А64

А в т о р ы:

В. В. Цегельник, Е. А. Баркова, Н. И. Кобринец,
В. М. Метельский, О. А. Мокеева, Т. С. Степанова

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа
Белорусского государственного университета
(протокол №1 от 30.08.2016);

профессор кафедры высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»,
доктор физико-математических наук, профессор Н. С. Коваленко

А64 **Аналитическая** геометрия и линейная алгебра. Введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной : пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 198 с. : ил.
ISBN 978-985-543-342-3.

Пособие включает практические занятия по учебной дисциплине «Математика» по разделам «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной». Изложены способы решения характерных и типовых задач. Приведены дополнительные задания с ответами. Предложены задачи для самостоятельного решения и контрольные работы.

УДК [514.74+512.64](075)
ББК (22.151.5+22.143)я73

ISBN 978-985-543-342-3

Занятия 1–2

Многочлены. Функции и их графики. Метод математической индукции

Пример 1. Найти числа α, β и γ, если многочлен $x^3 + 6x^2 + \alpha x + \beta$ является кубом двучлена $x + \gamma$.

Δ Разложим куб суммы:

$$(x+\gamma)^3 = x^3 + 3x^2\gamma + 3x\gamma^2 + \gamma^3.$$

Используя определение тождественного равенства двух многочленов, получаем систему

$$\begin{cases} 3\gamma = 6, \\ \alpha = 3\gamma^2, \\ \beta = \gamma^3, \end{cases}$$

откуда $\gamma = 2, \alpha = 12, \beta = 8$. ▲

Пример 2. Используя метод неопределенных коэффициентов, разделить многочлен $2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1$ на многочлен $x^2 - x$.

Δ Ищем частное от деления многочленов в виде многочлена $q_2(x) = 2x^2 + c_1x + c_2$, а остаток в виде многочлена $r_1(x) = d_1x + d_2$. Имеем тождественное равенство $2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1 = (2x^2 + c_1x + c_2)(x^2 - x) + d_1x + d_2$.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1 = 2x^4 + (c_1 - 2)\,x^3 + (-c_1 + c_2)\,x^2 + (d_1 - c_2)\,x + d_2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему $\begin{cases} c_1 - 2 = 1, \\ -c_1 + c_2 = -5, \\ d_1 - c_2 = -1, \\ d_2 = 1, \end{cases}$ откуда $c_1 = 3, c_2 = -2, d_1 = -3, d_2 = 1$.

Следовательно,

$$2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1 = (2x^2 + 3x - 2)(x^2 - x) - 3x + 1,$$

или

$$\frac{2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 2x^2 + 3x - 2 + \frac{-3x + 1}{x^2 - x}. \ ▲$$

Пример 3. Разделить «уголком» многочлен $-3x^5 + 5x^4 + 3x - 1$ на многочлен $-x^2 + x + 1$.

$$\Delta \qquad \begin{array}{l|l} -\,\begin{array}{l} -3x^5+5x^4+3x-1 \\ \underline{-3x^5+3x^4+3x^3} \end{array} & \;\underline{-x^2+x+1} \\ \quad -\,\begin{array}{l} 2x^4-3x^3+3x-1 \\ \underline{2x^4-2x^3-2x^2} \end{array} & \;3x^3-2x^2+x-1 \\ \qquad -\,\begin{array}{l} -x^3+2x^2+3x-1 \\ \underline{-x^3+\;\;x^2+\;\;x} \end{array} & \\ \qquad\quad -\,\begin{array}{l} x^2+2x-1 \\ \underline{x^2-\;\;x-1} \end{array} & \\ \qquad\qquad\qquad 3x & \end{array}$$

Итак, $-3x^5+5x^4+3x-1=(3x^3-2x^2+x-1)(-x^2+x+1)+3x$,

или $\dfrac{-3x^5+5x^4+3x-1}{-x^2+x+1}=3x^3-2x^2+x-1+\dfrac{3x}{-x^2+x+1}$. ▲

Пример 4. Разложить на множители (найти корни многочлена):

а) $P_4(x)=5x^4+9x^3-2x^2-4x-8$; б) $P_3(x)=2x^3+x^2-4x-2$.

Δ а) Будем искать целые корни. Целые корни, если они существуют, находятся среди чисел $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$. Поскольку $P_4(1)=0$, то $P_4(x)$ делится на $(x-1)$.

$$\begin{array}{l|l} -\,\begin{array}{l} 5x^4+9x^3-2x^2-4x-8 \\ \underline{5x^4-5x^3} \end{array} & \;\underline{x-1} \\ \quad -\,\begin{array}{l} 14x^3-2x^2-4x-8 \\ \underline{14x^3-14x^2} \end{array} & \;5x^3+14x^2+12x+8 \\ \qquad -\,\begin{array}{l} 12x^2-4x-8 \\ \underline{12x^2-12x} \end{array} & \\ \qquad\quad -\,\begin{array}{l} 8x-8 \\ \underline{8x-8} \end{array} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Следовательно,

$5x^4+9x^3-2x^2-4x-8=(x-1)(5x^3+14x^2+12x+8)=(x-1)\cdot P_3(x)$.

Так как $P_3(-2)=0$, то многочлен $P_3(x)$ делится на $(x+2)$.

$$\begin{array}{l|l} -\,\begin{array}{l} 5x^3+14x^2+12x+8 \\ \underline{5x^3+10x^2} \end{array} & \;\underline{x+2} \\ \quad -\,\begin{array}{l} 4x^2+12x+8 \\ \underline{4x^2+\;\;8x} \end{array} & \;5x^2+4x+4 \\ \qquad -\,\begin{array}{l} 4x+8 \\ \underline{4x+8} \end{array} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = (x-1)(x+2)(5x^2 + 4x + 4).$$

Квадратный трехчлен $5x^2 + 4x + 4$ имеет $D < 0$, поэтому не разлагается на множители. Корни многочлена $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. ▲

б) Будем искать рациональные корни. Рациональные корни, если они существуют, находятся среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$. Поскольку $P_3\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, то $P_3(x)$ делится на $x + \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} 2x^3 + x^2 - 4x - 2 \\ 2x^3 + x^2 \end{array} & x + \frac{1}{2} \\ \cline{1-1} \cline{2-2} \quad -\begin{array}{r} -4x - 2 \\ -4x - 2 \end{array} & 2x^2 - 4 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Так как $2x^2 - 4 = 2(x^2 - 2) = 2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$, то

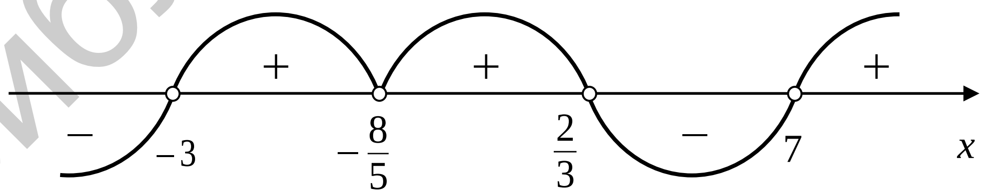
$$2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Корни многочлена $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = -\sqrt{2},\ x_3 = \sqrt{2}$. ▲

Пример 5. Решить неравенство $(x+3)(3x-2)^5(7-x)^3(5x+8)^2 < 0$.

Δ Умножая данное неравенство на $-\frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{5^2}$, получим равносильное ему неравенство $(x+3)\left(x + \frac{8}{5}\right)^2\left(x - \frac{2}{3}\right)^5 (x-7)^3 > 0$.

Для решения применим обобщенный метод интервалов.

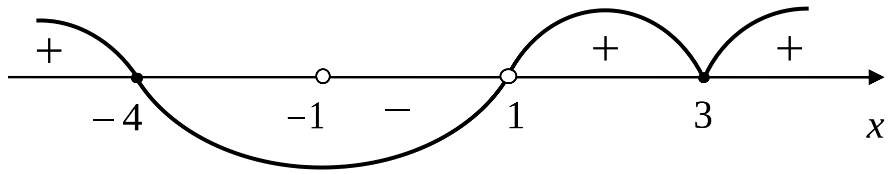


$$x \in \left(-3; -\frac{8}{5}\right) \cup \left(-\frac{8}{5};\ \frac{2}{3}\right) \cup (7; +\infty).\ ▲$$

Пример 6. Решить неравенство $\dfrac{(x^2 + 5x + 4)(x-3)^2}{1 - x^2} \ge 0$.

Δ Произведя эквивалентные преобразования, получаем

$$\frac{(x^2+5x+4)(x-3)^2}{1-x^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)(x-3)^2}{(x-1)(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x-1} \le 0. \\ x \ne -1. \end{cases}$$



$x \in [-4; -1) \cup (-1; 1) \cup \{3\}$. ▲

Пример 7. Решить неравенство $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} \le \dfrac{1-2x}{1+x^3}$.

Δ Приведя к общему знаменателю и умножив обе части неравенства на знакоположительную функцию $f(x) = x^2 - x + 1$, получим

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \le \frac{1-2x}{1+x^3} \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1-2(x+1)-1+2x}{(x+1)(x^2-x+1)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \le 0, \\ x \ne -1. \end{cases}$$

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1;\ 2]$. ▲

Пример 8. Решить уравнение $x^2 - 2\sqrt{x^2} - 3 = 0$.

Δ Так как $x^2 = |x|^2$ и $\sqrt{x^2} = |x|$, то введя новую переменную $|x| = y,\ y \ge 0$, получим уравнение $y^2 - 2y - 3 = 0$, корни которого $\left[\begin{array}{l} y_1 = 3, \\ y_2 = -1. \end{array}\right.$ Следовательно, $|x| = 3,\ x = \pm 3$. ▲

Пример 9. Решить уравнение $x^2 - 2x - 3 = |3x - 3|$.

$$\Delta \quad x^2 - 2x - 3 = |3x-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x-3 = 3x-3, \\ x \ge 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x-3 = -3x+3, \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x = 0, \\ x \ge 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x-6 = 0, \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 5, \\ x \ge 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = -3,\ x_4 = 2, \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow\ x \in \{-3;\ 5\}. \text{ ▲}$$

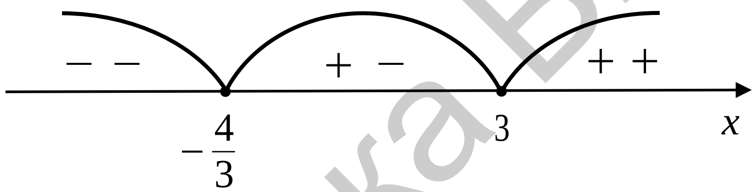
Пример 10. Решить уравнение $3\left|\,x^2-2x-1\,\right|=5x+1$.

$$\Delta \qquad 3\left|\,x^2-2x-1\,\right|=5x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+1\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3\left|\,x^2-2x-1\,\right|=5x+1, \\ 3\left|\,x^2-2x-1\,\right|=-5x-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} 3x^2-11x-4=0, \\ 3x^2-x-2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{5}, \\ \left[\; x\in\left\{-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};1;4\right\}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{1;4\}. \ \blacktriangle$$

Пример 11. Решить уравнение $\left|\,3x+4\,\right|+2\left|\,x-3\,\right|=16$.

Δ Отметим на числовой оси точки $x=-\dfrac{4}{3}$ и $x=3$, в которых подмодульные выражения обращаются в нуль. Определим знаки подмодульных выражений на трех образовавшихся промежутках



Решим уравнение на каждом из полученных промежутков.

1) $\begin{cases} x<-\dfrac{4}{3}, \\ -3x-4+2(-x+3)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{4}{3}, \\ -5x=14 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{14}{5}.$

2) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}\le x\le 3, \\ 3x+4+2(-x+3)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{4}{3}\le x\le 3, \\ x=6. \end{cases} \quad \varnothing.$

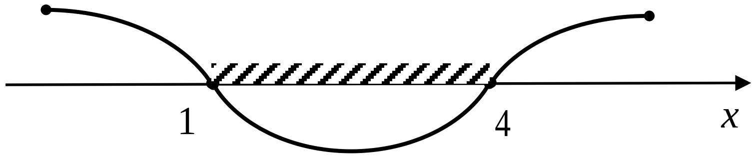
3) $\begin{cases} x>3, \\ 3x+4+2(x-3)=16 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{18}{5}.$

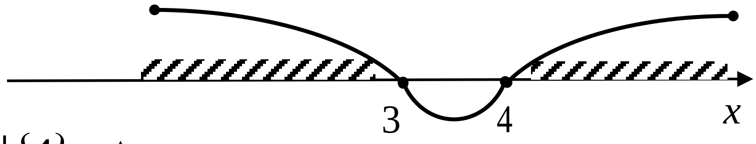
$x\in\left\{-\dfrac{14}{5};\dfrac{18}{5}\right\}$. $\blacktriangle$

Пример 12. Решить неравенство $\left|\,x^2-6x+8\,\right|\le 4-x$.

$$\Delta \quad \left|\,x^2-6x+8\,\right|\le 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+8\le 4-x, \\ x^2-6x+8\ge x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4\le 0, \\ x^2-7x+12\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-1) \le 0, \\ (x-3)(x-4) \ge 0. \end{cases}$$

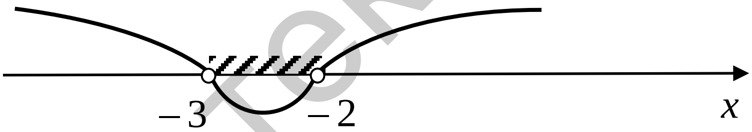




$x \in [1;\ 3] \cup \{4\}$. ▲

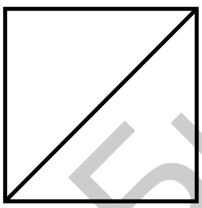
Пример 13. Решить неравенство $|\, x^2 + 4x + 3 \,| > x + 3$.

Δ $|\, x^2 + 4x + 3 \,| > x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 > x + 3, \\ x^2 + 4x + 3 < -x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x+3) > 0, \\ (x+3)(x+2) < 0. \end{array}\right.$



$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$. ▲

Пример 14. Выразить объем цилиндра, вписанного в шар радиусом R, как функцию его высоты h. Найти область определения этой функции.



Δ Объем V цилиндра с радиусом основания r равен $\pi r^2 h$. По теореме Пифагора $h^2 + 4r^2 = 4R^2$, следовательно, $V(h) = \pi h \left(R^2 - \dfrac{h^2}{4} \right)$. Из геометрического смысла задачи следует, что $0 < h < 2R$. ▲

Пример 15. Найти область определения функции $y = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2, \\ \sin x, & x > 2. \end{cases}$

Δ Очевидно, $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. ▲

Пример 16. Найти область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{x-5}}{14x - 48 - x^2}}$.

Δ Область определения функции определяется совокупностью систем:

$$\begin{cases} x-5>0, \\ 14x-48-x^2>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-5=0, \\ 14x-48-x^2 \neq 0. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x-5>0, \\ 14x-48-x^2>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5, \\ (x-6)(x-8)<0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (6;8).$

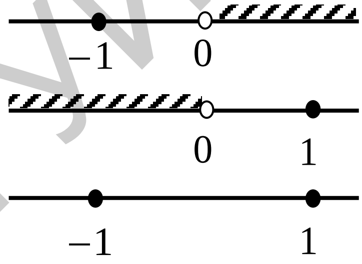
2) $\begin{cases} x-5=0, \\ 14x-48-x^2 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x=5. \quad x \in \{5\} \cup (6;8)$. ▲

Пример 17. Найти область определения функции $y = \log_3 \log_4 \log_5 x$.

Δ $\log_4 \log_5 x > 0 \Leftrightarrow \log_5 x > 1 \Leftrightarrow x > 5, \; x \in (5;+\infty)$. ▲

Пример 18. Найти область определения функции $y = \arcsin \dfrac{1+x^2}{2x}$.

$$\Delta \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{2x} \geq -1, \\ \dfrac{1+x^2}{2x} \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{2x} \geq 0, \\ \dfrac{x^2-2x+1}{2x} \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{x} \geq 0, \\ \dfrac{(x-1)^2}{x} \leq 0. \end{cases}$$



$x \in \{-1;1\}$, т. е. область определения функции состоит из двух точек: $x=-1$ и $x=1$. ▲

Пример 19. Найти область значений функции $y = 3x^2+6x+7$.

Δ $3x^2+6x+7 = 3(x+1)^2+4$. Отсюда следует, что наименьшее значение данной функции равно 4, и принимается это значение в точке $x=-1$. Наибольшего значения функция не имеет. $y \in [4;+\infty)$. ▲

Пример 20. Найти область значений функции $y = 1+\cos 2x + \sin x + \sin^2 x$.

Δ $1+\cos 2x+\sin x+\sin^2 x = 2-2\sin^2 x+\sin x+\sin^2 x = 2+\sin x-\sin^2 x =$
$= -\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$. Отсюда следует, что наименьшее значение данной функции равно 0 и оно достигается в тех точках x, где $\sin x = -1$. Наибольшее значение функции равно $\dfrac{9}{4}$ и оно достигается в тех точках, где $\sin x = \dfrac{1}{2}$, $y \in \left[0; \dfrac{9}{4}\right]$.

Пример 21. Найти область значений функции $y = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}$.

Δ Для каждого действительного a решим уравнение

$$\frac{x^2-x+2}{x^2+1} = a \Leftrightarrow (a-1)\,x^2+x+(a-2)=0.$$

При $a=1$ получаем, что $x=1$, и тем самым $y(1)=1$. При $a \neq 1$

$D=-4a^2+12a-7\ge 0$, откуда находим, что $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}\le a\le\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$.

$y\in\left[\dfrac{3-\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$. ▲

Пример 22. Доказать, что функция $y=2^{\cos^2 x}+3\sin x$ ограничена на множестве R.

Δ $\left|2^{\cos^2 x}+3\sin x\right|\le\left|2^{\cos^2 x}\right|+3\left|\sin x\right|\le 2+3=5$. Геометрически это означает, что график функции расположен внутри полосы $y=-5$ и $y=5$. ▲

Пример 23. Доказать, что функция $y=x\sin x$ не является ограниченной на всей числовой прямой.

Δ Предположим, что функция $y=x\sin x$ ограничена на множестве всех действительных чисел. Тогда существует такое натуральное число c, что для любого $x\in\boldsymbol{R}$ выполняется $|x\sin x|\le c$. Положим $x=x_0=\left(c+\dfrac{1}{2}\right)\pi$.

$|x_0\sin x_0|=\pi\left(c+\dfrac{1}{2}\right)\left|\sin\left(\pi c+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\pi\left(c+\dfrac{1}{2}\right)>c$, что противоречит предположению. Таким образом, функция $y=x\sin x$ не является ограниченной на всей числовой прямой. ▲

Пример 24. Доказать, что функция $y=x^2$ не является ни убывающей, ни возрастающей на множестве R.

Δ Пусть $x_1=-1, x_2=1$. Тогда $x_1<x_2$, но $y(x_1)=y(x_2)=1$. Поскольку не выполняются и неравенство $y(x_1)<y(x_2)$, и неравенство $y(x_1)>y(x_2)$, то данная функция не является ни возрастающей, ни убывающей на всей числовой оси. ▲

Пример 25. Является ли периодической функция $y=\sin\lg\sqrt{x+3}$?

Δ Если точка x_0 принадлежит области определения периодической функции $f(x)$ с периодом T, то ее области определения принадлежат и все точки x_0+nT, где n – любое целое число. Следовательно, область определения периодической функции содержит положительные и отрицательные числа, сколь угодно большие по абсолютной величине. Так как это условие не выполняется $(x>-3)$, данная функция не является периодической. ▲

Пример 26. Найти период функции $y=|\cos x|$.

Δ $|\cos x|=\sqrt{\cos^2 x}=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$. Функция $y=\cos 2x$ имеет период π, поэтому и заданная функция имеет тот же период. ▲

Пример 27. Суперпозицией каких простейших элементарных функций может быть получена функция $y=\cos^2 x^2$?

Δ Функция $y=f(x)=\cos^2 x^2$ представляется в виде $y=\varphi(\psi(u(z)))$, где

$z = u(x) = x^2$, $t = \psi(z) = \cos z$, $y = \varphi(t) = t^2$. ▲

Пример 28. Найти $\varphi(\psi(x))$ и $\psi(\varphi(x))$, если $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$.

Δ $\varphi(\psi(x)) = (\psi(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$, $\psi(\varphi(x)) = 2^{\varphi(x)} = 2^{x^2}$. ▲

Пример 29. Исследовать на монотонность следующую функцию:

$y = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x + 3)$.

Δ Пусть $z = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$, тогда $y = \operatorname{arctg} z$. При $x \geq 1$ функция z возрастает, а при $x \leq 1$ – убывает. Исходная функция возрастает при $x \geq 1$ как суперпозиция двух монотонно возрастающих функций. Исходная функция монотонно убывает при $x \leq 1$ как суперпозиция монотонно убывающей функции $z = (x-1)^2 + 2$ и монотонно возрастающей функции $y = \operatorname{arctg} z$. Таким образом, функция $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x + 3)$ является монотонно убывающей на промежутке $(-\infty; 1]$ и монотонно возрастающей на промежутке $(1; +\infty]$. ▲

Пример 30. Исследовать следующие функции на четность:

а) $f(x) = \sin x + \cos x$; б) $f(x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x}$; в) $f(x) = c$.

Δ а) $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, $f(-\pi/4) = 0$. Функция $f(x) = \sin x + \cos x$ является функцией общего вида.

б) $f(x) = \lg \dfrac{1-x}{1+x}$. Область определения функции симметрична относительно начала координат $x \in (-1; 1)$. При этом $f(-x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x} = -\lg \dfrac{1-x}{1+x} = -f(x)$.

Следовательно, функция нечетная.

в) $f(x) = c$. Область определения симметрична относительно начала координат $x \in (-\infty; +\infty)$. При этом $f(-x) = c$. Следовательно, функция четная. ▲

Пример 31. Найти функции, обратные данным:

а) $y = \lg(x+2)$; б) $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \leq 1, \\ -x + 3, & x > 1. \end{cases}$

Δ а) Областью определения монотонно возрастающей функции $y = \lg(x+2)$ являются $x > -2$. Пропотенцировав заданное равенство, получим, что $x + 2 = 10^y$, т. е. обратная функция имеет вид $y = 10^x - 2$.

б) При $x \leq 1$ функция $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ монотонно убывает $(y \geq 2)$. Решив квадратное уравнение $x^2 - 2x + 3 = y$ относительно x $(x \leq 1)$ получим единственный корень $x = 1 - \sqrt{y-2}$. Обратная функция в этом случае имеет вид $y = 1 - \sqrt{x-2}$ $(x \geq 2)$. При $x > 1$ функция $y = -x + 3$ монотонно убывает $(y < 2)$. Очевидно, она имеет обратную функцию $x = -y + 3$, т. е. $y = -x + 3$. Таким образом, функцией, обратной данной является следующая:

$$y=\begin{cases}1-\sqrt{x-2}, & x\ge 2,\\ -x+3, & x<2.\end{cases}\quad ▲$$

Пример 32. Построить график функции $y=E\,(x)$, $x\in R$ (целая часть x), где $E\,(x)$ – наибольшее целое число, не превосходящее x.

Δ На каждом промежутке $[n;\ n+1)$, где $n\in Z$, данная функция постоянна и равна n (рис. 1).

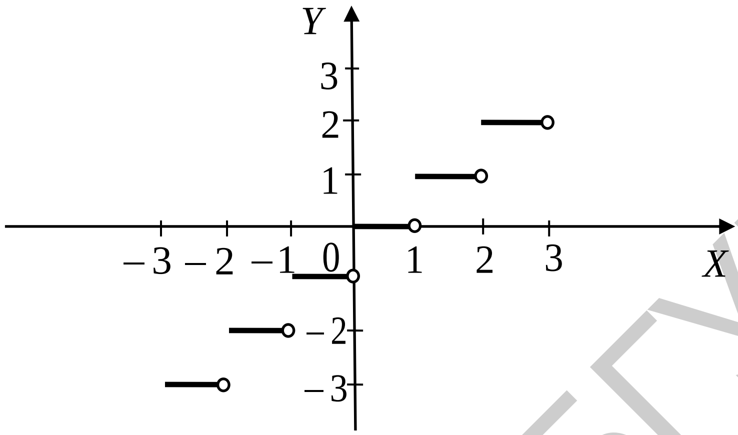


Рис. 1

Пример 33. Построить график функции $y=\cos\left(2|x|-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Δ 1) $y=\cos x\to y=\cos 2x$ – сжатие к оси ординат в два раза;

2) $y=\cos 2x\to y=\cos\left(2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ – параллельный перенос вдоль оси абсцисс в положительном направлении на $\dfrac{\pi}{6}$ единиц;

3) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\to y=\cos\left(2|x|-\dfrac{\pi}{3}\right)$ – симметрия относительно оси ординат части графика, лежащей в полуплоскости $x\ge 0$ (рис. 2).

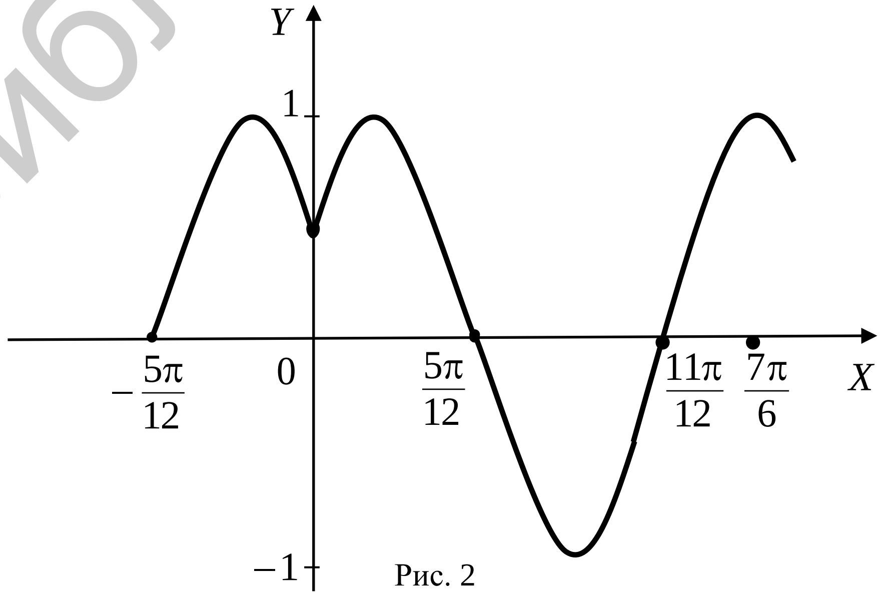


Рис. 2

Пример 34. Построить график функции $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$.

Δ Для построения графика данной функции рассмотрим четыре промежутка, на которые ось OX разбивают точки $1, 2$ и 3. Тогда

$$y = \begin{cases} -3x+6, & \text{при} \quad -\infty < x \le 1, \\ -x+4, & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ x, & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ 3x-6, & \text{при} \quad 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

Построим на каждом промежутке график соответствующей линейной функции (рис. 3).

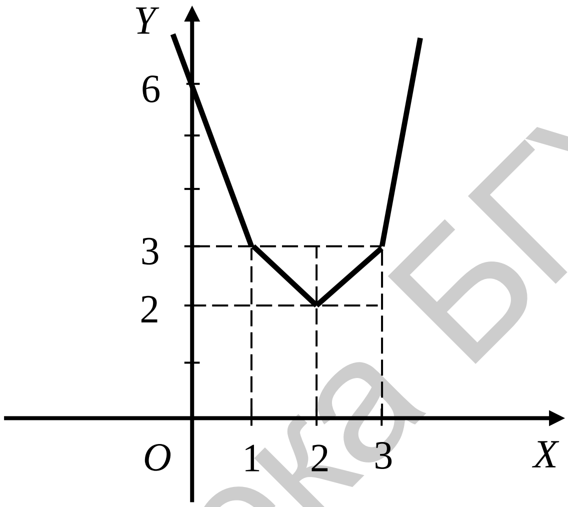


Рис. 3

▲

Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого натурального числа n, начиная с n_0, достаточно доказать, что:

а) это утверждение верно для $n = n_0$;

б) если данное утверждение справедливо для некоторого натурального числа $k \ge n_0$, то оно верно также и для следующего натурального числа $k+1$. Такой метод доказательства называется методом математической индукции.

Пример 35. Вывести формулу для суммы $S_n = -1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^n(2n-1)$.

Δ Имеем $S_1 = -1,\ S_2 = 2,\ S_3 = -3,\ S_4 = 4$. Рассмотренные частные случаи позволяют высказать предположение, что $S_n = (-1)^n n$.

а) Истинность равенства при $n = 1$ установлена.

б) Предположим, что $S_k = -1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^k(2k-1) = (-1)^k k$. Тогда $S_{k+1} = S_k + (-1)^{k+1}(2k+1) = (-1)^k k + (-1)^{k+1}(2k+1) = (-1)^{k+1}(-k+2k+1) =$
$= (-1)^{k+1}(k+1)$. По принципу математической индукции заключаем, что наше предположение верно для любых $n \in \boldsymbol{N}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Методом неопределенных коэффициентов и деления «уголком» найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

а) $P_4(x)=2x^4-3x^3-x^2+5x-4,\ \ Q_1(x)=x-3$;

б) $P_4(x)=3x^4-x^3+4x^2-5x-5,\ \ Q_2(x)=x^2-2x+2.$

Ответ: а) $P_4(x)=(x-3)(2x^3+3x^2+8x+29)+83$;
б) $P_4(x)=(x^2-2x+2)(3x^2+5x+8)+x-21$.

2. Разложить многочлен $P(x)$ на множители:

а) $P(x)=x^3+4x^2+5x+2$;

б) $P(x)=2x^4-3x^3-7x^2+6x+8$.

Ответ: а) $P(x)=(x+1)^2(x+2)$;
б) $P(x)=2(x+1)(x-2)\cdot\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{4}\right)$.

3. Решить неравенства:

а) $\frac{3}{x^2+2x+4}<1$; б) $\frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+3}\le x$; в) $\frac{9-x^2}{3x+1}\ge\frac{2}{x}$.

Ответ: а) $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; б) $x\in(-3;-1)\cup[1;+\infty)$;
в) $x\in(-\infty;-2]\cup\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)\cup\{1\}$.

4. Решить уравнения:

а) $x^2+2x+3\frac{|x-1|}{x-1}=0$; б) $3\cdot|x^2+4x+2|=5x+16$;
в) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

Ответ: а) $x=-3$; б) $x\in\{-2;1\}$; в) $x\in[1;\ 2]\cup\{5\}$.

5. Решить неравенства:

а) $|x-6|<x^2-5x+9$; б) $3|x-1|>7-x^2$; в) $\frac{|24-2x-x^2|}{x}\le x$.

Ответ: а) $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$;
в) $x\in[-4;0)\cup[3;12]$.

6. Найти области определения функций:

а) $y=\sqrt{\lg\sin x}$; б) $y=\sqrt{\arcsin\log_2 x}$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; б) $1\le x\le 2$.

7. Найти области значений функций:

а) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; б) $f(x)=16\log\frac{1}{16}\frac{\sin x+\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: а) $E(f)=(-\infty;1)\bigcup(1;+\infty)$; б) $E(f)=[-8;-4]$.

8. Исследовать функции на четность:

а) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$; б) $f(x)=2\arccos(-x)$.

Ответ: а) нечетная; б) общего вида.

9. Доказать ограниченность функций:

а) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $f(x)=2^{5-4x-x^2}$.

10. Исследовать на монотонность функции:

а) $f(x)=x^3+3x+5$; б) $f(x)=\cos\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Ответ: а) строго возрастает на $(-\infty;+\infty)$; б) строго возрастает на $(-\infty;0]$, строго убывает на $[0;+\infty)$.

11. Найти период и главный период функции Дирихле:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x-\text{рационально},\\ 0, & x-\text{иррационально}.\end{cases}$$

Ответ: периодом является любое рациональное число, главного периода нет.

12. В одной системе координат построить графики функций:

а) $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$, $f(x)=x^4$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

13. Построить графики функций и уравнений:

а) $y=f(x)$; б) $y=|f(x)|$; в) $y=f(|x|)$; г) $|y|=f(x)$; д) $y=|f(|x|)|$; е) $|y|=f(|x|)$; ж) $|y|=|f(x)|$; з) $|y|=|f(|x|)|$, если $f(x)=3-x$.

14. Доказать методом математической индукции:

а) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$; б) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Занятия 3–4

Матрицы и определители

Пример 1. Найти матрицу X, если: $2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix}$.

Δ $X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -13\\ -2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$. ▲

Пример 2. Пусть $A=\begin{pmatrix}3&6\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Найти AB, BX, B^TBX, AY, A^TAY. Показать, что матрица A является корнем многочлена $f(x)=x^2-4x-9$.

Δ 1) $AB=\begin{pmatrix}3&6\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6&3&12\\2&-1&5&5\end{pmatrix}$;

2) $BX=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$;

3) $B^TBX=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\3&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&1&-1\\3&1&10&5\\2&-1&5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-4\end{pmatrix}$.

Если учитывать 2), то $B^TBX=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\3&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-4\end{pmatrix}$;

4) $AY=\begin{pmatrix}3&6\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$;

5) $A^TAY=\begin{pmatrix}3&2\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&20\\20&37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-17\end{pmatrix}$.

Учитывая 4), то $A^TAY=\begin{pmatrix}3&2\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-17\end{pmatrix}$;

6) $f(A)=\begin{pmatrix}3&6\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6\\2&1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}3&6\\2&1\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&24\\8&13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&24\\8&4\end{pmatrix}-$

$-\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. ▲

Пример 3. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot A^T$ и $A^T\cdot A$.

$$\Delta \quad A\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&3\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&4\\5&14&12\\4&12&16\end{pmatrix},$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&3\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&7\\-2&1&-3\\7&-3&26\end{pmatrix}.\ \blacktriangle$$

Пример 4. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&4&-1\\2&3&0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}6&5&7\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$.

Покажите, что $AX=BX$, хотя $A\neq B$.

$$\Delta \quad A\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&7\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&11&19\\5&5&10\\18&16&26\end{pmatrix},$$

$$B\cdot X=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&4&-1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&7\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&11&19\\5&5&10\\18&16&26\end{pmatrix}.\ \blacktriangle$$

Пример 5. Вычислить $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&2\\2&2&3\\3&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. **Ответ:** $\begin{pmatrix}5\\15\\25\\35\end{pmatrix}$.

Пример 6. Пусть $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\a_{n_1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$. Найти размерность матрицы $C=X^TAX$. **Ответ:** $C_{1\times1}$ – это число.

Пример 7. Пусть $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$. Найти X^TAX.

$$\Delta \quad (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=$$

$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \;\; a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \;\; a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2(a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3). \ ▲$$

Пример 8. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$.

Δ $x^2+x+4x+4=0,\ x^2+5x+4=0,\ x_1=-1,\ x_2=-4$. ▲

Пример 9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$: а) по определению; б) по правилу Саррюса; в) разложив его по второму столбцу; г) приведя его к треугольному виду.

Δ а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=15+70+2=87$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=5+40+6-4+10+30=87$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=70+1+16=87$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -8 & 7 \end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 87 \end{vmatrix}=87$. ▲

Пример 10. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 2 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 27 \\ -9 & 3 & 0 \\ 15 & 6 & -3 \end{vmatrix}$.

Δ а) $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 2 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -\dfrac{3}{2}\begin{vmatrix} 2 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$;

б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 27 \\ -9 & 3 & 0 \\ 15 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 3^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27\left(1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\right) =$

$= 27(-1-99) = -2700$. ▲

Пример 11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$.

Δ $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 15323 & 37527 \\ 0 & 23735 & 17417 \\ 0 & 23737 & 17418 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 23735 & 17417 \\ 23737 & 17418 \end{vmatrix} =$

$= 2\begin{vmatrix} 23735 & 17417 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -22198$. ▲

Пример 12. Доказать тождество $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Δ $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & 2a_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & 2a_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_1 & c_1 \\ a_2 & 2a_2 & c_2 \\ a_3 & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix} +$

$+\begin{vmatrix} b_1x & 2a_1 & c_1 \\ b_2x & 2a_2 & c_2 \\ b_3x & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. ▲

Пример 13. Вычислить определитель, предварительно упростив его:

$\begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}$.

Δ $\begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} + a^2\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -x^2+y^2 & y-x & 0 \\ z^2-x^2 & z-x & 0 \end{vmatrix} =$

$= a\,((y^2-x^2)(z-x)-(z^2-x^2)(y-x) = a(y-x)(z-x)(y-z)$. ▲

Пример 14. Вычислить определитель путем преобразования его к треугольному виду: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\Delta \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} (2) \to (2) - 2(1) \\ (3) \to (3) - 3(1) \\ (4) \to (4) - 4(1) \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} (3) \to (3) - 2(2) \\ (4) \to (4) - 7(2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} \sim (4) \to (4) + (3) \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} =$$

$= 1(-1)(-4)\,40 = 160$. ▲

Пример 15. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\Delta \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -8 & 6 & -1 \\ 2 & 9 & 1 & -6 \\ 1 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & -20 & 3 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -15 & -8 \\ 1 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -9 & -20 & 3 \\ -14 & -2 & -2 \\ -3 & -15 & -8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 9 & 20 & -3 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & 15 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 30 & 23 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -53 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$= -2\begin{vmatrix} 30 & 23 \\ -53 & 7 \end{vmatrix} = -2\,(210 + 1219) = -2858$. ▲

Пример 16. Вычислить определитель n-го порядка: $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \cdots & 5 \\ \hdotsfor{5} \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Δ Вычитая первую строку из всех остальных, получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 0 & -5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot 5^n . \ \blacktriangle$$

Пример 17. Вычислить определитель n-го порядка: $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \hdotsfor{5} \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

Δ Из каждой строки вычитаем стоящую ниже строку. Получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко второму столбцу первый, к третьему – сумму первых двух столбцов и к k-му – сумму первых $(k-1)$ столбцов, где $k = 2, 3, \ldots, n$. Будем иметь

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 2 & 2+2 & 2+4 & \cdots & 3+2(n-1) \end{vmatrix} = 3 + 2(n-1) = 2n+1. \ \blacktriangle$$

Пример 18. Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Если существует, то найти ее.

Δ Так как $\det A = 3 \neq 0$, матрица A является невырожденной и для нее существует обратная матрица.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A: $A_{11} = 9$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -5$, $A_{22} = 2$. Присоединенная матрица $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
Обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot B^T = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 19. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Δ Находим $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.

Обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Присоединенная матрица: $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ -12 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} B^{T} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 & 12 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 20. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, путем элементарных преобразований строк.

Δ Запишем матрицу $(A\,|\,E)$ и выполним элементарные преобразования ее строк в следующем порядке:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim (2) \to (2) - 3\,(1) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim (1) \to (1) + (2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim (2) \to -0{,}5\,(2) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 21. Решить матричные уравнения:

а) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 14 & -7 \\ 1 & 20 & -12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Δ а) Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 14 & -7 \\ 1 & 20 & -12 \end{pmatrix}$.

Тогда $X \cdot A = B \sim X\ (A \cdot A^{-1}) = BA^{-1} \sim XE = BA^{-1} \sim X = B \cdot A^{-1}$.

Таким образом, найдем матрицу A^{-1} и умножим ее справа на матрицу B.

Найдем определитель матрицы A и алгебраические дополнения ее элементов:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8;$$

$A_{11} = 8,\ A_{12} = -2,\ A_{13} = -4,\ A_{21} = -4,\ A_{22} = 3,\ A_{23} = 2,\ A_{31} = 0,\ A_{32} = 2,\ A_{33} = 4$.

Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Итак, $X = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 14 & -7 \\ 1 & 20 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 16 \\ 8 & 24 & 0 \\ 16 & 32 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

б) Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда $A \cdot X \cdot B = C \sim\ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \sim\ X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Таким образом, надо найти матрицы A^{-1}, B^{-1} и произведение $A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Найдем определители матриц A и B и алгебраические дополнения их элементов:

$\det A = -1,\ A_{11} = 1,\ A_{12} = 0,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = -1;$

$\det B = 4,\ B_{11} = 4,\ B_{12} = -2,\ B_{21} = 0,\ B_{22} = 1.$

Тогда $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Итак, $X = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. ▲

Дополнительные задачи

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -8 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X, если $2A - X = 4B + 5C$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 14 \\ 4 & -21 & 10 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $A_{23}, B_{35}, C_{22}, D_{52}, E_{34}$. Указать, какие из произведений данных матриц существуют и чему равны размеры получающихся матриц.

Ответ: существуют: 1) $AB - 2\times 5$; 2) $AE - 2\times 4$; 3) $BD - 3\times 2$; 4) $CA - 2\times 3$; 5) $DA - 5\times 3$; 6) $DC - 5\times 2$.

3. Показать, что:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Проверить, перестановочны ли матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: да.

6. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 93 & 94 \\ 78 & 79 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 15; б) 1; в) 0; г) –18; д) 2.

7. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2-x & -2 & 3 \\ 10 & -4-x & 5 \\ 5 & -4 & 6-x \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2$.

8. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 9 & 1 & 25 \\ 8 & 27 & -1 & 125 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 54; б) 432.

9. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$:

а) методом присоединенной матрицы;
б) путем элементарных преобразований строк.

Ответ: $A^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

10. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу B, если $B = T^{-1}AT$.

Ответ: $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Найти обратную матрицу для матрицы A, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Решить матричные уравнения:

а) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}$; б) $\varnothing$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Занятия 5–6

Векторная алгебра

Пример 1. По заданным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить вектор $2\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.

Δ Решение задачи приведено на рис. 4.

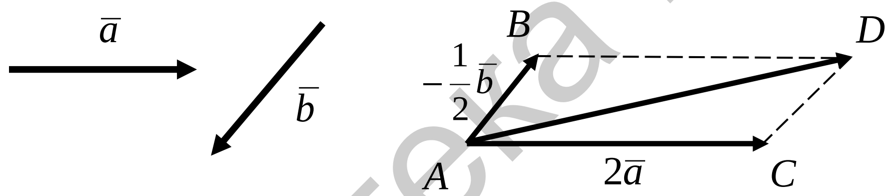


Рис. 4

$\overline{AD} = 2\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$. ▲

Пример 2. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$.

Δ Построим на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах параллелограмм. Тогда $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$ – это длины его диагоналей. Из множества параллелограммов свойством равенства длин диагоналей обладают только прямоугольники. Таким образом, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $90°$. ▲

Пример 3. Найти координаты и длину вектора $3\bar{a} + 2\bar{b}$, если $\bar{a} = (0; -2; -3)$, $\bar{b} = (3; 2; 3)$.

Δ Согласно свойству линейности $3\bar{a} + 2\bar{b} = (0; -6; -9) + (6; 4; 6) = (6; -2; -3)$. Поэтому $|2\bar{a} + 3\bar{b}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$. ▲

Пример 4. Заданы три вершины $A(0; 1; -1)$, $B(1; 0; 2)$, $C(2; 3; 0)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты точки D.

Δ Пусть $D(x;\,y;\,z)$. Поскольку $\overline{BC}=(1;\,3;\,-2)$, $\overline{AD}=(x;\,y-1;\,z+1)$, а векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ равны, то $1=x,\ 3=y-1,\ -2=z+1$. Отсюда $x=1,\ y=4,$ $z=-3$, т. е. $D(1;\,4;\,-3)$. ▲

Пример 5. Даны проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на оси координат $X=5,\ Y=-4$, зная, что его начало в точке $M_1\,(-2;\,3)$, найти координаты его конца.

Δ Если известны координаты точек $M_1\,(x_1;\,y_1)$ и $M_2\,(x_2;\,y_2)$, то проекции X и Y на оси координат направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ могут быть определены по формулам $X=x_2-x_1, Y=y_2-y_1$. Таким образом, $x_2=X+x_1=3$, $y_2=Y+y_1=-1;\ M_2\,(3;-1)$. ▲

Пример 6. Точки $A(1;\,1),\ B(0;\,-3),\ C(2;\,2)$ – вершины треугольника. Найти длину медианы AK и координаты точки M пересечения медиан $\Delta\,ABC$ (рис. 5).

$$\Delta\quad \overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}=(-1;\,-4)+(1;\,1)=(0;\,-3);\quad \overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\left(0;\,-\frac{3}{2}\right);$$

$$AK=\sqrt{0+\frac{9}{4}}=\frac{3}{2};\ \overline{AM}=\frac{2}{3}\overline{AK}=(0;\,-1).$$

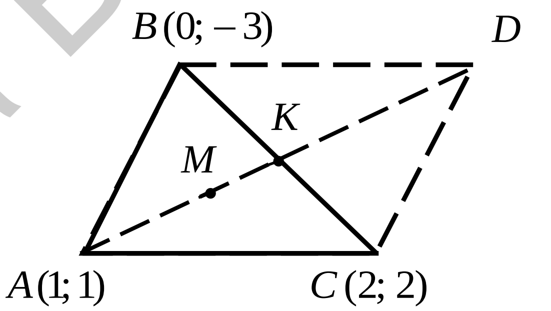


Рис. 5

Пусть $O(0;\,0)$. Тогда $\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AM}=$ $=(1;\,1)+(0;\,-1)=(1;\,0)$, т. е. $M(1;\,0)$. ▲

Пример 7. Найти вектор $\bar{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}=7\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}$ и $\bar{b}=-2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, если $|\bar{x}|=5\sqrt{6}$.

Δ Найдем орты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a}_0=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{7\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}}{\sqrt{81}}=\frac{1}{9}\left(7\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}\right);$$

$$\bar{b}_0=\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}=\frac{-2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}\left(-2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}\right).$$ На векторах $\bar{a}_0$ и $\bar{b}_0$ как на сторонах построим ромб. Тогда его диагональ будет направлена по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}_0$ и $\bar{b}_0$, т. е. $\bar{x}=\lambda\,(\bar{a}_0+\bar{b}_0)=\lambda\left(\frac{1}{9}\bar{i}-\frac{7}{9}\bar{j}+\frac{2}{9}\bar{k}\right),\ \lambda>0$. Так как $|\bar{x}|=5\sqrt{6}$, то $\frac{\lambda}{9}\sqrt{1+49+4}=5\sqrt{6}$, $\lambda=15$. Таким образом, $\bar{x}=\frac{5}{3}\left(\bar{i}-7\bar{j}+2\bar{k}\right)$. ▲

Пример 8. Найти значение параметра t, при котором вектор $\bar{a}=-\bar{i}+t\,\bar{j}+4\bar{k}$ имеет длину, равную 5, и образует с вектором $\bar{j}$ тупой угол.

Δ Очевидно, $t < 0$. Так как $|\bar{a}| = \sqrt{1+t^2+16} = 5$, то $t = -2\sqrt{2}$. ▲

Пример 9. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно $1, 2, 3$ и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из одной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

Δ Так как $\bar{F}_1 = \lambda_1(\bar{i}+\bar{j}), \bar{F}_2 = \lambda_2(\bar{i}+\bar{k}), \bar{F}_3 = \lambda_3(\bar{j}+\bar{k})$ и $|\bar{F}_1| = \lambda_1\sqrt{2} = 1$, $|\bar{F}_2| = \lambda_2\sqrt{2} = 2$, $|\bar{F}_3| = \lambda_3\sqrt{2} = 3$, то $\bar{F}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{j}), \bar{F}_2 = \dfrac{2}{\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{k})$, $\bar{F}_3 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{k})$.

Таким образом, $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\bar{i} + \dfrac{4}{\sqrt{2}}\bar{j} + \dfrac{5}{\sqrt{2}}\bar{k}$, $|\bar{F}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3^2+4^2+5^2} = 5$. ▲

Пример 10. Доказать, что векторы $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}, \bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j}$ и $\bar{c} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$ линейно зависимы.

Δ Как известно, любые три вектора плоскости линейно зависимы. Покажем, например, что $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 4, \\ 2\alpha - 3\beta = -2, \end{cases} \quad \alpha = 2, \; \beta = 2,$$

т. е. векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ являются линейно зависимыми. ▲

Пример 11. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{b} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ – базис. Показать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{c} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Δ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не являются коллинеарными, т. к. $\dfrac{2}{1} \ne \dfrac{-1}{3}$. Поэтому они тоже образуют базис. Любой вектор можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Для нахождения координат вектора $\bar{c}$ в этом базисе составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha + 3\beta = -2, \end{cases} \quad \alpha = \frac{11}{7}, \; \beta = -\frac{1}{7}.$$

Таким образом, в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$ координаты вектора $\bar{c} = \left(\dfrac{11}{7}; -\dfrac{1}{7}\right)$. ▲

Пример 12. Задана тройка векторов $\bar{e}_1 = (1;0;0), \bar{e}_2 = (1;1;0), \bar{e}_3 = (1;1;1)$. Доказать, что эта тройка векторов образует базис в V_3. Вычислить координаты вектора $\bar{a} = (7;3;1)$ в этом базисе.

Δ Составим линейную комбинацию векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ и приравняем ее к нулевому вектору:

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ \gamma = 0, \end{cases} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Указанная тройка векторов образует базис. Найдем координаты вектора

$\bar{a}$ в этом базисе:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix},\quad \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=7,\\ \beta+\gamma=3,\\ \gamma=1,\end{cases}\quad \alpha=4,\ \beta=2,\gamma=1,$$

т. е. в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ вектор $\bar{a}=(4;2;1)$. ▲

Пример 13. Может ли некоторый ненулевой вектор образовывать с векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ углы, равные соответственно: а) $120°, 135°, 45°$; б) $120°, 135°, 60°$?

Δ Направляющие косинусы любого вектора связаны единственным соотношением: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Так как:

а) $\cos^2 120°+\cos^2 135°+\cos^2 45°=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\neq 1$, следовательно с векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ никакой вектор не может образовывать углы $120°, 135°$ и $45°$ соответственно;

б) $\cos^2 120°+\cos^2 135°+\cos^2 60°=1$, то такие углы возможны. ▲

Пример 14. Дан треугольник: $A(4;1)$, $B(7;5)$ и $C(-4;7)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.

Δ Найдем длины сторон треугольника AB и AC: $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$; $AC=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$.

Как известно, $\dfrac{|AC|}{|AB|}=\dfrac{|CD|}{|DB|}$. Таким образом, точка D делит отрезок CD в отношении $\lambda=2$. Поэтому $X_D=\dfrac{X_C+2X_B}{1+2}=\dfrac{10}{3}$; $Y_D=\dfrac{Y_C+2Y_B}{1+2}=\dfrac{17}{3}$. Итак, $D\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{17}{3}\right)$. ▲

Пример 15. Найти две точки A и B, если известно, что точка $C(-5;4)$ делит отрезок AB в отношении $3:4$, а точка $D(6;-5)$ – в отношении $2:3$.

Δ Пусть $A(X_A;Y_A)$, $B(X_B;Y_B)$. Тогда имеем

$$-5=\frac{X_A+\frac{3}{4}X_B}{\frac{3}{4}+1},\quad 4=\frac{Y_A+\frac{3}{4}Y_B}{\frac{3}{4}+1},\quad 6=\frac{X_A+\frac{2}{3}X_B}{\frac{2}{3}+1},\quad -5=\frac{Y_A+\frac{2}{3}Y_B}{\frac{2}{3}+1}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем $X_A=160$, $X_B=-225$, $Y_A=-131$, $Y_B=184$, т. е. $A(160;-131)$, $B(-225;184)$. ▲

Пример 16. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, полярная ось направлена по биссектрисе первого координатного угла. Даны декартовы прямоугольные координаты точек $M_1(-1;1)$, $M_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $M_3(1;\sqrt{3})$, $M_4(-\sqrt{3};1)$ и $M_5(2\sqrt{3};-2)$. Определить полярные координаты этих точек.

Δ Найдем длины радиус-векторов этих точек: $r_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $r_2=\sqrt{2+2}=2$, $r_3=\sqrt{1+3}=2$, $r_4=\sqrt{3+1}=2$, $r_5=\sqrt{12+4}=4$.

Найдем углы, которые образуют радиус-векторы этих точек с осью OX:

$$\varphi_1=\frac{3\pi}{4},\ \varphi_2=-\frac{\pi}{4},\ \varphi_3=\frac{\pi}{3},\ \varphi_4=\frac{5}{6}\pi,\ \varphi_5=-\frac{\pi}{6}.$$

Тогда, очевидно, $\theta_1=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$, $\theta_3=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$, $\theta_4=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7}{12}\pi$, $\theta_5=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{5}{12}\pi$. Таким образом, указанные точки имеют следующие полярные координаты:

$$M_1\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{2}\right), M_2\left(2;-\frac{\pi}{2}\right), M_3\left(2;\frac{\pi}{12}\right), M_4\left(2;\frac{7}{12}\pi\right), M_5\left(4;-\frac{5}{12}\pi\right).\ ▲$$

Пример 17. Найти уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат, если в полярной системе координат эта линия задана уравнением $r=\dfrac{3}{4-\cos\theta}$.

Δ Так как $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, получим

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{4-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}\ \sim\ 1=\frac{3}{4\sqrt{x^2+y^2}-x}\ \sim\ 4\sqrt{x^2+y^2}=3+x\ \sim$$

$$\sim\ \begin{cases}16\,(x^2+y^2)=9+6x+x^2\\ x\ge -3\end{cases}\ \sim\ 15x^2+16y^2-6x-9=0.\ ▲$$

Пример 18. Найти угол, образованный единичными векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, если известно, что векторы $\bar{a}=\bar{e}_1+2\bar{e}_2$ и $\bar{b}=5\bar{e}_1-4\bar{e}_2$ перпендикулярны.

Δ Находим скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$(\bar{a},\bar{b})=(\bar{e}_1+2\bar{e}_2,5\bar{e}_1-4\bar{e}_2)=5\bar{e}_1^{\,2}-4(\bar{e}_1,2\bar{e}_2)+10(\bar{e}_2,2\bar{e}_1)-8\bar{e}_2^{\,2}=$$

$=-3+6(\bar{e}_1,2\bar{e}_2)$, т. к. $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $(\bar{a},\bar{b})=0$. Отсюда $(\bar{e}_1,2\bar{e}_2)=1\cdot 1\cdot\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. ▲

Пример 19. Даны три вектора: $\bar{a}=(1;-3;4)$, $\bar{b}=(3;-4;2)$ и $\bar{c}=(-1;1;4)$. Вычислить $\textit{пр}_{\,\bar{b}+\bar{c}}\,\bar{a}$.

Δ Пусть $\bar{d}=\bar{b}+\bar{c}=(2;-3;6)$.

Тогда $пр_{\bar d}\,\bar a = \dfrac{(\bar d, \bar a)}{|\bar d|} = \dfrac{2+9+24}{\sqrt{4+9+36}} = \dfrac{35}{7} = 5$. ▲

Пример 20. Найти проекцию вектора $\bar a = (4; -3; 2)$ на вектор, составляющий одинаковые тупые углы с осями координат.

Δ В качестве вектора, составляющего одинаковые тупые углы с осями координат, можно взять вектор $\bar b = -\bar i - \bar j - \bar k$. Действительно,

$$\bar b_0 = -\frac{1}{\sqrt 3} i - \frac{1}{\sqrt 3}\bar j - \frac{1}{\sqrt 3}\bar k \cdot$$

Следовательно, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt 3}$.

Тогда $пр_{\bar b}\,\bar a = \dfrac{(\bar b, \bar a)}{|\bar b|} = \dfrac{-4+3-2}{\sqrt 3} = -\sqrt 3$. ▲

Пример 21. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $AD = 1$, $AB = 2$, $AA_1 = 3$. Найти угол между скрещивающимися прямыми AC_1 и B_1D_1.

Δ Выберем систему координат с началом в точке A и с осями OX, OY и OZ, совпадающими соответственно с ребрами AD, AB и AA_1. Тогда

$$\overline{AC_1} = \bar i + 2\bar j + 3\bar k,\ \overline{B_1D_1} = \bar i - 2\bar j,\quad \cos\varphi = \left|\frac{(\overline{AC_1}, \overline{B_1D_1})}{|\overline{AC_1}|\cdot|\overline{B_1D_1}|}\right| = \left|\frac{1-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt 5}\right| = \frac{3}{\sqrt{70}},$$

$\varphi = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{70}}$. ▲

Пример 22. В треугольнике ABC точка H – точка пересечения высот. Известно, что $\overline{AB} = (6; -2)$, $\overline{AC} = (3; 4)$. Найти координаты вектора $\overline{AH}$.

Δ Пусть $\overline{AH} = (X; Y)$. Тогда $\overline{BH} = \overline{AH} - \overline{AB} = (X - 6; Y + 2)$. Так как $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ и $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 6y = 0, \\ 3(x-6) + 4(y+2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 0, \\ 3x + 4y = 10, \end{cases} \quad x = 2,\ y = 1.\ \overline{AH} = (2; 1).$$ ▲

Пример 23. Упростить выражение $[\bar i,\ \bar j + \bar k] - [\bar j, \bar i + \bar k] + [\bar k, \bar i + \bar j + \bar k]$.

Δ Как известно, $[\bar i,\ \bar j] = \bar k$, $[\bar j, \bar k] = \bar i$, $[\bar k, \bar i] = \bar j$ и векторное произведение обладает свойством антикоммутативности. Поэтому

$$[\bar i,\ \bar j + \bar k] - [\bar j, \bar i + \bar k] - [\bar k, \bar i + \bar j + \bar k] \sim \bar k - \bar j - (-\bar k + \bar i) + (\bar j - \bar i) = -2\bar i + 2\bar k.$$ ▲

Пример 24. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$, если $\bar a = 3\bar p + 2\bar q$, $\bar b = 2\bar p - \bar q$, $|\bar p| = 4$, $|\bar q| = 3$, $(\bar p \,\hat{,}\, \bar q) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Δ $S = |\,[a,b]| = |\,[3\bar p + \bar q,\ 2\bar p - \bar q]| = |\,6[\bar p, \bar p] - 3[\bar p, \bar q] + 2[\bar q, \bar p] - [\bar q, \bar q]\,| =$

$= \left|5[\bar{p}, \bar{q}]\right| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 30\sqrt{2}$. ▲

Пример 25. Найти координаты вектора $\bar{x}$, если он перпендикулярен векторам $\bar{a}_1 = (4; -2; -3)$ и $\bar{a}_2 = (0; 1; 3)$, образует с ортом $\bar{j}$ тупой угол и $|\bar{x}| = 26$.

Δ В качестве вектора, перпендикулярного векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, можно взять вектор $\bar{b} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$.

Тогда $\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\bar{i} - 12\bar{j} + 4\bar{k}$.

Вектор $\bar{x} = \lambda \bar{b}$, причем $\lambda > 0$. Так как $\lambda\sqrt{9 + 144 + 16} = 26$, то $\lambda = 2$. Таким образом $\bar{x} = -6\bar{i} - 24\bar{j} + 8k$. ▲

Пример 26. Объем прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 6. Определить координаты вершины A_1, если координаты вершин одного из оснований призмы следующие: $A(1; 0; 1)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$.

Δ Так как координаты точки A известны, то для нахождения координат точки A_1 достаточно знать координаты вектора $\overline{AA_1}$. Найдем вектор:

$$\bar{n} = [\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}.$$

Так как $|\bar{n}| = \sqrt{6}$, то $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\bar{n}| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Высота призмы $h = \left|\overline{AA_1}\right| = 6 : \dfrac{\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$. Призма прямая, поэтому $\overline{AA_1} = \pm 2(\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k})$. Если $O(0; 0; 0)$, то $\overline{OA_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1}$:

1) $\overline{OA_1} = (1; 0; 1) + (2; 4; 2) = (3; 4; 3)$;

2) $\overline{OA_1} = (1; 0; 1) - (2; 4; 2) = (-1; -4; -1)$.

Следовательно, существуют две точки, удовлетворяющие условиям задачи: $A_1'(3; 4; 3)$ и $A_1''(-1; -4; -1)$. ▲

Пример 27. Показать, что векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + m\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + (m+1)\bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + m\bar{k}$ ни при каком значении m не могут быть компланарными.

Δ Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Найдем $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ не являются компланарными. ▲

Пример 28. Даны вершины тетраэдра $A(0;\,0;\,2)$, $B(3;\,0;\,5)$, $C(1;\,1;\,0)$, $D(4;\,1;\,2)$. Найти его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

Δ Имеем

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\,(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD})\,\right|,\quad h=\frac{\left|(\overline{AB},\overline{AC},\ \overline{AD})\right|}{\left|[\overline{AB},\ \overline{AC}]\right|}.$$

Так как $\overline{AB}(3;\,0;\,3)$, $\overline{AC}(1;1;-2)$, то

$$[\overline{AB},\ \overline{AC}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-3;\,9;\,3),\ \text{и}\ \left|[\overline{AB},\ \overline{AC}]\right|=3\sqrt{11}.$$

Далее, $\overline{AD}=(4;1;0)$, $(\overline{AB},\overline{AC},\ \overline{AD})=(\overline{AD},[\overline{AB},\overline{AC}]=4(-3)+1\cdot 9+0\cdot 3=-3$.

Следовательно, $V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}$, $h=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Доказать, что $ABCD$ – параллелограмм, если $\overline{AB}=2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}$, $\overline{AC}=\bar{a}-\bar{b}+2\bar{c}$, $\overline{AD}=-\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c}$.

2. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если $A(4,-5,2)$, $B(2,-3,1)$.

Ответ: $\overline{AB}(-2,\,2,\,-1)$, $\left|\overline{AB}\right|=3$, $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\dfrac{1}{3}$.

3. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если его длина равна 2, и он образует с осями OX, OY и OZ углы $135°$, $60°$ и $60°$ соответственно.

Ответ: $\bar{a}(-\sqrt{2},1,1)$.

4. Дан треугольник ABC, $A(-2,3,6)$, $B(-3,5,8)$, $C(2,3,3)$. Найти:

а) вектор $\bar{b}$, направленный по биссектрисе внутреннего угла при вершине A, если $\left|\bar{b}\right|=5\sqrt{6}$;

б) координаты точки D пересечения этой биссектрисы со стороной BC.

Ответ: а) $\bar{b}(7,10,1)$; б) $D\left(-1\dfrac{1}{8},\,4\dfrac{1}{4},\,6\dfrac{1}{8}\right)$.

5. Доказать, что векторы $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j},\ \bar{b}=i-3\bar{j}$ и $\bar{c}=2\bar{i}+4\bar{j}$ линейно зависимы. Можно ли выразить вектор $\bar{b}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$?

Ответ: нет.

6. Найти работу силы $\overline{F}=\bar{i}+\bar{k}$ при перемещении материальной точки на вектор $\bar{a}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$.

Ответ: 4.

7. Длины базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ равны соответственно $1, 1, 2$; углы между ними равны $\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 90°$, $\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = \angle(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 60°$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (-1; 0; 2)$, $\bar{b} = (2; -1; 1)$.

Ответ: $\sqrt{94}$.

8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны. При каких значениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\bar{a} + \bar{b}$ и $3\bar{a} + \lambda\bar{b}$?

Ответ: $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

9. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\bar{a} + 2\bar{b} + \lambda\bar{c}$, $4\bar{a} + 5\bar{b} + 6\bar{c}$, $7\bar{a} + 8\bar{b} + \lambda^2\bar{c}$?

Ответ: $\lambda = 3, \lambda = -4$.

10. Даны точки $A(1, -1, 0)$, $B(5, 3, -7)$, $C(8, -1, -1)$, $D(1, 2, 3)$. Найти:

а) скалярное произведение $\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right)$; б) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; в) векторное произведение $\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]$; г) смешанное произведение $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)$.

Ответ: а) 35; б) $\dfrac{7\sqrt{2}}{18}$; в) $(-4, -45, -28)$; г) -219.

11. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

12. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2; 0; 2)$ и $D(5; -2; 0)$ разделен на три равные части.

Ответ: $(-1; 2; 4)$ и $(8; -4; -2)$.

13. Даны векторы $\bar{a} = (1; 1)$ и $\bar{b} = (1; -1)$. Найти косинус угла между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $\begin{cases} 2\bar{x} + \bar{y} = \bar{a} \\ \bar{x} + 2\bar{y} = \bar{b} \end{cases}$.

Ответ: $-\dfrac{4}{5}$.

14. Даны векторы $\bar{a} = (1; 3)$, $\bar{b} = (2; -1)$ и $\bar{c} = (-4; 1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$.

Ответ: $\alpha = \dfrac{2}{7}, \beta = \dfrac{13}{7}$.

15. Проверить, что векторы $\bar{a} = (-5; -1)$ и $\bar{b} = (-1; 3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\bar{c} = (-1; 2)$ и $\bar{d} = (2; -6)$ в этом базисе.

Ответ: $\bar{c} = \left(\dfrac{1}{16}; \dfrac{11}{16}\right)$, $\bar{d} = (0; -2)$.

16. Проверить, образуют ли векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ базис в $\mathbb{R}^3$. Если да, то найти

координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе:

а) $\bar{a}\,(2,-1,4), \bar{b}\,(1,-1,0), \bar{c}\,(-1,3,-3), \bar{d}\,(2,1,12)$;

б) $\bar{a}\,(1,2,5), \bar{b}\,(1,3,2), \bar{c}\,(-2,-7,1), \bar{d}\,(6,16,16)$.

Ответ: а) да, $\bar{d}=3\bar{a}-4\bar{b}$; б) да, $\bar{d}=3\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$.

17. В полярной системе координат даны две точки $M_1\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ и $M_2\left(8;-\frac{\pi}{12}\right)$. Найти расстояние d между ними.

Ответ: $d=7$.

Занятие 7

Прямая линия на плоскости

Пример 1. Прямая L задана общим уравнением $x-3y+6=0$.

Записать уравнение прямой L: 1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках; 3) каноническое; 4) параметрическое; 5) нормальное.

Δ 1) $y=\frac{1}{3}x+2$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{2}=1$; 3) $x-6=3y$, $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{1}$;

4) $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{1}=t$, $x=3t+6$, $y=t$; 5) $-\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{6}{\sqrt{10}}=0$. ▲

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и параллельной прямой:

1) $x-2y+5=0$; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$; 3) $x=2$; 4) $y=-1$;

5) $x=3+t,\ y=4-7t$.

Δ 1) Нормальный вектор прямой $x-2y+5=0$ $\bar{n}=(1;-2)$. Так как прямые параллельны, в качестве нормального вектора искомой прямой можно взять вектор $\bar{n}$. Тогда уравнение прямой: $(x+3)-2(y-4)=0 \sim x-2y+11=0$;

2) В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\bar{q}=(2;3)$. Уравнение прямой: $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}$;

3) Очевидно, $x=-3$;

4) Очевидно, $y=4$;

5) Вектор $\bar{q}=(1;-7)$ является направляющим вектором прямой. Уравнение прямой: $x=-3+t$, $y=4-7t$. ▲

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и перпендикулярной прямой: 1) $x-2y+5=0$; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$; 3) $x=2$; 4) $y=-1$;

5) $x = 3 + t,\ y = 4 - 7t$.

Δ 1) Вектор $\bar{q} = (1; -2)$ является направляющим вектором искомой прямой. Уравнение прямой: $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-4}{-2}$;

2) Вектор $\bar{n} = (2; 3)$ является нормальным вектором искомой прямой. Уравнение прямой: $2(x+3) + 3(y-4) = 0 \sim 2x + 3y - 6 = 0$;

3) Очевидно, $y = 4$;

4) Очевидно, $x = -3$;

5) Вектор $\bar{n} = (1; -7)$ является нормальным вектором прямой. Уравнение прямой: $1(x+3) - 7(y-4) = 0 \sim x - 7y + 31 = 0$. ▲

Пример 4. Составить уравнение прямой L, которая проходит через точку $M_0(2; 10)$ и отсекает от второго координатного угла треугольник площадью, равной 5.

Δ Запишем уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Тогда $\begin{cases} \dfrac{2}{a} + \dfrac{10}{b} = 1, \\ -ab = 10, \\ a < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2b + 10a = ab, \\ ab = -10, \\ a < 0, \end{cases}$ $a = -2,\ b = 5$.

Уравнение прямой L: $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{5} = 1,\ 5x - 2y + 10 = 0$. ▲

Пример 5. Найти угол между прямыми $2x + 3y - 5 = 0$ и $x - 3y - 7 = 0$.

Δ Углом между прямыми называется наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Значение φ (меньшего из углов) можно вычислить по формуле $\cos\varphi = \dfrac{|(\bar{n}_1, \bar{n}_2)|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$, где $\bar{n}_1 = (2; 3)$, $\bar{n}_2 = (1; -3)$ – нормальные векторы этих прямых, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{|2-9|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{1+9}} = \frac{7}{\sqrt{130}},\ \varphi = \arccos\frac{7}{\sqrt{130}}.$$ ▲

Пример 6. Даны две точки: $P(2; 3)$ и $Q(-1; 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ.

Δ Угловой коэффициент прямой PQ: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1$. Тогда угловой коэффициент искомой прямой $k_1 = -\dfrac{1}{k} = -1$, а ее уравнение $y - 0 = -1(x+1)$, $x + y + 1 = 0$. ▲

Пример 7. Составить уравнение прямой L_3, симметричной прямой L_1 $(3x-y+5=0)$, относительно прямой L_2 $(x+y-1=0)$.

Δ Угловые коэффициенты прямых L_1 и L_2: $k_1=3$, $k_2=-1$. Пусть угловой коэффициент прямой L_3 равен k_3. Тогда $\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}=\dfrac{k_2-k_3}{1+k_2\cdot k_3}$, т. е. $\dfrac{3+1}{1-3}=\dfrac{-1-k_3}{1-k_3}$, $k_3=\dfrac{1}{3}$.

Найдем точку пересечения всех трех прямых:

$$\begin{cases}3x-y+5=0,\\ x+y-1=0,\end{cases}\quad x=-1,\ \ y=2.$$

Итак, уравнение прямой L_3: $y-2=\dfrac{1}{3}(x+1)$, $x-3y+7=0$. ▲

Пример 8. Найти длину h высоты, опущенной из вершины $A(4;4)$ треугольника ABC, если $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$.

Δ Уравнение прямой BC: $\dfrac{x+6}{-2+6}=\dfrac{y+1}{-4+1}$, $3x+4y+22=0$.

Поэтому $h=\dfrac{|3\cdot4+4\cdot4+22|}{\sqrt{3^2+4^2}}=10$. ▲

Пример 9. Записать уравнение биссектрисы L_0 того угла, образованного прямыми L_1 $(x+7y=0)$ и L_2 $(x-y-4=0)$, внутри которого лежит точка $A(1;1)$.

Δ Отклонения точки A от прямых L_1 и L_2 имеют следующие знаки:

$$d_{L_1}(A)=\frac{1+7\cdot1}{\sqrt{50}}>0 \ \text{ и } \ d_{L_2}(A)=\frac{1-1-4}{\sqrt{2}}<0.$$

Любая точка $M(x;y)$, принадлежащая L_0, равноудалена от прямых L_1 и L_2, имеет отклонения от этих прямых тех же знаков, что и точка A.

Таким образом, все точки биссектрисы удовлетворяют уравнению

$$\frac{x+7y}{\sqrt{50}}=-\frac{x-y-4}{\sqrt{2}}\sim 3x+y-10=0.\ ▲$$

Пример 10. Найти точку $B(x_1;y_1)$, симметричную точке $A(8;12)$ относительно прямой L $(x-2y+6=0)$.

Δ Приведем уравнение прямой L к каноническому виду: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y}{1}$. Вектор $\overline{AB}=(x_1-8;\,y_1-12)$ перпендикулярен вектору $\bar{a}=(2;1)$, поэтому $2(x_1-8)+1(y_1-12)=0$. Точка $Q\left(\dfrac{8+x_1}{2};\dfrac{12+y_1}{2}\right)$, являющаяся серединой отрезка AB, принадлежит прямой L, т. е. $\frac{8+x_1}{2}-2\frac{12+y_1}{2}+6=0$.

Решив полученную систему уравнений, найдем координаты точки B:

$\begin{cases}2x_1+y_1-28=0,\\ x_1-2y_1-4=0,\end{cases}$ $x=12,\ y=4$, т. е. $B(12;\,4)$. ▲

Пример 11. Точка $A(3;-2)$ является вершиной квадрата $ABCD$, а точка $M(1;1)$ – точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон квадрата.

∆ Запишем уравнение прямой AM: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{3}$.

Угловой коэффициент этой прямой $k=-\frac{3}{2}$. Для одной из сторон квадрата, проходящих через точку A, выполняется равенство $\frac{k_1+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}k_1}=1,\quad k_1=-\frac{1}{5}$, где k_1 – угловой коэффициент этой прямой.

Тогда угловой коэффициент другой стороны, проходящей через точку A, $k_2=-\frac{1}{k_1}=+5$.

Найдем координаты точки C: $\frac{x+3}{2}=1,\ \frac{y-2}{2}=1;\ C(-1;\,4)$.

Запишем уравнение сторон квадрата:

$y+2=-\frac{1}{5}(x-3),\qquad x+5y+7=0;$

$y+2=5(x-3),\qquad 5x-y-17=0;$

$y-4=-\frac{1}{5}(x+1),\qquad x+5y-19=0;$

$y-4=5(x+1)$, $5x-y+9=0$. ▲

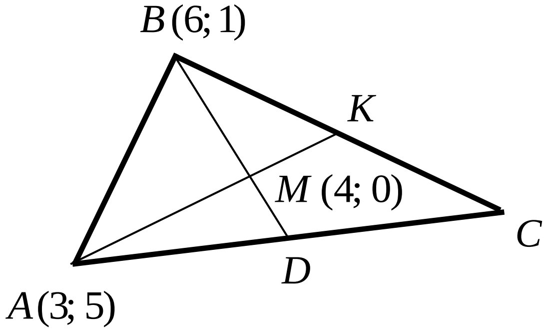


Рис. 6

Пример 12. Составить уравнения сторон треугольника, зная две его вершины $A(3;5)$, $B(6;1)$ и точку пересечения его медиан $M(4;0)$ (рис. 6).

∆ Пусть $O(0;0)$ – начало системы координат. Тогда

$\overline{BM}=(-2;-1)$, $\overline{BD}=\frac{3}{2}\overline{BM}=\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$,

$\overline{AM}=(1;-5)$, $\overline{AK}=\frac{3}{2}\overline{AM}=\left(\frac{3}{2};-\frac{15}{2}\right)$,

$$\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{BD}=\left(3;-\frac{1}{2}\right), \text{ т. е. } D\left(3;-\frac{1}{2}\right),$$

$$\overline{OK}=\overline{OA}+\overline{AK}=\left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right), \text{ т. е. } K\left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right).$$

Составляем уравнения сторон треугольника как прямых, проходящих через две заданные точки:

$$AB: \frac{x-3}{6-3}=\frac{y-5}{1-5},\ 4x+3y-27=0; \qquad AC: \frac{x-3}{3-3}=\frac{y-5}{-\frac{1}{2}-5},\ x=3;$$

$$BC: \frac{x-6}{\frac{9}{2}-6}=\frac{y-1}{-\frac{5}{2}-1},$$

$7x-3y-39=0$. ▲

Пример 13. Даны координаты двух вершин треугольника $A(-1;3)$, $B(2;5)$ и точка пересечения его высот $H(1;4)$ (рис. 7). Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.

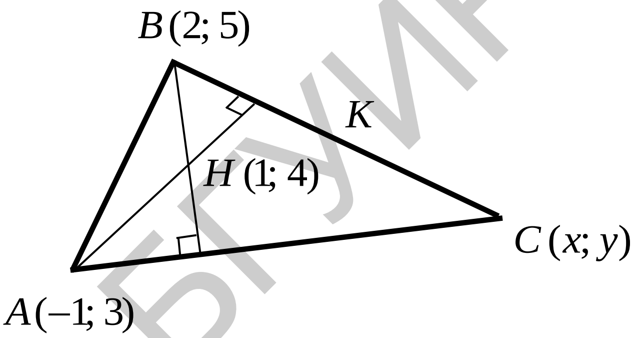


Рис. 7

Δ Пусть координаты точки $C(x;y)$. Тогда $\overline{AH}=(2;1)$, $\overline{HB}=(1;1)$, $\overline{AC}=(x+1;\ y-3)$, $\overline{BC}=(x-2;\ y-5)$. Так как $\overline{AC}\perp\overline{HB}$ и $\overline{BC}\perp\overline{AH}$, получаем систему уравнений: $\begin{cases} x+1+y-3=0, \\ 2x-4+y-5=0, \end{cases}$ откуда найдем координаты точки $C(7;-5)$.

Зная координаты вершин треугольника, записываем уравнения его сторон:

$$AB: \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{2},\quad 2x-3y+11=0; \quad AC: \frac{x+1}{8}=\frac{y-3}{-8},\quad x+y-2=0;$$

$$BC: \frac{x-2}{5}=\frac{y-5}{-10},\ 2x+y-9=0.$$ ▲

Дополнительные задачи

1. Через точку $M(3;5)$ провести прямую так, чтобы она отсекала от координатного угла равнобедренный треугольник.

Ответ: $x+y-8=0,\ x-y+2=0$.

2. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, если уравнение гипотенузы $y=7x-4$ и вершина прямого угла $C(3;4)$.

Ответ: $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4},\ y=-\frac{4}{3}x+8$.

3. Дан треугольник ABC, $A(6;4)$, $B(-3;5)$, $C(-2;-6)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно медиане, проходящей через вершину B.

Ответ: $6x+5y-56=0$.

4. Стороны треугольника расположены на прямых $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0$, $x-4y+11=0$. Составить уравнения высот треугольника.

Ответ: $2x-y+1=0$, $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$.

5. Из точки $M(5;4)$ выходит луч света под углом $\varphi=\operatorname{arctg}2$ к оси OX и отражается от нее. Написать уравнение падающего и отраженного лучей.

Ответ: $y=2x-6,\ y=-2x+6$.

6. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7;15)$, а середина его основания в точке $(1;3)$. Составить уравнения сторон треугольника, если тангенс угла при основании равен 4.

Ответ: $2x-3y+7=0$, $14x+5y+23=0$, $10x+11y-95=0$.

7. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2;-4)$, и уравнения биссектрис двух его углов: $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$.

Ответ: $x+7y-6=0,\ x-y-6=0,\ 7x+y-10=0$.

8. Установить взаимное расположение двух данных прямых на плоскости (совпадают, параллельны, пересекаются); в случае пересечения найти общую точку прямых и косинус угла между ними:

а) $2x+3y=0$ и $\begin{cases} x=3+t, \\ y=2-t; \end{cases}$

б) $x+2y=15$ и $\begin{cases} x=5+4t, \\ y=-2-2t; \end{cases}$

в) $3x+4y-20=0$ и $\begin{cases} x=4-8t, \\ y=2+6t; \end{cases}$

г) $x-5y+9=0$ и $x+y-3=0$.

Ответ: а) $(15;-10)$, $\frac{5}{\sqrt{26}}$; б) параллельны; в) совпадают; г) $(1;2)$, $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

9. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(3;1)$ и наклоненных к прямой $2x+3y-1=0$ под углом $45°$.

Ответ: $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$.

Занятия 8–9

Плоскость и прямая в пространстве

Пример 1. Заданы плоскость P: $-2x+y-z+1=0$ и точка $M_0(1;1;1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M_0 параллельно плоскости P, и вычислить расстояние $\rho(P, P')$.

Δ Так как плоскости P и P' параллельны, то нормальный вектор плоскости P' $\bar{n}=(-2;1;-1)$. Если точка $M(x;y;z)$ принадлежит плоскости P', то $(\bar{n}, \overline{M_0M})=0$, $-2(x-1)+1(y-1)-1(z-1)=0$. Искомое общее уравнение плоскости $-2x+y-z+2=0$.

Расстояние $\rho(P, P')=\rho(M_0, P)=\dfrac{|-2\cdot1+1\cdot1-1\cdot1+1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. ▲

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;1;1)$ перпендикулярно к плоскости $3x+4y+z-6=0$.

Δ Если точка $M(x;y;z)$ принадлежит искомой плоскости, то векторы $\overline{M_1M}=(x-1;y-2;z-3)$, $\overline{M_1M_2}=(1;-1;-2)$ и $\bar{n}=(3;4;1)$ являются компланарным и их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad x-y+z-2=0. \ ▲$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1=(3;1;-1)$ и $\bar{a}_2=(1;-2;1)$.

Δ Пусть $M(x,y,z)$ – любая точка искомой плоскости. Векторы $\overline{M_1M}=(x-3;y-4;z+5)$, $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ компланарны. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad x+4y+7z+16=0. \ ▲$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$ и $M_3(3;0;1)$.

Δ Векторы $\overline{M_1M}=(x-1;y-2;z)$, $\overline{M_1M_2}=(1;-1;1)$ и $\overline{M_1M_3}=(2;-2;1)$ являются компланарными (точка $M(x,y,z)$ принадлежит искомой плоскости), поэтому

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad x+y-3=0. \ ▲$$

Пример 5. Основанием треугольной пирамиды $DABC$ с вершиной $D(2; 2; -\sqrt{3})$ служит треугольник с вершинами в точках $A(0; 0; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 1; 0)$. Найдите длину h высоты пирамиды.

Δ Найдем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, B, C. Векторы $\overline{AM} = (x;\, y;\, z)$, $\overline{AB} = (0; 1; 1)$, $\overline{AC} = (1; 1; 0)$ компланарны. Поэтому $0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + y - z$. Длина высоты есть расстояние от точки D до этой плоскости. Таким образом, $h = \dfrac{\left|-2+2+\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+1+1}} = 1$. ▲

Пример 6. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью P: $2x + 3y - 5z - 30 = 0$ и координатными плоскостями.

Δ Уравнение этой плоскости в отрезках имеет вид $\dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{z}{-6} = 1$. Плоскость P отсекает от осей OX, OY и OZ отрезки, длины которых соответственно равны $15, 10$ и 6. Поэтому $V = \dfrac{1}{6}\left|a \cdot b \cdot c\right| = \dfrac{1}{6} \cdot 15 \cdot 10 \cdot 6 = 150$. ▲

Пример 7. Даны две плоскости P_1 и P_2. Найти косинус угла между ними, если $P_1 : -x + 2y - z + 1 = 0,\ P_2 : y + 3z - 1 = 0$.

Δ Векторы $\overline{n}_1 = (-1; 2; -1)$ и $\overline{n}_2 = (0; 1; 3)$ являются нормальными векторами к этим плоскостям. Поэтому

$$\cos(P_1 \hat{,} P_2) = \left|\cos(\overline{n}_1 \hat{,} \overline{n}_2)\right| = \frac{|(\overline{n}_1, \overline{n}_2)|}{|\overline{n}_1|\,|\overline{n}_2|} = \frac{|2-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{15}}.\ ▲$$

Пример 8. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные пересекающимися плоскостями $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $2x - 10y + 4z - 2 = 0$.

Δ Биссекторной плоскостью является геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей. Для любой точки $M(x_0; y_0; z_0)$

$$d_1 = \frac{|2x_0 - y_0 + 5z_0 + 3|}{\sqrt{30}},\ d_2 = \frac{|2x_0 - 10y_0 + 4z_0 - 2|}{\sqrt{120}}.$$

Поскольку $d_1 = d_2$, то

$$2(2x_0 - y_0 + 5z_0 + 3) = \pm(2x_0 - 10y_0 + 4z_0 - 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0 - 6y_0 + 7z_0 + 2 = 0, \\ x_0 + 4y_0 + 3z_0 + 4 = 0. \end{array}\right.$$

Таким образом, существует две биссекторные плоскости: $3x - 6y + 7z + 2 = 0$ и $x + 4y + 3z + 4 = 0$. ▲

Пример 9. Плоскость P задана общим уравнением $x+3y-4z+10=0$. Записать нормальное уравнение этой плоскости.

Δ Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду нужно все члены этого уравнения умножить на нормирующий множитель $\mu=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, при этом знак μ выбирается противоположным знаку свободного члена D. Так как $\mu=-\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, нормальное уравнение плоскости имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{26}}x-\frac{3}{\sqrt{26}}y+\frac{4}{\sqrt{26}}z-\frac{10}{\sqrt{26}}=0. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Прямая L задана уравнениями $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-5}{0}$. Указать координаты каких-либо четырех точек этой прямой.

Δ Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x=1-2t$, $y=-3+t,\ z=5+0t$. Полагая, например, что $t=0, 1, 2, 3,$ получим $A(1;-3;5)$, $B(-1;-2;5)$, $C(-3;-1;5)$, $D(-5;0;5)$. ▲

Пример 11. Прямая L задана следующими общими уравнениями:

$$\begin{cases}2x+3y-z-4=0,\\ 3x-5y+2z+1=0.\end{cases}$$

Написать канонические уравнения прямой, а также уравнения ее проекций на координатные плоскости.

Δ Положив, например $y=0$, получим $\begin{cases}2x-z=4,\\ 3x+2z=-1,\end{cases}$ $x=1,\ z=-2$.

Таким образом, мы уже знаем одну точку прямой: $M_0(1;0;-2)$. В качестве направляющего вектора прямой может быть взят вектор

$$\bar{q}=[\bar{n}_1,\bar{n}_2]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -5 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}-7\bar{j}-19\bar{k}.$$

Канонические уравнения прямой таковы: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-19}$. Полученная пропорция эквивалентна системе трех уравнений $\begin{cases}7x+y-7=0,\\ 19x+z-17=0,\\ 19y-7z-14=0,\end{cases}$ описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz соответственно (уравнение прямой в проекциях). ▲

Пример 12. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(2;4;7)$.

Δ В качестве направляющего вектора прямой подходит вектор $\overline{M_1M_2}(1;\,2;\,4)$. Искомые уравнения прямой: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$. ▲

Пример 13. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\,2;\,5)$ перпендикулярно плоскости $2x-3y+4z-5=0$.

Δ В качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор плоскости $\overline{n}=(2;-3;4)$. Тогда

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-5}{4}=t,\ \begin{cases} x=2t+1,\\ y=-3t+2,\\ z=4t+5.\end{cases}\ ▲$$

Пример 14. Найти тупой угол между прямыми $x=3t-2,\ y=0,\ z=-t+3$ и $x=2t-1,\ y=0,\ z=t-3$.

Δ В качестве направляющих векторов прямых можно взять следующие векторы: $\overline{q}_1=(3;\,0;\,-1)$ и $\overline{q}_2=(2;\,0;\,1)$. Тупой угол между прямыми определяется соотношением $\cos\varphi=-\dfrac{|(\overline{q}_1,\overline{q}_2)|}{|\overline{q}_1|\cdot|\overline{q}_2|}=-\dfrac{|6-1|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi=135°$.

Пример 15. При каком значении m угол φ между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ и плоскостью $mx+y+z+4=0$ равен $45°$?

Δ Направляющий вектор прямой $\overline{q}=(2;-1;1)$, нормальный вектор плоскости $\overline{n}=(m;1;1)$.

Как известно, $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|(\overline{q},\overline{n})|}{|\overline{q}|\cdot|\overline{n}|}=\dfrac{|2m|}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+2}}$.

Итак, $m=\pm\sqrt{6}$. ▲

Пример 16. Найти координаты точки B, симметричной точке $A(2;3;-1)$ относительно прямой L: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Δ Геометрическое построение точки B осуществим следующим образом: а) через точку A проводим плоскость P, перпендикулярную прямой L; б) находим точку M пересечения прямой L и плоскости P; в) отрезок AM удлиняем до отрезка AB так, чтобы точка M оказалась в середине отрезка AB. Запишем уравнение плоскости P и параметрическое уравнение прямой L:

$$1(x-2)+(-1)(y-3)+2(z+1)=0,$$

$$x=1+t,\ y=-2-t,\ z=1+2t.$$

Подставив эти выражения для координат точки на прямой в уравнение плоскости, получим уравнение для параметра t

$$(1+t-2)-(-2-t-3)+2(1+2t+1)=0,$$

решение которого дает значение параметра для точки M. Найдя это значение

$t=-\dfrac{4}{3}$ и подставив его в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения:

$$x=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3},\ \ y=-2+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3},\ \ z=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Поскольку эта точка делит отрезок AB пополам, координаты точки $B\,(x';y';z')$ получим, решив уравнение $\dfrac{2+x'}{2}=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3+y'}{2}=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{-1+z'}{2}=-\dfrac{5}{3}.$

Отсюда $x'=-\dfrac{8}{3},\ y'=-\dfrac{13}{3},\ z'=-\dfrac{7}{3}$. ▲

Пример 17. Убедиться, что прямые L_1 $\left(\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}\right)$ и L_2 $\left(\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}\right)$ принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

∆ Прямая L_1 проходит через точку $M_1\,(1;-2;5)$ и имеет направляющий вектор $\bar{q}_1=(2;-3;4)$. Прямая L_2 проходит через точку $M_2\,(7;2;1)$ и имеет направляющий вектор $\bar{q}_2=(3;2;-2)$. Эти прямые принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}=(6;4;-4)$, $\bar{q}_1=(2;-3;4)$ и $\bar{q}_2=(3;2;-2)$ компланарны. Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\left(\overline{M_1M_2},\bar{q}_1,\bar{q}_2\right)=\begin{vmatrix}6 & 4 & -4\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Прямые L_1 и L_2 принадлежат одной плоскости. Пусть $M\,(x;y;z)$ – любая точка плоскости. Запишем условие компланарности векторов:

$\overline{M_1M}=(x-1;y+2;z-5)$, $\bar{q}_1=(2;-3;4)$ и $\bar{q}_2=(3;2;-2)$.

Тогда $0=\left(\overline{M_1M},\bar{q}_1,\bar{q}_2\right)=\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-5\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2x+16y+13z-31$.

Уравнение плоскости: $2x-16y-13z+31=0$. ▲

Пример 18. Убедиться, что прямые $L_1\left(\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}\right)$ и $L_2\left(\dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}\right)$ являются скрещивающимися, найти расстояние между ними.

∆ Находим смешанное произведение векторов $\overline{M_1M_2}=(28;-1;5)$, $\bar{q}_1=(3;4;-2)$ и $\bar{q}_2=(6;-4;-1)$:

$$\left(\overline{M_1M_2}, \bar{q}_1, \bar{q}_2\right) = \begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -507 \neq 0.$$

Прямые являются скрещивающимися. На векторах $\overline{M_1M_2}$, $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ можно построить параллелепипед. Объем этого параллелепипеда нам уже известен: $V = 507$. Расстояние между прямыми равно высоте h этого параллелепипеда. В свою очередь, высоту параллелепипеда можно вычислить как отношение объема параллелепипеда к площади его основания, но

$$S_{\text{осн.}} = \left|[\bar{q}_1, \bar{q}_2]\right| = \left\| \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{matrix} \right\| = \left| -12\bar{i} - 9\bar{j} - 36\bar{k} \right| = 3\sqrt{16+9+144} = 39.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми $h = \dfrac{507}{39} = 13$. ▲

Пример 19. Написать каноническое уравнение прямой L_1, которая проходит через точку $M_0(3;-2;-4)$ параллельно плоскости $P_1\left(3x-2y-3z-7=0\right)$ и пересекает прямую $L_2\left(\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{2}\right)$.

Δ Запишем уравнение плоскости P_2, параллельной плоскости P_1 и проходящей через точку $M_0(3;-2;-4)$:

$P_2: 3(x-3) - 2(y+2) - 3(z+4) = 0$, $3x - 2y - 3z - 25 = 0$.

Найдем точку пересечения плоскости P_2 и прямой L_2:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z - 25 = 0, \\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{2} = t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3t+2,\ y = -2t-4,\ z = 2t+1, \\ 3(3t+2) - 2(-2t-4) - 3(2t+1) - 25 = 0, \end{cases}$$

$t = 2,\ x = 8,\ y = -8,\ z = 5$, $M_1(8;-8;5)$.

Искомая прямая проходит через точки M_0 и M_1. Ее уравнение: $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z+4}{9}$. ▲

Пример 20. На плоскости Oxy найти такую точку M, сумма расстояний от которой до точек $A(-1;2;5)$ и $B(11;-16;-10)$ была бы наименьшей.

Δ Пусть $B'(11;-16;-10)$. Очевидно, что $\left|\overline{MA}\right| + \left|\overline{MB}\right| = \left|\overline{MA}\right| + \left|\overline{MB'}\right|$. Но $\min \left|\overline{MA}\right| + \left|\overline{MB'}\right| = \left|\overline{AB'}\right|$. Таким образом, нужно провести прямую через точки $A(-1;2;5)$ и $B'(11;-16;-10)$ и найти точку пересечения этой прямой с плоскостью Oxy:

AB': $\dfrac{x+1}{12}=\dfrac{y-2}{-18}=\dfrac{z-5}{-15}$.

Положив $z=0$, получим $x=3,\ \ y=-4$, т. е. $M\,(3;-4;0)$. ▲

Дополнительные задачи

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

а) через ось Ox и точку $M_1\,(4;-1;2)$;

б) через ось Oy и точку $M_2\,(1;4;-3)$;

в) через ось Oz и точку $M_3\,(3;-4;7)$.

Ответ: а) $2y+z=0$; б) $x-z-1=0$; в) $5x+y-13=0$.

2. Составить общее и параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;-1)$ параллельно векторам $\bar{a}=(4;2;1)$ и $\bar{b}=(-5;1;2)$.

Ответ: $3x-13y+14z-5=0$; $x=2+4u-5v,\ y=-1+2u+v,\ z=-1+u+2v$.

3. Составить общее уравнение плоскости, заданной параметрически: $x=2+3u-4v,\ \ y=4-v,\ \ z=2+3u$.

Ответ: $x-4y-z+16=0$.

4. Определить, при каких значениях l и m плоскости $2x+ly+3z-5=0$ и $mx-6y-6z+2=0$ параллельны.

Ответ: $l=3,\ \ m=-4$.

5. Определить, при каком значении l плоскости $3x-5y+lz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны.

Ответ: $l=6$.

6. Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

7. Установить взаимное расположение двух данных плоскостей (пересекаются, параллельны, совпадают):

а) $x-y+3z+1=0$ и $2x-y+5z-2=0$;

б) $x=u+2v,\ \ y=1+v,\ \ z=u-v$ и $x=2+3t+s,\ y=1+t+s,\ z=2-2s$;

в) $x-2y+z+4=0$ и $-2x+4y-2z-8=0$.

Ответ: а) пересекаются; б) совпадают; в) совпадают.

8. Доказать, что плоскости $x=-1+8v,\ y=1+u+v,\ z=-u+3v$ и $x=1+2t+4s,\ y=4-y-3s,\ z=4+2t+5s$ параллельны и найти расстояние d между ними.

Ответ: $\bar{n}_1(4,-8,-8)\,||\,\bar{n}_2(1,-2,-2),\ \ d=4$.

9. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на координатных осях OX и OY отрезки

$a=-2, b=\frac{2}{3}$.

Ответ: $x-3y-2z+2=0$.

10. Доказать параллельность прямых $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

11. Установить взаимное расположение прямых $x=-t, y=-4-5t, z=3+3t$ и $\begin{cases} 4x+y+3z-5=0, \\ 7x-2y-z-5=0. \end{cases}$

Ответ: совпадают.

12. Доказать, что прямые параллельны, и найти расстояние между ними: $x=2t,\ y=0,\ z=3+3t,\ z=-2t$ и $\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ x-y+z-1=0. \end{cases}$

Ответ: $\sqrt{3}$.

13. Даны прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$. При каком значении l они пересекаются?

Ответ: $l=3$.

14. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$.

Ответ: $(2;-3;6)$.

15. Доказать, что прямые пересекаются, и найти координаты их точки пересечения: $x=-3t,\ y=2+3t,\ z=1$ и $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{13}=\frac{z-1}{10}$.

Ответ: $(1,1,1)$.

16. Доказать, что прямые скрещиваются, и найти расстояние между ними: $\frac{x-3}{-6}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$ и $x=-2+3t,\ y=4,\ z=3-t$.

Ответ: 31/13.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

Ответ: $6x-20y-11z+1=0$.

18. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$. Расстояние от точки A до плоскости $x+y+z+3=0$ равно $\sqrt{3}$. Найти координаты точки A.

Ответ: $A(1;0;-1)$ или $A(-1;-3;-2)$.

19. Даны точка $A(3;-1;1)$ и плоскость $x+2y+2z+6=0$. Найти координаты точки, симметричной точке A относительно этой плоскости.

Ответ: $(1;-5;-3)$.

20. Составьте уравнение плоскости, проецирующей прямую $\begin{cases} 2x-3y-4z+5=0, \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$ на плоскость XOZ.

Ответ: $5x-z-1=0$.

21. Составить канонические уравнения проекции прямой $x=1+2t$, $y=3+7$, $z=2+t$ на плоскость $3x-2y-z+14=0$.

Ответ: $\dfrac{x+5}{19}=\dfrac{y}{20}=\dfrac{z+1}{17}$.

Занятия 10–11

Кривые и поверхности второго порядка

Пример 1. Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси OY в точке $A(0;-3)$ и имеет радиус $r=2$.

Δ Очевидно, центр окружности находится в точке $O_1(-2;-3)$ или $O_2(2;-3)$. Соответственно уравнения этих окружностей:

$(x+2)^2+(y+3)^2=4,\ (x-2)^2+(y+3)^2=4$. ▲

Пример 2. Дана окружность $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Составить уравнение ее касательной в точке $A(5;5)$.

Δ Запишем уравнение прямой O_1A, где $O_1(1;2)$ – центр окружности:

$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{3}$.

Касательная к окружности проходит через точку $A(5;5)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}=(4;3)$. Ее уравнение: $4(x-5)+3(y-5)=0$, $4x+3y-35=0$. ▲

Пример 3. Определить тип кривой $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$.

Δ $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \sim (x+A)^2+(y+B)^2=A^2+B^2-C$. Если $A^2+B^2-C>0$ – окружность, $A^2+B^2-C=0$ – точка, то $A^2+B^2-C<0$ – $\varnothing$. ▲

Пример 4. Найти длины полуосей, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис эллипса:

1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{12^2}+\dfrac{y^2}{13^2}=1$.

Δ 1) Большая полуось равна 5, малая полуось равна 4;

эксцентриситет: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{25-16}}{5} = \dfrac{3}{5}$;

координаты фокусов: $F_1(c;\,0)$ и $F_2(-c;\,0)$, т. е. $F_1(3;\,0)$ и $F_2(-3;\,0)$;

уравнение директрис: $x = \pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \pm\dfrac{25}{3}$.

2) Большая полуось равна 13, малая полуось равна 12;

эксцентриситет: $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{169-144}}{13} = \dfrac{5}{13}$;

координаты фокусов: $F_1(0;\,c)$ и $F_2(0;\,-c)$, т. е. $F_1(0;\,5)$ и $F_2(0;\,-5)$;

уравнение директрис: $y = \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}} = \pm\dfrac{169}{5}$. ▲

Пример 5. Определить, какая линия определяется следующим уравнением:
$x = -5 + \dfrac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$.

Изобразить ее на чертеже.

Δ Преобразуем заданное уравнение:

$$x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}, \quad \begin{cases} 9(x+5)^2 - 4(8+2y-y^2) = 0, \\ x \ge -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x+5)^2 + 4(y^2-2y-8) = 0, \\ x \ge -5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 9(x+5)^2 + 4(y-1)^2 = 36, \\ x \ge -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+5)^2}{2^2} + \dfrac{(y-1)^2}{3^2} = 1, \\ x \ge -5. \end{cases}$$

Это правая половина эллипса с центром в $M_0(-5;1)$ и полуосями $a=2$ и $b=3$ (рис. 8).

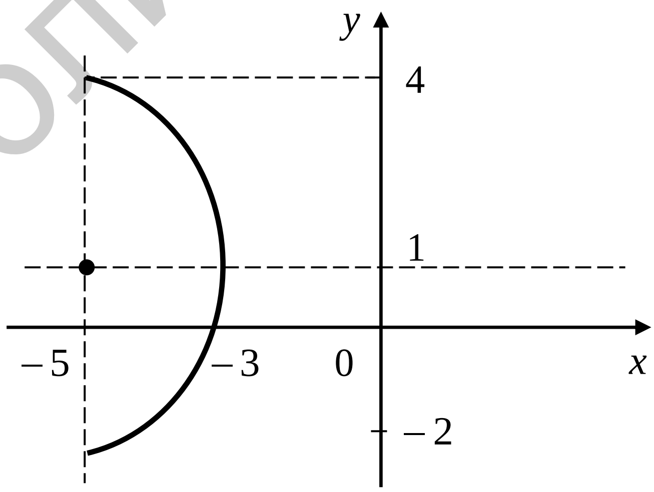


Рис. 8

Пример 6. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) расстояние между вершинами, лежащими на большой оси, равно 16, а расстояние между фокусами равно 10;

2) хорда, соединяющая две вершины эллипса, имеет длину 5 и наклонена к его большой оси под углом $\arcsin\frac{3}{5}$;

3) фокусами эллипса являются точки $(\pm1;\,0)$, а точка $\left(\sqrt{3};\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу;

4) фокусами эллипса являются точки $(\pm2;\,0)$, а директрисами являются прямые $x=\pm18$;

5) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси OY, равно 8.

Δ 1) $\begin{cases}2a=16,\\2c=10,\end{cases}$ $\begin{cases}a=8,\\c=5,\end{cases}$ $\begin{cases}a^2=64,\\b^2=a^2-c^2=39.\end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1.$

2) $b=5\cdot\dfrac{3}{5}=3,\ a=\sqrt{25-9}=4$. Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1;$

3) $\begin{cases}c=1,\\\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}a^2-b^2=1,\\\dfrac{3}{1+b^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}a^2-b^2=1,\\4b^4-11b^2-3=0,\end{cases}$ $\begin{cases}b^2=3,\\a^2=4.\end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1.$

4) $\begin{cases}c=2,\\\dfrac{a^2}{c}=18,\end{cases}$ $\begin{cases}c=2,\\a^2=36,\end{cases}$ $\begin{cases}c^2=4,\\a^2=36,\end{cases}$ $\begin{cases}a^2=36,\\b^2=a^2-c^2=32.\end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{32}=1.$

5) $\begin{cases}\dfrac{a^2}{c}-a=4,\\\dfrac{a^2}{c}=8,\end{cases}$ $\begin{cases}a=4,\\c=2,\end{cases}$ $\begin{cases}a^2=16,\\b^2=a^2-c^2=12.\end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1.$ ▲

Пример 7. Найти полуоси, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис и асимптот гиперболы $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Начертить ее график.

$\Delta \quad \begin{cases} a^2 = 16, \\ b^2 = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 4, \\ b = 3. \end{cases}$

Действительная полуось равна 4, мнимая полуось равна 3; эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \dfrac{5}{4}$; координаты фокусов: $F_1(c;\, 0)$ и $F_2(-c;\, 0)$, т. е. $F_1(5;\, 0)$ и $F_2(-5;\, 0)$; уравнения директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{4}{5/4} = \pm\dfrac{16}{5}$; уравнения асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm\dfrac{3}{4}x$. График гиперболы изображен на рис. 9.

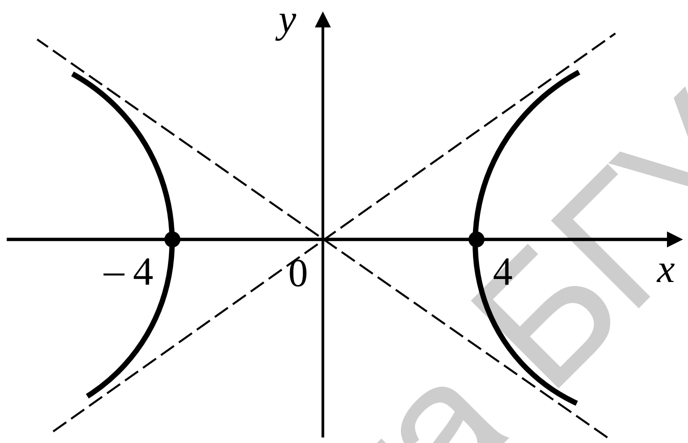


Рис. 9

Пример 8. В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) расстояние между вершинами равно 10, а расстояние между фокусами равно 12;

2) длина вещественной оси равна 1, а точка $(1;\, 3)$ принадлежит гиперболе;

3) длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит расстояние между фокусами в отношении $4:1$;

4) эксцентриситет гиперболы равен $\dfrac{7}{5}$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

Δ 1) $\begin{cases} 2a = 10, \\ 2c = 12, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 5, \\ c = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 25, \\ a^2 + b^2 = 36, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 25, \\ b^2 = 11. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$.

2) $\begin{cases} 2a = 1, \\ \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{4}, \\ -\dfrac{9}{b^2} = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{4}, \\ b^2 = 3. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{1/4} - \dfrac{y^2}{3} = 1.$

3) $\begin{cases} b = 1, \\ \dfrac{2a + c}{c - a} = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1, \\ 3c = 6a, \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 + b^2 = 4a^2, \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{1/3} - \dfrac{y^2}{1} = 1.$

4) $\begin{cases} \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{5}, \\ c - a = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} 5c - 7a = 0, \\ c - a = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 5, \\ c = 7, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ a^2 + b^2 = 49, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ b^2 = 24. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{24} = 1.$ ▲

Пример 9. В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) точка $(5; -5)$ принадлежит параболе;

2) расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

3) длина хорды, проходящей через фокус под углом $45°$ к оси параболы, равна 18.

Δ 1) Подставив координаты точки $(5; -5)$ в каноническое уравнение параболы, получим: $25 = 2p \cdot 5,\ p = 2{,}5$. Уравнение параболы: $y^2 = 5x$.

2) $\dfrac{p}{2} - \left(-\dfrac{p}{2}\right) = p = 12$. Уравнение параболы: $y^2 = 24x$.

3) Запишем уравнение прямой AB: $y = x - \dfrac{p}{2}$. Имеем $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 = 2px,$ $x^2 - 3px + \dfrac{p^2}{4} = 0$. Так как $x_1 + x_2 = 3p$ и $AF + BF = AC + BD = x_1 + x_2 + p$, то $4p = 18$, $2p = 9$.

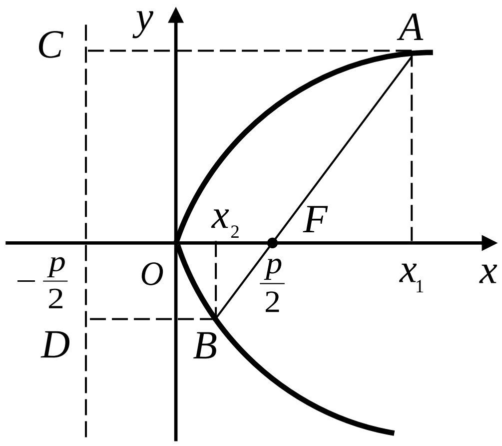


Рис. 10

Уравнение параболы: $y^2 = 9x$ (рис. 10). ▲

Пример 10. Составить уравнение параболы с параметром p, вершина которой имеет координаты $(a; b)$, а направление оси совпадает:

1) с положительным направлением оси OX;

2) с отрицательным направлением оси OX;

3) с положительным направлением оси OY;

4) с отрицательным направлением оси OY.

Δ 1) $(y - b)^2 = 2p(x - a)$;

2) $(y-b)^2=2p(a-x)$;

3) $(x-a)^2=2p(y-b)$;

4) $(x-a)^2=2p(b-y)$. ▲

Пример 11. Составить уравнение параболы с вершиной $A(2;1)$ и директрисой $2x-y+2=0$.

Δ Найдем проекцию точки A на директрису параболы:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}, \\ 2x-y+2=0, \end{cases} \qquad A'(0;\,2).$$

Пусть координаты фокуса параболы $F\,(x;\,y)$.

Тогда $\begin{cases} \dfrac{x+0}{2}=2, \\ \dfrac{y+2}{2}=1, \end{cases} \qquad F\,(4;\,0).$

Возьмем любую точку $M\,(x;\,y)$, принадлежащую параболе. Расстояние от этой точки до директрисы равно $\dfrac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}}$, а от этой точки до фокуса параболы – $\sqrt{(x-4)^2+y^2}$. Согласно определению параболы $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\dfrac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}}$, $5(x^2-8x+16)+5y^2=4x^2+y^2+4-4xy+8x-4y$, $x^2+4y^2+4xy-48x+$ $+4y+76=0$. ▲

Пример 12. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка $r=\dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$.

Δ Так как $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то из полярного уравнения кривой имеем:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9}{5-4\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \quad \sqrt{x^2+y^2}=\frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{5\sqrt{x^2+y^2}-4x},$$

$$5\sqrt{x^2+y^2}=9+4x, \quad \begin{cases} 25\,(x^2+y^2)=81+72x+16x^2, \\ x\ge -\dfrac{9}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2-72x+25y^2-81=0, \\ x\ge -\dfrac{9}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 9\,(x-4)^2-144+25y^2-81=0, \\ x\ge -\dfrac{9}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x-4)^2+25y^2=225, \\ x \geq -\dfrac{9}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x'^2+25y'^2=225, \\ x' \geq -\dfrac{25}{4}, \end{cases}$$

$9x'^2+25y'^2=225$, $\dfrac{x'^2}{25}+\dfrac{y'^2}{9}=1$ – уравнение эллипса. ▲

Пример 13. Семейство поверхностей задано уравнением, содержащим произвольный параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

а) $x^2+y^2+z^2=\lambda$; б) $\lambda x^2+y^2+z^2=1$; в) $\lambda x^2+y^2+z^2=\lambda$;

г) $x^2+y^2-z^2=\lambda$; д) $x^2-y^2-z^2=\lambda$; е) $x^2+\lambda(y^2+z^2)=1$;

ж) $x^2+\lambda(y^2+z^2)=\lambda$; з) $x^2+y^2=\lambda z$.

Δ а) При $\lambda>0$ – эллипсоид, при $\lambda=0$ – точка, при $\lambda<0$ – Ø; б) при $\lambda>0$ – эллипсоид, при $\lambda=0$ – эллиптический цилиндр, при $\lambda<0$ – однополостный гиперболоид; в) при $\lambda>0$ – эллипсоид, при $\lambda=0$ – прямая, при $\lambda<0$ – двуполостный гиперболоид; г) при $\lambda>0$ – однополостный гиперболоид, при $\lambda=0$ – конус, при $\lambda<0$ – двуполостный гиперболоид; д) при $\lambda>0$ – двуполостный гиперболоид, при $\lambda=0$ – конус, при $\lambda<0$ – однополостный гиперболоид; е) при $\lambda>0$ – эллипсоид, при $\lambda=0$ – пара параллельных плоскостей, при $\lambda<0$ – двуполостный гиперболоид; ж) при $\lambda>0$ – эллипсоид, при $\lambda=0$ – плоскость, при $\lambda<0$ – однополостный гиперболоид; з) при $\lambda\neq 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda=0$ – прямая. ▲

Пример 14. Определить тип поверхности:

а) $2x^2+y^2-3z^2-4x+4y+6=0$;

б) $2x^2-y^2+2z+1=0$;

в) $2x^2+z^2+2x+z=0$.

Δ а) $2x^2+y^2-3z^2-4x+4y+6=0$, $2(x-1)^2-2+(y+2)^2-4-3z^2+6=0$, $2(x-1)^2+(y+2)^2-3z^2=0$ – конус;

б) $2x^2-y^2+2z+1=0$, $2\left(z+\dfrac{1}{2}\right)=y^2-2x^2$ – гиперболический параболоид;

в) $2x^2+z^2+2x+z=0$, $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}=0$,

$2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ – эллиптический цилиндр. ▲

Пример 15. Методом сечений установить форму однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{4^2}=1$. Сделать рисунок.

Δ Будем пересекать поверхность плоскостями $y = h$ (рис. 11):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{4^2} = 1 + \dfrac{h^2}{3^2}, \\ y = h, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(2\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}\right)^2} + \dfrac{z^2}{\left(4\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}\right)^2} = 1, \\ y = h. \end{cases}$$

В любом таком сечении получается эллипс с полуосями $a_1 = 2\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}$ и $b_1 = 4\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}$. Сечения плоскостями $x = h$ и $z = h$ дает соответственно гиперболы

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1 - \dfrac{h^2}{2^2}, \\ x = h \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1 - \dfrac{h^2}{4^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Сечения плоскостями $x = \pm 2$ и $z = \pm 4$ дают пару пересекающихся прямых. При $h = 0$ получим сечения поверхности координатными плоскостями. Эти сечения называются главными.

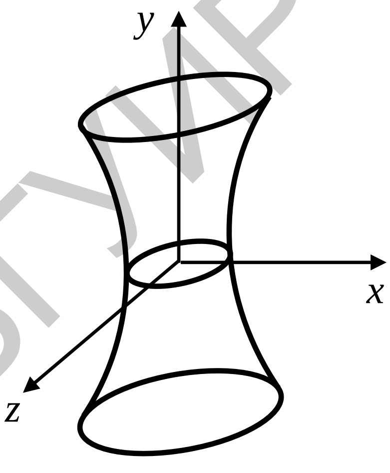


Рис. 11

В плоскости $y = 0$ эллипс имеет полуоси $a = 2$ и $c = 4$. В плоскости $x = 0$ гипербола имеет действительную полуось $c = 4$ и мнимую полуось $b = 3$. В плоскости $z = 0$ гипербола имеет действительную полуось $a = 2$ и мнимую полуось $b = 3$. ▲

Пример 16. Установить, при каких значениях m плоскость $x + mz - 1 = 0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = -1$: а) по эллипсу, б) по гиперболе.

Δ Сечение гиперболоида плоскостью $x = 1 - mz$ представляет собой кривую:

$$(1 - mz)^2 + y^2 - z^2 = -1, \;\; 1 - 2mz + m^2z^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

$$y^2 + (m^2 - 1)\left(z - \frac{m}{m^2 - 1}\right)^2 = \frac{2 - m^2}{m^2 - 1}, \;\; (|m| \neq 1).$$

Кривая будет представлять эллипс, если $\begin{cases} m^2 - 1 > 0, \\ 2 - m^2 > 0, \end{cases}$ $\quad 1 < |m| < \sqrt{2}$.

Кривая будет представлять гиперболу, если $\begin{cases} m^2 - 1 < 0, \\ 2 - m^2 \neq 0, \end{cases}$ $\quad |m| < 1$.

При $m = \pm 1$ в сечении получим параболу $z = \pm \dfrac{y^2 + 2}{2}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(-1;\,0)$ вдвое меньше расстояния до прямой $x=-4$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{12}=1.$

2. Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(2;\,0)$ и до прямой $5x+8=0$ относятся как $5:4$.

Ответ: $\dfrac{(x-8)^2}{8^2}-\dfrac{y^2}{24^2}=1.$

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0;\,2)$ и от прямой $y=4$.

Ответ: $x^2=-4(y-3)$.

4. Установить, какие кривые определяются нижеследующими уравнениями:

а) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$; б) $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{9}y^2-x+\dfrac{2}{3}y-1=0$;

в) $2x^2-4x+2y-3=0$.

Построить чертежи.

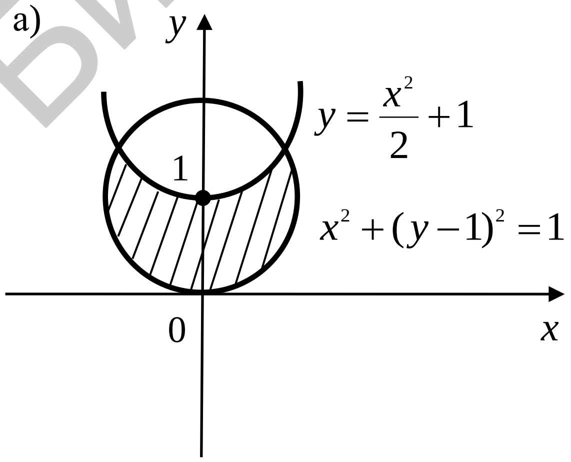
Ответ: а) эллипс $\dfrac{x'^2}{225}+\dfrac{y'^2}{16}=1$, новое начало координат $0'(1;\,-1)$; б) гипербола $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, новое начало координат $0'(2;\,3)$; в) парабола $x'^2=-y'$, новое начало $0'\left(1;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

5. Изобразить множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

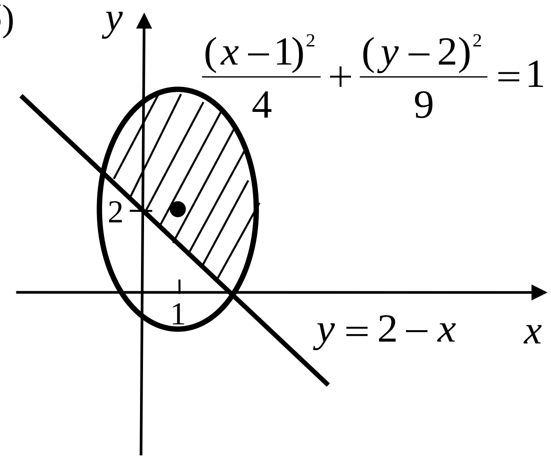
а) $\begin{cases} x^2+y^2\le 2y, \\ x^2+2\ge 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}\le 1, \\ x+y\ge 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2y>\sqrt{x^2+4}, \\ y<\sqrt{x+4}. \end{cases}$

Ответ:

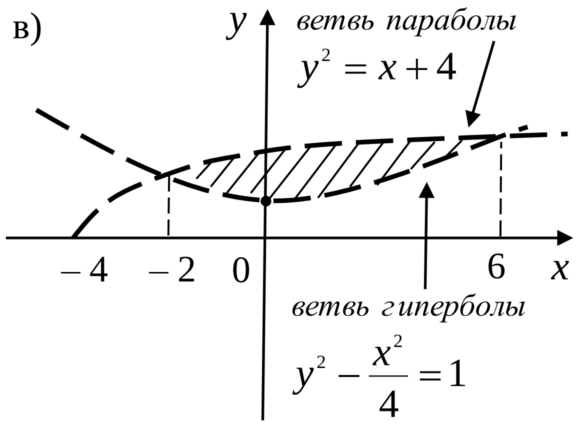
а)



б)



в)



6. Написать каноническое уравнение кривой $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Правая ветвь гиперболы.

7. Установить, какие кривые заданы уравнениями в полярных координатах:

а) $r = \dfrac{15}{3 - 7\cos\varphi}$; б) $r = \dfrac{7}{5 - 2\cos\varphi}$; в) $r = \dfrac{3}{4 - 4\cos\varphi}$; г) $r = \dfrac{6}{2 - \cos\varphi}$.

Ответ: а) гипербола; б) эллипс; в) парабола; г) эллипс.

8. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

а) $\lambda x^2 + y^2 = z$; б) $\lambda(x^2 + y^2) = z$; в) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$.

Ответ: а) при $\lambda > 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – параболический цилиндр, при $\lambda < 0$ – гиперболический параболоид; б) при $\lambda \neq 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – плоскость; в) при $\lambda > 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – плоскость, при $\lambda < 0$ – гиперболический параболоид.

9. Определить вид и параметры поверхности, а также схематически изобразить ее:

а) $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0$;

б) $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 8x - 6y - 12z - 1 = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 + z^2 - 2x + 12y - 4z - 3 = 0$;

г) $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 24x - 6y - 36z - 4z + 25 = 0$;

д) $2x^2 + 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 47 = 0$;

е) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 6y + 3 = 0$;

ж) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y + 21 = 0$.

Ответ: а) эллипсоид $\dfrac{(x-1)^2}{8} + \dfrac{(y+2)^2}{6} + \dfrac{(z-3)^2}{4} = 1$; б) однополостный гиперболоид $\dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(y-1)^2}{2} - \dfrac{(z+1)^2}{1} = 1$; в) двуполостный гиперболоид

$(x-1)^2-4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=-1$; г) конус $\frac{(x+2)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{(z+1)^2}{3}=0$; д) эллиптический параболоид $\frac{(x+4)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{2}=2(z+1)$; е) гиперболический цилиндр $\frac{(x-3)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$; ж) эллиптический цилиндр $9(x+1)^2+4(y+2)^2=4$.

10. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе. Найти ее параметр и вершину.

Ответ: $15; \left(0;-6;-\frac{3}{2}\right)$.

11. Установить, при каких значениях m плоскость $x+my-2=0$ пересекает эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$: а) по эллипсу; б) по параболе.

Ответ: а) $m\neq 0$ и $m>-\frac{1}{4}$; б) $m=0$.

12. Доказать, что через точку $A(4;3;0)$, принадлежащую гиперболическому параболоиду $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$, можно провести две прямые, целиком лежащие на параболоиде. Составить канонические уравнения этих прямых.

Ответ: $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{0}$; $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{2}$.

Занятие 12

Контрольная работа
«Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

Вариант 1

1. Доказать, что векторы $\bar{a}=(-1;2)$ и $\bar{b}=(2;-3)$ образуют в V_2 базис. Найти координаты вектора $\bar{c}=(1;0)$ в этом базисе.

Ответ: $(3;2)$.

2. Даны вершины четырехугольника $A(1;1;-4)$, $B(-5;3;-5)$, $C(-3;1;2)$ и $D(4;0;1)$. Методом векторной алгебры найти угол между диагоналями AC и BD.

Ответ: 90°.

3. Даны точки $A(2;1;-1)$, $B(3;0;2)$, $C(5;1;1)$ и $D(0;-1;3)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найти:

а) методом векторной алгебры объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины C;

б) длину высоты, опущенной из вершины C методом аналитической геометрии.

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{30}}$.

4. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$, и параллельной прямой $15x-8y+105=0$.

Ответ: $15x-8y-6=0$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(3;5)$, $B(6;-2)$ и $C(-4;-1)$. Найти уравнение перпендикуляра, проведенного из вершины B на медиану, исходящую из вершины A.

Ответ: $4x+13y+2=0$.

6. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{m}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases}2x+y-4z+3=0,\\4x-y-5z+2=0?\end{cases}$

Ответ: $m=6$.

7. Составить уравнение плоскости, проецирующей прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{2}$ на плоскость $3x-2y+5z-6=0$.

Ответ: $x-y-z-3=0$.

8. Найти уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса $5x^2+8y^2=40$.

Ответ: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

9. Определить вид поверхности и изобразить ее: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$.

Ответ: двуполостный гиперболоид.

Вариант 2

1. Доказать, что векторы $\bar{a}=(1;-4)$ и $\bar{b}=(2;1)$ образуют в V_2 базис. Найти координаты вектора $\bar{c}=(5;-11)$ в этом базисе.

Ответ: $(3;1)$.

2. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и

$D(-5;-5;3)$. Методом векторной алгебры найти угол между диагоналями AC и BD.

Ответ: $90°$.

3. Даны точки $A(3;5;4)$, $B(8;7;4)$, $C(5;10;4)$ и $D(4;7;8)$. Найти:

а) методом векторной алгебры объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины D.

б) длину высоты, опущенной из вершины D методом аналитической геометрии.

Ответ: а) 14; б) 4.

4. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;5)$, и параллельной прямой $17x-5y-97=0$.

Ответ: $17x-5y-9=0$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$ и $C(2;1)$. Найти уравнение перпендикуляра, проведенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.

Ответ: $4x+3y-1=0$.

6. При каком значении n прямая $\frac{x-1}{n}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-1}$ параллельна прямой $\begin{cases} x+y-z+3=0, \\ x-y-5z-4=0? \end{cases}$

Ответ: $n=-3$.

7. Составить уравнение плоскости, проецирующей прямую $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ на плоскость $3x+y-z+2=0$.

Ответ: $x-5y-2z+11=0$.

8. Найти уравнение эллипса, вершины которого находятся в фокусах, а фокусы в вершинах гиперболы $4x^2-3y^2=12$.

Ответ: $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{4}=1$.

9. Определить вид поверхности и изобразить ее: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$.

Ответ: однополостный гиперболоид.

Занятие 13

Линейные пространства. Ранг матрицы

Пример 1. Рассмотрим множество P положительных чисел со следующими операциями: $x\oplus y=xy$ для любых x и y из P; $a\otimes x=x^a$ для любого

x из P и любого действительного числа a. Доказать, что множество P с указанными операциями образует линейное пространство. Найти размерность и базис этого пространства.

Δ Очевидно, обе операции корректны. Проверим выполнение восьми аксиом определения линейного пространства.

1. Для любых x и y из P: $x \oplus y = y \oplus x$, т. к. $xy = yx$.

2. Для любых x, y, z из P: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, т. к. $(xy)z = x(yz)$.

3. Существует такое число θ из P, что $x \oplus \theta = x$. Этим числом является 1, т. к. $x \cdot 1 = x$.

4. Для каждого числа x из P существует такое число x', что $x \oplus x' = \theta$. Этим числом является $\dfrac{1}{x}$, т. к. $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$.

5. Для каждого x: $1 \otimes x = x$, т. к. $x^1 = x$.

6. $a \otimes (b \otimes x) = (ab) \otimes x$, т. к. $(x^b)^a = x^{ab}$.

7. $(a+b) \otimes x = (a \otimes x) + (b \otimes x)$, т. к. $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$.

8. $a \otimes (x \oplus y) = (a \otimes x) + (a \otimes y)$, т. к. $(xy)^a = x^a \cdot y^a$.

Найдем размерность этого пространства. Возьмем любое число, отличное от 1. Например 2. Покажем, что любое число x может быть выражено в виде линейной комбинации числа 2: $x = a \otimes 2 = 2^a$. Отсюда $a = \log_2 x$. Таким образом, размерность линейного пространства P равна 1. В качестве базиса можно взять любое число этого множества, отличное от 1. ▲

Пример 2. Является ли линейным пространством множество $\boldsymbol{Z}$ всех целых чисел с обычными операциями сложения и умножения?

Δ Для любых $x, y \in \boldsymbol{Z}$ $\quad x \oplus y = x + y \in \boldsymbol{Z}$; однако, для любых $x \in \boldsymbol{Z}$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ $\quad \alpha \oplus x = \alpha \cdot x$ не всегда принадлежит множеству целых чисел. Например, для $x = 5$ и $\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\alpha \otimes x = \alpha \cdot x = \dfrac{1}{2} \cdot 5 = \dfrac{5}{2}$ – не целое число. Значит, множество $\boldsymbol{Z}$ не является линейным пространством. ▲

Пример 3. Показать, что все многочлены степени не выше n образуют линейное пространство. Найти базис и размерность этого пространства.

Δ Сумма двух многочленов степени не выше n и умножение многочлена степени не выше n на число a есть многочлен степени не выше n. Выполнение всех восьми аксиом линейного пространства очевидно. Рассмотрим следующую систему векторов: $\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = x, \bar{e}_3 = x^2, \ldots, \bar{e}_{n+1} = x^n$. Она является линейно независимой, т. к. равенство $c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_{n+1} x^n \equiv 0$ выполняется только тогда, когда $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n+1} = 0$. Любой многочлен степени не выше n $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n+1} x^n = a_0 \cdot \bar{e}_1 + a_1 \bar{e}_2 + \ldots + a_{n+1} \bar{e}_{n+1}$ может быть представлен в виде линейной комбинации указанных векторов. Таким образом, указанная система векторов (многочленов) является базисом. Размерность рассмотренного линейного пространства равна $n+1$. ▲

Пример 4. Пусть $c\,[a,b]$ – множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на действительное число. Доказать, что множество $c\,[a,b]$ образует линейное пространство.

Δ Прежде всего заметим, что если $f(x),\ g(x) \in c[a,b],$ а $\alpha \in \boldsymbol{R}$ – действительное число, то $f(x) \oplus g(x) = f(x) + g(x) \in c[a,b]$ и $\alpha \otimes f(x) = = \alpha \cdot f(x) \in c[a,b]$, т. е. операции сложения функций и умножения функции на действительное число корректны.

Проверим выполнение восьми аксиом линейного пространства. Очевидно, что для любых $f(x),\ g(x), h(x)$ из $c[a,b]$ имеют место следующие равенства:

$f(x) \oplus g(x) = g(x) \oplus f(x)$, т. к. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.

$(f(x) \oplus g(x)) \oplus h(x) = f(x) + ((g(x) + h(x))$.

Таким образом, аксиомы 1 и 2 линейного пространства выполнены. Далее, нулевым элементом пространства $c[a,b]$ является функция $\theta(x) \equiv 0$. Она удовлетворяет аксиоме 3: для любой функции $f(x) \in c[a,b]$ справедливо равенство $f(x) \oplus \theta(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$.

Противоположным элементом для любой функции $f(x) \in c[a,b]$ служит функция $-f(x)$, которая также принадлежит $c[a,b]$:

$f(x) \oplus (-f(x)) = f(x) + (-f(x)) = \theta(x)$,

т. е. аксиома 4 выполнена. Очевидно, что выполняются и остальные аксиомы.

5. Для любой $f(x) \in c[a,b]$: $1 \otimes f(x) = f(x)$, т. к. $1 \cdot f(x) = f(x)$.

6. Для любой $f(x) \in c[a,b]$ и для любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$: $\alpha \otimes (\beta \otimes f(x)) = (\alpha\beta) \otimes f(x)$, т. к. $\alpha \otimes (\beta f(x)) = (\alpha\beta) f(x)$.

7. Для любой $f(x) \in c[a,b]$ и для любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$: $(\alpha + \beta) \otimes f(x) = (\alpha \otimes f(x)) \oplus (\beta \otimes f(x))$, т. к. $(\alpha + \beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$.

8. Для любых $f(x),\ g(x) \in c[a,b]$ и для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$: $\alpha \otimes (f(x) \oplus g(x)) = (\alpha \otimes f(x)) \oplus (\alpha \otimes g(x))$, т. к. $\alpha\,(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$.

Таким образом, $c[a,b]$ – линейное пространство. ▲

Пример 5. Показать, что множество векторов на координатной плоскости, отложенных от начала координат и расположенных в первом квадранте с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число, не является линейным пространством.

Δ Действительно, при умножении вектора, отложенного от начала координат и расположенного в первом квадранте, на любое отрицательное число, получаем вектор, расположенный в третьем квадранте и, следовательно, не принадлежащий данному множеству векторов. Поэтому данное множество не является линейным пространством. ▲

Пример 6. Исследовать на линейную зависимость следующие векторы:

а) $\bar{a} = (3; 5; 0)$, $\quad \bar{b} = (-2; -3; 1)$, $\quad \bar{c} = (1; -1; 2)$;

б) $\bar{a} = (1;\ 0;\ 2)$, $\quad \bar{b} = (2;\ -4;\ 0)$, $\quad \bar{c} = (-5;\ 1;\ -9)$.

Δ а) Составим векторное равенство $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$. Имеем $\alpha(3;\ 5;\ 0) + \beta(-2;\ -3;\ 1) + \gamma(1;\ -1;\ 2) = (0;\ 0;\ 0)$, т. е.

$(3\alpha - 2\beta + \gamma;\ \ 5\alpha - 3\beta - \gamma;\ \ \beta + 2\gamma) = (0;\ 0;\ 0)$.

Отсюда получаем систему уравнений $\begin{cases} 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0, \\ 5\alpha - 3\beta - \gamma = 0, \\ \beta + 2\gamma = 0. \end{cases}$

Эта система имеет только нулевое решение: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Следовательно, векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно-независимы.

б) Составим равенство $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$. В координатной форме записи оно равносильно системе $\begin{cases} \alpha + 2\beta - 5\gamma = 0, \\ -4\beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha - 9\gamma = 0. \end{cases}$ откуда $\alpha = \dfrac{9}{2}\gamma,\ \beta = \dfrac{1}{4}\gamma$.

Таким образом, равенство $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$ справедливо при $\alpha = \dfrac{9}{2}\gamma,\ \beta = \dfrac{1}{4}\gamma$, т. е. имеет место равенство $\dfrac{9}{2}\gamma\bar{a} + \dfrac{1}{4}\gamma\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$ или $\bar{c} = -\dfrac{9}{2}\bar{a} - \dfrac{1}{4}\bar{b}$. Следовательно, вектор $\bar{c}$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ – линейно зависимы. ▲

Пример 7. Доказать линейную зависимость векторов $\bar{a} = (1;\ 2;\ -1;\ 0)$, $\bar{b} = (1;\ -1;\ 2;\ -2)$, $\bar{c} = (3;\ 3;\ 0;\ -2)$.

Δ Очевидно, что $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$. Система векторов линейно зависима. ▲

Пример 8. Показать, что в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка векторы $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ образуют базис, и найти в указанном базисе координаты вектора $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Δ Составим линейную комбинацию указанных векторов и приравняем ее к нулевому вектору:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 & 4\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$

Итак, векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ линейно независимы, т. е. образуют базис.

Покажем, что любой вектор $\bar{x}$ выражается через линейную комбинацию указанных векторов: $\bar{x}=\beta_1\bar{e}_1+\beta_2\bar{e}_2+\beta_3\bar{e}_3+\beta_4\bar{e}_4=\begin{pmatrix}\beta_1 & 2\beta_2\\ 3\beta_3 & 4\beta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$,

$\beta_1=x_1, \beta_2=\dfrac{x_2}{2},\ \beta_3=\dfrac{x_3}{3},\ \beta_4=\dfrac{x_4}{4},\ \bar{x}=\left(x_1; \dfrac{x_2}{2}; \dfrac{x_3}{3}; \dfrac{x_4}{4}\right)$.

Так как по условию для вектора $\bar{a}: x_1=3, x_2=8, x_3=-6, x_4=4$, то вектор $\bar{a}$ в указанном базисе имеет координаты $(3; 4; -2; 1)$. ▲

Пример 9. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\bar{x}_1=e^t, \bar{x}_2=e^{2t}, \bar{x}_3=e^{3t}, t\in \boldsymbol{R}$.

Δ Предположим, что система векторов линейно зависима.

Тогда $\alpha_1 e^t+\alpha_2 e^{2t}+\alpha_3 e^{3t}\equiv 0,\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\neq 0$.

Сократив на e^t и продифференцировав равенство, получим $\alpha_2 e^t+2\alpha_3 e^{2t}\equiv 0$. Опять сокращаем на e^t и дифференцируем равенство: $2\alpha_3 e^t\equiv 0$. Положив во всех равенствах $t=0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,\\ \quad\alpha_2+2\alpha_3=0,\\ \qquad 2\alpha_3=0.\end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение. Полученное противоречие указывает на то, что система функций e^t, e^{2t} и e^{3t} является линейно независимой на множестве $-\infty<t<\infty$. ▲

Пример 10. Найти координаты вектора x^2+2x+3 в базисе $\bar{f}_1=1,\ \bar{f}_2=x+3,\ \bar{f}_3=(x+3)^2$.

Δ Составим линейную комбинацию векторов $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ и приравняем ее к нулевому вектору: $\alpha_1\bar{f}_1+\alpha_2\bar{f}_2+\alpha_3\bar{f}_3=\bar{0}$, отсюда $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2(x+3)+\alpha_3(x+3)^2=0$. Это равенство должно выполняться для любого $x\in\boldsymbol{R}$. Продифференцировав его по x, получим $\alpha_2+2\alpha_3(x+3)=0$. Дифференцируя последнее равенство по x, получаем $2\alpha_3=0$. Полагая во всех трех равенствах $x=0$, получаем систему

уравнений $\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3=0,\\ \alpha_2+6\alpha_3=0,\\ 2\alpha_3=0.\end{cases}$

Единственным решением этой системы является нулевое, т. е. $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \alpha_3=0$. А это значит, что векторы $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ и $\bar{f}_3$ являются линейно-независимыми, т. е. образуют базис.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – координаты вектора x^2+2x+3 в базисе $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$, т. е. $x^2+2x+3=\beta_1\cdot 1+\beta_2(x+3)+\beta_3(x+3)^2$.

Приравнивая в левой и правой частях последнего равенства координаты при одинаковых степенях x, получим систему $\left.\begin{array}{l} x^2: 1=\beta_3, \\ x: \ 2=\beta_2+6\beta_3 \\ x^0: 3=\beta_1+3\beta_2+9\beta_3 \end{array}\right\}$, откуда получаем $\beta_1=6, \beta_2=-4, \beta_3=1$. Значит $x^2+2x+3=6\cdot 1-4\,(x+3)+1\,(x+3)^2=$ $=6\bar{f}_1-4\bar{f}_2+1\bar{f}_3$. ▲

Пример 11. Используя определение ранга матрицы, найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Δ а) Очевидно, что ранг этой матрицы не меньше единицы, т. к. среди миноров первого порядка есть ненулевые. Из данной матрицы можно составить 9 миноров второго порядка, среди которых имеются отличные от нуля, например $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$. Единственный минор третьего порядка – это определитель матрицы. Так как $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-16\neq 0$, то ранг матрицы равен трем.

б) Среди миноров второго порядка есть отличный от нуля минор, например $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$. Все миноры третьего порядка за исключением, быть может, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ заведомо равны нулю. Вычислим указанный минор: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}=0$.

Все миноры третьего порядка равны нулю. Следовательно, $r=2$. ▲

Пример 12. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & -11 & -12 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Δ а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & -11 & -12 \end{pmatrix}$. Из второй строки матрицы вычтем первую, умноженную на 4, а из третьей строки – первую, умноженную на 5: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & -13 & -11 \\ 0 & 18 & -26 & -22 \end{pmatrix}$. Затем из третьей строки полученной матрицы вычтем вторую, умноженную на 2: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 9 & -13 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

В результате получили матрицу ступенчатого вида, которая имеет две ненулевые строки. Следовательно, ранг данной матрицы, а значит и матрицы A, равен двум. В качестве базисного минора в последней матрице можно взять минор ($M_{1,2-\text{номера строк}}^{1,2-\text{номера столбцов}}$) $M_{1,2}^{1,2}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 9\end{vmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$ $(1)\leftrightarrow(2)\sim$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}\sim \begin{matrix}(2)\to(2)-2\cdot(1)\\ (4)\to 4-4\cdot(1)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 & -3\end{pmatrix}\sim\ (2)\leftrightarrow(3)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 & -3\end{pmatrix}\sim\ (4)\leftrightarrow(4)-(2)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\end{pmatrix}\sim\ (4)-(4)-(3)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Полученная матрица ступенчатого типа имеет три ненулевые строки, поэтому ранг этой матрицы и, следовательно, матрицы A равен трем. Базисным минором в последней матрице является $M_{1,2,3}^{1,2,4}$. ▲

Пример 13. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Δ Как известно, если матрица содержит минор k-го порядка D, отличный от нуля, а все миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие минор D, равны нулю, то ранг матрицы равен k. Можно проверить, что $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

Существуют два минора четвертого порядка, окаймляющие данный минор:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен трем.

Пример 14. В R^6 задана система векторов $\bar{x}_1=(1;1;1;1;1;7)$, $\bar{x}_2=(3;2;1;1;-3;-2)$, $\bar{x}_3=(0;1;2;2;6;23)$, $\bar{x}_4=(5;4;3;3;-1;12)$. Пусть $L=L(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)$ – линейная оболочка. Найти размерность и базис L.

Δ Составим матрицу системы векторов и методом элементарных преобразований определим ее ранг:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу с двумя ненулевыми строками. Значит, $r(L)=2$. Так как минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$, то в качестве базисных векторов линейной оболочки можно взять векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. ▲

Пример 15. Найти матрицы перехода от базиса $(x^2, x, 1)$ к базису $((x+1)^2, (x+1), 1)$ и от базиса $((x+1)^2, (x+1), 1)$ к базису $(x^2, x, 1)$.

Δ Так как $\bar{e}_1=x^2$, $\bar{e}_2=x$, $\bar{e}_3=1$, $\bar{e}'=x^2+2x+1$, $\bar{e}_2'=x+1$, $\bar{e}_3'=1$, то $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3'=\bar{e}_3$. Матрица перехода от первого базиса ко второму будет иметь вид $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. Так как $x^2=(x+1)^2-2(x+1)+1$, $x=(x+1)-1$, то $\bar{e}_1=\bar{e}_1'-2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_2=\bar{e}_2'-\bar{e}_3'$, $\bar{e}_3=\bar{e}_3'$. Матрица перехода от второго базиса к первому имеет вид $T_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$. ▲

Пример 16. Дана матрица $T=\begin{pmatrix}3&-2\\1&2\end{pmatrix}$ перехода от базиса $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ к базису $(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$. Найти координаты вектора $\bar{a}=4\bar{e}_1'+\bar{e}_2'$ в базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ и координаты вектора $\bar{b}=4\bar{e}_1+\bar{e}_2$ в базисе $(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$.

Δ Известно, что $x=Tx'$ и $x'=T^{-1}x$, где x и x' – векторы столбцы из координат векторов соответственно в базисах $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ и $(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$. Так как

$$T^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&2\\-1&3\end{pmatrix},\text{ то } x=\begin{pmatrix}3&-2\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix},\ x'=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&2\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{8}\end{pmatrix}.\ ▲$$

Пример 17. Найти матрицу перехода от базиса $(\bar{a}_1,\bar{a}_2)$ к базису $(\bar{b}_1,\bar{b}_2)$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$:

$$\bar{a}_1=\bar{e}_1+4\bar{e}_2,\ \bar{a}_2=3\bar{e}_1+5\bar{e}_2,\ \bar{b}_1=7\bar{e}_1+\bar{e}_2,\ \bar{b}_2=\bar{e}_2.$$

Δ Так как $\begin{cases}\bar{e}_1+4\bar{e}_2=\bar{a}_1,\\3\bar{e}_1+5\bar{e}_2=\bar{a}_2,\end{cases}$ то $\begin{aligned}\bar{e}_1&=-\frac{1}{7}(5\bar{a}_1-4\bar{a}_2),\\ \bar{e}_2&=\frac{1}{7}(3\bar{a}_1-\bar{a}_2).\end{aligned}$

$$\bar{b}_1=7\bar{e}_1+\bar{e}_2=-\frac{32}{7}\bar{a}_1+\frac{27}{7}\bar{a}_2,\quad \bar{b}_2=\bar{e}_2=\frac{3}{7}\bar{a}_1-\frac{1}{7}\bar{a}_2.$$

Итак, $T=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-32&3\\27&-1\end{pmatrix}$. ▲

Пример 18. Найти матрицу перехода от базиса $(\bar{a}_1=3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{a}_2=\bar{e}_1-2\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{a}_3=2\bar{e}_1+2\bar{e}_2+3\bar{e}_3)$ к базису $(\bar{b}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2$, $\bar{b}_2=\bar{e}_1-\bar{e}_3$, $\bar{b}_3=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)$.

Δ Находим матрицы T_1 и T_2 перехода от базиса $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ к базису $(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$ и от $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ к $(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$:

$$T_1=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&-2&2\\1&1&3\end{pmatrix},\qquad T_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Пусть $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1', x_2', x_3'\}$ и $\{x_1'', x_2'', x_3''\}$ – координаты одного и того же вектора в базисах $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$, $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ соответственно.

Тогда $\bar{x} = T_1\bar{x}'$ и $\vec{x} = T_2\bar{x}''$. Отсюда $T_1\bar{x}' = T_2\bar{x}''$, $\bar{x}' = T_1^{-1}T_2\bar{x}''$, т. е. искомая матрица перехода есть $T = T_1^{-1} \cdot T_2$. Так как $T_1^{-1} = -\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} -8 & -1 & 6 \\ -4 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & -8 \end{pmatrix}$, то

$$T = T_1^{-1} \cdot T_2 = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -8 & -1 & 6 \\ -4 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 9 & 14 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & -12 & 6 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Доказать, что множество всех матриц размером $m \times n$ с определенными ранее операциями над матрицами является линейным пространством. Найти размерность этого пространства и указать простейший базис.

Ответ: размерность равна mn.

2. Образуют ли линейное пространство векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат: Ox или Oy?

Ответ: нет.

3. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

а) $\bar{a} = (2; 1; -1)$, $\bar{b} = (-1; 3; 4)$, $\bar{c} = (1; 2; -3)$;

б) $\bar{a} = (-1; 2; 0)$, $\bar{b} = (1; 2; -1)$, $\bar{c} = (3; 0; 1)$;

в) $\bar{x}_1 = \sin t$, $\bar{x}_2 = \sin 2t$, $\bar{x}_3 = \sin 3t$.

Ответ: а), в) независимы; б) зависима.

4. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j}$. Доказать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$ в базисе $(\bar{a}, \bar{b})$.

Ответ: $(-2; 2)$.

5. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r = 2$; б) $r = 3$.

6. Найти значения λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?

Ответ: при $\lambda = 0,\ r = 2;$ при $\lambda \neq 0,\ r = 3.$

7. Вычислить ранг матрицы при помощи элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 23 & 5 & -18 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r = 2$; б) $r = 3$.

8. В R^4 даны векторы $\bar{x}_1 = (1;\ 2;\ 0;\ 6)$, $\bar{x}_2 = (2;\ 0;\ 3;\ 1)$, $\bar{x}_3 = (3;\ 2;\ 3;\ 7)$, $\bar{x}_4 = (7;\ 2;\ 9;\ 9)$. Найти ранг системы векторов и указать базисные векторы.

Ответ: $r = 2$. Любые два вектора системы векторов образуют базис.

9. Пусть даны векторы $\bar{x}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\bar{x}_2 = (1;\ 2;\ 3)$, $\bar{x}_3 = (2;\ 1;\ 0)$, $\bar{x}_4 = (3;\ 4;\ 5)$. Доказать, что $L(\bar{x}_1;\ \bar{x}_2) = L(\bar{x}_3;\ \bar{x}_4)$.

10. Доказать, что вектор $\bar{a} = (2, -1, 6, 4) \in L(\bar{x}_1; \bar{x}_2)$, где $\bar{x}_1 = (1;\ 5;\ -2;\ 1)$, $\bar{x}_2 = (11;\ 11;\ 18;\ 19)$.

11. Найти матрицу перехода от базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ к базису $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ и матрицу перехода от базиса $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ к базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, если $\bar{a} = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_3$, $\bar{b} = 3\bar{e}_3 - \bar{e}_2$, $\bar{c} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_3$.

Ответ: $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

Занятия 14–15

Системы линейных уравнений

Пример 1. Средствами матричного исчисления решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=4, \\ -3x_1+2x_2=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=3, \\ 2x_1+x_2-7x_3=1, \\ 3x_1-4x_2+2x_3=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3-2x_4=1, \\ 5x_1+4x_2-2x_3+x_4=3, \\ 4x_1+3x_2-3x_3-x_4=4, \\ 3x_1+x_2-x_4=3. \end{cases}$

Δ а) Данную систему можно заменить матричным уравнением $AX=C$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Вычислим определитель матрицы A: $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=4+9=13$. Так как $\Delta\neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}, и система имеет единственное решение.

Вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$A_{11}=2,\ A_{12}=3,\ A_{21}=-3,\ A_{22}=2$.

Присоединенная матрица B имеет вид $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (совпадение с матрицей A случайное). Следовательно, $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}B^T=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Умножив обе части равенства $AX=C$ на A^{-1} слева, получим $X=A^{-1}C$, или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -13 \\ 26 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=-1,\ x_2=2$.

б) Заменим систему линейных уравнений матричным уравнением $AX=C$. Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}=-20.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то существует обратная матрица, и система имеет единственное решение. Вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-26;\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-25;\ A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-11;$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-12;\ A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-10;\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-2;$

$A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}=10;\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}=15;\ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5.$

Присоединенная матрица B имеет вид $B=\begin{pmatrix}-26 & -25 & -11\\ -12 & -10 & -2\\ 10 & 15 & 5\end{pmatrix}$.

Следовательно, $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}B^{T}=-\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{pmatrix}$. Отсюда получаем

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-60\\ -40\\ -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=1.$

в) Заменим данную систему матричным уравнением $A\cdot X=C$ и найдем определитель матрицы A:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 3 & -2\\ 5 & 4 & -2 & 1\\ 4 & 3 & -3 & -1\\ 3 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & -3 & -1\\ 3 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2 & 3 & -1\\ -1 & -7 & -9\\ -2 & -3 & -7\end{vmatrix}=0.$$

Так как $\Delta=0$, то матрицы, обратной к A, не существует и следовательно исходную систему нельзя решить матричным методом. ▲

Пример 2. Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=3,\\ 3x_1+x_2+2x_3=7,\\ 2x_1+3x_2+x_3=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1+x_3=4,\\ x_2+x_3=5,\\ x_1+2x_2+4x_3=17;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x_1+4x_2-x_4=1,\\ 4x_1-x_3-x_4=3,\\ 2x_1-x_4=0,\\ 2x_1+x_3=1.\end{cases}$

Δ а) Вычислим определитель системы: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=18$. Так как $\Delta\neq 0$, система имеет единственное решение.

Вычисляем определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ 7 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=36,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 7 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-18,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=18.$$

Следовательно, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=2,\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=-1,\ \ x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=1.$

б) Вычислим определитель системы: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=1\neq 0.$ Система имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 17 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 3.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{1}{1} = 1,\ x_2 = \dfrac{2}{1} = 2,\ x_3 = \dfrac{3}{1} = 3.$

в) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 4 = -16 \neq 0 .$$

Следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 4 = -16 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & & -1 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-4) = 16 ;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 8 = -32 .$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-16}{-16} = 1,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{0}{16} = 0,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{16}{-16} = -1,$

$x_4 = \dfrac{\Delta_4}{\Delta} = \dfrac{-32}{-16} = 2.$ ▲

Пример 3. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 6x_1 - 8x_2 - 11x_3 = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$

Δ а) Преобразуем расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

Мы пришли к системе уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ \qquad\quad -8x_3 = 8, \end{cases}$ обладающей единственным решением: $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1.$

б) Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 6 & -8 & -11 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \\ 6 & -8 & -11 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -8 & -11 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & 7 & 5 \\ 0 & 10 & 7 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Минор $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, отсюда ранг основной и расширенной матрицы системы равен 2, т. е. система совместна. Так как число неизвестных системы $n = 3 > 2$, то система имеет бесконечное множество решений. Найдем их.

Исходная система равносильна следующей: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -1, \\ 10x_2 + 7x_3 = 5. \end{cases}$

В качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2, тогда x_3 – свободная неизвестная. Перенося x_3 в правую часть, получаем:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -1 + 3x_3, \\ 10x_2 = 5 - 7x_3. \end{cases}$$

Отсюда имеем: $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{7}{10}x_3,\ x_1 = -1 + 3x_3 + 3x_2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{10}x_3,\ x_3 \in \boldsymbol{R}$.

в) Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 1 & 5 & -19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Ранг основной матрицы системы равен 2, а расширенной матрицы равен 3. Значит система несовместна.

г) Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

откуда $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4, \end{cases}$ а значит $x_2 = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}x_3 + x_4$; $x_1 = -2x_2 - 3x_3 + x_4 =$

$= \dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{3}x_3 - x_4, \;\; x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}$.

д) Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right).$$

Система несовместна, т. к. равносильная ей система содержит уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 14$. ▲

Пример 4. Исследовать на совместность системы линейных уравнений, заданные своими расширенными матрицами:

а) $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$; б) $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & -4 & 5 \\ 4 & 6 & -5 & -7 & -4 \end{array}\right)$;

в) $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 5 \end{array}\right)$.

Δ а) Используя элементарные преобразования приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\3&1&5&4\\1&-1&1&0\\2&1&-1&3\\5&-2&-1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-2&2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-1&-3&-1\\0&-7&-6&-7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&-1&1\\0&1&0&1\\0&1&3&1\\0&7&6&7\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&4&0\\0&0&13&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Теперь ясно, что $r(A)=r(\tilde{A})=3$. Согласно теореме Кронекера – Капелли система совместна. Так как число неизвестных $n=3$, то система имеет единственное решение.

б) $$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2&4&3&-5&2\\1&3&7&-4&5\\4&6&-5&-7&-4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&7&-4&5\\2&4&3&-5&2\\4&6&-5&-7&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&7&-4&5\\0&-2&-11&3&-8\\0&-6&-33&9&-24\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&7&-4&5\\0&-2&-11&3&-8\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Минор $M_{1,2}^{1,2}=\begin{vmatrix}1&3\\0&-2\end{vmatrix}=-2\neq 0$, следовательно $r(A)=r(\tilde{A})=2$, система совместна. Число неизвестных системы $n=4$, значит система имеет бесконечное множество решений.

в) Преобразуем расширенную матрицу этой системы при помощи элементарных преобразований к ступенчатому виду:

$$\tilde{A}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&4\\1&1&2&3&8\\2&4&5&10&20\\2&-4&1&-6&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&4\\0&2&1&4&4\\0&6&3&12&12\\0&-2&-1&-4&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&4\\0&2&1&4&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right).$$

Теперь видно, что в преобразованной матрице минор $M_{1,2}^{1,2}$ является базисным для матрицы системы, а минор $M_{1,2,4}^{1,2,5}$ – базисным для расширенной матрицы. Так как $r(A)=2,\ r(\tilde{A})=3$, то согласно теореме Кронекера – Капелли система несовместна. ▲

Пример 5. При каком значении параметра t совместна система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = t, \\ 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 15x_4 = 13. \end{cases}$$

Δ Согласно теореме Кронекера – Капелли данная система будет совместной тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы будет равен рангу расширенной матрицы, т. е. $r(A) = r(\widetilde{A})$.

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & t \\ 2 & -3 & 11 & -15 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & t-2 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16-2t \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A) = 2$. Для совместности системы должно быть выполнено условие $r(\widetilde{A}) = 2$, что возможно только при выполнении равенства $16 - 2t = 0$, откуда $t = 8$. ▲

Пример 6. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

Δ а) Определитель этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 64 \neq 0,$ поэтому система имеет только тривиальное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

б) Можно увидеть, что третья строка равна разности второй и первой строк. Вычеркнув третью строку, получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы равен 2 фундаментальная система решений состоит из $n - r = 3 - 2 = 1$ решения. В качестве базисных переменных можно выбрать x_1 и x_2. Тогда, положив свободную переменную $x_3 = 1,$ получим следующую систему уравнений: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$

Решим ее по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3,$$

$$x_2 = \frac{-10}{5} = -2.$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Общее решение системы имеет вид $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, или $\begin{cases} x_1 = 3c, \\ x_2 = -2c, \\ x_3 = c, \quad c \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$

в) Запишем матрицу системы и преобразуем ее при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисный минор в преобразованной матрице находится вверху слева и имеет второй порядок. Это значит, что ранг r матрицы системы равен двум, фундаментальная система решений состоит из $n - r = 4 - 2 = 2$ решений. Система уравнений эквивалентна следующей преобразованной системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений однородной системы. В качестве базисных переменных можно выбрать x_1 и x_2. Тогда x_3 и x_4 будут свободными переменными. Положив $x_3 = 1, x_4 = 0$, находим $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = -0{,}5$. Положив $x_3 = 0, x_4 = 1$, находим $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Нормальная фундаментальная система решений имеет следующий вид:

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение однородной системы: $\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2$, или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Пример 7. Исследовать на совместность, найти общее и одно частное решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

Δ Преобразуем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\6&8&2&5&7\\9&12&3&10&13\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&4&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow r(A)=r(\widetilde{A})=2$.

Значит, система совместна и имеет бесконечное множество решений. В преобразованной матрице минор $M_{1,2}^{3,4}=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$, поэтому неизвестные x_3, x_4 – базисные, а x_1, x_2 – свободные.

По последней матрице записываем систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3,\\x_4=1.\end{cases}$$

Перенося свободные неизвестные в правую часть, получим систему

$$\begin{cases}x_3+2x_4=3-3x_1-4x_2,\\x_4=1,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}x_3=1-3x_1-4x_2,\\x_4=1.\end{cases}$$

Положив $x_1=-1, x_2=1$, получим $x_3=0$. Тогда частное решение исходной системы имеет вид: $\bar{x}_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Найдем, далее, фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases}x_3+2x_4=-3x_1-4x_2,\\x_4=0.\end{cases}$$

Полагая $x_1=1, x_2=0$, находим $x_3=-3, x_4=0$. Полагая $x_1=0, x_2=1$, получаем $x_3=-4, x_4=0$.

Таким образом, фундаментальная система решений имеет следующий вид: $\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\bar{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\end{pmatrix}$.

Тогда общее решение неоднородной системы будет иметь следующий вид:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

в координатной форме $\begin{cases} x_1 = -1 + c_1 \\ x_2 = 1 + c_2 \\ x_3 = -3c_1 - 4c_2 \\ x_4 = 1. \end{cases}$ ▲

Пример 8. Доказать, что неоднородная система линейных уравнений совместна и найти ее общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

Δ Можно увидеть, что последний столбец расширенной матрицы, умноженный на 6, равен разности пятого и четвертого столбцов матрицы A. Следовательно, ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $\tilde{A}$. Система совместна.

Выпишем и преобразуем матрицу соответствующей однородной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее уравнение есть следствие первых двух уравнений. Минор $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Неизвестные x_1, x_4, x_5 можно считать свободными. Поэтому исходная система эквивалентна системе $\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = 1 - 4x_1 - x_4 - 7x_5. \end{cases}$

Положим в ней свободные неизвестные равными, например, нулю, т. е. $x_1 = x_4 = x_5 = 0$. В результате получим систему $\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 1, \\ -2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

Решив ее, находим единственное решение: $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. Таким образом, найдено частное решение системы: $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Найдем фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} -x_2+3x_3=-2x_1+2x_4-4x_5, \\ -2x_2+5x_3=-4x_1-x_4-7x_5. \end{cases}$$

Положив: 1) $x_1=1, x_4=0, x_5=0$, находим $x_2=2, x_3=0$; 2) $x_1=0, x_4=1, x_5=0$, находим $x_2=13, x_3=5$; 3) $x_1=0, x_4=0, x_5=1$, находим $x_2=1, x_3=-1$.

Фундаментальная система решений имеет вид

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix}0\\13\\5\\1\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение неоднородной системы:

$$\bar{x}=\bar{x}_0+c_1\bar{x}_1+c_2\bar{x}_2+c_3\bar{x}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\13\\5\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

в координатах $\begin{cases} x_1=c_1, \\ x_2=2+2c_1+13c_2+c_3, \\ x_3=1+5c_2-c_3, \\ x_4=c_2, \\ x_5=c_3. \end{cases}$ ▲

Пример 9. Исследовать системы линейных уравнений и найти общее решение в зависимости от параметра λ:

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 5x_1+4x_2+3x_3=2, \\ 7x_1+6x_2+5x_3=\lambda; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ -4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7. \end{cases}$

Δ а) Найдем, при каком значении λ ранги матрицы A и расширенной матрицы $\widetilde{A}$ совпадают:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&-1\\5&4&3&2\\7&6&5&\lambda\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}6&4&2&-2\\5&4&3&2\\7&6&5&\lambda\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-4\\5&4&3&2\\7&6&5&\lambda\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-4\\0&4&8&22\\0&6&12&\lambda+28\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-4\\0&4&8&22\\0&0&0&\lambda-5\end{array}\right).$$

Ранги матриц A и $\widetilde{A}$ совпадают при $\lambda=5$. При $\lambda\neq5$ система несовместна. При $\lambda = 5$ исходная система эквивалентна системе $\begin{cases} x_1 - x_3 = -4, \\ 4x_2 + 8x_3 = 22. \end{cases}$

Положив $x_3 = \lambda_1$, получим $\begin{cases} x_1 = -4 + \lambda_1, \\ x_2 = \dfrac{11}{2} - 2\lambda_1, \quad \lambda_1 \in \boldsymbol{R}. \\ x_3 = \lambda_1, \end{cases}$

б) Найдем значение λ, при котором $r(A) = r(\widetilde{A})$:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & \lambda-3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 5 \end{array}\right).$$

При $\lambda = 1$: $r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3$ – система несовместна.

При $\lambda \neq 1$: $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$, следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений. Найдем их.

Восстанавливаем систему по последней матрице:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -4x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ (\lambda - 1)\, x_4 = 5. \end{cases}$$

В качестве базисных возьмем неизвестные x_1, x_2, x_4, тогда x_3 – свободная неизвестная. Перенесем слагаемые с x_3 в правую часть уравнения:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 2 - 3x_3, \\ -4x_2 - x_4 = -x_3, \\ (\lambda - 1)\, x_4 = 5. \end{cases}$$

Тогда $x_4 = \dfrac{5}{\lambda - 1}$, $x_2 = \dfrac{5}{4 - 4\lambda} + \dfrac{1}{4}x_3$, $x_1 = \dfrac{43 - 8\lambda}{8 - 8\lambda} - \dfrac{9}{8}x_3$. Положив $x_3 = c$,

получим $\begin{cases} x_1 = \dfrac{43 - 8\lambda}{8 - 8\lambda} - \dfrac{9}{8}c, \\ x_2 = \dfrac{5}{4 - 4\lambda} + \dfrac{1}{4}c, \qquad c \in \boldsymbol{R}. \\ x_3 = c, \\ x_4 = \dfrac{5}{\lambda - 1}, \end{cases}$ ▲

Пример 10. Существует ли система линейных уравнений, для которой каждая из следующих формул является общим решением:

$$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-3/5\\1/5\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1/5\\2/5\\0\\1\end{pmatrix},\qquad x=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}?$$

Δ Пусть $\bar{x}_1=\begin{pmatrix}-3/5\\1/5\\1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{x}_2=\begin{pmatrix}-1/5\\2/5\\0\\1\end{pmatrix}$, $\bar{x}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\bar{x}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Ранг системы векторов $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ равен двум, ранг системы векторов $\bar{x}_3$ и $\bar{x}_4$ равен двум. Найдем ранг системы векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&3\\-3&1&5&0\\-1&2&0&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&3\\0&1&-1&3\\0&2&-2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&3\end{pmatrix},$$

$r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)=2$. Множества решений соответствующих однородных систем совпадают. Выясним, является ли какое-нибудь частное решение первой системы, например $(1;1;1;1)^T$, решением второй системы:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\sim\begin{cases}c_1=-1,\\c_2=2,\\-2c_1-c_2=0,\\c_1+3c_2=5,\end{cases}\qquad c_1=-1, c_2=2.$$

Такая система линейных уравнений существует. ▲

Дополнительные задачи

1. Решить системы линейных уравнений: а) матричным методом; б) по формулам Крамера:

а) $\begin{cases}2x-y=5,\\3x+5y=1.\end{cases}$ **Ответ:** $x=2, y=-1.$

б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=1,\\3x_1+2x_2-x_3=9,\\x_1-4x_2+3x_3=-5.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=2, x_2=1, x_3=-1.$

в) $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\2x_1+x_2-x_3=-5.\end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-3, x_2=2, x_3=1.$

г) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2, \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=-1$.

2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1-8x_2=3, \\ 2x_1+x_2=1, \\ 4x_1+7x_2=-4. \end{cases}$ **Ответ:** система несовместна.

б) $\begin{cases} 3x_1+6x_2+2x_3=4, \\ 4x_1-x_2-3x_3=1, \\ 2x_1+4x_2+x_3=4. \end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-2,\ x_2=3,\ x_3=-4$.

в) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3, \\ x_1+2x_2-4x_4=-3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22. \end{cases}$ **Ответ:** $x_1=-1,\ x_2=3,\ x_3=-2,\ x_4=2$.

г) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1, \\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0. \end{cases}$ **Ответ:** $\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{4}x_3-\dfrac{3}{4}x_4-x_5, \\ x_2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{4}x_3+\dfrac{7}{4}x_4, \end{cases}$ $x_3, x_4, x_5 \in \boldsymbol{R}$.

д) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3, \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5, \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1, \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12. \end{cases}$ **Ответ:** $\begin{cases} x_1=6-26x_3+17x_4, \\ x_2=-1+7x_3-5x_4. \end{cases}$ $x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}$.

е) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8, \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7, \\ 2x_1-x_2-5x_4=6, \\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1. \end{cases}$ **Ответ:** система несовместна.

3. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 9x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$ **Ответ:** $x_1=\dfrac{1}{5}c,\ \ x_2=\dfrac{3}{5}c,\ \ x_3=c$.

б) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+x_3+9x_4=0. \end{cases}$ **Ответ:** $\begin{cases} x_1=-3c_1+5c_2, \\ x_2=c_1-3c_2, \\ x_3=c_1,\ x_4=c_2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ **Ответ:** $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{17}c_1 - \dfrac{13}{17}c_2, \\ x_2 = \dfrac{19}{17}c_1 - \dfrac{20}{17}c_2, \\ x_3 = c_1 \quad x_4 = c_2. \end{cases}$

4. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений, используя фундаментальную систему решений, соответствующей однородной:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$ **Ответ:** $\bar{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}.$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1. \end{cases}$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23. \end{cases}$

Ответ: $\bar{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Занятие 16

Контрольная работа «Матрицы, определители, системы линейных уравнений»

1. Даны матрицы A, B и C. Какие из попарных произведений этих матриц существуют? Найдите их.

2. Вычислите определитель, приведя его к треугольному виду.

3. Найдите обратную матрицу A^{-1}.

4. Найдите ранг матрицы A.

5. Решите систему линейных уравнений: а) по правилу Крамера; б) методом Гаусса.

6. Найдите фундаментальную систему решений однородной СЛУ и укажите размерность пространства решений системы.

7. Найдите общее решение неоднородной СЛУ.

Вариант 1

1. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. **Ответ:** $AB=\begin{pmatrix}-8 & -1 & 2\\ -5 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

2. $|A|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 4 & 3\end{vmatrix}$. **Ответ:** $|A|=6$.

3. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$. **Ответ:** $A^{-1}=\dfrac{1}{38}\begin{pmatrix}1 & -7 & 5\\ -7 & 11 & 3\\ -20 & -12 & 14\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 2 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 5 & 6\\ 0 & 7 & 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$. **Ответ:** $r=2$.

5. а) $\begin{cases}3x+y+2z=3,\\ 2x+5y+4z=1,\\ x+8y+3z=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x+y-3z=1,\\ 3x+y-z=-4,\\ 2x+y+z=-9.\end{cases}$

Ответ: а) $(2;1;-2)$; б) $x=2c+5$, $y=-19-5c$, $z=c$.

6. $\begin{cases}x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0,\\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0,\\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-x_3+5x_4+x_5=0.\end{cases}$ **Ответ:** $\overline{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\ -4\\ 3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-5\\ -1\\ 0\\ 3\\ 0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$.

7. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=5, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=8, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=-1, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=29. \end{cases}$ **Ответ:** $\overline{X}=\begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Вариант 2

1. $A=(-2\ \ 1\ \ 3)$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. **Ответ:** $CB=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **Ответ:** $|A|=69$.

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **Ответ:** $A^{-1}=-\dfrac{1}{23}\begin{pmatrix} 10 & -7 & -9 \\ -7 & -2 & 4 \\ -11 & 10 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 7 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & -13 & -7 \\ -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \\ -8 & 3 & -4 & -20 & -8 \end{pmatrix}$. **Ответ:** $r=2$.

5. а) $\begin{cases} 2x+y+3z=7, \\ 2x+3y+z=1, \\ 3x+2y+z=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y+4z=5, \\ 3x+4y+2z=6, \\ 4x+5y=7. \end{cases}$

Ответ: а) $(3;-2;1)$; б) $x=10c-2$, $y=3-8c$, $z=c$.

6. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-5x_4+6x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-7x_4+9x_5=0. \end{cases}$ **Ответ:** $\overline{X}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ 8x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$ **Ответ:** $\overline{X}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Занятия 17–18

Линейные операторы

Пример 1. Доказать линейность оператора. Записать его матрицу.

$f(\bar{x}) = (x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ 3x_1 + x_3)$.

Δ Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда $f(\bar{x} + \bar{y}) = (x_1 + y_1 - x_2 - y_2,$ $x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 - x_3 - y_3,\ 3x_1 + 3y_1 + x_3 + y_3) = (x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ 3x_1 + x_3) +$ $+ (y_1 - y_2,\ y_1 + 2y_2 - y_3,\ 3y_1 + y_3) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$.

Для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ имеем

$f(\alpha\bar{x}) = (\alpha x_1 - \alpha x_2,\ \alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3,\ 3\alpha x_1 + \alpha x_3) = \alpha f(\bar{x})$.

Так как $f(1;0;0) = (1;1;3)$, $f(0;1;0) = (-1;2;0)$, $f(0;0;1) = (0;-1;1)$, матрица A оператора f имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 2. Доказать, что оператор $f(\bar{x}) = (x_1^2,\ x_1 - x_3,\ x_2 + x_3)$ не является линейным.

Δ Рассмотрим два вектора: $\bar{x}_1 = (1;0;0)$ и $\bar{x}_2 = (2;0;0)$: $\bar{x}_2 = 2\bar{x}_1$, $f(\bar{x}_1) = (1;1;0)$, $f(\bar{x}_2) = (4;2;0)$. Так как $f(\bar{x}_2) \neq 2f(\bar{x}_1)$, оператор $f(\bar{x})$ не является линейным. ▲

Пример 3. Являются ли линейными следующие операторы:

а) $f(\bar{x}) = (x_2 + 3x_3,\ 5x_1,\ 2x_3 - 3x_1)$;

б) $f(\bar{x}) = (4x_1 + x_2 - 1,\ x_1 - 2x_2,\ 3)$.

Δ а) Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда $f(\bar{y}) = (y_2 + 3y_3, 5y_1, 2y_3 - 3y_1)$, и для любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ имеем:

$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = ((\alpha x_2 + \beta y_2) + 3(\alpha x_3 + \beta y_3),\ 5(\alpha x_1 + \beta y_1),\ \ 2(\alpha x_3 + \beta y_3) -$ $- 3(\alpha x_1 + \beta x_1)) = \alpha(x_2 + 3x_3,\ 5x_1,\ 2x_3 - 3x_1) + \beta(y_2 + 3y_1,\ 5y_1,\ 2y_3 - 3y_1) =$ $= \alpha \cdot f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$, т. е. оператор f является линейным.

б) Для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$: $f(\alpha\bar{x}) = (4\alpha x_1 + \alpha x_2 - 1,\ \alpha x_1 - 2\alpha x_2, 3)$. Но $\alpha f(\bar{x}) = \alpha(4x_1 + x_2 - 1,\ x_1 - 2x_2,\ 3)$. Очевидно, что $f(\alpha\bar{x}) \neq \alpha f(\bar{x})$, если $\alpha \neq 1$. Поэтому оператор f не является линейным. ▲

Пример 4. Найти в базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ матрицу линейного оператора f, переводящего каждый вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y} = [\bar{x}, \bar{a}]$, если $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

Δ Докажем линейность оператора f. Как известно,

$[\bar{x}_1 + \bar{x}_2,\ \bar{a}] = [\bar{x}_1, \bar{a}] + [\bar{x}_2, a], [\lambda\bar{x}; \bar{a}] = \lambda[\bar{x}, \bar{a}]$.

Следовательно, оператор f является линейным.

Найдем образы базисных векторов:

$$[\bar{i}, \bar{a}] = [\bar{i}, 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}] = \bar{k} + \bar{j},$$

$$[\bar{j}, \bar{a}] = [\bar{j}, 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}] = -2\bar{k} - \bar{i},$$

$$[\bar{k}, \bar{a}] = [\bar{k}, 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}] = 2\bar{j} - \bar{i}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Найти матрицу оператора f поворота векторов пространства $\boldsymbol{R}^3$ относительно Ox в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{4}$.

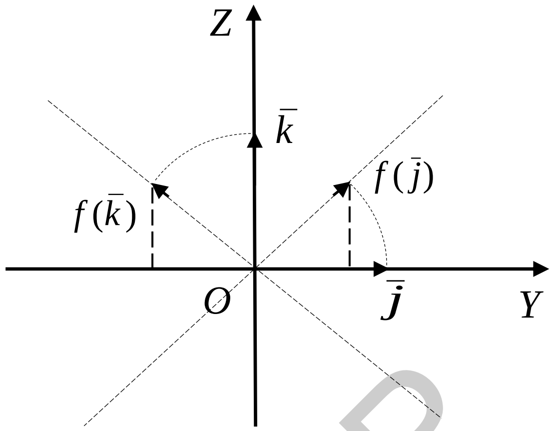


Рис. 12

Δ Найдем образы базисных векторов. При таком повороте векторы, параллельные оси Ox, не изменяются. Следовательно, $f(\bar{i}) = \bar{i} = (1, 0, 0)$. Из рис. 12 видно, что

$$f(\bar{j}) = |f(\bar{j})| \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \bar{j} + |f(\bar{j})| \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \bar{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{j} + \bar{k}) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$f(\bar{k}) = -|f(\bar{k})| \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \bar{j} + |f(\bar{k})| \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \bar{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\bar{j} + \bar{k}) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Тогда искомая матрица оператора поворота имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 6. В базисе $(1, 1+x, 1+x+x^2)$ найти матрицу оператора дифференцирования (оператора f) в пространстве многочленов степени, не превосходящей 2.

Δ Чтобы составить матрицу A оператора f в базисе $\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = 1 + x$, $\bar{e}_3 = 1 + x + x^2$ найдем образы элементов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$$f(\bar{e}_1) = 1' = 0;$$

$$f(\bar{e}_2) = (1 + x)' = 1 = \bar{e}_1;$$

$$f(\bar{e}_3) = (1 + x + x^2)' = 1 + 2x = -1 + 2(1 + x) = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2.$$

Отсюда следует, что $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 7. Даны два базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ и $(\bar{e}_1', \bar{e}_2')$ линейного пространства и матрица A линейного оператора в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2')$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+\bar{e}_2$, $\bar{e}_2'=\bar{e}_1-\bar{e}_2$.

Δ Известно, что матрица B оператора f в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2')$ находится по формуле $B=T^{-1}AT$, где T – матрица перехода от базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ к базису $(\bar{e}_1', \bar{e}_2')$. В нашем случае $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Найдем T^{-1}:

$$\Delta=-2, T_{11}=-1, T_{12}=-1, T_{21}=-1, T_{22}=1,\quad T^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -5\end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 8. Матрица линейного оператора f в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу данного оператора в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, если $\bar{e}_1'=5\bar{e}_1+4\bar{e}_2+7\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=4\bar{e}_1+3\bar{e}_2+6\bar{e}_3$, $\bar{e}_3'=3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+4\bar{e}_3$.

Δ Матрица T перехода от базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ к базису $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$ имеет вид

$$T=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 7 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

Находим обратную ей матрицу T^{-1}:

$$T^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}T_{11} & T_{21} & T_{31}\\ T_{12} & T_{22} & T_{32}\\ T_{13} & T_{23} & T_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Матрицу B оператора f в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$ находим по формуле $B=T^{-1}AT$:

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 7 & 6 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 7 & -5 & -6\\ -1 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 7 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -27 & -23 & -13\\ 39 & 32 & 21\end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в трехмерном линейном векторном пространстве L имеет в некотором базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ матрицу

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Показать, что система векторов $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'= =-\bar{e}_1-2\bar{e}_2$, $\bar{e}_3'=2\bar{e}_2+\bar{e}_3$ образует базис и найти матрицу оператора A в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$.

Δ Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$ в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-2)\cdot 1+2\cdot(-1)\cdot(-1)-1\cdot(-1)\cdot 1=-2+2+1=1.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то система векторов $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$ линейно независима и образует базис пространства L. Для нахождения матрицы оператора A в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$ воспользуемся формулой $B=T^{-1}AT$, где T – матрица перехода от базиса $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ к базису $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, которая имеет вид $T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы T: $|T|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$. Далее можем найти обратную матрицу $T^{-1}=\dfrac{1}{|T|}\begin{pmatrix}T_{11} & T_{21} & T_{31}\\ T_{12} & T_{22} & T_{32}\\ T_{13} & T_{23} & T_{33}\end{pmatrix}$:

$$T_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2,\ T_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3;$$

$$T_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-2,\ T_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$T_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1,\ T_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1;$$

$$T_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-2,\ T_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2;$$

$$T_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1.$$

Итак, $T^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -3 & 1 & -2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Тогда данный оператор в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$ имеет матрицу

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -3 & 1 & -2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-6 & -5 & -3\\ -7 & -7 & -3\\ -3 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 16 & -13\\ -11 & 21 & -17\\ -7 & 13 & -11\end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Определить, какие из векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ являются собственными векторами линейного оператора f с матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, если $\bar{x}_1=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$, $\bar{x}_2=\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}$, $\bar{x}_3=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

Δ Находим $A\bar{x}_1=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ -4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$, т. е. $f(\bar{x}_1)=4\bar{x}_1$. Значит $\bar{x}_1$ является собственным вектором линейного оператора f.

Для вектора $\bar{x}_2$: $A\bar{x}_2=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\ 6\end{pmatrix}\neq\lambda\bar{x}_2$ ни при каком $\lambda\in\boldsymbol{R}$, т. е. $\bar{x}_2$ собственным вектором линейного оператора f не является.

Для $\bar{x}_3$ имеем: $A\bar{x}_3=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, т. е. выполняется равенство $f(\bar{x}_3)=-1\cdot\bar{x}_3$, следовательно $\bar{x}_3$ – собственный вектор линейного оператора f. $\blacktriangle$

Пример 11. Пользуясь определением доказать, что вектор $\bar{x}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ является собственным вектором оператора f с матрицей $A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Найти собственное значение для указанного вектора.

$$\Delta \ A\bar{x}=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad f(\bar{x})=5\bar{x}, \lambda=5. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix};\ 2)\ A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix};\ 3)\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix};\ 4)\ A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Δ 1) Составим характеристическое уравнение матрицы и найдем его корни: $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 5\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$, $\lambda^2-5\lambda-14=0$, откуда $\lambda_1=7, \lambda_2=-2$.

Для определения координат собственных векторов, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, решаем для каждого из этих значений однородную систему линейных уравнений $\begin{pmatrix}2-\lambda & 5\\ 4 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

Для $\lambda=\lambda_1=7$ система имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases}-5x_1+5x_2=0,\\ 4x_1-4x_2=0,\end{cases}$$

откуда получаем $x_1=x_2$. Положив, например $x_2=1$, получим $x_1=1$. Таким образом, собственному значению $\lambda=7$ соответствует собственный вектор $\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Значение $\lambda=\lambda_2=-2$ приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}4x_1+5x_2=0,\\ 4x_1+5x_2=0,\end{cases}$$

откуда получаем $4x_1=-5x_2$ или $x_1=-\frac{5}{4}x_2$. Полагая $x_2=-4$, получим $x_1=5$. Следовательно, собственный вектор оператора f, соответствующий собственному значению $\lambda=2$, имеет вид $\bar{x}_2=\begin{pmatrix}5\\ -4\end{pmatrix}$.

2) Возьмем произвольный вектор $\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ и найдем его образ:

$$f(\bar{x})=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1\\ 3x_2\\ 3x_3\end{pmatrix}=3\bar{x}.$$

Все ненулевые векторы из R^3 являются собственными для указанного оператора с собственным значением 3. Геометрически это означает растяжение всех векторов в три раза.

3) Находим собственные значения, решая характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3)=0,$$

откуда $\lambda_1=-3, \lambda_2=1, \lambda_3=3$.

Решая для каждого из трех собственных значений однородную систему $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, находим координаты собственных векторов.

Для $\lambda=\lambda_1=-3$ указанная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, поэтому фундаментальная система решений содержит одно решение.

Отбрасывая третье уравнение системы и положив, например $x_3=1$, получим $x_1=-1,\ \ x_2=1$. Собственному значению $\lambda=-3$ соответствует собственный вектор $\bar{x}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda=1$ получим систему уравнений $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-x_2+\ \ x_3=0. \end{cases}$ Ей соответствует собственный вектор $\bar{x}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Для $\lambda=3$ получим систему уравнений $\begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-3x_2+x_3=0. \end{cases}$ Положив $x_3=1$, получим $x_1=\frac{7}{5},\ x_2=\frac{11}{5}$. Так как собственный вектор находится с точностью до постоянного множителя, получим $\bar{x}_3=\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4) Находим собственные значения, решая характеристическое уравнение матрицы: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,\ (1-\lambda)\,((\lambda-2)^2-1)=0$, откуда $\lambda_1=3,\ \lambda_2=\lambda_3=1$.

Для собственного значения $\lambda = 3$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2. Полагая $x_1 = 1$, получим $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Собственный вектор имеет вид $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для собственного значения $\lambda = 1$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 1. Размерность пространства решений этой системы равна $3 - 2 = 1$. Положив $x_2 = 1$ и $x_3 = 0$, получим $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Положим $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, получим $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 13. Найти матрицу линейного оператора, для которого собственными значениями являются $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3,$ а собственными векторами $\bar{a}_1 = (-1; 1; 0), \bar{a}_2 = (1; 0; 3), \bar{a}_3 = (0; 1; 2)$.

Δ Если известно n собственных значений и n собственных векторов, можно определить матрицу оператора, для которого данные значения и векторы будут собственными.

Рассмотрим формулу $B = T^{-1}AT$, где B – матрица оператора в новом базисе, которая содержит n собственных значений по диагонали, т. е. является диагональной; T – матрица перехода от старого базиса к новому базису.

Умножая это матричное равенство справа на T^{-1} и слева на T, получим формулу для вычисления матрицы оператора: $A = TBT^{-1}$.

По условию $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем T^{-1}: $T^{-1} = \dfrac{1}{|T|}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}$, $|T| = 3 - 2 = 1$, $T_{11} = -3, T_{12} = -2,$

$T_{13}=3, T_{21}=-2, T_{22}=-2, T_{23}=3, T_{31}=1,\ T_{32}=1, T_{33}=-1.$

Получаем $T^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&1\\-2&-2&1\\3&3&-1\end{pmatrix}.$

Итак,

$$A=TBT^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\0&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2&1\\-2&-2&1\\3&3&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&0&3\\0&6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2&1\\-2&-2&1\\3&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\6&7&-2\\6&6&0\end{pmatrix}.\ ▲$$

Пример 14. Является ли нормальным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$?

Δ Линейный оператор, действующий в конечномерном вещественном евклидовом пространстве, нормален, если существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора коммутирует со своей транспонированной.

Нам достаточно проверить равенство $AA^T=A^TA$:

$$AA^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Итак, линейный оператор с такой матрицей является нормальным. ▲

Пример 15. Найти матрицу оператора f в базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ линейного пространства, если известно, что линейный оператор f переводит векторы $\bar{p}_1=(3, 4)^T$ и $\bar{p}_2=(4, 5)^T$ в векторы $\bar{q}_1=(1, 2)^T$ и $\bar{q}_2=(3, 3)^T$.

Δ Рассмотрим три подхода к решению задачи:

1) Пусть A – искомая матрица линейного оператора f.

По условию $AP=Q$, где P – матрица, столбцами которой являются столбцы координат векторов $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$; Q – матрица, столбцами которой являются столбцы координат векторов $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$. Имеем матричное равенство $A\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}.$

После умножения равенства $AP=Q$ справа на P^{-1} получаем $A=QP^{-1}$, если матрица P^{-1} существует. Вычислим $|P|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{vmatrix}=15-16=-1\Rightarrow P^{-1}$ существует.

Найдем обратную матрицу:

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\begin{pmatrix}P_{11} & P_{21}\\ P_{12} & P_{22}\end{pmatrix},$$

$P_{11}=(-1)^2M_{11}=|5|=5,\ P_{12}=(-1)^3M_{12}=-|4|=-4,\ P_{21}=(-1)^3M_{21}=-|4|=-4,$
$P_{22}=(-1)^4M_{22}=|3|=3$.

Итак, $P^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}5 & -4\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

Тогда $A=QP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

2) Примем систему векторов $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ за базис $(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$. Тогда матрица перехода от базиса $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ к базису $(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$ имеет вид $P=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Найдем координаты векторов $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ в базисе $(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$:

$$\bar{q}_1=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix},\ \bar{q}_2=P^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 3\end{pmatrix}.$$

В базисе $(\bar{e}_1',\bar{e}_2')$ оператор f имеет матрицу $Q'=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Заметим, что матрица Q', является матрицей перехода от базиса $(\bar{p}_1,\bar{p}_2)$ к базису $(\bar{q}_1,\bar{q}_2)$. Ее можно было находить следующим образом:

$$Q'=P^{-1}\cdot Q=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу оператора f в базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$:

$$A=PQ'P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

3) Обозначим через φ оператор, переводящий векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ в векторы $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$. Его матрицей в базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ будет $P=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Оператор f переводит векторы $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ в векторы $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$. Значит, произведение $f\varphi$ операторов φ и f переводит векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ в векторы $\bar{q}_1,\bar{q}_2$.

Поэтому в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ оператор $f\varphi$ имеет матрицу $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Матрица Q оператора $f\varphi$ равна произведению матриц операторов f и φ, т. е. если A – матрица оператора f в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, то $Q = AP$. Отсюда получаем, что $A = QP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 16. Задан линейный оператор f проектирования на плоскость $2x + 3y + 4z = 0$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\bar{e}_1 = (1; 0; 0), \bar{e}_2 = (0; 1; 0), \bar{e}_3 = (0; 0; 1)$.

Δ $\vec{n} = (2; 3; 4)$ – нормаль плоскости $2x + 3y + 4z = 0$. Тогда линейный оператор f действует по следующему правилу:

$$f(\bar{e}) = \bar{e} - np_{\bar{n}}\bar{e}\,\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \bar{e} - \frac{(\bar{e}, \bar{n})}{|\bar{n}|} \cdot \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \bar{e} - \frac{(\bar{e}, \bar{n})}{|\bar{n}|^2}\bar{n}\,.$$

Найдем образы базисных векторов под действием линейного оператора:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - \frac{(\bar{e}_1, \bar{n})}{|\bar{n}|^2} \cdot \vec{n} = (1; 0; 0) - \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4}{(\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2})^2}(2; 3; 4) =$$

$$= (1; 0; 0) - \frac{2}{29}(2; 3; 4) = \left(\frac{25}{29}; -\frac{6}{29}; -\frac{8}{29}\right);$$

$$f(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 - \frac{(\bar{e}_2, \bar{n})}{|\bar{n}|^2} \cdot \bar{n} = (0; 1; 0) - \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1}{29}(2; 3; 4) = \left(-\frac{6}{29}; \frac{20}{29}; -\frac{12}{29}\right);$$

$$f(\bar{e}_3) = \bar{e}_3 - \frac{(\bar{e}_3, \bar{n})}{|\bar{n}|^2} \cdot \bar{n} = (0; 0; 1) - \frac{0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{29}(2; 3; 4) = \left(-\frac{8}{29}; -\frac{12}{29}; \frac{13}{29}\right).$$

Итак, матрица линейного оператора равна $A = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 25 & -6 & -8 \\ -6 & 20 & -12 \\ -8 & -12 & 13 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 17. Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Δ Найдем собственные значения этой матрицы:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda_{1,2} = 3.$$

Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ равен 1.

Размерность подпространства решений линейной системы равна $2 - 1 = 1$. Следовательно, найти два линейно независимых вектора для этого линейного оператора невозможно и базиса из собственных векторов не существует. Матрицу A нельзя привести к диагональному виду. ▲

Пример 18. Найти матрицу T, диагонализирующую данную матрицу A, и записать соответствующую матрицу, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Δ Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 4\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,\ (\lambda+1)^2=4,\ \lambda_1=1, \lambda_2=-3.$$

Для собственного значения $\lambda=1$ получим систему

$$\begin{cases}-2x_1+4x_2=0,\\ x_1-\ \ 2x_2=0,\end{cases}\quad \overline{x}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

При $\lambda=-3$ система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases}2x_1+4x_2=0,\\ x_1+\ 2x_2=0,\end{cases}\quad \overline{x}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $T=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

В базисе, состоящем из векторов $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$, матрица оператора будет иметь вид $B=T^{-1}\cdot A\cdot T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$. ▲

Пример 19. Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицы:

$$\text{а)}\ \ A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix};\qquad \text{б)}\ \ A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Если это возможно, найти соответствующую диагональную матрицу и матрицу T преобразования подобия.

Δ а) Найдем собственные значения этой матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\ 10 & -19-\lambda & 10\\ 12 & -24 & 13-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Находим корни этого уравнения: $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1$. Координаты собственного вектора с собственным значением $\lambda=-1$ находим из системы

$$\begin{pmatrix}8 & -12 & 6\\ 10 & -18 & 10\\ 12 & -24 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, ранг матрицы этой системы равен двум. Отбросив третье уравнение системы и положив в первых двух уравнениях $x_3=1$, получим

$x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{5}{6}$. В качестве собственного вектора можно взять вектор $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Для собственного значения $\lambda = 1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы этой системы равен 1. Так как $n-1=2$, фундаментальная система решений имеет два столбца. Следовательно, существует базис состоящий из собственных векторов. Найдем $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\ \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы T определяются векторами «нового» базиса $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе матрица оператора будет иметь следующий вид:

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Находим собственные значения матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 0.$$

Для двукратного $(k=2)$ собственного значения $\lambda = 2$ находим

$$rang(A-2E) = r:\quad A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2.$$

Так как $(r=2) \neq (n-k=3-2=1)$, то матрица A к диагональному виду не приводится. ▲

Пример 20. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$ ортогональной, и если является, то найти обратную ей.

Δ Легко проверить, что столбцы матрицы $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$,

$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_3) = (\bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0$;

2) $|\bar{x}_1| = |\bar{x}_2| = |\bar{x}_3| = 1$.

Следовательно, матрица A является ортогональной. Для ортогональной матрицы $A^{-1} = A^T$. Поэтому $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}$. ▲

Пример 21. Найти ортогональную матрицу Q, приводящую симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ к диагональному виду. Убедиться, что матрица $B = Q^T AQ$ является диагональной матрицей.

Δ Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 9.$$

Для $\lambda = -4$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Нормируем этот вектор и находим $\bar{e}_1$:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Аналогично для $\lambda = 9$:

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Запишем ортогональную матрицу Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix},$$

$$B = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$ ▲

Пример 22. Найти ортогональную матрицу Q, приводящую симметрическую матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

Δ Решим уравнение $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}=0$, получим $(\lambda+2)(\lambda-4)^2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda_1=-2, \lambda_{2,3}=4$.

Для $\lambda=-2$ собственный вектор $\bar{x}_1$ находится из системы

$$\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3=0, \\ -x_1+5x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор $\bar{x}_2$, соответствующий собственному значению $\lambda=4$:

$$\begin{cases} -x_1-x_2+2x_3=0, \\ -x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-4x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad -x_1-x_2+2x_3=0 \Rightarrow \quad \bar{x}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для симметрической матрицы существует базис, состоящий из собственных векторов. Поскольку $\bar{x}_3 \perp \bar{x}_1$ и $\bar{x}_3 \perp \bar{x}_2$, то в качестве $\bar{x}_3$ можно взять $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$:

$$\bar{x}_3=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\bar{i}-5\bar{j}-2\bar{k}.$$

Нормируем векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ и составляем матрицу перехода (искомую ортогональную матрицу):

$$Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица $B=Q^T AQ=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 23. Известно, что симметрическая матрица третьего порядка имеет единственное трехкратное собственное значение $\lambda=a$. Найти эту матрицу.

Δ Фундаментальная система решений системы уравнений $(A-aE)\cdot\overline{X}=0$ состоит из трех векторов. Таким образом, $3-r=3$. Ранг матрицы $A-aE$

равен нулю. Следовательно, $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Доказать, что оператор $f(\bar{x})=(x_1+x_2,\, x_3-x_1,\, x_2+1)$ не является линейным.

2. Доказать линейность оператора и записать его матрицу:

а) $f(\bar{x})=(x_1+x_3,\ 2x_1+x_3,\, 3x_1-x_2+x_3)$;

б) $f(\bar{x})=(0,\ x_2+x_3,\, 0)$.

Ответ: а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Записать в базисе $\left(1,\, x,\, x^2\right)$ линейного пространства многочленов степени не выше двух матрицу оператора дифференцирования.

Ответ: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти в базисе $\left(\bar{i},\, \bar{j}, \bar{k}\right)$ матрицу оператора f, если f – проектирование:

а) на прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{\sqrt{3}}$; б) на плоскость $2x-y+2z-5=0$.

Ответ: а) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{-3\sqrt{3}}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

5. В базисе, состоящем из векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, линейный оператор f задан матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\left(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\right)$, если $\bar{e}_1'=2\,\bar{e}_1-\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=-2\,\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3$, $\bar{e}_3'=-5\,\bar{e}_1+3\bar{e}_2+\bar{e}_3$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -19 & 9 & -16 \\ -36 & 18 & -24 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Определить, могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного линейного оператора в разных базисах.

Ответ: нет.

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $\bar{a}_1 = (2;\,0;\,3)$, $\bar{a}_2 = (4;\,1;\,5)$, $\bar{a}_3 = (3;\,1;\,2)$ в векторы $\bar{b}_1 = (1;\,2;\,-1)$, $\bar{b}_2 = (4;\,5;\,-2)$, $\bar{b}_3 = (1;\,-1;\,1)$, в том же базисе, в котором даны координаты векторов.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

8. Задан линейный оператор f проектирования на плоскость $3x - y + 2z = 0$. Определить матрицу этого линейного оператора в базисе $\bar{e}_1 = (1;\,0;\,0)$, $\bar{e}_2 = (0;\,1;\,0)$, $\bar{e}_3 = (0;\,0;\,1)$.

Ответ: $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 3 & 13 & 2 \\ -6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

9. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\lambda_1 = 1, \bar{x}_1 = (2;\,-1)$; $\lambda_2 = -4, \bar{x}_2 = (1;\,1)$;

б) $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = \lambda_3 = 9, \bar{x}_1 = (2;\,1;\,2)$; $\bar{x}_2 = (1;\,-2;\,0)$; $\bar{x}_3 = (0;\,-2;\,1)$.

10. Выяснить, можно ли привести к диагональному виду следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: нет.

11. В некотором базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ линейный оператор f задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти базис, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид.

Ответ: $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$.

12. Привести матрицу A линейного оператора f к диагональному виду.

Указать соответствующую матрицу перехода, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Найти ортогональную матрицу Q, диагонализирующую симметрическую матрицу $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, и записать диагональный вид этой матрицы.

Ответ: $Q=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\quad Q^T AQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

14. Является ли нормальным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$?

Ответ: да.

Занятие 19

Квадратичные формы

Пример 1. Записать матрицу для данной квадратичной формы:

а) $L(x_1,x_2)=3x_1^2-x_2^2-8x_1x_2$;

б) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$;

в) $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=4x_3^2-3x_1x_4+x_2x_3$.

Δ а) Для $L(x_1,x_2)$ имеем: $a_{11}=3, a_{22}=-1, a_{12}=a_{21}=-4$. Тогда $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

б) Для $L(x_1,x_2,x_3)$ получаем: $a_{11}=1, a_{22}=4, a_{33}=-3, a_{12}=a_{21}=-1,$ $a_{13}=a_{31}=0, a_{23}=a_{32}=3$. Таким образом, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

в) Для $L(x_1,x_2,x_3,x_4)$ имеем: $a_{11}=0, a_{22}=0, a_{33}=4, a_{44}=0, a_{12}=a_{21}=0,$ $a_{33}=a_{31}=0, a_{14}=a_{41}=-\dfrac{3}{2}, a_{23}=a_{32}=\dfrac{1}{2}, a_{24}=a_{42}=0, a_{34}=a_{43}=0$. Тогда

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Пример 2. По данной матрице написать соответствующую ей квадратичную форму:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -8 \\ -3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ -8 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Δ а) $L(x,y)=x^2-4xy+3y^2$; б) $L(x,y,z)=3x^2-2y^2+z^2+4xz+2yz$; в) $L(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)=2x_1^2+7x_2^2+x_4^2-6x_1x_2-16x_1x_4+4x_2x_3-2x_2x_4+10x_3x_4$. $\blacktriangle$

Пример 3. Записать в матричном виде квадратичную форму, если:

а) $L(x,y)=2x^2+3y^2-5xy$;

б) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2$;

в) $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=5x_1^2+x_3^2-x_4^2+2x_1x_2-6x_1x_3+10x_2x_3-8x_2x_4+6x_3x_4$.

Δ а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 3 \end{pmatrix}$, $L(x,y)=(x\,y)\begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $L(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -4 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1x_2x_3x_4)\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -4 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

Пример 4. В базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ задана квадратичная форма $L(x_1,x_2,x_3)=$ $=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$. Записать эту квадратичную форму в базисе $(\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3')$, если $\bar{e}_1'=-\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_2'=2\bar{e}_1-\bar{e}_3$, $\bar{e}_3'=5\bar{e}_1-\bar{e}_2+3\bar{e}_3$.

Δ Матрица A квадратичной формы и матрица T перехода от базиса $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ к базису $(\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3')$ имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда в базисе $\left(\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'\right)$ матрица квадратичной формы

$$B=T^T AT=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&0&-1\\5&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&1\\-2&3&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&5\\-1&0&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&-4&2\\3&-3&1\\15&-16&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&5\\-1&0&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4&25\\4&5&21\\25&21&118\end{pmatrix},$$

т. е. в новом базисе квадратичная форма имеет вид

$$Q(x_1',x_2',x_3')=6x_1'^2+5x_2'^2+118x_3'^2+8x_1'x_2'+50x_1'x_3'+42x_2'x_3'.\ \blacktriangle$$

Пример 5. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа:

а) $L(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$;

б) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$;

в) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;

г) $L(x_1,x_2,x_3)=8x_1^2+8x_2^2+x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

Выяснить, какие квадратичные формы являются положительно (отрицательно) определенными, неотрицательно (неположительно) определенными и знакопеременными.

Δ а) $L(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2=4\left(x_1+\dfrac{1}{2}x_2\right)^2-x_2^2+5x_2^2=4x_1'^2+4x_2'^2.$

Квадратичная форма является положительно определенной.

б) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2=-(x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2)=$

$$=-\left(\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2-\frac{1}{4}x_2^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2\right)=-\left(\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2-\frac{1}{3}x_3^2+x_3^2\right)=$$

$$=-x_1'^2-\frac{3}{4}x_2'^2-\frac{2}{3}x_3'^2.$$

Квадратичная форма является отрицательно определенной.

в) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\begin{vmatrix}x_1=x_1'+x_2'\\x_2=x_1'-x_2'\\x_3=x_3'\end{vmatrix}=$

$x_1'^2-x_2'^2+x_1'x_3'-x_2'x_3'+x_1'x_3'+x_2'x_3'==(x_1'+x_3')^2-x_2'^2-x_3'^2=x_1''^2-x_2''^2-x_3''^2.$

Квадратичная форма является знакопеременной.

г) $L(x_1,x_2,x_3)=8x_1^2+8x_2^2+x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3=8\left(x_1+x_2+\dfrac{1}{4}\cdot x_3\right)^2-$

$-4x_2x_3-\dfrac{1}{2}x_3^2+x_3^2+4x_2x_3=8x_1'^2+0x_2'^2+\dfrac{1}{2}x_3'^2.$

Квадратичная форма является неотрицательно определенной. $\blacktriangle$

Пример 6. Методом Лагранжа привести квадратичную форму к каноническому виду и указать невырожденное преобразование переменных, осуществляющее такое преобразование квадратичной формы:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$.

Δ а) Основная идея метода Лагранжа состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов переменных. Проиллюстрируем этот метод на конкретном примере.

Сгруппируем все слагаемые, содержащие переменную x_1, и дополним полученное выражение до полного квадрата:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2.$$

Итак, $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 =$
$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3$.

Аналогичную процедуру проведем с переменной x_2:

$$-4x_2^2 - 8x_2x_3 = -(4x_2^2 + 8x_2x_3) = -((2x_2)^2 + 2 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3 + (2x_3)^2 -$$
$$-(2x_3)^2) = -((2x_2 + 2x_3)^2 - 4x_3^2) = -(2x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2.$$

Итак, $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2$.

Введем новые переменные: $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ y_2 = 2x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ или в матричной форме: $Y = S^{-1}X$, $X = SY$, где $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для нахождения S выразим переменные x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3.

Так как $x_3 = y_3$, то, подставляя во второе уравнение $y_2 = 2x_2 + 2y_3$, получаем $x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - 2y_3) = \frac{1}{2}y_2 - y_3$. Теперь можем найти x_1 из первого уравнения: $y_1 = x_1 + 2\left(\frac{1}{2}y_2 - y_3\right) + y_3 = x_1 + y_2 - y_3 \Rightarrow x_1 = y_1 - y_2 + y_3$, $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

Итак, $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы S: $\det S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Так как $\det S \neq 0$, то матрица S невырожденная, поэтому преобразование координат невырожденное.

В новых переменных квадратичная форма имеет канонический вид:
$L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$.

Матрица B квадратичной формы $L(y_1, y_2, y_3)$ в новых переменных диагональна:

$$B = S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

где A – матрица квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3)$.

б) В квадратичной форме $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ $\left(A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right)$

отсутствуют члены с квадратами переменных, поэтому совершим сначала невырожденное преобразование переменных $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$ с

матрицей $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В результате получим

$$L(y_1, y_2, y_3) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - 6(y_1 - y_2)y_3 + 2(y_1 + y_2)y_3 =$$
$$= 2(y_1^2 - y_2^2) - 6y_1y_3 + 6y_2y_3 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

Выделим полный квадрат по y_1 и y_2:

$$L(y_1, y_2, y_3) = 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2) - 2(y_2^2 - 2 \cdot y_2 \cdot 2y_3 + (2y_3)^2 - (2y_3)^2) =$$
$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_3^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 8y_3^2 = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$$

Перейдем к новым переменным: $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$ что равносильно линейному преобразованию переменных $y_1 = z_1 + z_3$, $y_2 = z_2 + 2z_3$, $y_3 = z_3$

с матрицей $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В новых переменных квадратичная форма $L(y_1, y_2, y_3)$ уже имеет канонический вид: $L(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$.

Линейное преобразование переменных, сразу приводящее квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3)$ к полученному каноническому виду, имеет следующую матрицу:

$$S = Y\,Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ т. е. определяется

формулами $\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$

Матрица квадратичной формы $L(z_1, z_2, z_3)$ является диагональной:

$$B = S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 7. Привести квадратичную форму к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2$;

в) $L(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1x_2$.

Δ Приведем квадратичные формы к каноническому виду по следующему алгоритму.

а) I. Составим матрицу данной квадратичной формы:

$$L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Найдем собственные значения матрицы A, т. е. спектр матрицы квадратичной формы.

Решим характеристическое уравнение: $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (-2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 2\cdot(-2)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 2\cdot(1-\lambda) - 1\cdot 1\cdot(-2-\lambda) -$$
$$-(-2)\cdot(-2)\cdot(1-\lambda) = (-2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 8(1-\lambda) - (-2-\lambda) - 8 =$$
$$= (-2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) - 8(1-\lambda+1) = (-2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) - 8(2-\lambda) =$$
$$= (\lambda+2)\lambda(2-\lambda) - 8(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0.$$

Итак, собственными значениями матрицы A являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -4$.

III. Запишем канонический вид квадратичной формы по формуле

$$L(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2.$$

Канонический вид рассматриваемой квадратичной формы будет иметь вид $L(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

Для определения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду, или, другими словами, для построения канонического ортонормированного базиса данной квадратичной формы необходимо в дополнение к предыдущему алгоритму выполнить следующее.

IV. Для каждого собственного значения λ матрицы A построить фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы $(A - \lambda_i E)\bar{x} = 0$.

Определяем собственные векторы.

При $\lambda_1 = 2$ система $(A - \lambda_1 E)\bar{x} = 0$ $(\bar{x} = (x_1, x_2, x_3))$ имеет следующий вид: $\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Эта система равносильна уравнению $-4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, следовательно, общее решение можно записать в виде $\bar{x} = (x_1, x_2, 2x_1 + x_2)^T$, а фундаментальная система решений состоит из двух векторов, например, $\bar{b}_1 = (0, 1, 1)^T$ и $\bar{b}_2 = (1, -1, 1)^T$. Эти векторы уже ортогональны. Поэтому их не надо ортогонализировать, а достаточно лишь нормировать.

Для того, чтобы нормировать вектор нам необходимо найти его модуль, и каждую координату разделить на него:

$$|\bar{b}_1| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\ |\bar{b}_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

После нормирования получим два вектора:

$$\bar{e}_1' = \frac{\bar{b}_1}{|\bar{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\ \ \bar{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$$

При $\lambda_3 = -4$ система $(A - \lambda_3 E)\bar{x} = 0$ имеет вид $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

Ее общим решением является $\bar{x} = (-2x_3, -x_3, x_3)^T$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например $\bar{b}_3 = (2, 1, -1)^T$. Нормируя его, получим вектор $\bar{e}_3' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T$.

Векторы $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$ составляют канонический ортонормированный базис данной квадратичной формы. Из столбцов их координат строим искомую ортогональную матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

По строкам этой матрицы записываем искомое ортогональное преобразование переменных:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3. \end{cases}$$

б) Запишем симметрическую матрицу A данной квадратичной формы $L(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2$: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Найдем ее собственные значения, решая характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)^2 - 9 = 0.$$

Отсюда $7 - \lambda = 3 \Rightarrow \lambda_1 = 4$ и $7 - \lambda = -3 \Rightarrow \lambda_2 = 10$. Эти собственные значения дают нам коэффициенты квадратичной формы в каноническом виде:

$$L(y_1, y_2) = 4y_1^2 + 10y_2^2.$$

Для построения ортогонального преобразования найдем ортонормированный базис из собственных векторов матрицы *A*.

При $\lambda_1 = 4$ координаты собственного вектора находим из однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_1 E)\bar{x} = 0$: $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

Ее общим решением является $\bar{x}=(-x_2,\, x_2)^T$, полагая $x_2=-1$, получим собственный вектор $\bar{b}_1=(1,-1)^T$. Нормируя его, получим вектор $\bar{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

При $\lambda_2=10$ получаем систему $\begin{cases}-3x_1+3x_2=0,\\ 3x_1-3x_2=0.\end{cases}$

Общее решение: $\bar{x}=(x_1,\, x_1)^T$. ФСР: $\bar{b}_2=(1,1)^T$. Так как нас интересует нормированный собственный вектор, то $\bar{e}_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

Составляем из столбцов координат векторов $\bar{e}_1',\bar{e}_2'$ матрицу ортогонального преобразования $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, которой соответствует линейная замена переменных $\bar{x}=S\,\bar{y}$.

По строкам этой матрицы записываем искомое ортогональное преобразование переменных: $\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2,\\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2.\end{cases}$

Чтобы получить квадратичную форму канонического вида, необходимо подставить ортогональное преобразование переменных в квадратичную форму по условию:

$$7x_1^2+6x_1x_2+7x_2^2=7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2+6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)+$$

$$+7\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2=7\left(\frac{1}{2}y_1^2+y_1y_2+\frac{1}{2}y_2^2\right)+6\left(-\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_1y_2-\frac{1}{2}y_1y_2+\frac{1}{2}y_2^2\right)+$$

$$+7\left(\frac{1}{2}y_1^2-y_1y_2+\frac{1}{2}y_2^2\right)=4y_1^2+10y_2^2=L(y_1,y_2).$$

Следует отметить, что сразу можем записать канонический вид квадратичной формы по известным собственным значениям.

Отметим, что матрицу квадратичной формы канонического вида можно найти по формуле $\Lambda=S^TAS$ и убедимся, что она диагональна. Действительно:

$$\Lambda=S^TAS=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}}\\ \frac{10}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}.$$

Итак, $L(y_1, y_2) = 4y_1^2 + 10y_2^2$.

в) Матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,\ \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2.$$

Найдем соответствующие ортонормированные собственные векторы:

$$\lambda = -3, \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_2 + x_2 = 0, \end{cases} \quad \bar{e}_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix};$$

$$\lambda = 2, \quad \begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 = 0, \end{cases} \quad \bar{e}_2' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

В базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2')$ заданная квадратичная форма имеет вид $-3y_1^2 + 2y_2^2$, а соответствующее преобразование координат $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

или $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_2, \\ x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_2. \end{cases}$ ▲

Пример 8. Пусть квадратичная форма задана своей матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 19 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

С помощью критерия Сильвестра установить является ли данная квадратичная форма знакоопределенной.

Δ а) $\Delta_1 = 4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0$.

Квадратичная форма является знакоположительной.

б) $\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0$.

Квадратичная форма является знакоотрицательной;

в) $\Delta_1 = -16,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{vmatrix} = 0$.

Квадратичная форма не является знакоопределенной.

г) $\Delta_1 = 2,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 19 \end{vmatrix} = 2$.

Квадратичная форма является знакоположительной.

д) $\Delta_1 = -1,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2$.

Квадратичная форма является знакоотрицательной.

е) $\Delta_1 = 1,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Квадратичная форма не является знакоопределенной.

Пример 9. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = -6x_2^2 - 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1x_3 + 2x_2x_4 + x_4^2$;

д) $L(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.

Δ а) Составим матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Найдем угловые миноры матрицы A:

$$\Delta_1 = -11 < 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -11 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = (-11)(-6) - 6 \cdot 6 = 66 - 36 = 30 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = (-11)(-6)(-6) + 6 \cdot 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 3 \cdot (-6) - (-6)(-6)(-6) -$$

$$- 3 \cdot 3(-11) - 6 \cdot 6 \cdot (-6) = -396 - 108 - 108 + 216 + 99 + 216 = -612 + 531 =$$

$$= -81 < 0.$$

Поскольку знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса, то квадратичная форма является отрицательно определенной по критерию Сильвестра.

б) Рассмотрим матрицу квадратичной формы и найдем ее угловые миноры:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \Delta_1 = 3 > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 1 - 1 = 5 > 0.$$

По критерию Сильвестра квадратичная форма является положительно определенной.

в) Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

По критерию Сильвестра

$$\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -6 < 0.$$

Данная квадратичная форма не является положительно (отрицательно) определенной.

г) Запишем матрицу A этой квадратичной формы и определитель матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 = 4.$$

Так как главные (угловые) миноры матрицы A $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0,\ \Delta_4 = 4$, то квадратичная форма является знакопеременной.

д) Квадратичная форма является знакопеременной, т. к. невырождена $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, а $\Delta_1 = 0$.

Невырожденная квадратичная форма знакопеременна тогда и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий:

1) один из угловых миноров равен нулю;

2) один из угловых миноров четного порядка отрицателен;

3) два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки. ▲

Пример 10. Выяснить, является ли положительно (отрицательно) определенной квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$, найдя все собственные значения ее матрицы.

Δ По собственным значениям матрицы квадратичной формы можно определить тип квадратичной формы.

Тип квадратичной формы	Множество собственных значений
Положительно определенная	Все собственные значения положительны
Отрицательно определенная	Все собственные значения отрицательны
Положительно полуопределенная	Все собственные значения неотрицательны
Отрицательно полуопределенная	Все собственные значения неположительны
Неопределенная (знакопеременная)	Есть и положительные, и отрицательные собственные значения

Квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ с характеристическим уравнением матрицы

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 0.$$

Собственные значения матрицы данной квадратичной формы равны: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$. Следовательно, форма положительно определенная. ▲

Пример 11. Определить методом Якоби нормальный вид квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$ и найти ранг, сигнатуру квадратичной формы.

Δ В методе Якоби утверждается, что отрицательный индекс инерции квадратичной формы равен числу перемен знака в последовательности угловых миноров матрицы квадратичной формы. При этом предполагается, что все $\Delta_i \neq 0$.

Составим матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Угловые миноры:

$$\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} < 0.$$

В этой последовательности одна перемена знака. Поэтому отрицательный индекс инерции квадратичной формы $i_- = 1$. Тогда положительный индекс инерции квадратичной формы $i_+ = n - 1 = 3 - 1 = 2$, где n – порядок квадратичной формы.

Итак, нормальный вид квадратичной формы: $Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

По известным индексам инерции i_+ и i_- определяются и ранг квадратичной формы $r = i_+ + i_-$, и ее сигнатура $s = i_+ - i_-$.

Следовательно, $r = 2+1 = 3$ и $s = 2-1 = 1$. ▲

Пример 12. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 2(\lambda - 1)\, x_1 x_2 + \lambda^2 x_2 x_3$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1 x_2 - \lambda x_2^2 + 4x_2 x_3 - \lambda x_3^2 + 2x_1 x_3$.

Δ а) $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 < 2 \Rightarrow |\lambda| < \sqrt{2},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 < \frac{5}{3} \Rightarrow |\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Из последних двух неравенств получаем $-\sqrt{\frac{5}{3}} < \lambda < \sqrt{\frac{5}{3}}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ \lambda - \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\lambda^2 \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda^2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda - \frac{1}{2} \\ \lambda - \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -2 - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = -\lambda^2 + \lambda - \frac{9}{4} > 0.$$

Последнее неравенство не выполняется ни при каких значениях $\lambda \in \boldsymbol{R}$, следовательно, ни при каких $\lambda \in \boldsymbol{R}$ квадратичная форма не является положительно определенной.

в) Рассмотрим матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$ и найдем ее угловые миноры:

$$\Delta_1 = 1, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda - 4,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-\lambda&2\\1&2&-\lambda\end{vmatrix}=1\cdot(-\lambda)\cdot(-\lambda)+2\cdot2\cdot1+2\cdot2\cdot1-1\cdot1\cdot(-\lambda)-2\cdot2\cdot1-2\cdot2\cdot(-\lambda)=$$

$$=\lambda^2+8+\lambda-4+4\lambda=\lambda^2+5\lambda+4.$$

Применяя критерий Сильвестра квадратичная форма является положительно определенной, если

$$\begin{cases}\Delta_1=1>0,\\ \Delta_2=-\lambda-4>0,\\ \Delta_3=\lambda^2+5\lambda+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lambda<-4,\\ \lambda<-4,\ \lambda>-1,\end{cases}$$

т. е. при $\lambda\in(-\infty;-4)$. При этих значениях параметра квадратичная форма положительна определена.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду находит применение при исследовании уравнений кривых и поверхностей второго порядка. ▲

Пример 13. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $2x^2+12xy-7y^2+20=0$ и построить эту кривую в исходной системе координат.

Δ 1) Составим матрицу A квадратичной формы $L(x,y)=2x^2+12xy-7y^2$, соответствующая данному уравнению кривой второго порядка: $A=\begin{pmatrix}2&6\\6&-7\end{pmatrix}$.

2) Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&6\\6&-7-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-7-\lambda)-36=-14-2\lambda+7\lambda+\lambda^2-36=$$

$$=\lambda^2+5\lambda-50=0,\quad \lambda_1=5,\quad \lambda_2=-10.$$

3) Найдем собственные векторы матрицы A. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1=5$, найдем из СЛАУ $(A-\lambda E)\bar{x}=0$:

$$\begin{cases}-3x_1+6x_2=0,\\ 6x_1-12x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow -x_1+2x_2=0.$$

$\bar{e}_1=(2,1)$ – собственный вектор матрицы A. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_2=-10$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix}12&6\\6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases}12x_1+6x_2=0,\\ 6x_1+3x_2=0,\end{cases}$$

которая равносильна уравнению $2x_1 + x_2 = 0$ и $\bar{e}_2 = (-1, 2)$.

Нормируя собственные векторы, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A: $\bar{e}_1' = \dfrac{\bar{e}_1}{|\bar{e}_1|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\bar{e}_2' = \dfrac{\bar{e}_2}{|\bar{e}_2|} = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Матрица $T = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ является ортогональной матрицей перехода от старого ортонормированного базиса $\bar{e}$ к новому ортонормированному базису $\bar{e}'$, состоящему из собственных векторов матрицы A, $\det T = 1$.

4) Формулы преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Можем записать канонический вид квадратичной формы кривой по известным собственным значениям: $5(x')^2 - 10(y')^2$.

Уравнение линии в системе координат, определяемой векторами $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$, имеет вид $5(x')^2 - 10(y')^2 = -20$, которое легко преобразуется к каноническому уравнению заданной линии делением на 20:

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{2} = -1.$$

Полученному уравнению соответствует гипербола (сопряженная гиперболе $\dfrac{(x')^2}{4} - \dfrac{(y')^2}{2} = 1$).

Для кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ можно вычислить следующие однозначно определяющие тип кривой *инварианты*:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{I}_1 = a_{11} + a_{22}, \quad \mathrm{I}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

По следующей таблице определяют вид линии:

<table>
<tr><th colspan="5">Признаки вида</th><th>Название линии</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Центральные линии</td><td rowspan="3">Эллиптический тип</td><td rowspan="3">$\delta > 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$</td><td rowspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>$I_1 \cdot \Delta < 0$</td><td>Эллипс</td></tr>
<tr><td>$I_1 \cdot \Delta > 0$</td><td>Эллипс мнимый</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>Пара мнимых пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Гиперболический тип</td><td rowspan="2">$\delta < 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0)$</td><td colspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>Гипербола</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>Пара пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Нецентральные линии</td><td rowspan="4">Параболический тип</td><td rowspan="4">$\delta = 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0)$</td><td colspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>Парабола</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td>$I_2 < 0$</td><td>Пара параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$I_2 > 0$</td><td>Пара мнимых параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$I_2 = 0$</td><td>Пара совпадающих прямых</td></tr>
</table>

В нашем случае $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 5 \cdot (-10) = -50 < 0$ $\left(\delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} < 0 \right)$,

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} \neq 0$, следовательно, по таблице – это гипербола.

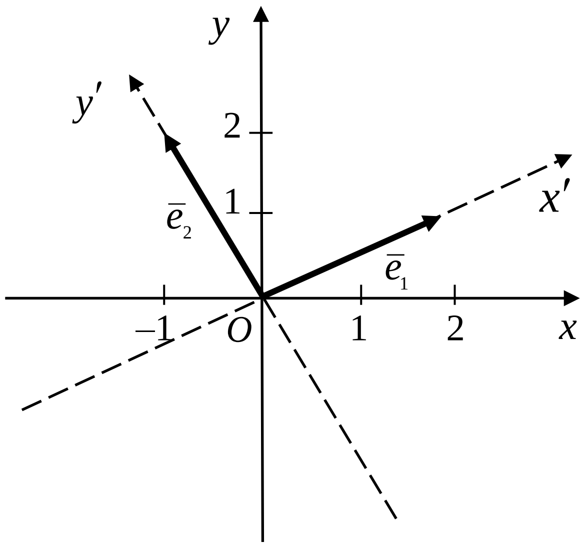


Рис. 13

Для построения гиперболы, заданной в исходной системе координат уравнением $2x^2 + 12xy - 7y^2 + 20 = 0$, надо изобразить исходную систему координат Oxy, а в ней отложить от точки O собственные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ и вдоль них направить координатные оси новой системы координат $Ox'y'$. Началом канонической системы координат $Ox'y'$ будет точка $O(0; 0)$ (рис. 13).

Координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат находят из системы линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}\cdot x_0 + a_{12}\cdot y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}\cdot x_0 + a_{22}\cdot y_0 + a_{23} = 0. \end{cases}$

В этой системе координат строим гиперболу $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{2} = -1$ с полуосями $a = \sqrt{2}, b = 2$, но ее действительной осью $2a$ является ось Oy (рис. 14).

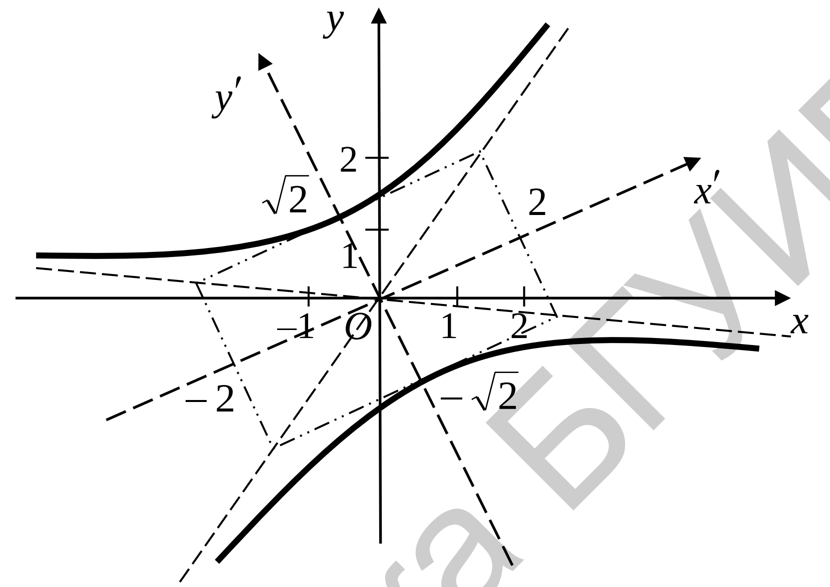


Рис. 14

Матрица $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} (\det T = 1)$, где $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$,

является матрицей линейного оператора поворота вектора, лежащего на плоскости, на угол φ против часовой стрелки. Таким образом, система координат $Ox'y'$ получена поворотом системы Oxy на угол $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ вокруг начала координат. ▲

Пример 14. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка $3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy - 8xz - 4yz + 8x + 4y + 8z - 4 = 0$, определить ее тип и найти каноническую систему координат.

Δ Квадратичная форма данной поверхности имеет следующий вид:

$3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy - 8xz - 4yz$.

Запишем ее матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 98) = 0.$$

Решая уравнение, находим его корни:

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 7$.

Для собственного значения $\lambda = -2$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \bar{e}_1' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Для собственного значения $\lambda = 7$:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{e}_2' = \begin{pmatrix} 1/3\sqrt{2} \\ -4/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

В качестве $\bar{e}_3'$ можно взять [$\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$]:

$$\bar{e}_3' = \frac{1}{9\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, будет иметь следующий вид:

$$x = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z', \quad y = \frac{1}{3}x' - \frac{4}{3\sqrt{2}}y', \quad z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'.$$

Отметим, что канонический вид квадратичной формы поверхности можно было записать сразу по известным собственным значениям: $-2x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2$. Линейные слагаемые будут иметь вид

$$8x + 4y + 8z - 4 = 8\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) + 4\left(\frac{1}{3}x' - \frac{4}{3\sqrt{2}}y'\right) +$$

$$+8\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 4 = 12x' - 4.$$

Выполнив указанное ортогональное преобразование получаем

$-2x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2 + 12x' - 4 = 0$

или

$$-2\left(x'-3\right)^2+7y'^2+7z'^2=-14\,.$$

Второе преобразование координат имеет следующий вид:

$$x'-3=x'',\ y'=y'',\ z'=z''\,,$$

откуда окончательно получаем каноническое уравнение двуполостного гиперболоида:

$$-\frac{x''^2}{7}+\frac{y''^2}{2}+\frac{z''^2}{2}=-1.$$

Результирующее преобразование будет таким:

$$x=\frac{2}{3}x''+\frac{1}{3\sqrt{2}}y''+\frac{1}{\sqrt{2}}z''+2,$$

$$y=\frac{1}{3}x''-\frac{4}{3\sqrt{2}}y''+1,$$

$$z''=\frac{2}{3}x''+\frac{1}{3\sqrt{2}}y''-\frac{1}{\sqrt{2}}z''+2,$$

а каноническая система координат – $\left(0',\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'\right)$, где $0'\left(2;1;2\right)$. ▲

Дополнительные задачи

1. Составить матрицу квадратичной формы и найти собственные значения матрицы:

а) $L\,(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

б) $L\,(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$;

в) $L\,(x_1,x_2)=17x_1^2+12x_1x_2+8x_2^2$;

г) $L\,(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$;

д) $L\,(x_1,x_2)=14x_1^2+21x_2^2+24x_1x_2$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$;

б) $\begin{pmatrix}3&2&0\\2&4&-2\\0&-2&5\end{pmatrix},\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=7$;

в) $\begin{pmatrix}17&6\\6&8\end{pmatrix},\ \lambda_1=5,\ \lambda_2=20$;

г) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$;

д) $\begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 5$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2 - 4\sqrt{2}x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_1x_3$;

д) $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$.

Ответ: а) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2$, $y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3$, $y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3$, $y_3 = x_3$;

б) $L(y_1, y_2) = 5y_1^2 - y_2^2$, $y_1 = x_1$, $y_2 = \sqrt{2}\,x_1 + 2x_2$;

в) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$, $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$;

г) $L(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2$, $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)$, $y_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3)$, $y_3 = x_3$;

д) $L(y_1, y_2) = -7y_1^2 + y_2^2$, $y_1 = x_1$, $y_2 = 3x_1 + x_2$.

3. Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду и записать этот канонический вид:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_2x_3 - 4x_1x_2 + x_2^2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_3 + 6x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_3^2$;

г) $L(x_1, x_2) = -x_2^2 - 16x_1x_2 + 11x_1^2$;

д) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

Ответ: а) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 + y_2 + 2y_3), \\ x_2 = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2 - 2y_3), \\ x_3 = \frac{1}{3}(-2y_1 + 2y_2 + y_3). \end{cases}$ $L(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$;

б) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}\left(y_1 + y_2 + \dfrac{1}{2}y_3\right), \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}\left(y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 - y_3\right), \\ x_3 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}y_1 - y_2 + y_3\right). \end{cases}$ $L(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2;$

в) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}(2y_1 - y_2 + 2y_3), \\ x_2 = \dfrac{1}{3}(2y_1 + 2y_2 - y_3), \\ x_3 = -\dfrac{1}{3}(y_1 - 2y_2 - 2y_3). \end{cases}$ $L(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2;$

г) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_2), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2). \end{cases}$ $L(y_1, y_2) = -5y_1^2 + 15y_2^2;$

д) $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_3), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \dfrac{1}{2}(y_2 + y_3), \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \dfrac{1}{2}(y_2 + y_3). \end{cases}$ $L(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_3^2.$

4. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы с матрицей:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) положительно определена; б) отрицательно определена; в) полуопределенная; г) неотрицательно определенная; д) неопределена.

5. Не приводя квадратичную форму к каноническому виду, найти все значения параметра λ, при которых она является положительно определенной и отрицательно определенной:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = \lambda x_1^2 + (\lambda - 3)x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$.

Ответ: а) положительно определена при $\lambda > 5$, отрицательно определена при $\lambda < -1$; б) положительно определена при $\lambda > 1$, отрицательно определена при $\lambda < -4$.

6. Найти каноническое уравнение кривой второго порядка, записать все использованные преобразования и построить кривую в исходной системе координат:

а) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;

б) $-7x^2 + 48xy + 7y^2 - 625 = 0$;

в) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

г) $8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0$.

Ответ: а) $\dfrac{(x')^2}{5} + \dfrac{(y')^2}{30} = 1$ – эллипс; б) $\dfrac{(x')^2}{25} - \dfrac{(y')^2}{25} = 1$ – гипербола; в) парабола $y'^2 = 4\sqrt{2}\,x'$; г) две пересекающиеся прямые $\left[\begin{array}{l} 2x' - 3y' + 1 = 0, \\ 4x' - 3y' - 1 = 0. \end{array}\right.$

7. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

а) $4x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 20 = 0$; б) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 18$.

Ответ: а) $\dfrac{x'^2}{20} + \dfrac{y'^2}{2} - \dfrac{z'^2}{10} = 1$; б) $\dfrac{x'^2}{6} + \dfrac{y'^2}{3} + \dfrac{z'^2}{2} = 1$.

8. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$$

Ответ: Эллипсоид $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{1} + \dfrac{z'^2}{2/3} = 1$, $O'(1; 2; -1)$, $\bar{e}_1 = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_2 = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_3 = \left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Занятия 20–21

Числовая последовательность

Пример 1. Написать первые пять членов последовательности $\{x_n\}$, если:

а) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{2n+1}$;

б) x_n – n-я цифра в десятичной записи числа π;

в) $x_1 = x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ (последовательность Фибоначчи).

∆ а) Последовательно подставляя $n = 1, 2, 3, 4, 5$ в формулу общего члена последовательности, находим

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{5},\ x_3 = -\frac{3}{7},\ x_4 = \frac{4}{9},\ x_5 = -\frac{5}{11}.$$

б) Так как $\pi = 3{,}1415926\ldots$, то получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 1$, $x_5 = 5$.

в) Имеем $x_1 = x_2 = 1$. Пользуясь формулой $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ последовательно находим $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$. ▲

Пример 2. Записать формулу общего члена последовательности:

а) $\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{5}, \dfrac{7}{10}, \dfrac{9}{17}, \ldots$; б) $1, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{4}, 5, \ldots$.

Ответ: а) $x_n = \frac{2n+1}{n^2+1}$; б) $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$.

Пример 3. Найти наименьший и наибольший члены последовательности $x_n = \frac{3n-18}{3n-19}$.

Δ $x_n = 1 + \frac{1}{3n-19}$. Выражение $\frac{1}{3n-19}$ принимает наименьшее значение -1 при $n = 6$, а наибольшее значение $\frac{1}{2}$ при $n = 7$. $x_6 = 0$ является наименьшим членом последовательности, $x_7 = \frac{3}{2}$ является наибольшим членом последовательности. ▲

Пример 4. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{100^n}{n!}$ является ограниченной.

Δ $x_n > 0,$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{100^n}{n!} = \frac{100}{n+1}$. При $n+1 \geq 100$ члены последовательности не возрастают, при $n+1 \leq 100$ члены последовательности не убывают. Таким образом, $0 < x_n \leq \frac{100^{99}}{99!}$. ▲

Пример 5. Доказать, что последовательность $x_n = 2^{n(-1)^n}$ не ограничена.

Δ В силу определения нужно показать, что $\forall M > 0$ $\exists n \in \boldsymbol{N}$, для которого $|x_n| > M$.

Зададим произвольное $M > 0$ и возьмем любое четное $n > \log_2 M$. $x_n = 2^n > 2^{\log_2 M} = M$. ▲

Пример 6. Доказать, что последовательность $x_n = n + (-1)^n$ не является монотонной.

Δ Полагая $n = 2k,$ $n = 2k+1,$ $n = 2k+2$, находим $x_{2k} = 2k+1,$ $x_{2k+1} = 2k,$ $x_{2k+2} = 2k+3$. Имеем $x_{2k} > x_{2k+1} < x_{2k+2}$. Последовательность не является монотонной. ▲

Пример 7. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+4} = 3$.

Δ $\left|\frac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| < \varepsilon$. Преобразуем левую часть неравенства:

$\left|\frac{3n^2+1}{n^2+4} - 3\right| = \left|\frac{-11}{n^2+4}\right| = \frac{11}{n^2+4} < \frac{11}{n^2} \leq \frac{11}{n}$;

$\frac{11}{n} < \varepsilon,$ $n > \frac{11}{\varepsilon}$, т. е. за число N можно взять, например, $\left[\frac{11}{\varepsilon}\right]$ (целая часть числа $\frac{11}{\varepsilon}$). ▲

Пример 8. Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ является расходящейся.

Δ Находим $x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} > 1,\ x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} < 0$. Следовательно $|x_{2k} - x_{2k+1}| > 1$. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Рассмотрим интервал $\left(a - \frac{1}{2};\ a + \frac{1}{2}\right)$. Никакие два соседние члена последовательности не могут попасть в этот интервал, т. к. расстояние между ними больше 1. Следовательно, последовательность является расходящейся. ▲

Пример 9. Докажите, что последовательность $x_n = (1 + (-1)^n)\, n$ неограниченная, но не является бесконечно большой.

Δ Зададим произвольное $M > 0$. Для любого четного $n > \frac{M}{2}$ $x_n = 2n > M$. Последовательность неограниченная. Для любого нечетного n $x_n = 0$, следовательно, последовательность не является бесконечно большой. ▲

Пример 10. Доказать по определению, что последовательность $x_n = (-1)^n\, n$ является бесконечно большой.

Δ Возьмем произвольное число $M > 0$ и положим $N = [M]$. Тогда для любого $n > N$ справедливо $|x_n| = n > [M] + 1 > M$, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x^n| = +\infty$, т. е. последовательность $x_n = (-1)^n\, n$ является бесконечно большой. ▲

Пример 11. Доказать по определению, что последовательность $x_n = q^n$, $0 < q < 1$ является бесконечно малой.

Δ Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и решим относительно n неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$, $n > \log_q \varepsilon$. Положим $N(\varepsilon) = [\log_q \varepsilon]$. Тогда $\forall n > N$ и выполняется неравенство $q^n < \varepsilon$. ▲

Пример 12. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi(n^2 + 4n)}{\sqrt{n+2}}$ является бесконечно малой.

Δ Последовательность $b_n = \sin \frac{\pi\,(n^2 + 4n)}{\sqrt{n+2}}$ является ограниченной, последовательность $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ является бесконечно малой. Следовательно, последовательность $x_n = \alpha_n \cdot b_n$ так же является бесконечно малой. ▲

Пример 13. Найти пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)(n+3)(3n+4)}{5n^3+2n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n-3)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$; з) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$.

Δ а) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)(3n+4)}{5n^3+2n+1} = |:n^3| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)}{5+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{3}{5}.$$

б) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt[3]{n^3-1}} = |:n^2| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{\sqrt{\frac{1}{n^5}}}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}}{\left(1+\sqrt[4]{\frac{1}{n^3}}\right)\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}} = 2.$$

в) $$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+n+1\right)-\left(n^2-n+1\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

г) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)\,(\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2)}{\sqrt[3]{n^4-2n^5+n^6}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^4-2n^5+n^6}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+1}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1} = \frac{1}{3}.$$

д) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n-3)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)!\,(n^2+n-2)}{(n-2)!\,(n-1-1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-2}{(n-2)\,(n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2} = 1.$$

е) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=\dfrac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n^2-3n-1}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n-1}{2(n+1)}=-\frac{3}{2}.$$

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\pi\sqrt{n^2+1}-\sin n\pi)=$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{\pi}{2}\,\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)=0.$$

з) Докажем, что последовательность $x_n=\sin n$ расходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n+2)-\sin n)=0$. Получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin 1\cos(n+1))=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$. Из равенства $\cos n\cos 1-\sin n\sin 1$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$, что противоречит равенству $\sin^2 n+\cos^2 n=1$. Следовательно, последовательность $x_n=\sin n$ расходится. ▲

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

Δ Заметим, что $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$. ▲

Пример 15. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt{n^2-3n})$.

Δ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt{n^2-3n})=\lim\limits_{n\to\infty}\left((\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n)-(\sqrt{n^2-3n}-n)\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{\sqrt[3]{(n^3+3n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}-\frac{-3n}{\sqrt{n^2-3n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2}\right)=2{,}5.\ ▲$$

Пример 16. Записать по формуле бинома Ньютона $(x+2)^5$.

Δ $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\,a^{n-k}\,b^k$.

$$(x+2)^5=C_5^0x^5+C_5^1x^4\cdot 2+C_5^2x^3\cdot 2^2+C_5^3x^2\cdot 2^3+C_5^4x\cdot 2^4+C_5^5x^0\cdot 2^5=$$

$=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$. ▲

Пример 17. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1$.

Δ Для любого $n\ge 2$ $\sqrt[n]{5}>1$, поэтому $\alpha_n=\sqrt[n]{5}-1>0$. Отсюда имеем $5=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\dfrac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\ldots+\alpha_n^n>n\alpha_n$, значит $0<\alpha_n<\dfrac{5}{n}$ для всех

$n \ge 2$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1$. ▲

Пример 18. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Δ При $n \ge 2$ число $\sqrt[n]{n} > 1$. Поэтому $\forall n \ge 2\ \exists\ \beta_n > 0$ такое, что $\sqrt[n]{n} = 1 + \beta_n$. $n = (1+\beta_n)^n = 1 + n\beta_n + \dfrac{n(n-1)}{2}\beta_n^2 + \ldots + \beta_n^n \ge \dfrac{n(n-1)}{2}\beta_n^2$. Отсюда находим, что $0 < \beta_n \le \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, $\forall n \ge 2$. $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ▲

Пример 19. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$, $n \in \mathbf{N}$ имеет предел и найти его.

Δ Составим соотношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(n+1)! \cdot (2n+1)!!}{(2n+3)!! \cdot n!} = \dfrac{n+1}{2n+3} < \dfrac{n+1}{2n+2} = \dfrac{1}{2}$. $x_{n+1} < \dfrac{1}{2} x_n < x_n$. Последовательность убывающая. Очевидно, $0 < x_n < x_1 = \dfrac{1}{3}$, т. е. последовательность ограничена, а значит, имеет предел. Перейдем к пределу в равенстве.

$x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n+1}{2n+3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3}$, $c = \dfrac{1}{2}c$, $c = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ▲

Пример 20. Доказать сходимость последовательности и найти ее предел: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \ldots$.

Δ Очевидно, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, т. е. наша последовательность возрастающая. Покажем, что эта последовательность ограничена. Так как $x_1 = \sqrt{2} < 2$, то $x_2 = \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2+2} = 2, \ldots, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} = \sqrt{2+2} = 2, \ldots$. Следовательно, она имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (2 + x_{n-1})$, или $y^2 = 2 + y$, $y_1 = 2$, $y_2 = -1$. Так как $x_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ▲

Пример 21. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{3n+1}$.

Δ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{-2}{n+5}\right)^{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{-2}{n+5}\right)^{\frac{n+5}{-2} \cdot \frac{(-2)(3n+1)}{n+5}} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-6n-2}{n+5}} = e^{-6}$. ▲

Пример 22. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+2n+3}\right)^{-n^2}$.

Δ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+2n+3}\right)^{-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n-4}{5n^2+2n+3}\right)^{-n^2}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n-4}{5n^2+2n+3}\right)^{\frac{5n^2+2n+3}{n-4}\cdot\frac{-(n-4)n^2}{5n^2+2n+3}}=e^{-\infty}=0$. ▲

Пример 23. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}=\infty$.

Δ Предположим, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}=a$. Так как $x_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\dfrac{3}{e}$.

Существует N, что при $n>N$ последовательность x_n является монотонно возрастающей. Следовательно, $a>0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$, т. е. $a=\dfrac{3}{e}a,\ \dfrac{3}{e}=1$. Полученное противоречие доказывает, что последовательность x_n монотонно возрастает и не имеет предела, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. ▲

Дополнительные задачи

1. Найти наименьший член последовательности:

а) $x_n=n^2-9n-100$; б) $x_n=n+\dfrac{100}{n}$.

Ответ: а) $x_4=x_5=-120$; б) $x_{10}=20$.

2. Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{(-1)^n\cdot n+1}{\sqrt{n^2+2}}$ является ограниченной.

3. Доказать, что последовательность $x_n=\sqrt{n^2-1}$ является монотонной.

4. Доказать, что последовательность $x_n=\ln n$ является бесконечно большой.

5. Пользуясь определением предела последовательности показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=5$ (указать $N(\varepsilon)$).

Ответ: $N(\varepsilon)=\left[\log_3\left(\dfrac{10}{\varepsilon}+2\right)\right]$.

6. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n=\dfrac{0{,}1n^3-3}{10n^2+5n+2}$. **Ответ:** ∞.

б) $x_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 1} - 2n$. **Ответ:** $\frac{5}{4}$.

в) $x_n = \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1}$. **Ответ:** 0.

г) $x_n = \dfrac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n}$. **Ответ:** -1.

д) $x_n = \dfrac{n! + (n+2)!}{((n+1)! + n!)\, n}$. **Ответ:** 1.

е) $x_n = \dfrac{\sqrt[5]{n^6+3} + \sqrt[4]{16n^5 - 8}}{(n + \cos n^3)\sqrt[4]{n}}$. **Ответ:** 2.

ж) $x_n = \dfrac{(n+5)^4 - (n-2)^4}{(n+2)^4 - (n-1)^4}$. **Ответ:** $\frac{7}{3}$.

з) $x_n = \left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right)$. **Ответ:** $-0{,}5$.

и) $x_1 = 0{,}1;\ x_2 = 0{,}11;\ x_3 = 0{,}111; \ldots$. **Ответ:** $\frac{1}{9}$.

к) $x_n = \dfrac{2^n + 3^{n+3}}{2^{n+3} + 3^n}$. **Ответ:** 27.

л) $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\ \ (a > 0, b > 0)$. **Ответ:** $\max\{a; b\}$.

м) $x_n = \left(\dfrac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$. **Ответ:** $\frac{1}{e}$.

н) $x_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$. **Ответ:** 0.

о) $x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.

Занятие 22

Предел функции

Пример 1. Доказать, используя определение предела функции по Коши, что $\lim\limits_{n\to 2}(2x+1)=5$.

Δ Рассмотрим произвольное число $\varepsilon>0$. Надо убедиться в существовании такого числа $\delta(\varepsilon)>0$, чтобы из неравенства $|x-2|<\delta,\ x\neq 2$, следовало неравенство $|2x+1-5|<\varepsilon$, т. е. $|2x-4|<\varepsilon$. Последнее неравенство равносильно следующему: $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, так что можно взять $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2}$ или любое положительное число меньше его. Следовательно, $\lim\limits_{n\to 2}(2x+1)=5$. ▲

Пример 2. Доказать, используя определение предела функции по Коши, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}=2$.

Δ Рассмотрим данную функцию в некоторой проколотой окрестности точки $x=1$, например, $x\in(0,1)\bigcup(1,2)$. Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и выясним, при каких x заведомо выполняется неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$. Оценим сверху величину $|f(x)-2|$:

$$|f(x)-2|=\left|\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}-2\right|=\left|\frac{x^2+4x-5-2x^2-2x+4}{x^2+x-2}\right|=\left|\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}\right|=$$

$$=\frac{|x-1|}{x+2}<\frac{|x-1|}{2}.$$

Таким образом, если $\dfrac{|x-1|}{2}<\varepsilon$, т. е. $|x-1|<2\varepsilon=\delta(\varepsilon)$, то $|f(x)-2|<\varepsilon$. Нужное нам неравенство выполняется при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-1|<2\varepsilon$. ▲

Пример 3. Доказать, используя определение предела функции по Гейне, что $\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}=2$.

Δ Будем рассматривать функцию $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$ в некоторой проколотой окрестности точки $x=1$, например, $x\in(0;1)\cup(1;2)$. Возьмем какую-либо последовательность x_n из этой окрестности, причем такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1\,(x_n\neq 1)$. Тогда на основании теорем о пределах последовательностей имеем

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+4x_n-5}{x_n^2+x_n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-1)(x_n+5)}{(x_n-1)(x_n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+5}{x_n+2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n+5}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n+2}=\frac{1+5}{1+2}=2.$$

В силу произвольности выбранной последовательности x_n и согласно определению предела функции по Гейне $\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}=2$. ▲

Пример 4. Доказать, используя определение предела функции по Гейне, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует.

Δ Для доказательства достаточно выбрать две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ с пределами, равными ∞, для которых последовательности $\{\sin x'_n\}$ и $\{\sin x''_n\}$ сходились бы к разным пределам. В качестве таких последовательностей можно взять следующие: $x'_n=\pi n$ и $x''_n=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$. Тогда, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi n=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует. ▲

Пример 5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

Δ Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. Нужно доказать, что существует такое число $M>0$, что при $|x|>M$ выполняется неравенство $\left|f(x)-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$, т. е. $\left|\dfrac{3x+5}{2x}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$. Последнее неравенство равносильно следующему: $|x|>\dfrac{5}{2\varepsilon}$. Так что положив $M=\dfrac{5}{2\varepsilon}$, при $|x|>M$, получим $\left|\dfrac{3x+5}{2x}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x}=\dfrac{3}{2}$. ▲

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.

Δ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)}=\dfrac{15}{11}$. ▲

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^k-1}$, $n,k\in\boldsymbol{N}$.

Δ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^k-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)}{(x-1)(x^{k-1}+x^{k-2}+\ldots+1)}=\dfrac{n}{k}$. ▲

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

Δ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{4}{x}}{9+\dfrac{6}{x}-\dfrac{12}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}=\frac{2}{9}.\ ▲$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Δ Разделив числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=1. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x^{11}+7x^{13})^3}{(1+x^4)^{10}}$.

$$\Delta \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^{11}+7x^{13})^3}{(1+x^4)^{10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7^3x^{39}+ax^{38}+\ldots}{x^{40}+bx^{39}+\ldots}=0. \ \blacktriangle$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

$$\Delta \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\frac{1}{4}. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

$$\Delta \lim_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4})(\sqrt{9+2x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{2\,(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{4})}{(x-8)(\sqrt{2+9x}+5)}=\frac{12}{5}. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Найти односторонние пределы следующей функции:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3, & \text{если } x\le1\\ 3x-5, & \text{если } x>1\end{cases} \quad \text{в точке } x=1.$$

Δ Пусть $x\le1$. Тогда $f(x)=-2x+3$. Следовательно, $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=1$ – предел слева. Если $x>1$, то $f(x)=3x-5$. Следовательно, $f(1+0)=$ $=\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=-2$ – предел справа. $\blacktriangle$

Пример 14. Найти односторонние пределы функции $f(x)=3+\dfrac{1}{1+7^{1/1-x}}$ при $x\to1$.

Δ Выражение $\dfrac{1}{1-x}$ стремится к $+\infty$, когда $x\to1$, оставаясь меньше единицы, поэтому $\lim\limits_{x\to1-0}7^{\frac{1}{1-x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}=0$, $f(1-0)=3$. Далее, при

$x \to 1+0$ имеем $\dfrac{1}{1-x} \to -\infty$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 1+0} 7^{\frac{1}{1-x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(3+\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}\right) =$ $= 3+1 = 4$, $f(1+0) = 4$. ▲

Пример 15. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^3+3}$ является бесконечно малой при $x \to 3$.

Δ Достаточно вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^3+3} = 0$. ▲

Пример 16. При каких значениях α и β функция $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta$, $x \to \infty$ является бесконечно малой?

Δ $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta = \dfrac{x^3 - x^2 - (x^2+2x+1)(\alpha x+\beta)}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{x^3(1-\alpha) - x^2(1+\beta+2\alpha) + \ldots}{(x+1)^2}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, если $\begin{cases} 1-\alpha = 0, \\ 1+\beta+2\alpha = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = -3. \end{cases}$ ▲

Пример 17. Доказать, что функция $f(x) = (x-2)^2 \sin^4 \dfrac{1}{x-2}$ является бесконечно малой при $x \to 2$.

Δ Функция $\varphi(x) = (x-2)^2$ является бесконечно малой при $x \to 2$. Функция $\psi(x) = \sin^4 \dfrac{1}{x-2}$ является ограниченной $(x \neq 2)$. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая. ▲

Пример 18. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to \infty$.

$$\Delta \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{1}{x}}{1} = \infty. \ ▲$$

Дополнительные задачи

1. Доказать, используя определение предела функции по Коши, что $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = \dfrac{4}{5}$.

2. Доказать, используя определение предела по Гейне, что функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$. **Ответ:** $\dfrac{5}{9}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+5x^5+4x^3}{x^7+2x^3}$. **Ответ:** 2.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$. **Ответ:** 1.

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$. **Ответ:** $\dfrac{5}{3}$.

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$. **Ответ:** 3.

е) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{x^2}{5x-3}\right)$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{25}$.

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6}+|x|}{\sqrt[6]{x^4+2}-|x|}$. **Ответ:** -2.

з) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$. **Ответ:** -2.

и) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-1)^{20}(2x+3)^{15}}{(3x+17)^{35}}$. **Ответ:** $\dfrac{2^{15}}{3^{35}}$.

к) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+2)}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{5}$.

л) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$. **Ответ:** -3.

м) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt[3]{8x^3+3}}{\sqrt[4]{x^4+5}}$. **Ответ:** 3.

н) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$ **Ответ:** $\dfrac{1}{3}$.

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$. **Ответ:** $\dfrac{mn(n-m)}{2}$.

4. Найти односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$ при $x\to 0$.

Ответ: $f(-0)=1,\ f(+0)=0$.

5. Найти односторонние пределы функции $f(x)=2^{\operatorname{ctg} x}$ при $x\to 0$.

Ответ: $f(-0)=0,\ f(+0)=+\infty$.

6. При каких значениях α и β функция $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x-\beta$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$.

Ответ: $\alpha=2,\ \beta=\dfrac{1}{4}$.

Занятие 23

Непрерывность и точки разрыва функции. Замечательные пределы

Пример 1. Пользуясь определением непрерывности, доказать, что функция $f(x)=2x^2-3x+1$ непрерывна в произвольной точке x_0 числовой оси.

Δ Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Пусть Δx – приращение аргумента в точке x_0. Найдем соответствующее приращение функции:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x)=2(x_0+\Delta x)^2-3(x_0+\Delta x)+1-2x_0^2+3x_0-1=$$
$$2x_0^2+4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2-3x_0-3\Delta x+1-2x_0^2+3x_0-1=4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2-3\Delta x=$$
$$=(4x_0-3)\,\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

Вычислим предел приращения функции, когда приращение аргумента стремится к нулю: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x_0-3)\,\Delta x+2(\Delta x)^2=0$.

Это означает по определению непрерывность функции $f(x)$ для любого $x_0\in\boldsymbol{R}$. ▲

Пример 2. С помощью «$\varepsilon-\delta$» рассуждений доказать непрерывность функции $f(x)=ax+b,\ a\neq 0,\ x\in\boldsymbol{R}$.

Δ Функция определена на всей числовой оси. Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Для любого фиксированного $x_0\in\boldsymbol{R}$ имеем

$$|ax+b-ax_0-b|=|a|\cdot|x-x_0|<\varepsilon,\ \text{если}\ |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{|a|}=\delta.\ \blacktriangle$$

Пример 3. Исследовать на непрерывность в точке $x_0=1$ следующую функцию:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{при}\quad x\le 1,\\ x+1 & \text{при}\quad x>1.\end{cases}$$

Δ Функция определена в точке $x_0=1$ и в некоторой ее окрестности.

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=2,\quad \lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=2,\quad f(1)=2.$

$f(1-0)=f(1+0)=f(1)$. В точке $x=1$ функция непрерывна. ▲

Пример 4. Функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ доопределить так, чтобы новая функция в точке $x_0=2$ была непрерывной.

Δ Для непрерывности функции в точке $x_0=2$ необходимо положить $f_1(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=4$, значит, новая функция будет выглядеть так: $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{при } x\neq2,\\ 4 & \text{при } x=2.\end{cases}$

Отметим, что для функции $f(x)$ точка $x_0=2$ является точкой устранимого разрыва. ▲

Пример 5. Исследовать на непрерывность следующую функцию и построить ее график:

$$f(x)=\begin{cases}5 & \text{при } x<-2,\\ x^2+1 & \text{при } -2\le x<-1,\\ x & \text{при } -1\le x\le 0,\\ \ln x & \text{при } x>0.\end{cases}$$

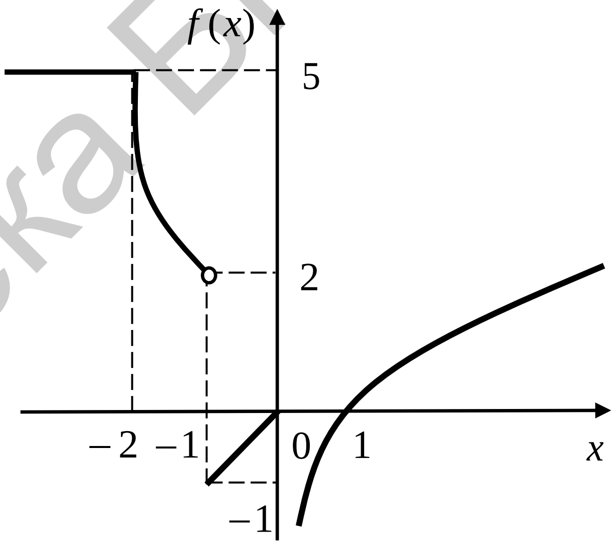


Рис. 15

Δ При различных значениях x функция задана различными формулами. В каждом из промежутков $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;+\infty)$ она непрерывна как элементарная, следовательно, разрыв может быть только в граничных точках промежутков, т. е. в точках $x=-2$, $x=-1$, $x=0$. Вычислим значения функции в этих точках и ее односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-2-0}f(x)=\lim_{x\to-2-0}5=5,\quad \lim_{x\to-2+0}f(x)=\lim_{x\to-2+0}(x^2+1)=5,\quad f(-2)=5.$$

Функция непрерывна в точке $x=-2$.

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}(x^2+1)=2,\quad \lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}x=-1,\quad f(-1)=-1.$$

Функция $f(x)$ в точке $x=-1$ терпит разрыв первого рода $(\delta=-3)$, причем в точке $x=-1$ она непрерывна справа, т. к. $f(-1+0)=f(-1)$.

$$\lim_{x\to0-0}f(x)=\lim_{x\to0-0}x=0,\quad \lim_{x\to0+0}f(x)=\lim_{x\to0+0}\ln x=-\infty,\quad f(0)=0.$$

В точке $x=0$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, причем в этой точке она непрерывна слева, т. к. $f(0-0)=f(0)$.

График функции изображен на рис. 15.

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$ в точках $x_1=3$ и $x_2=2$. Начертить схематический график функции.

Δ Для точки $x_1=3$:

$\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)= f(3)=3$.

Точка $x_1=3$ является точкой непрерывности функции. Для точки $x_2=2$:

$\lim\limits_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}}=3^{-\infty}=0,\ \lim\limits_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}}=3^{+\infty}=+\infty$.

Значит $x=2$ – точка разрыва второго рода. Для построения схематического графика (рис. 16) вычислим $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3^{\frac{1}{x-2}}=1$.

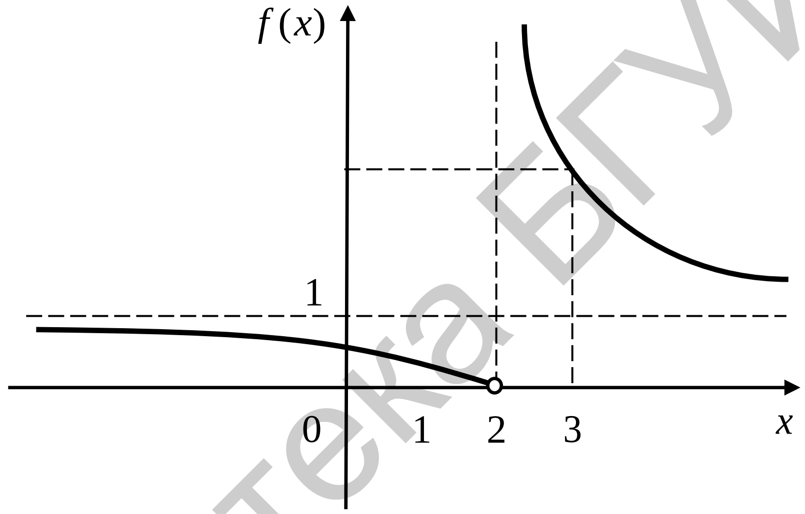


Рис. 16

При нахождении пределов функций используются так называемые замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0;$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1;$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}=p.$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

Δ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot 5x\cdot 7x}{5x\cdot\sin 7x\cdot 7x}=\dfrac{5}{7}$. ▲

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 5x}{\sin 4x}$.

Δ Введем новую переменную $t=\dfrac{\pi}{2}-x$ (при $x\to\dfrac{\pi}{2}$, $t\to 0$). Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\sin 4x} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - 5t\right)}{\sin(2\pi - 4t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 5t \cdot 5t \cdot 4t}{-5t \cdot \sin 4t \cdot 4t} = -\frac{5}{4}. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi+0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

$$\Delta \ \lim_{x\to\pi+0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to\pi+0} \frac{\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi+0} \frac{\sqrt{2}\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|}{2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi+0} \frac{-\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \sin\dfrac{2x+1}{x^2+4x^3}$.

Δ Заметив, что при $x\to\infty$ $\dfrac{2x+1}{x^2+4x^3} \to 0$, выделим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\frac{2x+1}{x^2+4x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\dfrac{2x+1}{x^2+4x^3}\cdot x^2 \cdot \dfrac{2x+1}{x^2+4x^3}}{\dfrac{2x+1}{x^2+4x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x^2}{4x^3+x^2} = \frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x+5}\right)^{2x+7}$.

Δ Поскольку $1-\dfrac{1}{3x+5}\to 1$ при $x\to\infty$, то имеем неопределенность типа 1^{∞}. Выделим второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x+5}\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3x+5}\right)^{-(3x+5)\cdot\frac{2x+7}{-(3x+5)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+7}{-(3x+5)}} = e^{-\frac{2}{3}}. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}\right)^{6x}$.

Δ Имеем неопределенность типа 1^{∞}. Выделим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}\right)^{6x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+4}{x^2+3x+5}\right)^{\frac{x^2+3x+5}{x+4}\cdot\frac{6x(x+4)}{x^2+3x+5}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+24x}{x^2+3x+5}} = e^{6}. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Δ Имеем неопределенность типа 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^{\frac{\operatorname{tg}x}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{-\cos^2 x}\cdot\frac{(-\cos^2 x)\cdot\sin x}{2\cos x}}=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sin x}=e^0=1.\ \blacktriangle$$

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^{x^2-x-2}-1}{x^2-5x+6}$.

$$\Delta\ \lim_{x\to 2}\frac{3^{x^2-x-2}-1}{x^2-x-2}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}=\ln 3\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-3)}=-3\ln 3.\ \blacktriangle$$

Пример 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+4x+1}-e^{x^2+5}}{x-1}$.

$$\Delta\ \lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2+4x+1}-e^{x^2+5}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2+5}(e^{4(x-1)}-1)\cdot 4}{4(x-1)}=4e^6.\ \blacktriangle$$

Пример 16. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}$.

$$\Delta\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+(\sin x-1))}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+(\sin x-1))}{-(\sin x-1)(\sin x+1)}=$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+1}=-\frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

Пример 17. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Δ Функция $f(x)$ определена в области $\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x}>0,\\ x\neq 0.\end{cases}$

Решив систему методом интервалов, получаем $x\in(-1;0)\cup(0;1)$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет единственную точку разрыва $x=0$. Находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x+2x}{1-x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)\cdot\dfrac{2x}{1-x}}{x\cdot\dfrac{2x}{1-x}}=2.$$

Точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва. $\blacktriangle$

Дополнительные задачи

1. При каких значениях a и b функция $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3 & \text{при} \quad x\le 0,\\ ax+b & \text{при} \quad 0<x<1,\\ \sqrt{x} & \text{при} \quad x\ge 1\end{cases}$

будет непрерывной?

Ответ: $a=2,\ b=-1$.

2. При каком значении a функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}, & x\ne 0,\\ a, & x=0,\ n\in \boldsymbol{N}\end{cases}$ будет

непрерывной?

Ответ: n.

3. Найти точки разрыва функции, установить их род, найти скачки в точках разрыва 1-го рода:

а) $y=\dfrac{x}{x^2+x-6}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$; г) $y=\operatorname{sign}(x^2-2x-3)$;

д) $y=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; е) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; ж) $y=\dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$.

Ответ: а) $x=-3,\ x=2$ – точки разрыва 2-го рода;

б) точек разрыва нет;

в) $x=1$ – точка устранимого разрыва;

г) $x=-1,\ x=3$ – точки разрыва 1-го рода; $\Delta f(-1)=-2,\ \Delta f(3)=2$;

д) $x=0$ – точка устранимого разрыва;

е) $x=0$ – точка разрыва 1-го рода; $\Delta f(0)=\pi$;

ж) $x=1$ – точка разрыва 1-го рода; $\Delta f(1)=1$. ▲

4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2},\ \alpha\ne\beta$. **Ответ:** $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$. **Ответ:** $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

г) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, $m, n \in \mathbf{Z}$. **Ответ:** $(-1)^{m-n}\ \dfrac{m}{n}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x\sin x - \cos x}{\sin^2 x}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$. **Ответ:** e^{10}.

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 6x + 7}{3x^2 + 20x - 1}\right)^{-x+1}$. **Ответ:** $e^{\frac{26}{3}}$.

з) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$. **Ответ:** $\sqrt{e}$.

и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$. **Ответ:** 1.

к) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x}$. **Ответ:** $\dfrac{\ln 8 - \ln 7}{\ln 6 - \ln 5}$.

л) $\lim\limits_{x\to 1} (3 - 2^x)^{\frac{1}{x-1}}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{4}$.

м) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$. **Ответ:** $\ln 8$.

н) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + ax)^p - e^{\beta x}}{x}$. **Ответ:** $ap - \beta$.

Занятие 24

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пример 1. Доказать, что $(x-1)(x^3 + 2x^2 - 3) = o(\sqrt{x} - 1)$ при $x \to 1$.

Δ Записанное равенство следует из того, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3 + 2x^2 - 3)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x^3 + 2x^2 - 3)}{\sqrt{x} - 1} = 0. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать, что $x \sin\sqrt{x} = x^{3/2} + o(x^{3/2})$ при $x \to +0$.

Δ Так как $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = 1$, следовательно, $x\sin\sqrt{x} = x^{3/2} + o(x^{3/2})$ при $x \to +0$. $\blacktriangle$

Пример 3. Сравнить бесконечно малые функции:

а) $\sqrt{2+x}-\sqrt{2}$ и x при $x\to 0$;

б) $1-\sin x$ и $\cos x$ при $x\to\frac{\pi}{2}$.

Δ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})\,x}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Данные функции одного порядка малости.

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=0$.

Функция $1-\sin x$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\cos x$ при $x\to\frac{\pi}{2}$. $1-\sin x=o\,(\cos x)$. А так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}=$ $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\sin x}=\dfrac{1}{2}$, то $1-\sin x$ есть бесконечно малая второго порядка относительно $\cos x$ при $x\to\pi/2$. ▲

Пример 4. Пусть $x\to 0$. Выделить главный член $c\,x^n$ и определить порядок малости относительно x следующих функций:

а) $f(x)=3x^2+5x^3+x^4$;

б) $f(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$.

Δ а) так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+5x^3+x^4}{3x^2}=1$, следовательно, $3x^2+5x^3+x^4=$ $=3x^2+o\,(x^2)$. Порядок малости равен двум.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^n}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{x\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\cdot 4x^{n-3}}=\frac{1}{2}\ \text{при}\ n=3.\ \operatorname{tg}x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+o\,(x^3).$$

Порядок малости равен трем. ▲

Пример 5. Выделить главную часть функции $f(x)=\ln(x^3-3x+3)$ вида $c\,(x-1)^n$ при $x\to 1$.

Δ Так как выражение, стоящее под знаком логарифма, стремится к единице при $x\to 0$, то его можно представить следующим образом: $x^3-3x+3=1+(x^3-3x+2)$, где x^3-3x+2 – бесконечно малая функция при $x\to 1$. Тогда $\ln(x^3-3x+2)=\ln(1+(x^3-3x+2))\sim x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\sim$ $\sim 3(x-1)^2$ при $x\to 1$. Таким образом, $\ln(x^3-3x+3)=3\,(x-1)^2+o\,(x-1)^2$ при

$x \to 1$. ▲

Пример 6. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главную часть $\Gamma(x)$ вида cx^n и определить порядок роста относительно x функции $f(x) = \sqrt[3]{8x^2+5x+3} + \sqrt{x+1}$.

Δ Так как $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$, главным является то слагаемое, порядок которого выше.

$$\sqrt[3]{8x^2+5x+3} + \sqrt{x+1} \sim \sqrt[3]{8x^2+5x+3} = 2x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{5}{8x}+\frac{3}{8x^2}} \sim 2x^{\frac{2}{3}}.$$

$\Gamma(x) = 2x^{\frac{2}{3}}$, $x \to +\infty$. Порядок роста относительно x равен $\dfrac{2}{3}$. ▲

Пример 7. Сравнить функции $f(x) = \ln\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}$ и $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2+5x+9}$ при $x \to +\infty$.

Δ $\ln\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1} = \ln\left(e^x \cdot \dfrac{1+e^{-2x}}{1+e^{-x}}\right) = x + \ln\left(\dfrac{1+e^{-2x}}{1+e^{-x}}\right)$. $f(x) \sim x$ при $x \to +\infty$.

$\sqrt[3]{x^2+5x+9} = x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{9}{x^2}}$. $\varphi(x) \sim x^{\frac{2}{3}}$ при $x \to +\infty$.

Отсюда следует, что $f(x) \sim (\varphi(x))^{\frac{3}{2}}$, т. е. функция $f(x)$ есть бесконечно большая порядка $3/2$ относительно бесконечно большой $\varphi(x)$. ▲

Пример 8. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{5x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 2x}-1}{\sin^2 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-5^{-4x}}{3\operatorname{tg} 2x - \arcsin 3x + \sin^3 x}$; з) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Δ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x} = \dfrac{5}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{5x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 3x}{4x} = \dfrac{3}{8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 2x}-1}{\sin^2 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+(\cos 2x-1))^{\frac{1}{3}}-1)}{16x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}(\cos 2x-1)}{16x^2} = -\dfrac{1}{24}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 2}{x\ln 3}=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\,(x^2+e^x)}{\ln\,(x^4+e^{2x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\,(1+(x^2+e^x-1))}{\ln\,(1+(x^4+e^{2x}-1))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+e^x-1}{x^4+e^{2x}-1}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+o(x)}{x^4+2x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2};$$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-5^{-4x}}{3\,\mathrm{tg}\,2x-\arcsin 3x+\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{-4x}(5^{6x}-1)}{6x-3x+x^3+o(x)+o(x)+o(x^3)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x\ln 5}{3x}=2\ln 5;$$

з) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\left|\begin{matrix}x-7=t\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3\sqrt{1+\dfrac{t}{9}}-3\sqrt[3]{1+\dfrac{6}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\dfrac{t}{16}}-2}=\lim_{t\to 0}\frac{3\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{9}\right)+o(t)-3\left(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t}{27}\right)+o(t)}{2\left(1+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{t}{16}\right)+o(t)-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{27}\right)t}{\dfrac{1}{32}t}=\frac{112}{27}.\ \ \blacktriangle$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\,(\ln\,(e+x))^{\mathrm{ctg}x}$.

Δ Пусть $y=\lim\limits_{x\to 0}\,(\ln\,(e+x))^{\mathrm{ctg}x}$. Тогда

$$\ln y=\lim_{x\to 0}\,\mathrm{ctg}\,x\cdot\ln\ln\,(e+x)=\lim_{x\to 0}\,\mathrm{ctg}\,x\cdot\ln\,\left(\ln\left(e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{ctg}\,x\cdot\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\mathrm{ctg}\,x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\dfrac{x}{e}}{\sin x}=\frac{1}{e}.$$

Исходный предел равен $e^{\frac{1}{e}}$. $\blacktriangle$

Дополнительные задачи

1. Доказать, что $\ln\cos x=o\,(\sqrt[3]{1+\sin 2x}-1)$ при $x\to 2\pi$.

2. Выделить главную часть функции $f(x)=3^{x^2-x-2}-1$ вида $c\,(x-2)^n$ при $x\to 2$.

Ответ: $f(x)=3\ln 3\,(x-2)+o\,(x-2)$ при $x\to 2$.

3. Определить порядок малости функции $f(x)=\ln\left(1+\sqrt[4]{2\operatorname{tg}x^3\cdot\sqrt{5\sin x^{11}}}\right)$ по сравнению с x при $x\to 0$.

Ответ: $\dfrac{17}{8}$.

4. Определить порядок роста бесконечно большой функции $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ по отношению к бесконечно большой функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}$ при $x\to 1$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

5. С помощью эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(1-x^2)}{x^2+x-2}$. **Ответ:** $\dfrac{2}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2+x^3)}{\operatorname{tg}^2 3x}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{9}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}$. **Ответ:** 1.

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(1+4^x)\cdot\ln\left(1+\dfrac{7}{x}\right)\right)$. **Ответ:** $7\ln 4$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{3x}-3^{5x}}{2e^{3x}-4\operatorname{tg}2x+5\sin^3 x-2}$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{2}\ln 3$.

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{p}$.

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(5e^{3x}-8e^{2x}+1)}{\sqrt[3]{27x^3+13x+2}}$. **Ответ:** 1.

з) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\sin\dfrac{x-a}{2}$. **Ответ:** $-\dfrac{a}{\pi}$.

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **Ответ:** $\dfrac{a^2}{b^2}$.

к) $\lim\limits_{x\to 0}(2e^x-\cos x)^{\frac{1}{2x}}$. **Ответ:** e.

6. Выделить главную часть функции $f(x)=\dfrac{(5x^2+2)\operatorname{arctg}x}{8x^4+x+1}$ вида $c\,x^{\alpha}$

при $x \to +\infty$.

Ответ: $A(x) = \dfrac{5\pi}{16} x^{-2}$.

7. Сравнить бесконечно малые функции $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ и $\varphi(x) = \sin x,\ x \to 0$.

Ответ: функции несравнимы.

Занятие 25

Контрольная работа «Предел функции. Непрерывность функции на отрезке»

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2\cos x}$.

$$\Delta \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{2(\cos \pi/3 - \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{4\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a}$.

$$\Delta \lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{x}{a} - 1}{x - a} = \frac{1}{a}. \ \blacktriangle$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{1}{1 + \ln x}}$.

Δ Неопределенность вида (0°) $(\ln x \to -\infty)$. Сначала находим

$$\lim_{x \to +0} \ln\left(x^{\frac{1}{1+\ln x}}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{1 + \ln x} = 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{1}{1+\ln x}} = e$. $\blacktriangle$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(5^{7x} - 8^{9x})\, x^3}{3e^{x^5} + (1 - \cos 2x)^2 + 2x^4 - 3}$.

$$\Delta \lim_{x \to 0} \frac{(5^{7x} - 8^{9x})\, x^3}{3e^{x^5} + (1 - \cos 2x)^2 + 2x^4 - 3} = \lim_{x \to 0} \frac{(7x \ln 5 + o(x) - 9x \ln 8 + o(x))\, x^3}{3x^5 + o(x^5) + 4x^4 + o(x^4) + 2x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4(7\ln 5 - 9\ln 8) + o(x^4)}{6x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4(7\ln 5 - 9\ln 8)}{6x^4} = \frac{7\ln 5 - 9\ln 8}{6}. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[1; 2]$ имеет корень и вычислить его значение с точностью до $0{,}1$.

Δ $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. Так как на отрезке $[1; 2]$ функция $f(x) = x^3 - 3x + 1$ непрерывна и на концах принимает значения разных знаков, то согласно первой теореме Больцано – Коши внутри этого отрезка есть, по крайней мере, одна точка, в которой функция обращается в нуль. Эта точка и есть действительный корень уравнения. Для его нахождения с заданной точностью отрезок $[1; 2]$ разделим точками $1{,}1; 1{,}2; \ldots 1{,}9$ и в каждой из них определим знак функции $f(1{,}1) < 0$, $f(1{,}2) < 0, \ldots$, $f(1{,}5) < 0$, $f(1{,}6) > 0, \ldots$, $f(1{,}9) > 0$. Следовательно, $1{,}5 < x_0 < 1{,}6$. ▲

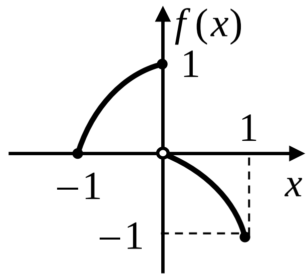
Пример 6. Принимает ли функция $f(x) = \cos \pi x - x^5 / 27 + 1$ значение 5 внутри отрезка $[-3; 3]$?

Δ Данная функция непрерывна на отрезке $[-3; 3]$, $f(-3) = 9$, $f(3) = -9$. Так как $-9 < 5 < 9$, то по второй теореме Больцано – Коши найдется хотя бы одно значение x такое, что $f(x) = 5$. ▲

Пример 7. На отрезке $[-1; 1]$ задана функция $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{при } -1 \le x \le 0, \\ -x^2 & \text{при } 0 < x \le 1. \end{cases}$

Принимает ли функция наибольшее и наименьшее значения на заданном отрезке? Выполняются ли при этом условия теоремы Вейерштрасса?

Δ Функция достигает своего наибольшего значения 1 при $x = 0$ и наименьшего значения -1 при $x = 1$. Хотя условие непрерывности функции нарушается, функция принимает наибольшее и наименьшее значения. Таким образом, условие непрерывности в теоремах Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым. ▲



Дополнительные задачи

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{e^x - \cos\sqrt{x}}{x}$. **Ответ:** $\dfrac{3}{2}$.

б) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{\ln x - \ln a}$. **Ответ:** ae^a.

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}$. **Ответ:** $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. Доказать, что всякое алгебраическое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами $a_0x^{2n-1}+a_1x^{2n-2}+\ldots+a_{2n-1}=0$ имеет, по крайней мере, один действительный корень.

3. Доказать, что уравнение $x\cdot 2^x=1$ имеет единственное решение.

4. Доказать, что уравнение $2^x=4x$ имеет, по крайней мере, два действительных корня.

5. Доказать, что уравнение $x\cdot\sin x-0{,}5=0$ имеет бесконечно много решений.

6. Построить график функции $y=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(x^2/2\right)^n}$, $x\geq 0$.

Ответ: $y=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leq x\leq 1,\\ x, & \text{если } 1<x<2,\\ x^2/2, & \text{если } 2\leq x<\infty.\end{cases}$

Контрольная работа

Вариант 1

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{6-x-2x^2}{x^3+8}$. **Ответ:** $7/12$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$. **Ответ:** $-3/80$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^2+2}-\sqrt{x^4-3x^2-5})$. **Ответ:** $5/2$.

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin^2 2x}$. **Ответ:** 1.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to-2}(5+2x)^{\frac{4-x}{x+2}}$. **Ответ:** e^{12}.

6. Найти $f(2-0)$ и $f(2+0)$, если $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{2-x}}}$.

Ответ: $f(2-0)=0$, $f(2+0)=1/2$.

7. Исследовать на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & x\in(-\infty;0),\\ x, & x\in[0;\,2),\\ -3, & x\in[2;\,+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=0$ – точка разрыва II рода, $x=2$ – точка разрыва I рода, $\sigma=-5$.

8. Найти главную часть функции $f(x)=\sqrt[3]{1+3x^4}+4e^{3x^3}-2x^3-5$ вида cx^{α} при $x\to 0$.

Ответ: $f(x)=10x^3+o(x^3),\ x\to 0,\ \ f(x)\sim 10x^3$.

9. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, вычислить $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[4]{x+10}-\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+3}-3}$.

Ответ: $-5/16$.

Вариант 2

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-5x-2x^2}{x^3+27}$. **Ответ:** $7/27$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. **Ответ:** $-1/16$.

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2+5}-2x^2)$. **Ответ:** $13/4$.

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{\cos 2x-\cos 4x}$. **Ответ:** $2/3$.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{1-x}{x-3}}$. **Ответ:** e^4.

6. Найти $f(3-0)$ и $f(3+0)$, если $f(x)=\dfrac{1}{2x+5^{\frac{1}{x-3}}}$. **Ответ:** $1/6;\ 0$.

7. Исследовать на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in(-\infty;0),\\ 1/x, & x\in[0;\,2),\\ -1, & x\in[2;\,+\infty).\end{cases}$$

Ответ: $x=0$ – точка разрыва II рода, $x=2$ – точка разрыва I рода, $\sigma=-1{,}5$.

8. Найти главную часть функции $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}+2e^{2x^2}+x^3-3$ вида $c\,x^{\alpha}$ при $x\to 0$.

Ответ: $f(x)=4\dfrac{1}{4}x^2+o(x^2),\ f(x)\sim 4\dfrac{1}{4}x^2$.

9. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt[4]{x+11}}{\sqrt[3]{x+59}-4}$.

Ответ: $21/2$.

Занятие 26

Производная функции

Пример 1. Исходя из определения, вычислить производную функции $f(x)=1/x^2$ в точке $x=1$.

$$\Delta\quad f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x(1+\Delta x)^2}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2+\Delta x}{(1+\Delta x)^2}=-2.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Пользуясь определением, вычислить производную функции

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(2x-x^{3/2}\cdot\cos\dfrac{1}{2x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}\quad \text{в точке } x=0.$$

$$\Delta\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(2x-x^{3/2}\cdot\cos\dfrac{1}{2x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-x^{3/2}\cdot\cos\dfrac{1}{2x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2-x^{1/2}\cdot\cos\frac{1}{2x}\right)=2.\ \blacktriangle$$

Пример 3. Исследовать дифференцируемость функции $y=\sqrt{1-\cos 2x}$ в точке $x=0$.

$$\Delta\quad \Delta y=\sqrt{1-\cos 2\Delta x}=\sqrt{2\sin^2\Delta x}=\sqrt{2}\,|\sin\Delta x|=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\Delta x & \text{при } \Delta x\geq 0,\\ -\sqrt{2}\sin\Delta x & \text{при } \Delta x<0.\end{cases}$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\sqrt{2}\sin\Delta x}{\Delta x}=\sqrt{2}.$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\sqrt{2}\sin\Delta x}{\Delta x}=-\sqrt{2}.$$

Односторонние производные в точке $x=0$ не равны, следовательно, функция в этой точке не дифференцируема. ▲

Пример 4. Вычислить производные функций:

а) $y=1-\sqrt[3]{x^2}+16/x$; б) $y=e^{2x}\cdot\cos 3x$; в) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}$;

г) $y=(3+2x^2)^4$; д) $y=\sin^2 x^3$; е) $y=\ln^3 x^3$; ж) $y=\dfrac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x}$;

з) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; и) $y=\arcsin\sqrt{1-e^x}$; к) $y=\dfrac{x^2\cdot\sin x}{\ln x}$;

л) $y=\mathrm{sh}^2x^3+\mathrm{ch}^3x^2$; м) $y=(1+4x)^{\mathrm{ctg}\,x}$; н) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^3\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$; о) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Δ а) $y = 1 - x^{2/3} + 16x^{-1}$; $\quad y' = -\frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} - 16x^{-2} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{16}{x^2}$;

б) $y' = 2 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x - 3 \cdot e^{2x} \sin 3x$;

в) $y' = \frac{(2x-2)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-2x+3)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{3x^2-4x-5}{(x^2+x+1)^2}$;

г) $y' = 4\,(3+2x^2)^3 \cdot 4x = 16x \cdot (3+2x^2)^3$;

д) $y' = 2 \cdot \sin x^3 \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \sin 2x^3$;

е) $y = 27 \cdot \ln^3 x$; $\quad y' = 81 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{81 \cdot \ln^2 x}{x}$;

ж) $y = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = 1 - \mathrm{ctg}^2 x$,

$$y' = (1-\mathrm{ctg}^2 x)' = -2 \cdot \mathrm{ctg}\, x \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right) = \frac{2\,\mathrm{ctg}\, x}{\sin^2 x};$$

з) $y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

и) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-e^x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^x}} \cdot (-e^x) = \frac{-e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{1-e^x}}$;

к) $y' = \frac{(2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x) \cdot \ln x - x^2 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$

$$= \frac{x\,(x \cdot \cos x + 2\sin x)\ln x - x \cdot \sin x}{\ln^2 x};$$

л) $y' = 2\,\mathrm{sh}\, x^3 \cdot \mathrm{ch}\, x^3 \cdot 3x^2 + 3\mathrm{ch}^2 x^2 \cdot \mathrm{sh}\, x^2 \cdot 2x = 3x(x \cdot \mathrm{sh}\, 2x^3 + \mathrm{ch}\, x^2 \cdot \mathrm{sh}\, 2x^2)$;

м) Первый способ: $y = e^{\mathrm{ctg}\, x \cdot \ln(1+4x)}$.

$$y' = e^{\mathrm{ctg}\, x \cdot \ln(1+4x)} \cdot \left(-\frac{\ln(1+4x)}{\sin^2 x} + \frac{4\,\mathrm{ctg}\, x}{1+4x}\right).$$

Второй способ: $\ln y = \mathrm{ctg}\, x \cdot \ln\,(1+4x)$.

$$\frac{y'}{y} = \left(-\frac{\ln(1+4x)}{\sin^2 x} + \frac{4\,\mathrm{ctg}\, x}{1+4x}\right). \quad y' = e^{\mathrm{ctg}\, x \cdot \ln(1+4x)} \cdot \left(-\frac{\ln(1+4x)}{\sin^2 x} + \frac{4\,\mathrm{ctg}\, x}{1+4x}\right).$$

н) $\ln|y| = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln|5-x|$.

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3\,(3x^2+1)} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5-x} = \frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x\,(x^2+1)(5-x)},$$

$$y' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \frac{24x^3 - 125x^2 + 14x - 75}{15x(x^2+1)(x-5)}.$$

о) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2/(1+x^2)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & |x|<1, \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & |x|>1. \end{cases}$$ ▲

Дополнительные задачи

1. Пользуясь определением, вычислить производную функции $y=\sqrt{x}$ в точке $x=1$.

Ответ: $0{,}5$.

2. Определить значения α и β, при которых следующая функция всюду дифференцируема:

$$y = \begin{cases} (x+\alpha)\cdot e^{-\beta x}, & \text{если } x<0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & \text{если } x \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $\alpha = 1, \beta = 1/2$.

3. Найти производную функции $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{при } x<0, \\ e^x & \text{при } x\ge 0 \end{cases}$ и построить графики функций $f(x)$ и $f'(x)$.

Ответ: $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x<0, \\ e^x & \text{при } x>0. \end{cases}$ В точке $x=0$ производная не существует.

4. Найти левую $f'_-(0)$ и правую $f'_+(0)$ производные в точке $x=0$, если

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x<0, \\ \ln\,(1+\sqrt[5]{x^7}), & \text{если } x\ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $f'_-(0)=2$; $f'_+(0)=0$.

5. Найти производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x+1}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{3+2x-2x^2}{(x^2+x+1)^2}$.

б) $y = e^{\sqrt{x^2+x+2}}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{(2x+1)\cdot e^{\sqrt{x^2+x+2}}}{2\sqrt{x^2+x+2}}$.

в) $y = 2^{\operatorname{ctg}^2 x}$. **Ответ:** $y' = -2\ln 2 \cdot 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$.

г) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$.

д) $y = \sin\ln|x|$. **Ответ:** $y' = \dfrac{\cos\ln|x|}{x}$.

е) $y = \operatorname{tg}^2 x + \ln\cos^2 x$. **Ответ:** $y' = 2\operatorname{tg}^3 x$.

ж) $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{x}{x^4-1}$.

з) $y = \dfrac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arctg} x^6$. **Ответ:** $y' = \dfrac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$.

и) $y = \arcsin e^x + \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$. **Ответ:** $y' = 0$.

к) $y = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$.

л) $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{4+e^{2x}}}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{4}{4+e^{2x}}$.

м) $y = x\arccos\dfrac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$. **Ответ:** $y' = \arccos\dfrac{x}{2}$.

н) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$. **Ответ:** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

о) $y = e^x\sin^2 x\cos x$. **Ответ:** $y' = \sin x e^x(2\cos^2 x + \sin x\cos x - \sin^2 x)$.

п) $y = xe^x(\sin x - \cos x) + e^x\cos x$. **Ответ:** $y' = 2xe^x\sin x$.

6. Найти производные функций, используя метод логарифмического дифференцирования:

а) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$; б) $y = x^{\sin(x^2+1)}$.

Ответ: а) $\dfrac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$;

б) $x^{\sin(x^2+1)}\cdot\left(2x\cdot\ln x\cdot\cos(x^2+1) + \dfrac{\sin^2(x^2+1)}{x}\right)$.

7. Решить уравнение $y' = 0$, если $y(x) = \min\{x^2 - x, x+8\}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Занятие 27

Дифференцируемость функций

Пример 1. Доказать дифференцируемость функции $y = 3x^3 + x - 1$ в произвольной точке $x \in \boldsymbol{R}$. Найти приращение и дифференциал этой функции в точке $x=1$ при $\Delta x = 0{,}1$. Найти абсолютную и относительную погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Δ $\Delta y = (3\,(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - 1) - (3x^3 + x - 1) = 9x^2\Delta x + 9x\Delta x^2 + 3\Delta x^3 +$
$+\Delta x = (9x^2+1)\Delta x + 9x\Delta x^2 + 3\Delta x^3 = (9x^2+1)\,\Delta x + o\,(\Delta x),\;\; \Delta x \to 0$;

$d\,y = (9x^2+1)\,\Delta x$, отсюда $\Delta y - dy = 9x\Delta x^2 + 3\Delta x^3$. При $x=1$ и $\Delta x = 0{,}1$ получим $\Delta y - dy = 0{,}09 + 0{,}003 = 0{,}093$, $dy = 1$, $\Delta y = 1{,}093$. Абсолютная погрешность $|\Delta y - dy| = 0{,}093$, относительная погрешность $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{0{,}093}{1{,}093} \approx\; \approx 0{,}085 = 8{,}5\,\%$. ▲

Пример 2. Найти $d\,(xe^{x^2})$.

Δ Первый способ: $d\,(xe^{x^2}) = (xe^{x^2})'dx = e^{x^2}(2x^2+1)\,dx$.

Второй способ: $d\,(xe^{x^2}) = e^{x^2}dx + x\,d\,(e^{x^2})$. Так как $d\,(e^{x^2}) = e^{x^2}2x\,dx$, то $d\,(xe^{x^2}) = e^{x^2}(2x^2+1)\,dx$. ▲

Пример 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{4{,}41}$.

Δ Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x}$. В основе приближенного вычисления значений функции $y=f(x)$ в точке $x = x_0 + \Delta x$ лежит формула $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, которая для нашей функции имеет вид $\sqrt{x_0+\Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$. Следовательно, $\sqrt{4{,}41} \approx \sqrt{4} + \dfrac{0{,}41}{2\sqrt{4}} = 2{,}1025$ (точное значение $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$). ▲

Пример 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sin 29°$.

Δ Рассмотрим функцию $y=\sin x$. Приближенная формула имеет следующий вид: $\sin(x_0+\Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \Delta x$. Тогда

$$\sin 29° \approx \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{360} \approx 0{,}484. \;▲$$

Пример 5. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти y'_x для функции $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Δ Обратная функция $x = \sin^2 y$ имеет производную $x'_y = 2\sin y\cdot\cos y$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{2\sin y\cdot\cos y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$. ▲

Пример 6. Найти y'_x для функции $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t, \end{cases}$ $t\in(0;\,\pi/2)$.

Δ Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех t и $x'_t = -3a\cos^2 t\cdot\sin t \neq 0$ на интервале $(0;\,\pi/2)$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t, \quad t \in (0; \pi/2). \ \blacktriangle$$

Пример 7. Функция $y = y(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$.

Чему равна производная $\dfrac{dy}{dx}$ при $x = 0$?

Δ Очевидно, что $x = 0$ при $t = -1$. $y'_x\big|_{x=0} = \left.\dfrac{y'_t}{x'_t}\right|_{t=-1} = \left.\dfrac{2t+1}{3t^2}\right|_{t=-1} = -\dfrac{1}{3}$. $\blacktriangle$

Пример 8. Найти производную неявно заданной функции $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$.

Δ Имеем $\dfrac{d}{dx}(x^3 + x^2 y + y^2) = 0$, $3x^2 + 2x \cdot y + x^2 \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$, $y' = -\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}$. $\blacktriangle$

Пример 9. Пусть $y = y(t)$, $x \in (-a; a)$ – положительная функция, заданная неявно уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Найти y'_x.

Δ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0$, $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2y}{b^2}\,y' = 0$, $y'_x = -\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$, $x \in (-a; a)$, $y > 0$. $\blacktriangle$

Пример 10. Под какими углами синусоида $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс?

Δ Синусоида $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.

$y' = \cos x$, $y'(\pi k) = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k = 2n, \\ -1, & k = 2n+1, \end{cases}$ $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, в точках $x = 2\pi n$ синусоида пересекает ось абсцисс под углом $45°$ и в точках $x = (2n+1)\pi$ – под углом $135°$. $\blacktriangle$

Пример 11. Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке $x_0 = 1$.

Δ Находим $y(1) = -3$, $y' = 2x - 4$, $y'(1) = -2$.

Угловой коэффициент касательной равен -2, угловой коэффициент нормали равен $\dfrac{1}{2}$. Уравнение касательной $y + 3 = -2(x-1)$; $y = -2x - 1$. Уравнение нормали $y + 3 = \dfrac{1}{2}(x-1)$ или $x - 2y - 7 = 0$. $\blacktriangle$

Пример 12. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 2 + \sqrt[3]{x-3}$, проведенных в точке с абсциссой $x = 3$.

Δ Находим

$$y(3)=2,\ \ y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}},\ \ y'(3)=+\infty.$$

Уравнение касательной $x=3$. Уравнение нормали $y=2$ (рис. 17). ▲

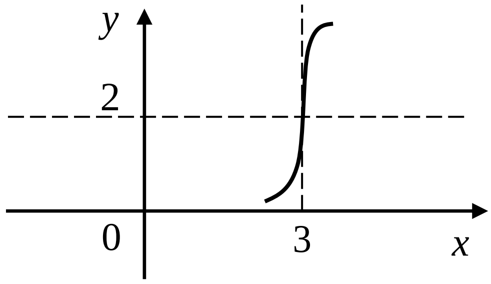


Рис. 17

Пример 13. В какой точке параболы $y^2=18x$ ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы?

Δ Считая x и y функциями времени t, дифференцируем обе части уравнения $y^2=18x$ по t. Получим $2y\cdot y'_t=18x'_t$.

$$\frac{y'_t}{x'_t}=9/y=2:\ \ y=9/2,\ \ x=\frac{(9/2)^2}{18}=9/8.$$

Следовательно, ордината возрастает вдвое быстрее абсциссы в точке $M\ (9/8;\ 9/2)$. ▲

Пример 14. По оси OX движутся материальные точки, законы движения которых $x=2t^2-10t+5$ и $x=t^2-3t-5$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

Δ Определим момент времени встречи точек: $2t^2-10t+5=t^2-3t-5$; $t^2-7t+10=0$; $t_1=2,\ t_2=5,\ V_1(2)=(2t^2-10t+5)'\big|_{t=2}=(4t-10)\big|_{t=2}=-2$; $V_2(2)=(t^2-3t-5)'\big|_{t=2}=(2t-3)\big|_{t=2}=1$. Аналогично $V_1(5)=(4t-10)'\big|_{t=5}=10$; $V_2(5)=(2t-3)'\big|_{t=5}=7$. В момент времени $t=2$ скорости точек противоположно направлены, поэтому скорость удаления точек друг от друга равна модулю суммы этих скоростей $V(2)=\left|-2+1\right|=1$. В момент времени $t=5$ скорость удаления точек друг от друга равна модулю разности их скоростей $V(5)=\left|10-7\right|=3$. ▲

Пример 15. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до одного процента?

Δ Объем шара $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$. $\Delta V\approx dV=V'_R dR=4\pi R^2 dR=4\pi R^2\cdot\Delta R$.

$\delta_V=\left|\dfrac{dV}{V}\right|=\left|\dfrac{4\pi R^2 dR}{4/3\,\pi R^3}\right|=3\left|\dfrac{dR}{R}\right|$. $\delta_R=\left|\dfrac{dR}{R}\right|$. Следовательно, $\delta_R=\dfrac{1}{3}\delta_V$. При $\delta_V=1\%$, $\delta_R=1/3\,\%$. ▲

Пример 16. Тело движется по оси абсцисс, подчиняясь закону $x\,(t)=t+t^2$. С какой скоростью оно удаляется от точки $A(0;1)$ в момент времени $t=\dfrac{1}{2}$?

Δ Расстояние $S(t)$ тела от точки $A(0;1)$ в момент времени t равно $S(t)=\sqrt{1+(t+t^2)^2}$. Следовательно, тело удаляется от точки $A(0;1)$ со скоростью $S'(t)=\dfrac{2t+6t^2+4t^3}{2\sqrt{1+t^2+2t^3+t^4}}$. $S'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{6}{5}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Какой порядок при $\Delta x \to 0$ имеет бесконечно малая $\Delta y - dy$, если $y=x^3-3x$?

Ответ: второй, если $x\neq 0$; третий, если $x=0$.

2. Вычислить приближенное значение с помощью дифференциала:

а) $\ln 1{,}01$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}98$.

Ответ: а) $\approx 0{,}01$; б) $\approx 0{,}775$.

3. Радиус круга увеличен на 1. Дифференциал площади круга при этом оказался равен 16π. Найти первоначальную величину радиуса.

Ответ: 8.

4. Найти производные функций, заданных параметрически и неявно:

а) $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$ **Ответ:** $y'_x=\dfrac{2t-t^4}{1-2t^3}$.

б) $\begin{cases} x=1+e^{at}, \\ y=at+e^{-at}. \end{cases}$ **Ответ:** $y'_x=e^{-at}-e^{-2at}$.

в) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^2 t, \end{cases} \quad 0<t<\dfrac{\pi}{2}.$ **Ответ:** $y'_x=-1,\ 0<x<1$.

г) $x^2+3xy+y^2+1=0$. **Ответ:** $y'_x=\dfrac{2x+3y}{3x+2y}$.

д) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. **Ответ:** $y'_x=\dfrac{x+y}{x-y}$.

е) $x^y=y^x$. **Ответ:** $y'_x=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$.

5. Вычислить расстояние от начала координат до нормали к кривой $y=e^{2x}+x^2$, проведенной через точку с абсциссой $x=0$.

Ответ: $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

6. Определить в каких точках и под каким углом пересекаются кривые $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ и $f_2(x) = -x^2 + 6x - 4$.

Ответ: $M(1; 1)$, $N(4; 4)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{6}{7}$.

7. Составить уравнение касательной и нормали к кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $x - y - \pi + 4 = 0$; $x + y = \pi$.

8. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке $M(-1; 3)$.

Ответ: $5x + 6y - 13 = 0$; $6x - 5y + 21 = 0$.

9. В какой из точек x скорость изменения функции $y = 3x^5 - 5x^3 + 5x - 7$ наименьшая?

Ответ: $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Занятие 28

Производные и дифференциалы высших порядков

Пример 1. Найти $y''(x)$ для функции $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

Δ $y' = \sqrt{1 + x^2} + x \cdot \dfrac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$,

$$y'' = \frac{4x \cdot \sqrt{1 + x^2} - \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot (1 + x^2)}{1 + x^2} = \frac{4x + 4x^3 - x - 2x^3}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{2x^3 + 3x}{(1 + x^2)^{3/2}}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Для функции $y = e^x \cdot \sin 2x$ найти $y'''(0)$.

Δ Последовательно находим $y' = e^x \cdot \sin 2x + 2e^x \cdot \cos 2x$,

$y'' = e^x \cdot \sin 2x + 2e^x \cos 2x + 2e^x \cos 2x - 4e^x \cdot \sin 2x = 4e^x \cos 2x - 3e^x \cdot \sin 2x$,

$y''' = 4e^x \cos 2x - 8e^x \sin 2x - 3e^x \sin 2x - 6e^x \cos 2x = -2e^x \cos 2x - 11e^x \sin 2x$,

$y'''(0) = -2$. $\blacktriangle$

Пример 3. Показать, что функция $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ при любых постоянных c_1 и c_2 удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Δ $y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$; $y'' = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{-2x}$.

$$c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{-2x} + 3(-c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}) + 2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}) =$$
$$= e^{-x}(c_1 - 3c_1 + 2c_1) + e^{-2x}(4c_2 - 6c_2 + 2c_2) \equiv 0. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Для функции $y = e^x \cdot (x^2 - 1)$ найти $y^{(24)}(x)$.

Δ Применяя формулу Лейбница, получим

$$y^{(24)}(x) = (e^x(x^2-1))^{(24)} = C_{24}^0 (e^x)^{(24)} \cdot (x^2-1) + C_{24}^1 (e^x)^{(23)} (x^2-1)' +$$
$$+ C_{24}^2 (e^x)^{(22)} \cdot (x^2-1)''.$$

Все последующие слагаемые равны 0, т. к. все высшие производные от функции $x^2 - 1$, начиная с третьей, тождественно равны нулю.

$$y^{(24)}(x) = e^x(x^2-1) + 24e^x \cdot 2x + \frac{24 \cdot 23}{2} \cdot e^x \cdot 2 = e^x(x^2 + 48x + 551). \ \blacktriangle$$

Пример 5. Для функции $y = x \cdot \operatorname{sh} x$ найти $(y(x))^{(100)}$.

Δ Применяя формулу Лейбница, получаем

$$(y(x))^{(100)} = (x \cdot \operatorname{sh} x)^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k \cdot (x)^{(100-k)} \cdot (\operatorname{sh} x)^{(k)} = C_{100}^{99} \cdot x' \cdot (\operatorname{sh} x)^{(99)} +$$
$$+ C_{100}^{100} \cdot x \cdot (\operatorname{sh} x)^{(100)}.$$

Все предыдущие слагаемые в формуле Лейбница равны нулю. $y^{(100)} = 100 \cdot \operatorname{ch} x + x \cdot \operatorname{sh} x$. $\blacktriangle$

Пример 6. Найти $y^{(n)}(x)$ для функции $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

$$\Delta \quad y = -\frac{-1-x}{1-x} = -\frac{1-x-2}{1-x} = -1 + 2(1-x)^{-1}.$$

$$y' = 2 \cdot 1 \cdot (1-x)^{-2}, \ y'' = 2 \cdot 1 \cdot 2\,(1-x)^{-3}, \ y''' = 2 \cdot 3!\,(1-x)^{-4}.$$

Естественно предположить, что $y^{(n)} = 2 \cdot n!\,(1-x)^{-(n+1)}$. Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции. При $n = 1$ формула верна. Предположим, что она верна при $n = k$, т. е. $y^{(k)} = 2 \cdot k!\,(1-x)^{-(k+1)}$. Тогда

$$y^{(k+1)} = 2 \cdot k!\,(k+1) \cdot (1-x)^{-(k+2)} = 2 \cdot (k+1)! \cdot (1-x)^{-(k+2)}.$$

Следовательно, формула верна при $n = k + 1$. Отсюда вытекает справедливость формулы при всех значениях n. $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$. $\blacktriangle$

Пример 7. Найти $y'''(x)$, если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t > 0$.

Δ Последовательно находим

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x't} = \frac{3t^2}{1/t} = 3t^3, \ y''(x) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{9t^2}{1/t} = 9t^3, \ y'''(x) = \frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t} = \frac{27t^2}{1/t} = 27t^3. \ \blacktriangle$$

Пример 8. Для функции $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ найти y''_{xx}.

Δ Производную второго порядка можно найти по следующей формуле:

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

$$x'_t = 3t^2 + 3, \quad x''_{tt} = 6t, \quad y'_t = 3t^2 - 3, \quad y''_{tt} = 6t,$$

$$y''_{xx} = \frac{(3t^2+3)\cdot 6t - 6t(3t^2-3)}{(3t^2+3)^3} = \frac{36t}{(3t^2+3)^3} = \frac{4t}{3(t^2+1)^3}. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Вычислить y'' в точке $M\,(1;1)$, если

$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$.

Δ Дифференцируя равенство по x, получаем

$2x + 5y + 5xy' + 2y \cdot y' - 2 + y' = 0$,

откуда $y' = -\dfrac{2x+5y-2}{5x+2y+1}$ и $y'(M) = -\dfrac{2+5-2}{5+2+1} = -\dfrac{5}{8}$. Еще раз дифференцируем равенство по $x: 2 + 5y' + 5y' + 5x \cdot y'' + 2y \cdot y'' + 2y' \cdot y' + y'' = 0$. Найдем y'' из соотношения $y'' = -\dfrac{2+10y'+2y'^2}{5x+2y+1}$. Подставляя в последнее равенство $x = 1,\ y = 1,\ y' = -\dfrac{5}{8}$, получаем $y''(M) = \dfrac{111}{256}$. $\blacktriangle$

Пример 10. Найти d^2y, если $y = e^{-x^2}$ (x – независимая переменная).

Δ Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$d^2y = y''(dx)^2 = (e^{-x^2})'' \cdot (dx)^2$. $y' = (e^{-x^2})' = -2x \cdot e^{-x^2}$; $y'' = 2 \cdot e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

Следовательно, $d^2y = 2 \cdot e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1) \cdot (dx)^2$. $\blacktriangle$

Пример 11. Найти $d^n y$, если $y = \sin(3x+5)$ (x – независимая переменная).

Δ Как известно, $d^n y = 3^n \cdot \sin\left(3x + 5 + n \cdot \pi/2\right) \cdot (dx)^n$. $\blacktriangle$

Пример 12. Найти d^2y, если $y = 4x^3 + 2x + 3$ и $x = x(t)$ – функция аргумента t.

Δ В силу свойства инвариантности $dy = y'dx = (12x^2 + 2)\,dx$.

$$d^2y = d\,(dy) = d\,((12x^2+2)\,dx) = d\,(12x^2+2) \cdot dx + (12x^2+2)\,d\,(dx) = 24x(dx)^2 +$$

$$+ (12x^2+2)\,d^2x. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Найти производные второго порядка:

а) $y = \cos^2 x$. **Ответ:** $y'' = -2\cos 2x$.

б) $y = \operatorname{arctg} x^2$. **Ответ:** $y'' = \dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$.

в) $y=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$. **Ответ:** $y''=\ln x$.

г) $y=\ln\,(x+\sqrt{1+x^2})$. **Ответ:** $y''=-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$.

2. Найти $y'''(2)$, если $y=\ln(x-1)$. **Ответ:** 2.

3. Найти $y^{(8)}$ для функции $y=\frac{x^2}{1-x}$. **Ответ:** $y^{(8)}=8!\cdot(1-x)^{-9}$ $(x\neq 1)$.

4. Для функции $y=x^2\cdot e^{-x}$ найти d^3y.

Ответ: $d^3y=-e^{-x}(x^2-6x+6)(dx)^3$.

5. Найти второй дифференциал функции $y=\sin x^2$, считая x функцией некоторой независимой переменной.

Ответ: $d^2y=(2\cos x^2-4x^2-4x^2\sin x^2)\,dx^2+2x\cos x^2 d^2x$.

6. Для функции $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ найти y''_{x^2} и y'''_{x^3}.

Ответ: $y''_{x^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-t}$, $y'''_{x^3}=\frac{3}{8}\frac{1}{(1-t)^3}$ $(t\neq 1)$.

7. Для функции, заданной неявно, $x^2+y^2=25$ найти y''_{x^2} и y'''_{x^3}.

Ответ: $y''_{x^2}=\frac{-25}{y^3}$, $y'''_{x^3}=\frac{-75x}{y^5}$.

8. Применяя формулу Лейбница для функции $y=e^x(3x^2-4)$, найти $y^{(20)}$.

Ответ: $y^{(20)}=e^x\cdot(3x^2+120x+1136)$.

9. Для следующих функций найти $y^{(n)}$:

а) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; б) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

Ответ: а) $y^{(n)}=4^{n-1}\cdot\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$; б) $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. $y=\sin^3 2x$; $y'-?$ **Ответ:** $y'=6\cdot\sin^2 2x\cdot\cos 2x$.

2. $y=\frac{(5+2x)^4}{(4-3x)^3}$; $y'-?$ **Ответ:** $y'=\frac{(5+2x)^3\cdot(77-6x)}{(4-3x)^4}$.

3. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; $y'-?$ **Ответ:** $y'=\dfrac{x\cdot\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$.

4. $y=(\sin 2x)^{\frac{1}{x^2}}$; $y'-?$ **Ответ:** $y'=(\sin 2x)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(2\operatorname{ctg}2x\cdot\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln\sin 2x}{x^3}\right)$.

5. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; $y'_x-?$ **Ответ:** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

6. Вычислить приращение и дифференциал функции $y=x^2+2x+3$ в точке $x=1$ при $\Delta x=0{,}2$. Оценить погрешность при замене Δy на dy.

Ответ: $\Delta y\,\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,2}}=0{,}84$; $\Delta y\,\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,2}}=0{,}8$; $|\Delta y-dy|=0{,}04$.

7. Найти расстояние между кривой $y=x^2+x+1$ и прямой $y=3x-10$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

8. $\begin{cases} x(t)=e^t\cdot\cos t,\\ y(t)=e^t\cdot\sin t;\end{cases}$ $y''_{xx}-?$ **Ответ:** $y''_{xx}=\dfrac{2\cdot e^{-t}}{(\cos t-\sin t)^3}$.

9. $y=(x^2-95)\cdot\operatorname{sh}2x$; $y^{(20)}-?$ **Ответ:** $y^{(20)}=2^{20}\cdot x\,(x\cdot\operatorname{sh}2x+20\cdot\operatorname{ch}2x)$.

Вариант 2

1. $y=\operatorname{tg}^2 3x$; $y'-?$ **Ответ:** $y'=\dfrac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$.

2. $y=\dfrac{(2+3x)^3}{(3-4x)^2}$; $y'-?$ **Ответ:** $y'=\dfrac{(2+3x)^2\cdot(43-12x)}{(3-4x)^3}$.

3. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$; $y'-?$ **Ответ:** $y'=\dfrac{x\cdot\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

4. $y=(\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}$; $y'-?$ **Ответ:** $y'=(\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}\cdot\left(-3\operatorname{tg}3x\cdot\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}\cdot\ln\cos 3x\right)$.

5. $y=x^3+y^3-3axy$; $y'_x-?$ **Ответ:** $y'=\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$.

6. Вычислить приращение и дифференциал функции $y=x-3x^2$ в точке $x=1$ при $\Delta x=0{,}1$. Оценить погрешность при замене Δy на dy.

Ответ: $\Delta y\,\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,1}}=-0{,}53$; $\Delta y\,\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,1}}=-0{,}50$; $|\Delta y-dy|=0{,}03$.

7. Найти расстояние между кривой $y=x^2-2x+3$ и прямой $y=2x-6$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

8. $\begin{cases} x(t) = \ln\cos t, \\ y(t) = \ln\cos 2t; \end{cases}$ $y''_{xx} - ?$ **Ответ:** $y''_{xx} = \dfrac{-8\cos^2 t}{\cos^2 2t}$.

9. $y = (x^2 - 60)\cdot \mathrm{ch}\, 2x$; $y^{(16)} - ?$ **Ответ:** $y^{(16)} = 2^{16}\cdot x\,(x\cdot \mathrm{ch}\, 2x + 16\cdot \mathrm{sh}\, 2x)$.

Занятие 29

Теоремы о среднем. Правило Лопиталя

Пример 1. Методом выделения полного квадрата найти для функции $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$ точку, в которой она принимает наименьшее значение, и для этой точки проверить выполнение всех условий теоремы Ферма.

$$\Delta\ 2x^2 - 5x + 7 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{7}{2}\right) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right).$$

Функция принимает наименьшее значение при $x = \dfrac{5}{4}$. Функция определена на $(-\infty, \infty)$. В точке $x = \dfrac{5}{4}$ существует конечная производная. $f'\left(\dfrac{5}{4}\right) = (4x - 5)\Big|_{x=\frac{5}{4}} = 0$. Производная в этой точке действительно равна нулю. ▲

Пример 2. Проверить выполнение всех условий теоремы Роля для функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, заданной на отрезке $[-1; 1]$.

Δ Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на $[-1; 1]$, ее значения $f(-1) = f(1) = 0$ на концах этого отрезка равны, ее производная $f'(x) = \dfrac{-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$ конечна во всех точках интервала $(-1; 1)$ кроме точки $x = 0$. Таким образом, одно из условий теоремы Роля не выполнено, и эта теорема не применима к данной функции (рис. 18). ▲

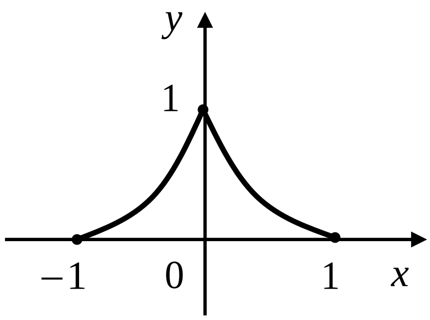


Рис. 18

Пример 3. Доказать, что $|\cos x - \cos y| \le |x - y|\ \ \forall x, y$.

Δ По формуле Лагранжа, $\cos x - \cos y = \sin\xi\cdot(x - y)$ $|\cos x - \cos y| = |\sin\xi|\cdot|x - y|$, где ξ – некоторая точка из интервала $(x; y)$. Так как $|\sin\xi| \le 1$, то $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$. ▲

Пример 4. Доказать тождество $\mathrm{arctg}\, x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Δ Обе функции определены на всей числовой прямой. Найдем производные этих функций:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

На основании следствия из теоремы Лагранжа можно сделать вывод, что сами функции отличаются на постоянную, т. е. $\operatorname{arctg} x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$. Для определения постоянной c в этом равенстве положим, например, $x = 0$, тогда и $c = 0$. ▲

Пример 5. Проверить, что функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$ и $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1; 4]$ и найти соответствующее значение ξ.

Δ Данные функции непрерывны на $[1; 4]$, их производные $f'(x) = 2x - 2$ и $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$ конечны везде; кроме того, $g'(x)$ не обращается в нуль ни при одном значении x. Таким образом, формула Коши к заданным функциям применима.

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \frac{11-2}{27-9} = \frac{2\xi - 2}{3\xi^2 - 14\xi + 20} \quad (1 < \xi < 4).$$

Решая это уравнение, получим $\xi_1 = 2$ и $\xi_2 = 4$. Внутренней точкой является $\xi = 2$. ▲

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}$.

Δ Данный предел является неопределенностью $\dfrac{0}{0}$. Проверим выполнение всех условий, позволяющих применять правило Лопиталя:

1) функции $y = \sin \alpha x$ и $y = \operatorname{tg} \beta x$ дифференцируемы в окрестности точки $x = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \sin \alpha x = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} \beta x = 0$;

3) $(\operatorname{tg} \beta x)' = \dfrac{\beta}{\cos^2 \beta x} \neq 0$ в окрестности точки $x = 0$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin \alpha x)'}{(\operatorname{tg} \beta x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha \cdot \cos \alpha x \cdot \cos^2 \beta x}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. ▲

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

Δ Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Все условия теоремы выполнены. Найдем предел отношения производных:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{tg}\,x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot 3x^2}.$$

Это выражение также является неопределенностью типа $\frac{0}{0}$. Можно опять находить предел отношения производных, но проще использовать первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$. ▲

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}$ $(a>1,\ n\in N)$.

$$\Delta\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\cdot\ln a}{n\cdot x^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\cdot\ln^n a}{n!}=\infty.\ ▲$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$, где $\alpha>0,\ \beta>0$.

Δ Если α является целым числом, то применив правило Лопиталя, α раз, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha!}{\beta^\alpha e^{\beta x}}=0.$$

Если α не является целым числом, то положим $k=[\alpha]+1$; тогда $\alpha-k<0$. Применяя правило Лопиталя k раз, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\,x^{\alpha-k}}{\beta^k e^{\beta x}}=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=0$, где $\alpha>0,\beta>0$. ▲

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Δ Неопределенность $(\infty-\infty)$ приводим к неопределенности типа $\frac{0}{0}$: $\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}$. Дважды применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.\ ▲$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\ln x$.

Δ Неопределенность $0\cdot(-\infty)$. Простое изменение записи позволяет получить неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ и применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{(-1/x^2)} = 0. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Δ Представим $\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ в виде $e^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}$ и вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{\sin^2 x}$.
Предварительно произведем упрощение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}-1\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3} = \frac{0}{0}.$$

Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{arctg} x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{3}}$. $\blacktriangle$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{3x-\cos x}$.

Δ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+\sin x)'}{(3x-\cos x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\cos x}{3+\sin x}$. Этот предел не существует, т. е. правило Лопиталя применять нельзя. Покажем, что искомый предел существует. Действительно, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{3x-\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{\sin x}{x}}{3-\dfrac{\cos x}{x}} = \dfrac{2}{3}$. $\blacktriangle$

Дополнительные задачи

1. Доказать, что корни производной следующего многочлена действительные, простые и лежат на интервалах $(0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4)$:
$P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

2. Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad 1 < x < +\infty \end{cases}$ на отрезке $[0; 2]$.

Ответ: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \sqrt{2}$.

3. Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать, что $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a - b|$.

4. В какой точке касательная к графику $y = 4 - x^2$ параллельна хорде, соединяющей точки $A(-2;\ 0)$ и $B(1;\ 3)$?

Ответ: $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)$.

5. Написать формулу Коши и найти соответствующее значение c для функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ на отрезке $[1;\ 4]$.

Ответ: $c = \left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$.

6. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^7 - 2^7}{x^5 - 2^5}$. **Ответ:** $\frac{28}{5}$.

б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{50} - 50x + 49}{x^{100} - 100x + 99}$. **Ответ:** $\frac{49}{198}$.

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + 2x)^8 - 16x - 1}{(1 + 3x)^7 - 21x - 1}$. **Ответ:** $\frac{16}{27}$.

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 4x}$. **Ответ:** $-\frac{1}{2}$.

д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5^x - 2^x}{\operatorname{tg} x}$. **Ответ:** $\ln 2{,}5$.

е) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{\operatorname{sh} ax - \operatorname{sh} bx}$ $(a \ne b)$. **Ответ:** 1.

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. **Ответ:** 2.

з) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{x^2}$. **Ответ:** 2.

и) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos ax}{x^2}$. **Ответ:** $-\frac{a^2}{2}$.

к) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^2 \arcsin x}$. **Ответ:** $-\frac{4}{3}$.

л) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3(1 + x)}$. **Ответ:** $\frac{1}{3}$.

м) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$. **Ответ:** ∞.

н) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. **Ответ:** $\dfrac{1}{6}$.

о) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$. **Ответ:** 0.

п) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

р) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** 2.

с) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$. **Ответ:** e^2.

7. Установить эквивалентность функций $1-\cos x-\dfrac{x^2}{2}$ и $-\dfrac{x^4}{24}$ при $x\to 0$.

8. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ не может быть вычислен по правилу Лопиталя, и найти его.

Ответ: 0.

Занятие 30

Формула Тейлора

Пример 1. Разложить многочлен $P(x)=x^3-2x^2+3x+5$ по степеням $x-2$, пользуясь формулой Тейлора.

Δ Запишем формулу Тейлора при $x_0=2$:

$$P(x)=P(2)+\frac{P'(2)}{1!}(x-2)+\frac{P''(2)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+R_n.$$

$P(2)=11;\ P'(x)=3x^2-4x+3;\ P'(2)=7;\ P''(x)=6x-4;\ P''(2)=8;$ $P'''(x)=6;\ P'''(2)=6.$

Все остальные производные равны нулю. Подставляя найденные значения производных в формулу Тейлора, получаем

$$P(x)=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3.$$

В данном случае $R_3=0$. ▲

Пример 2. Представить функцию $y=\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до члена с x^3 включительно с остаточным членом в форме Пеано.

Δ Найдем производные функции $f(x)=\operatorname{tg} x$ до третьего порядка включительно: $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x$; $f''(x)=2\cos^{-3}x\cdot\sin x$; $f'''(x)=6\cos^{-4}x\cdot\sin^2 x+2\cos^{-2}x$. Отсюда получаем $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=2$. По формуле

Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеем $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. Заметим, что $f^{(4)}(0) = 0$, т. к. функция $\operatorname{tg} x$ является нечетной. Поэтому можно записать $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$. ▲

Пример 3. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^{2n+1})$ функцию $f(x) = x^2 \cos^2 x$.

Δ Как известно,

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!} x^2 + \frac{2^4}{4!} x^4 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!} x (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

Следовательно, $x^2 \cos^2 x = \dfrac{x^2}{2}(1 + \cos 2x) =$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{2^2}{2!} x^2 + \frac{2^4}{4!} x^4 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-2}}{(2n-2)!} x^{2n-2} + o(x^{2n-1})\right) =$$

$$= x^2 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-3}}{(2k-2)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$ ▲

Пример 4. Разложить по формуле Тейлора по степеням $(x-1)$ до $o((x-1)^n)$ функцию $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 2x - 3}$.

Δ Как известно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n), \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Следовательно, $\dfrac{4}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{4}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{(x-1)-2} -$

$$- \frac{1}{(x-1)+2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \ldots + \frac{(x-1)^n}{2^n}\right) +$$

$$+ o((x-1)^n) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} - \ldots + \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}\right) + o((x-1)^n) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1 + (-1)^k}{2^k} (x-1)^k + o((x-1)^n).$$ ▲

Пример 5. Используя основные разложения, представить функцию $f(x) = \ln \cos x$ по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно.

Δ Пользуясь разложением косинуса, получим

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = \ln(1 + t),$$

где $t = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$. Теперь воспользуемся разложением логарифма

$$\ln\cos x = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 +$$

$$+ o(x^5) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$ (Очевидно, что $\frac{t^3}{3} = o(x^5)$). ▲

Пример 6. Вычислить приближенно $\cos 9^\circ$, ограничившись тремя членами формулы Тейлора. Оценить допущенную при этом погрешность.

$$\Delta\ \cos 9^\circ = \cos\frac{\pi}{20} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4 + \frac{1}{6!}(\cos x)^{(6)}\Big|_{x=\zeta}\left(\frac{\pi}{20}\right)^6.$$

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4 \approx 0{,}98769.$$

Оценим допущенную погрешность:

$$|\alpha| = \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^6 \cdot |\cos\zeta| < \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^6 < 10^{-5}.$$ ▲

Пример 7. Оценить погрешность приближенной формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ при } |x| \le 0{,}2.$$

Δ Остаточный член формулы Тейлора $R_3(x) = \frac{(-1)^3 \cdot x^4}{4(1+\theta x)^4}$, $0 < \theta < 1$. При $|x| \le 0{,}2$ найдем $|R_3(x)| \le \frac{0{,}2^4}{4} = 0{,}0004$. ▲

Пример 8. Оценить абсолютную погрешность приближенной формулы $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = P_n(x)$ при $0 < x < 1$.

Δ Оценим $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$. $|R_n(x)| \le \frac{3}{(n+1)!}$. ▲

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \cdot \operatorname{tg} x}$.

Δ Исходя из вида знаменателя, можно предположить, что определяющую роль при вычислении этого предела должны играть члены четвертого порядка малости по сравнению с x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \cdot \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^3 \cdot (x + o(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{= -\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4 + o(x)^4} = -\frac{1}{12}.$$

Заметим, что в числителе вместо $o(x^5)$ мы записали $o(x^4)$, что в нашем примере является допустимым. ▲

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\operatorname{tg}x-x)}}$.

Δ Обозначим выражение под знаком предела через y и прологарифмируем его:

$$\ln y=\frac{1}{x(\operatorname{tg}x-x)}\cdot\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right);\quad \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)}{x(\operatorname{tg}x-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}{x\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)-x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{\frac{x^4}{3}+o(x^5)}=\frac{1}{8},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\operatorname{tg}x-x)}}=e^{\frac{1}{8}}.\ ▲$$

Пример 11. Используя метод неопределенных коэффициентов, представить функцию $y=\operatorname{tg}x$ формулой Маклорена до члена с x^5.

Δ Поскольку функция $\operatorname{tg}x$ нечетная, то ее разложение в окрестности точки $x=0$ имеет вид $\operatorname{tg}x=Ax+Bx^3+Cx^5+o(x^6)$. Так как

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)},$$

то

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)=(Ax+Bx^3+Cx^5+o(x^6))\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right),$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)=Ax+\left(B-\frac{A}{2}\right)x^3+\left(C+\frac{A}{4!}-\frac{B}{2}\right)x^5+o(x^6).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $A=1,\ B=\dfrac{1}{3},\ C=\dfrac{2}{15}$.

Таким образом, $\operatorname{tg}x=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^6),\ x\to 0$. ▲

Дополнительные задачи

1. Многочлен $P_4(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$ разложить по степеням $(x+1)$.

Ответ: $P_4(x)=1+4(x+1)-3(x+1)^2-2(x+1)^3+(x+1)^4$.

2. Применив непосредственно формулу Тейлора, разложить функцию $f(x)=\sqrt{x}$ по степеням $(x-1)$ до $o((x-1)^2)$.

Ответ: $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$.

3. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o\,(x-x_0)^n$ функцию $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$.

Ответ: $f(x)=3+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(x-2)^k+o(x-2)^n)$.

4. Вычислить приближенно (взяв два члена разложения в формуле Маклорена) $\sqrt[3]{10}$.

Ответ: $2{,}17$.

5. Функцию $f(x)=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $a>0$ в окрестности точки $x=0$ приближенно заменить параболой второго порядка.

Ответ: $f(x)=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2),\ x\to 0$.

6. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+2\sin x-3x}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x}{\ln(1+\sin^4 x)}$.

Ответ: а) 0; б) $\frac{1}{3}$.

7. Известно, что $f(x)$ – многочлен четвертой степени, причем $f(1)=1$, $f'(1)=2$, $f''(1)=0$, $f'''(1)=f^{(4)}(1)=12$. Найти $f''(2)$ и $f'''(0)$.

Ответ: $f''(2)=18$, $f'''(0)=0$.

8. Для функции $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ найти $f^{(10)}(0)$.

Ответ: -945.

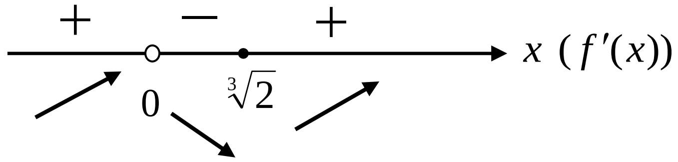
Занятие 31

Исследование функций с помощью производных

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$ и точки экстремума.

Δ Область определения функции $x\in(-\infty;0)\bigcup(0;+\infty)$. На каждом из бесконечных интервалов функция дифференцируема $f'(x)=1-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-2}{x^3}$.

$f'(x)=0$ при $x_0=\sqrt[3]{2}$. Точка $x_0=\sqrt[3]{2}$ разбивает область определения данной функции на три интервала: $(-\infty;0)$, $(0;\sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2};+\infty)$. В каждом из интервалов производная сохраняет постоянный знак.

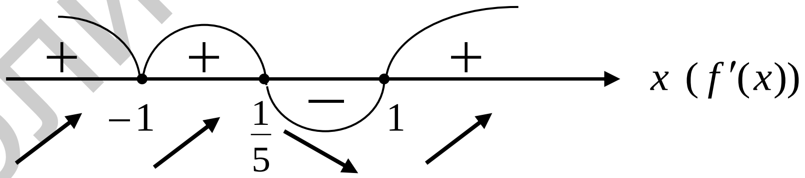


На интервалах $(-\infty;0)$ и $(\sqrt[3]{2};+\infty)$ функция возрастает. На интервале $(0;\sqrt[3]{2})$ функция убывает. Точка $x=\sqrt[3]{2}$ является точкой минимума.

Замечание. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке $x=\sqrt[3]{2}$, то эту точку можно присоединить и к промежутку возрастания, и к промежутку убывания функции. Окончательно функция возрастает на промежутках $(-\infty;0)$ и $[\sqrt[3]{2};+\infty)$ и убывает на промежутке $(0;\sqrt[3]{2}]$. В точке $x=\sqrt[3]{2}$ функция достигает минимума. ▲

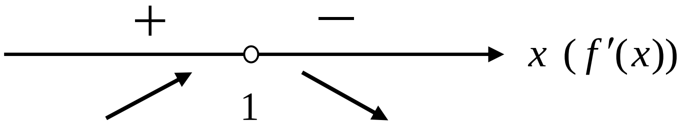
Пример 2. Найти промежутки возрастания, убывания и точки локальных экстремумов функции: 1) $f(x)=(x-1)^2\cdot(x+1)^3$; 2) $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Δ 1) Функция определена, непрерывна и дифференцируема на $(-\infty;+\infty)$. $f'(x)=(x-1)\cdot(x+1)^2\cdot(5x-1)$. $f'(x)=0$, $x_0=1$, $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{1}{5}$. Определяем знаки производной на интервалах $(-\infty;-1)$, $\left(-1;\dfrac{1}{5}\right)$, $\left(\dfrac{1}{5};1\right)$ и $(1;+\infty)$.



$f'(x)>0$ на следующих промежутках: $(-\infty;-1)$; $\left(-1;\dfrac{1}{5}\right)$; $(1;+\infty)$. Так как точки -1; $\dfrac{1}{5}$; 1 являются точками непрерывности функции, то функция возрастает на промежутках $\left(-\infty;\dfrac{1}{5}\right]$ и $[1;+\infty)$. Функция убывает на промежутке $\left[\dfrac{1}{5};1\right]$. Точка $x=\dfrac{1}{5}$ является точкой максимума функции, точка $x=1$ является точкой локального минимума.

2) Функция непрерывна при всех значениях x. $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.



В точке $x = 1$ производная не существует. Но так как в этой точке функция непрерывна, то функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$, функция убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Точка $x = 1$ является точкой локального максимума (острый максимум). ▲

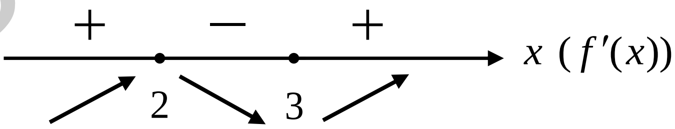
Пример 3. Доказать, что при $0 < x \le 1$ справедливо неравенство $\operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{6}$.

Δ Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6}$. Ее производная имеет вид $y' = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(x^2+1)}$.

Функция непрерывна на $[0; 1]$ и ее производная $y'(x) < 0$, если $x \in (0; 1)$, следовательно, на отрезке $[0; 1]$ функция убывает. Тогда $y(x) < y(0) = 0$, или $\operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6} < 0$ для любого $x \in (0; 1]$. Значит, $\operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{6}$ при $x \in (0; 1]$. ▲

Пример 4. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 10$.

Δ Находим производную функции $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3)$, $f'(x) = 0$ при $x_1 = 2, x_2 = 3$. Эти точки являются критическими. Экстремумы могут быть только в этих точках.



Так как в окрестности $x_1 = 2$ знак первой производной при увеличении x изменяется с «+» на «–», то $x_1 = 2$ является точкой максимума. Для точки $x_2 = 3$ знак первой производной изменяется с «–» на «+», т. е. $x_2 = 3$ – точка минимума. Тот же результат можно получить, используя вторую производную. Найдем вторую производную и вычислим значения второй производной в критических точках: $f''(x) = 12x - 30$, $f''(2) = -6 < 0$ и $f''(3) = 6 > 0$, т. е. $x_1 = 2$ – точка максимума, а $x_2 = 3$ – точка минимума. Вычислив значения функции в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, найдем экстремумы функции: максимум $f(2) = 18$ и $f(3) = 17$. ▲

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

Δ Функция определена и непрерывна при всех $x \in R$.

$$f'(x) = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)}}, \ \ x \neq 1, \ \ x \neq 2.$$

В точках $x = 1$ и $x = 2$ производная не существует. Таким образом, функция имеет три критические точки: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = 2$. При переходе через точку $x = 1$ производная не меняет знака, поэтому критическая точка $x_1 = 1$ не является точкой экстремума. При переходе через точку $x_2 = \frac{4}{3}$ производная меняет знак с « – » на « + », поэтому в точке $x_2 = \frac{4}{3}$ функция имеет минимум. При переходе через точку $x_3 = 2$ производная меняет знак с «+» на «–», поэтому $x_3 = 2$ – точка острого максимума. Минимум функции равен $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, а максимум – $f(2) = 0$. ▲

Пример 6. Найти экстремумы следующих функций:

1) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Δ 1) Производная $y' = \begin{cases} 2x & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ данной функции существует во всех точках, кроме $x = 0$. В точке $x = 0$ функция непрерывна и производная меняет знак с « – » на « + ». Поэтому в точке $x = 0$ функция имеет минимум и он равен $y(0) = 0$ (рис. 19).

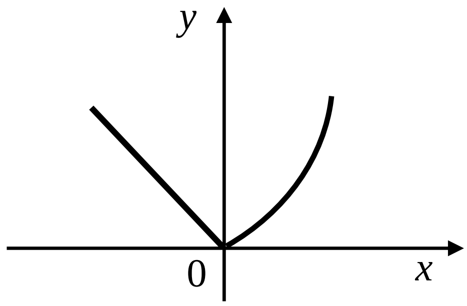


Рис. 19

2) Производная $y' = \begin{cases} 2x & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ меняет знак при переходе через точку $x = 0$ с « – » на « + ». Здесь минимума нет (рис. 20).

В точке $x = 0$ функция не является непрерывной, и поэтому нельзя пользоваться первым достаточным условием экстремума. ▲

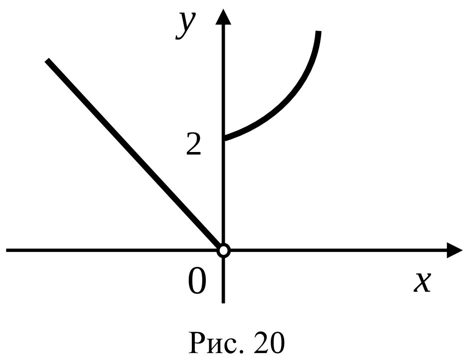


Рис. 20

Пример 7. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ в точке $x = 0$.

Δ Определим порядок первой отличной от нуля производной в точке $x = 0$:

$$f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x, \quad f'(0) = 0;$$
$$f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad f''(0) = 0; \; f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x, \quad f'''(0) = 0;$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad f^{\mathrm{IV}}(0) = 2 > 0.$$

Так как первой отличной от нуля производной в точке $x = 0$ оказалась производная четного порядка, принимающая положительное значение, то в этой точке минимум: $f(0) = 2$. ▲

Пример 8. Построить график функции $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2$ с помощью производной первого порядка.

Δ 1. Функция определена $\forall x \in R$.

2. Данная функция – функция общего вида.

3. Найдем нули функции:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0, \; 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0, \; 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0,$$

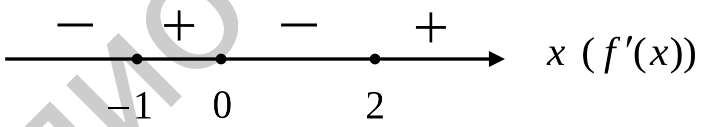
$x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0$, $x_{1,2} = 0$, $x_3 \approx -1{,}4$, $x_4 \approx 2{,}8$.

Возьмем также две дополнительные точки, например:

$$f(1) = -\frac{13}{12}, \quad f(3) = \frac{9}{4}.$$

4. Находим производную: $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$. Критическими точками функции являются точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Найденные критические точки разбивают числовую прямую на четыре интервала. Находим знаки производной $f'(x)$ на этих промежутках.



Результаты исследования заносим в таблицу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↘	min $-5/12$	↗	max 0	↘	min $-8/3$	↗

По этим данным строим график искомой функции (рис. 21).

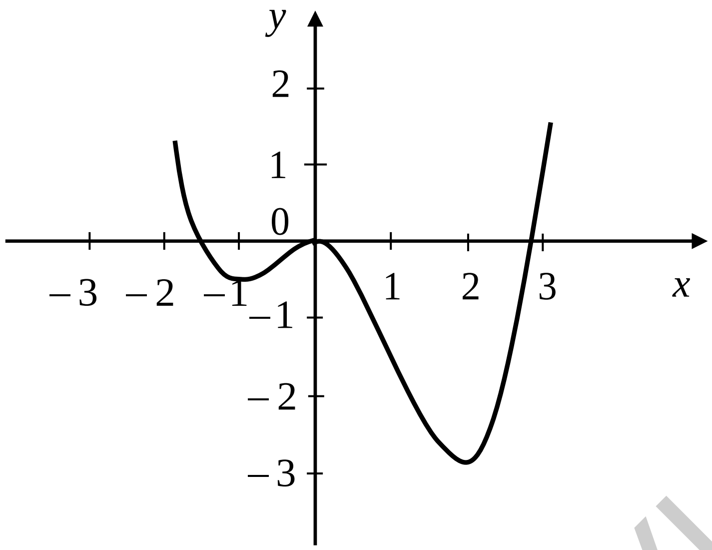


Рис. 21 ▲

Дополнительные задачи

1. Определить интервалы монотонности функций:

а) $y = x^3 - 3x + 5$; б) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; в) $y = 2x^2 - \ln x$.

Ответ: а) на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, на $(-1; 1)$ – убывает; б) на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ – убывает; в) на $(0; 1/2)$ функция убывает, на $(1/2; +\infty)$ – возрастает.

2. При каких значениях параметра a функция $f(x) = ax + 3\sin x + 4\cos x$ возрастает на всей числовой прямой.

Ответ: $a \geq 5$.

3. Доказать, что $e^x \geq 1 + x,\ x \geq 0$.

4. Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $y = (1 - x^2)^3$; б) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$; в) $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

Ответ: а) $y_{max} = y(0) = 1$; б) $y_{min} = y(\pm 2) = 4$; в) $y_{min} = y(0) = 0$, $y_{max} = y(2) = \dfrac{4}{e^2}$.

5. Найти максимумы и минимумы функции $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x\ln x, & x > 0. \end{cases}$

Ответ: Максимум – $y = 0$ при $x = 0$, минимум – $y = -\dfrac{1}{e}$ при $x = \dfrac{1}{e}$.

6. Пользуясь второй производной, выяснить характер экстремумов функции $y = 2\sin x + \cos 2x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$ – точки максимума, $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ – точки минимума. $T = 2\pi$.

7. Исследовать на экстремум в точке $x = 0$ функцию $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$.

Ответ: точка $x = 0$ является точкой максимума.

8. Построить график функции $y = x^3 - 12x$ с помощью производной первого порядка.

Ответ: рис. 22.

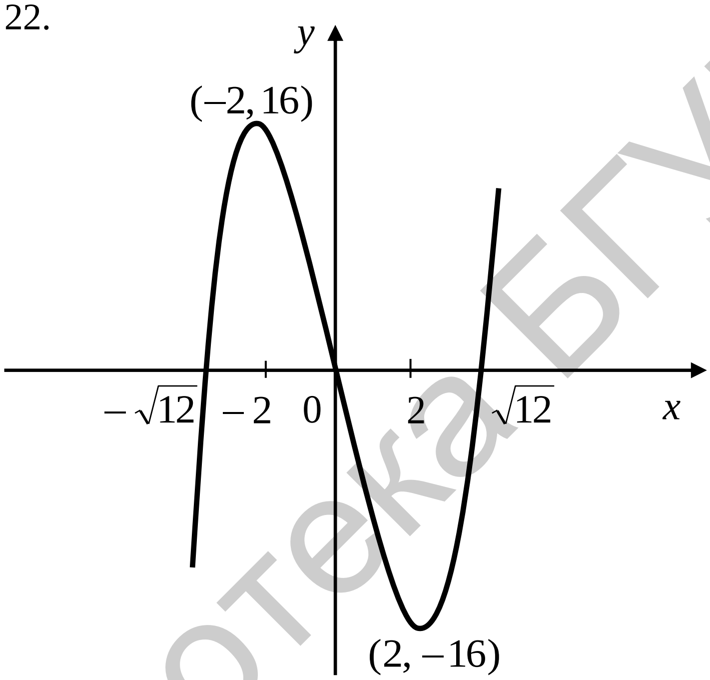


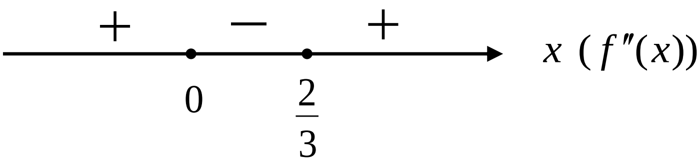
Рис. 22

Занятие 32

Исследование функций и построение графиков

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

Δ Функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке числовой прямой, $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 36x^2 - 24x = 36x \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)$.



Так как $f''(x)=0$ при $x=0$ и $x=\dfrac{2}{3}$, $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;0)$ и $x\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$ и $f(x)$ непрерывна в точках $x=0$ и $x=\dfrac{2}{3}$, то функция $f(x)$ на промежутках $(-\infty;0)$ и $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ является выпуклой вниз, на промежутке $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$ – выпуклой вверх, а точки $x=0$ и $x=\dfrac{2}{3}$ являются точками перегиба этой функции. ▲

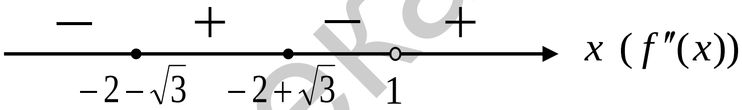
Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба следующей функции:

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^3}.$$

Δ Функция дифференцируема при всех $x\in R$, кроме $x=1$, причем

$$f'(x)=-\frac{x(x+2)}{(x-1)^4},\ f''(x)=2\,\frac{x^2+4x+1}{(x-1)^5}=2\,\frac{(x-(-2-\sqrt{3}))\cdot(x-(-2+\sqrt{3}))}{(x-1)^5}.$$

В точках $x=-2\pm\sqrt{3}$ вторая производная равна нулю, а в точке $x=1$ она не существует.



На интервалах $(-\infty;-2-\sqrt{3})$ и $(-2+\sqrt{3};1)$ функция выпукла вверх, на интервалах $(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3})$ и $(1;+\infty)$ функция выпукла вниз. Точки $x=-2\pm\sqrt{3}$ являются точками перегиба функции. (В точке $x=1$ функция не определена, поэтому эта точка не является точкой перегиба функции). ▲

Пример 3. Определить, является ли точка $x=0$ точкой перегиба функции $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$.

Δ $f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$, $\quad f''(x)=-\sin x+x,\quad f''(0)=0;$

$f'''(x)=-\cos x+1,\quad f'''(0)=0;\quad f^{(4)}(x)=\sin x,\quad f_{(0)}^{(4)}(0)=0;$

$f^{(5)}(x)=\cos x,\quad f^{(5)}(0)=1\neq 0.$

Так как 5 – нечетное число, точка $x=0$ является точкой перегиба для функции $f(x)$. ▲

Пример 4. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x}$.

Δ Функция определена для всех x, кроме $x=1$. Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to -0}\frac{x^2-2x+2}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to +0}\frac{x^2-2x+2}{x}=+\infty.$$

Следовательно, прямая $x=0$ – двусторонняя вертикальная асимптота графика функции. Для нахождения наклонных асимптот графика представим данную функцию в виде

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x}=x-2+\frac{2}{x}.$$

Так как $\frac{2}{x}\to 0$ при $x\to\infty$, то из определения наклонной асимптоты следует, что прямая $y=x-2$ является двусторонней наклонной асимптотой графика указанной функции. Поскольку $\frac{2}{x}<0$ при $x<0$, кривая графика лежит выше асимптоты при $x\to+\infty$ и ниже ее при $x\to-\infty$ (рис. 23). ▲

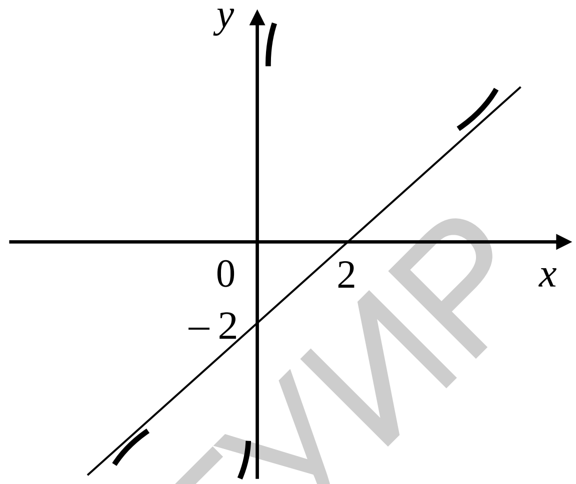


Рис. 23

Пример 5. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

Δ Функция непрерывна на всей числовой прямой, поэтому вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}=0.$$

$$b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=\begin{cases}1 \text{ при } x\to+\infty,\\ -1 \text{ при } x\to-\infty.\end{cases}$$

Следовательно, график функции имеет две наклонные (горизонтальные) асимптоты: правостороннюю – $y=1$ и левостороннюю – $y=-1$. Так как $\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}>1$, график функции расположен относительно своих асимптот следующим образом (рис. 24). ▲

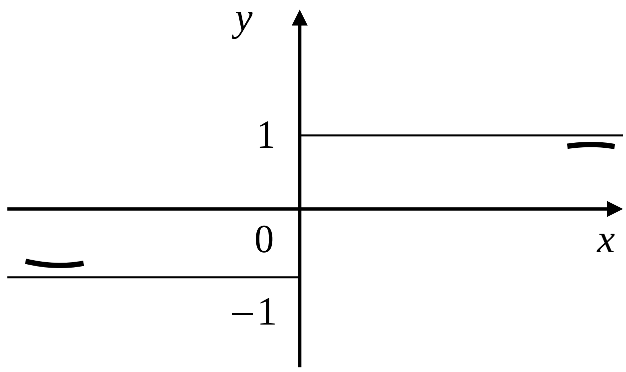


Рис. 24

Пример 6. Построить график функции $f(x)=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

Δ 1. Функция определена $\forall x\in R$.

2. Функция не является четной, нечетной или периодической (это функция общего вида).

3. График функции проходит через начало координат, т. к. $f(0)=0$; кроме того, $f(1)=0$.

4. Производная функции $f'(x)=\dfrac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$. Критическими точками функции являются $x_1=\dfrac{1}{3}$ (в ней производная обращается в нуль) и точки $x_2=0$ и $x_3=1$ (в этих точках производная бесконечна). Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;\,0)$, $\left(0;\,\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ и $(1;+\infty)$. Исследуем знак производной на этих промежутках. Результаты исследования заносим в таблицу.

x	$(-\infty;\,0)$	0	$\left(0;\,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	нет экст. 0	$\nearrow$	max $\approx 0{,}53$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$

5. Находим $f''(x)=\dfrac{-2}{9\cdot\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$. Вторая производная не обращается в нуль, а в точках $x_1=0$ и $x_2=1$ не существует. Эти точки являются точками возможного перегиба. Составим таблицу.

x	$(-\infty;\,0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	$+$	не сущ.	$-$	не сущ.	$-$
$f(x)$	выпукла вниз	перегиб 0	выпукла вверх	нет перегиба 0	выпукла вверх

6. Ввиду непрерывности функции вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x}=\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x(x-1)^2}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-1)^2-x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x(x-1)^2}+x^2}=-\frac{2}{3}.$$

График функции имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=x-\dfrac{2}{3}$.

Строим график функции (рис. 25).

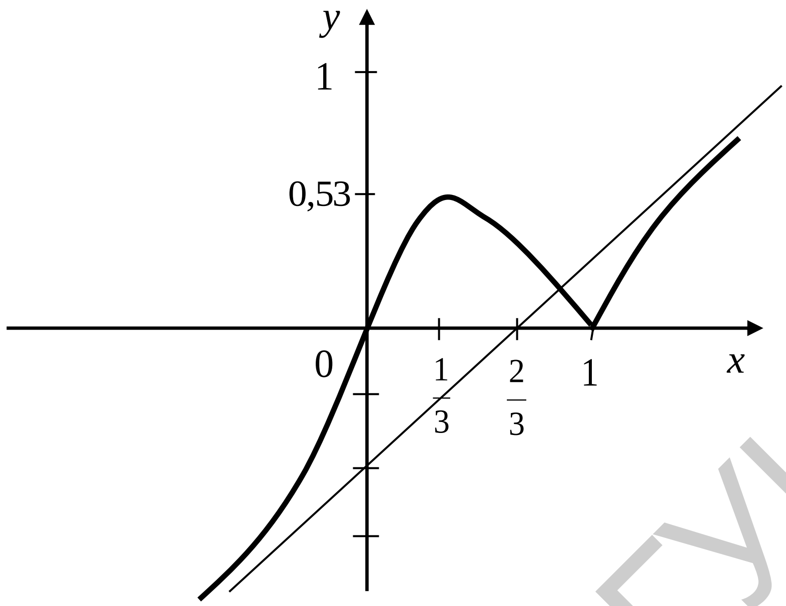


Рис. 25 ▲

Дополнительные задачи

1. Найти интервалы выпуклости функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Ответ: выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$.

2. При каких a кривая $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ выпукла вниз для всех $x \in R$?

Ответ: $|a| \le 2$.

3. Найти точки перегиба функций: а) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$; б) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$.

Ответ: а) $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$; б) $x = -3$ и $x = -1$.

4. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b и c, чтобы функция $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ имела точки перегиба?

Ответ: $3b^2 > 8ac$.

5. Найти асимптоты графиков функций:

а) $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{x}$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; в) $f(x) = x + 2\operatorname{arctg} x$.

Ответ: а) $x = 0$ и $y = x$; б) $x = 0$; $y = 1$ – правосторонняя асимптота, $y = -1$ – левосторонняя асимптота; в) $y = x + \pi$ – правосторонняя асимптота и $y = x - \pi$ – левосторонняя асимптота.

6. Исследовать функцию и построить ее график $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

Ответ: рис. 26.

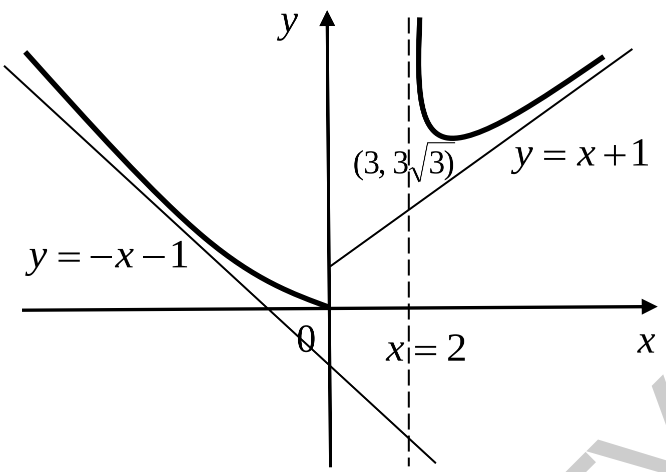


Рис. 26

7. Построить графики функций:

1) $y=\dfrac{x^2}{x+2}$; 2) $y=\sqrt[3]{x^2(3-x)}$; 3) $y=x\cdot\ln^2 x$; 4) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

5) $y=e^{4x-x^2}$.

Занятие 33

Задачи на наименьшее и наибольшее значения функции

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-4x$ на отрезке $[0;2]$.

Δ Найдем критические точки функции: $f'(x)=4x^2-4=0$; $x=\pm1$. Вычислим значения функций в критических точках, принадлежащих интервалу $(0;2)$ и на концах отрезка: $f(1)=\dfrac{4}{3}-4=-\dfrac{8}{3}$, $f(0)=0$, $f(2)=\dfrac{32}{3}-8=\dfrac{8}{3}$. Наименьшее значение функции – $f(1)=-\dfrac{8}{3}$, наибольшее значение функции – $f(2)=\dfrac{8}{3}$. ▲

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=-2x^3-3x^2+4$ на промежутке $[1;3)$.

Δ Находим критические точки функции: $y'(x)=-6x^2-6x=-6x(x+1)$. $y'=0$ $x_1=0,$ $x_2=-1$. В промежутке $[1;3)$ нет критических точек. В этом промежутке производная отрицательна, следовательно, функция строго убывающая. Наибольшее значение функции равно $y(1)=-1$. Наименьшего значения функции не существует (точка 3 не принадлежит промежутку). ▲

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ на отрезке $[-10;10]$.

Δ Находим производную $f'(x)=(2x-3)\cdot\operatorname{sign}(x^2-3x+2),\ x\neq 1,\ x\neq 2$; отсюда получаем точки, подозрительные на экстремум: $x_1=\dfrac{3}{2},\ x_2=1,\ x_3=2,$ $x_4=-10,\ x_5=10$.

Сравнивая между собой числа $f(x_1)=\dfrac{1}{4},\ f(x_2)=0,\ f(x_3)=0,\ f(x_4)=132,$ $f(x_5)=72,$ приходим к выводу, что наибольшее значение функции равно 132, а наименьшее – 0. ▲

Пример 4. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Δ Из соображений геометрического характера можно утверждать, что задача имеет хотя бы одно решение. Пусть сторона основания x, а высота y. Тогда объем V бассейна будет равен $V=x^2\cdot y=32$, а облицовочная поверхность в бассейне равна $S=x^2+4xy$, или $S=x^2+\dfrac{128}{x}$.

Исследуем полученную функцию на минимумы в промежутке $(0;+\infty)$: $S'=2x-\dfrac{128}{x^2};\quad 2x-\dfrac{128}{x^2}=0;\quad x=4.$ Найденная единственная точка дает наименьшее значение функции S (проверять не нужно). Высота бассейна равна $\dfrac{32}{16}=2$. Итак, искомые размеры бассейна $x=4$ м и $y=2$ м. ▲

Пример 5. Найти радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиусом R.

Δ Пусть r и h – радиус основания и высота цилиндра, вписанного в шар радиусом R, V – объем цилиндра (рис. 27). Тогда $V=\pi r^2 h$, $\dfrac{h^2}{4}+r^2=R^2,\ V=2\pi r^2\cdot\sqrt{R^2-r^2}$, где $0<r<R$.

Обозначим $t=r^2$, тогда $V=2\pi t\cdot\sqrt{R^2-t}$, $0<t<R^2$.

Рассмотрим функцию $V^2=4\pi^2t^2\cdot\left(R^2-t\right)$. Так как $V\geq 0$, то функция $V(t)$ имеет на интервале $(0;R^2)$ те же точки экстремума, что и функция

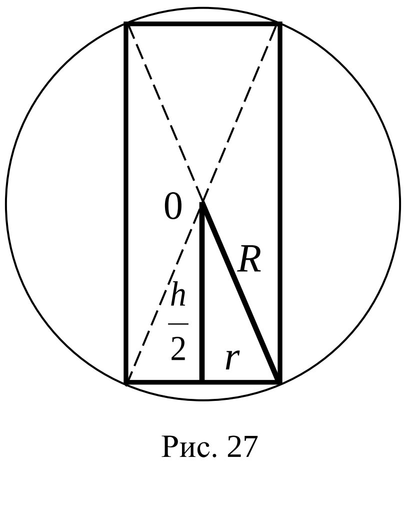


Рис. 27

$\dfrac{V^2}{4\pi^2} = t^2(R^2 - t) = R^2t^2 - t^3 = f(t)$. Найдем критические точки функции $f(t)$:

$$f'(t) = 2R^2 \cdot t - 3t^2 = 3t\left(\frac{2}{3}R^2 - t\right) = 0.$$

Это уравнение на $(0; R^2)$ имеет единственное решение $t_0 = \dfrac{2R^2}{3}$, причем при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «–». Следовательно, точка t_0 является точкой максимума функции. Таким образом, при $r = \sqrt{t_0} = R\sqrt{2/3}$ функция V принимает наибольшее значение, т. е. радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиусом R и имеющего наибольший объем, равен $R\sqrt{2/3}$. ▲

Пример 6. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью V км/ч, составляет $90 + 0{,}4V^2$ р./ч. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

Δ За время t катер пройдет путь $S = V \cdot t$, а суммарные затраты за это время составят $(90 + 0{,}4V^2)\cdot t,\ V \in (0; +\infty)$. Тогда удельные затраты на 1 км пути равны

$$\frac{(90 + 0{,}4V^2)\cdot t}{V\cdot t} = \frac{90}{V} + \frac{2}{5}V. \quad y = \frac{90}{V} + \frac{2}{5}V,\ y' = -\frac{90}{V^2} + \frac{2}{5} = \frac{2V^2 - 450}{5V^2}.$$

На промежутке $(0; +\infty)$ функция y имеет единственную критическую точку $V = 15$. При переходе через эту точку производная меняет знак с «–» на «+». Это точка минимума. Таким образом, стоимость одного км пути будет наименьшей, если катер будет плыть со скоростью 15 км/ч. ▲

Пример 7. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 м. (Освещенность точки обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

Δ Пусть расстояние от более слабого источника к искомой точке равно x. Тогда расстояние от более сильного источника к этой точке равно $(24 - x)$. Суммарная освещенность точки $E = \dfrac{k}{x^2} + \dfrac{8k}{(24-x)^2}$. Тогда $E' = \dfrac{-2k}{x^3} + \dfrac{16k}{(24-x)^3} =$

$$= 2k\frac{8x^3 - (24-x)^3}{x^3\cdot(24-x)^3} = 2k\cdot\frac{(2x - 24 + x)\cdot(4x^2 + 2x\cdot(24-x) + (24-x)^2}{x^3(24-x)^3}.$$

На интервале $(0; 24)$ существует единственная критическая точка $x = 8$. При переходе через эту точку производная меняет знак с «–» на «+». Это точка минимума. Таким образом, искомая точка расположена на расстоянии 8 м от более слабого источника. ▲

Дополнительные задачи

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x},\ x \in [1; 5].$ **Ответ:** $\frac{10}{3};\ 2.$

2) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3},\ x \in [2; 4].$ **Ответ:** $8;\ 4{,}5.$

3) $y = 2\sin x + \sin 2x,\ x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right].$ **Ответ:** $\frac{3\sqrt{3}}{2};\ -2.$

2. Найти наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 2x \cdot |x - 2|$ на отрезке $[0; 3]$.

Ответ: 21.

3. Представить число 12 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого была наименьшей.

Ответ: 1 и 11.

4. Из куска жести размером 16×30 необходимо изготовить коробку (без крышки) наибольшего объема, вырезая равные квадраты по углам листа и затем загибая их для образования боковых стенок коробки. Найти высоту коробки.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

5. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб с поперечным сечением в виде равнобедренной трапеции. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения будет наибольшей?

Ответ: $2\pi/3$.

6. Два корабля плывут с постоянными скоростями $V_1 = 20$ км/ч и $V_2 = 30$ км/ч по прямым, угол между которыми $60°$ в направлении точки пересечения этих прямых. Найти наименьшее расстояние между кораблями, если в начальный момент времени расстояния кораблей от точки пересечения прямых были соответственно 10 и 20 км.

Ответ: $\frac{5\sqrt{21}}{7}$ км.

Занятие 34

Контрольная работа «Производная и ее применение»

Вариант 1

1. Вычислить по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot e^{x}+e^{-2x}-3}{\ln(1-x^{2})}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Ответ: а) -3; б) e.

2. Используя формулу Тейлора, вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^{3})-2\sin x+2x\cdot\cos x^{2}}{\sin^{3}x}$.

Ответ: $-\dfrac{2}{3}$.

3. Найти область возрастания функции $y=\dfrac{x-2}{x^{2}-4x+5}$.

Ответ: $x\in[1;3]$.

4. Найти точки экстремума функции $y=(2x+1)\cdot\sqrt[3]{(x-2)^{2}}$.

Ответ: $x=1$ – точка максимума, $x=2$ – точка минимума.

5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y=e^{\operatorname{arctg}x}$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ – функция выпукла вниз, $x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ – функция выпукла вверх, $x=\dfrac{1}{2}$ – точка перегиба.

6. Найти асимптоты графика функции:

а) $y=\dfrac{2x^{2}+5x+3}{x+2}$; б) $y=\sqrt{x^{2}+4x+3}$.

Ответ: а) $y=2x+1$, $x=-2$; б) $y=x+2$, $y=-x-2$.

7. Построить график функции $y=16x^{2}(x-1)^{2}$ с помощью производной первого порядка.

Ответ: рис. 28.

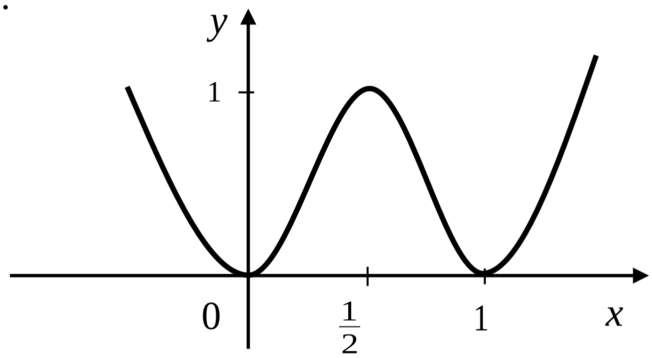


Рис. 28

8. Провести полное исследование функции $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$ и построить ее график.

Ответ: рис. 29.

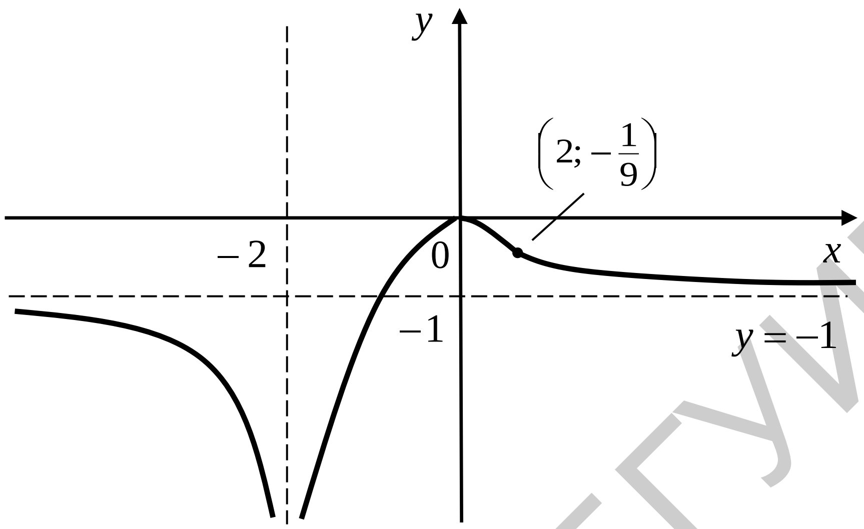


Рис. 29

Вариант 2

1. Вычислить по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\ln \sin x}{(2x-\pi)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$.

Ответ: а) $-\frac{1}{8}$; б) e^2.

2. Используя формулу Тейлора, вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \sin 2x - 2x^2 \cos x - 1}{\ln^3(1-x)}$.

Ответ: $-\frac{8}{3}$.

3. Найти область возрастания функции $y = \frac{x-3}{x^2 - 6x + 10}$.

Ответ: $x \in [2; 4]$.

4. Найти точки экстремума функции $y = (2x-1)\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

Ответ: $x = 2$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума.

5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = e^{-x^2}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ – функция выпукла вниз,

$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – функция выпукла вверх, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ – точки перегиба.

6. Найти асимптоты графика функции

а) $y = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x+1}$;

б) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 2}$.

Ответ: а) $y = 2x + 3,\;\; x = -1$;

б) $y = x + 3,\; y = -x - 3$.

7. Построить график функции $y = 6x - 8x^3$ с помощью производной первого порядка.

Ответ: рис. 30.

8. Провести полное исследование функции $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ и построить ее график.

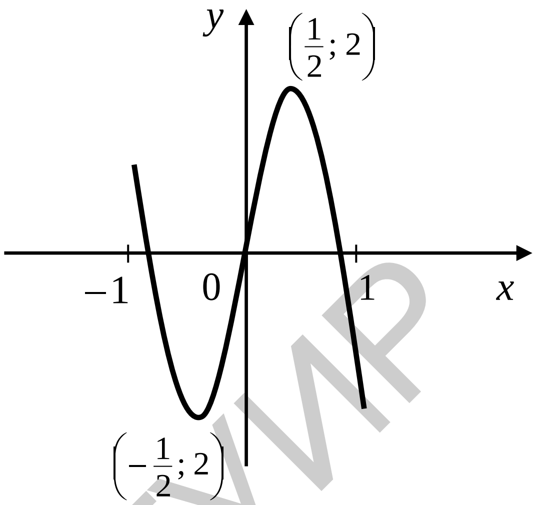


Рис. 30

Ответ: рис. 31.

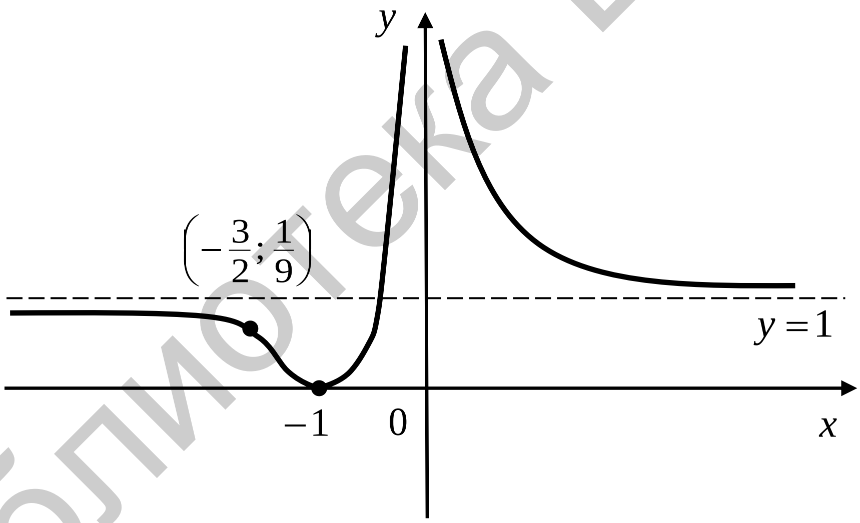


Рис. 31

Список использованных источников

1. Борисенко, О. Ф. Высшая математика для технических университетов : линейная алгебра / О. Ф. Борисенко, А. А. Карпук. – Минск : Харвест, 2012. – 224 с.

2. Борисенко, О. Ф. Высшая математика для технических университетов : аналитическая геометрия / О. Ф. Борисенко, А. А. Карпук. – Минск : Харвест, 2012. – 208 с.

3. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М. : АСТ : Мир и образование, 2014. – 816 с.

4. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи : учеб. пособие / А. А. Гусак. – 6-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2011. – 288 с.

5. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи : учеб. пособие / А. А. Гусак. – 6-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2011. – 416 с.

6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов : учеб. пособие / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Астрель : АСТ, 2004. – 495 с.

7. Карпук, А. А. Высшая математика для технических университетов : введение в математический анализ / А. А. Карпук. – Минск : Харвест, 2006. – 160 с.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

9. Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс. Рольф, 2001. – 576 с.

Содержание

Св. план 2017, поз. 28

Учебное издание

Цегельник Владимир Владимирович
Баркова Елена Александровна
Кобринец Николай Иванович и др.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Д. Степусь*

Подписано в печать 13.11.2017. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 11,74. Уч.-изд. л. 12,6. Тираж 250 экз. Заказ 123.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6