Виктор Мурзов, *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, доцент, к.ф. – м. н., кафедра физики*

Квантовая динамика двухчастичной системы с однородным относительным пространством

Аннотация: Сформулировано уравнение Шрёдингера для замкнутой системы двух частиц, относительное пространство которой может быть однородным пространством любой из групп изоморфных $E(3)$, $SO(4)$ или $SO(3,1)$. Рассмотрен ряд точно решаемых задач и обсуждены их физические аспекты. В заключении дано возможное обобщение этого уравнения на случай числа частиц $N>2$.

1. Введение

Впервые квантовая динамика одной частицы в однородных пространствах групп, изоморфных $SO(4)$ и $SO(3,1)$, трактуемых соответственно как пространства постоянной положительной и отрицательной кривизны, была рассмотрена в [1] и [2], где была поставлена и решена задача Кеплера-Кулона. Изотропный осциллятор в тех же пространствах фактически был изучен в [3]. В дальнейшем эти задачи были обсуждены с различных точек зрения в [4–9].

В этой статье обсуждена возможность использования однородных пространств групп, изоморфных $SO(4)$ и $SO(3,1)$ в совершенно ином физическом контексте. В отличие от перечисленных статей, где физическое пространство обладает неевклидовой структурой, в нашем подходе к формулировке динамического уравнения для 2-частичной системы физическое пространство является Евклидовым, а упомянутые выше группы являются группами транзитивности относительного пространства этой системы и вводятся для описания межчастичного взаимодействия. Для такой формулировки с самого начала вместо радиус-векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ каждой частицы системы в физическом пространстве используются переменные $\vec{R}=\vec{R}\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)$ и $\vec{r}=\vec{r}\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)$, подчиненные специальным трансформационным законам при галилеевых преобразованиях физического пространства (эти переменные, также как и относительное пространство системы, будут определены ниже). На языке этих переменных в полном согласии с требованием галилеевой инвариантности можно сформулировать для рассматриваемой системы динамическое уравнение, которое допускает свободу в выборе группы транзитивности ее относительного пространства. Динамика, основанная на таком уравнении, позволяет описывать взаимодействие между частицами системы не только с помощью различных потенциалов взаимодействия, но также и посредством выбора такой группы. Его формулировка наиболее последовательно и просто может быть дана при помощи теории представлений групп, позволяющей формулировать динамику частиц непосредственно на квантовом уровне, минуя построение и последующее квантование соответствующего классического аналога [1]. С этой целью в этой работе для всех рассматриваемых транзитивных групп используются их унитарные представления с операторным множителем. Такие представления определяются в некотором линейном пространстве $\mathfrak{L}$ функций $\Psi(x)$, заданных на множестве M, отображением $T(g)$ следующего вида [10]:

$$T(g)\Psi(x) = A(x,g)\Psi(g^{-1}x), \tag{1}$$

где $A(x,g)$ – функция точки $x \in M$ и элемента g из группы преобразований G множества M, удовлетворяющая следующему функциональному уравнению

$$A(x,g_1g_2) = A(x,g_1)A(g_1^{-1}x,g_2). \tag{2}$$

2. Группа Галилея и относительное пространство системы

Известно, что нерелятивистское пространство событий (*галилеево пространство*) есть множество $\mathbb{R}_E^3 \times \mathbb{R}$ точек $(\vec{x},t)$ с галилеевой группой движения Г, где $\vec{x}$ – радиус-вектор точки пространсва $\mathbb{R}_E^3$ (пространство $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой), а t – точка оси времени $\mathbb{R}$. Преобразования $(\tau,\vec{a},\vec{V},\vec{c}) \in \Gamma$ этого пространства задаются формулой

$$(\tau,\vec{a},\vec{V},\vec{c})(\vec{x},t) = (\Re(\vec{c})\vec{x} + \vec{V}t + \vec{a}, t + \tau), \tag{3}$$

с законом композици [11]

$$(\tau_1,\vec{a}_1,\vec{V}_1,\vec{c}_1)(\tau_2,\vec{a}_2,\vec{V}_2,\vec{c}_2) = (\tau_1 + \tau_2, \vec{a}_1 + \Re(\vec{c}_1)\vec{a}_2 + \tau_2\vec{V}_1, \vec{V}_1 + \Re(\vec{c}_1)\vec{V}_2, \langle \vec{c}_1,\vec{c}_2 \rangle), \tag{4}$$

где $\Re(\vec{c})$ – вращение пространства $\mathbb{R}_E^3$ на угол $\varphi = 2arctg|\vec{c}|$ вокруг вектора $\vec{c}$ ($\vec{c}$ – вектор-параметр группы вращений $SO(3)$), а символ $\langle \vec{c}_1,\vec{c}_2 \rangle$ обозначает закон композиции вектор-параметров [12]). Единичным элементом и обратным элементом в такой параметризации являются $(0,\vec{0},\vec{0},\vec{0})$ и $(-\tau, \Re(-\vec{c})(\tau\vec{V} - \vec{a}), -\Re(-\vec{c})\vec{V}, -\vec{c})$ соответственно, где принято во внимание, что $\Re^{-1}(\vec{c}) = \Re(-\vec{c})$.

---

[1] Напротив, классический аналог должен быть предельным случаем квантовой динамики.

Поставим в соответствие любой паре одновременных событий $(\vec{x}_1, t)$ и $(\vec{x}_2, t)$ точку $(\vec{R}, \vec{r}, t)$ пространства $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, где переменные $\vec{R} = \vec{R}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ и $\vec{r} = \vec{r}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ удовлетворяют следующим функциональным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}\left(\Re(\vec{c})\vec{x}_1 + \vec{b}(t),\ \Re(\vec{c})\vec{x}_2 + \vec{b}(t)\right) = \Re(\vec{c})\vec{R}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \vec{b}(t), \\ \vec{r}\left(\Re(\vec{c})\vec{x}_1 + \vec{b}(t),\ \Re(\vec{c})\vec{x}_2 + \vec{b}(t)\right) = \Re(\vec{c})\vec{r}(\vec{x}_1, \vec{x}_2). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тогда при $b(t) = \vec{V}t + \vec{a}$ из (5) очевидно следует, что пребразования галилеева пространства (3) определяют преобразования $\{\tau, \vec{a}, \vec{V}, \vec{c}\}$ пространства $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, задаваемые формулой

$$\{\tau, \vec{a}, \vec{V}, \vec{c}\}(\vec{R}, \vec{r}, t) = \left(\Re(\vec{c})\vec{R} + \vec{V}t + \vec{a}, \Re(\vec{c})\vec{r}, t + \tau\right). \tag{6}$$

Ясно, что преобразования $\{\tau, \vec{a}, \vec{V}, \vec{c}\}$ образуют группу $\mathfrak{G}$, изоморфную группе Галилея Γ.

Сейчас явный вид решения уравнений (5) несуществен. Важен лишь закон преобразования (6), диктуемый этими уравнениями. Из (6) следует, что при этом преобразовании радиус-вектор $\vec{R}$ будет преобразовываться так же как радиус-вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^3_E$. Следовательно, с групповой точки зрения пространство $\mathbb{R}^3$, описываемое радиус-вектором $\vec{R}$, является однородным пространством группы $E(3) \subset \mathfrak{G}$ евклидовых преобразований $\{0, \vec{a}, \vec{0}, \vec{c}\}$ и при введении в нем евклидовой метрики может быть отождествлено с пространством $\mathbb{R}^3_E$.

Напротив, группа транзитивности пространства $\mathbb{R}^3$, описываемого радиус-вектором $\vec{r}$, не предопределена преобразованиями (3). Действительно, из (6) следует, что преобразования (3) индуцируют в этом пространстве только вращения, оставляя его неподвижным при трансляциях $\{0, \vec{a}, \vec{0}, \vec{0}\}$ и чистых галилеевых преобразованиях $\{0, \vec{0}, \vec{V}, \vec{0}\}$. Тогда, дополняя вращения этого пространства трансляциями различных типов, мы можем превратить это пространство или некоторую его область в однородное пространство любой из 6-параметрических групп, изоморфных $E(3)$, $SO(4)$, $SO(3,1)$. В дальнейшем, используя такое пространство в динамике 2-частичной системы, мы будем называть его *относительным пространством системы* и обозначать символом $\mathbb{R}^3_{rel}$.

Отметим, что с физической точки зрения отображение $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \to (\vec{R}, \vec{r})$, подчиненное трансформационному условию (5), можно трактовать как самое общее определение переменных $\vec{R}$ и $\vec{r}$ для описания движения 2-частичной системы как целого и относительного движения ее компонент, соответственно.

Простейшей реализацией отображения $\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)\to\left(\vec{R},\vec{r}\right)$, удовлетворяющего условию (5) является линейное преобразование

$$\begin{cases} \vec{R}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2, \\ \vec{r}=\beta_1\vec{x}_1+\beta_2\vec{x}_2, \end{cases} \tag{7}$$

где числовые коэффициенты $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ связаны уравнениями

$$\alpha_1+\alpha_2=1, \qquad \beta_1+\beta_2=0\,. \tag{8}$$

Произвол в выборе этих коэффициентов можно минимизировать, добавляя два дополнительных условия: $\alpha_i>0,\left(i=1,2\right)$ и $\left|D\left(\vec{R},\vec{r}\right)/D\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)\right|=1$. Последнее условие дает еще одно уравнение $\left|\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\right|=1$, которое вместе с (8) приводит к равенствам $\beta_1=-\beta_2=\pm1$. Выбирая нижний знак, мы получим $\vec{r}=\vec{x}_2-\vec{x}_1$. Таким образом, коэффициенты α_1 и α_2, связанные уравнением $\alpha_1+\alpha_2=1$, остаются неопределенными, но при условии $\alpha_i>0$ радиус-вектор $\vec{R}$ определяет некоторую точку, лежащую *между* точками с радиус-векторами $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ на соединяющем их прямолинейном отрезке. Отметим, что далее эта точка может быть отождествлена с центром масс системы, но на данном этапе построения динамики для этого нет никаких оснований.

3. Унитарное представление группы Галилея $\mathfrak{G}$

Введем оператор $\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)$, $\mathfrak{g}=\left\{\tau,\vec{a},\vec{V},\vec{c}\right\}\in\mathfrak{G}$, действующий в линейном пространстве $\mathfrak{L}$ комплекснозначных функций $\Psi=\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)$ согласно следующему закону[1]:

$$\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)=A\left(\vec{R}-\vec{a},t-\tau,\vec{V}\right)\Psi\left(\Re\left(-\vec{c}\right)\left(\vec{R}-\vec{V}\left(t-\tau\right)-\vec{a}\right),\Re\left(-\vec{c}\right)\vec{r},t-\tau\right), \tag{9}$$

где множитель $A\left(\vec{R},t,\vec{V}\right)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$A\left(\vec{R},t,\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=A\left(\vec{R},t,\vec{V}_1\right)A\left(\vec{R}-\vec{V}_1t,t,\vec{V}_2\right). \tag{10}$$

Из (9) следует, что это отображение образует на подгруппе чистых галилеевых преобразований представление, принадлежащее классу представлений (1), и дает на

[1] Легко видеть, что $\mathfrak{T}\left(\left\{\tau,\vec{a},\vec{V},\vec{c}\right\}\right)=\mathfrak{T}\left(\left\{\tau,\vec{a},\vec{0},\vec{0}\right\}\right)\mathfrak{T}\left(\left\{0,\vec{0},\vec{V},\vec{0}\right\}\right)\mathfrak{T}\left(\left\{0,\vec{0},\vec{0},\vec{c}\right\}\right)$ согласно представлению любого $\mathfrak{g}=\left\{\tau,\vec{a},\vec{V},\vec{c}\right\}\in\mathfrak{G}$ в виде $\left\{\tau,\vec{a},\vec{V},\vec{c}\right\}=\left\{\tau,\vec{a},\vec{0},\vec{0}\right\}\left\{0,\vec{0},\vec{V},\vec{0}\right\}\left\{0,\vec{0},\vec{0},\vec{c}\right\}$.

подгруппах временных и пространственных трансляций, а также на подгруппе вращений их квазирегулярные представления.

Для $t=0$ (10) принимает форму $A\left(\vec{R},0,\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=A\left(\vec{R},0,\vec{V}_1\right)A\left(\vec{R},0,\vec{V}_2\right)$ и, следовательно, можно положить $A\left(\vec{R},0,\vec{V}\right)=\exp\left(\lambda\vec{R}\vec{V}\right)$, где λ – неоторый скалярный параметр. Переходя к случаю $t\neq 0$, отметим, что решение уравнения (2) может быть дано в следующей общей форме[1]:

$$A\left(x,g\right)=f\left(x\right)\Big/f\left(g^{-1}x\right), \tag{11}$$

где $f\left(x\right)$ – некоторая функция, не обращающаяся в нуль на множестве M. Принимая это во внимание, представим множитель $A\left(\vec{R},t,\vec{V}\right)$ как $A\left(\vec{R},t,\vec{V}\right)=f\left(\vec{R},t\right)\Big/f\left(\vec{R}-\vec{V}t,t\right)$ при условии, что $\left(f\left(\vec{R},t\right)\Big/f\left(\vec{R}-\vec{V}t,t\right)\right)\Big|_{t\to 0}=\exp\left(\lambda\vec{R}\vec{V}\right)$. Этому условию легко удовлетворить, положив $f\left(\vec{R},t\right)=\exp\left(\lambda\vec{R}^2\big/\left(2t\right)\right)$. Это приводит к следующему решению уравнения (10):

$$A\left(\vec{R},t,\vec{V}\right)=\exp\left(\lambda\left(\vec{R}\vec{V}-\vec{V}^2t/2\right)\right). \tag{12}$$

Тогда, используя закон композиции (4), формулу (9), и выражение (11), можно легко показать, что для любых $\mathfrak{g}_1=\left\{\tau_1,\vec{a}_1,\vec{V}_1,\vec{c}_1\right\}$ и $\mathfrak{g}_2=\left\{\tau_2,\vec{a}_2,\vec{V}_2,\vec{c}_2\right\}$ выполняется равенство

$$\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\right)=\exp\left(-\lambda\left(\Re\left(\vec{c}_1\right)\vec{a}_2\vec{V}_1+\vec{V}_1^2\tau_2/2\right)\right)\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}_1\right)\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}_2\right). \tag{13}$$

Таким образом, операторы $\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)$ с чисто мнимым параметром λ образуют известное физически значимое проективное представление группы Галилея [13].

Из выражения (13) можно получить обратный оператор представления (9)

$$\mathfrak{T}^{-1}\left(\mathfrak{g}\right)=\exp\left(\lambda\left(\vec{a}\vec{V}-\vec{V}^2\tau/2\right)\right)\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}^{-1}\right). \tag{14}$$

Тогда, используя (9), (12) и (14), можно показать, что преобразования подобия инфинитезимальных операторов (генераторов) временных и пространственных трансляций $d_t=-\partial/\partial t$ и $\vec{D}=-\partial/\partial\vec{R}$, осуществляемые опреатором $\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)$, задаются формулами

$$\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)d_t\mathfrak{T}^{-1}\left(\mathfrak{g}\right)=\left(d_t+\vec{V}\vec{D}+\lambda\vec{V}^2/2\right), \tag{15}$$

$$\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)\vec{D}\mathfrak{T}^{-1}\left(\mathfrak{g}\right)=\Re\left(-\vec{c}\right)\left(\vec{D}+\lambda\vec{V}\right). \tag{16}$$

---

[1] Это доказывает следующая цепочка очевидных равенств:
$A\left(x,g_1g_2\right)=f\left(x\right)\Big/f\left(\left(g_1g_2\right)^{-1}x\right)=\left(f\left(x\right)\Big/f\left(\left(g_1\right)^{-1}x\right)\right)\left(f\left(\left(g_1\right)^{-1}x\right)\Big/f\left(g_2^{-1}\left(g_1^{-1}x\right)\right)\right)=A\left(x,g_1\right)A\left(g_1^{-1}x,g_2\right)$.

Теперь очевидно, что $\vec{D}^2$ будет преобразован следующим образом :

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{g})\vec{D}^2\mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{g}) = \left(\vec{D}^2 + 2\lambda\vec{V}\vec{D} + \lambda^2\vec{V}^2\right). \tag{17}$$

Следовательно, в соответствии (15) и (17) оператор

$$K = d_t - \vec{D}^2/2\lambda - K_{rel}\,, \tag{18}$$

где $K_{rel} = F(\vec{r},\nabla)$– некоторый $SO(3)$ -инвариантый оператор, зависящий от $\vec{r}$ and $\nabla \equiv \partial/\partial\vec{r}$, является инвариантным оператором группы Галилея $\mathfrak{G}$.

Потребуем теперь унитарность представления (9) относительно обычного скалярного произведения

$$\left(\Psi_1,\Psi_2\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^3_E\times\mathbb{R}^3_{rel}} \Psi_1^*\left(\vec{R},\vec{r},t\right)\Psi_2\left(\vec{R},\vec{r},t\right)d^3R\,d^3r\,, \tag{19}$$

где d^3R и d^3r являются евклидовыми мерами в пространствах $\mathbb{R}^3_E$ и $\mathbb{R}^3_{rel}$ соответсвенно.

Поскольку группа Галилея содержит подгруппу временных трансляций, унитарность представления (9) относительно скалярного произведения (19) может быть обеспечена в подпространстве $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{L}$ функций $\Psi = \Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)$, для которых это скалярное произведение не зависит от времени. Легко показать, что при условии $\lambda^* = -\lambda$ и антиэрмитовости оператора K_{rel} относительно скалярного произведения (19) это требование выполняется для функций, удовлетворяющих галилеево-инвариантному уравнению

$$K\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right) = 0. \tag{20}$$

4. Генераторы унитарного представления группы транзитивности пространства $\mathbb{R}^3_{rel}$

Чтобы определить вид оператора K_{rel}, входящего в (18), мы предположим, что в подпространстве $\mathfrak{S}$ реализовано также унитарное относительно скалярного произведения (19) представление некоторой транзитивной группы $G \supset SO(3)$ пространства $\mathbb{R}^3_{rel}$:

$$\mathrm{T}(g)\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right) = \mathrm{A}(\vec{r},g)\Psi\left(\vec{R},g^{-1}\vec{r},t\right). \tag{21}$$

Здесь $\mathrm{A}(\vec{r},g)$– операторный множитель, удовлетворяющий уравнению (2) при условии $\mathrm{A}(\vec{r},g)=1$, если $g\in SO(3)\subset G$. Последнее условие согласует представление (21) с определением (9), согласно которому сужение представления $\mathfrak{T}\left(\left\{\tau,\vec{a},\vec{V},\vec{c}\right\}\right)$ она подгруппу вращений квазирегулярно. Этим требованиям можно удовлетворить, если взять в соответствии (11) $\mathrm{A}\left(\vec{r},g\right)=f\left(\vec{r}\right)\Big/f\left(g^{-1}\vec{r}\right)$, где $f\left(\vec{r}\right)=f\left(\left|\vec{r}\right|\right)$ – некоторая $SO\left(3\right)$ – инвариантная функция, не обращающаяся в нуль в $\mathbb{R}^3_{rel}$. Явный вид этой функции будет установлен, используя требование антиэрмитовости генераторов

$$\tau_\nu\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)=\partial\left(\mathrm{T}\left(g_\nu\left(\chi\right)\right)\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)\right)\Big/\partial\chi\Big|_{\chi=0} \qquad (22)$$

представления (21) относительно скалярного произведения (19). Здесь $g_\nu\left(\chi\right)$ – элемент однопараметрической подгруппы $G_\nu\subset G$ $\left(1\le\nu\le6\right)$, χ – трансформационный параметр, причем $g_\nu\left(0\right)$ – единичный элемент группы G. Для определенности мы будем нумеровать значениями $\nu=k$ $\left(k=1,2,3\right)$ генераторы трансляций и значениями $\nu=\left(k+3\right)$ – генераторы вращений, представляемые в дальнейшем компонентами тензора $\tau_{ij}=\varepsilon_{ijk}\tau_{k+3}$, $i,j=1,2,3.$.

Принимая во внимание, что $\mathrm{A}\left(\vec{r},g\right)=f\left(\vec{r}\right)\Big/f\left(g^{-1}\vec{r}\right)$, подстановка (21) в (22) дает

$$\tau_\nu=f\left(\vec{r}\right)\tilde{\tau}_\nu f^{-1}\left(\vec{r}\right), \qquad (23)$$

где

$$\tilde{\tau}_\nu=\left(\partial\left(g_\nu\left(-\chi\right)\vec{r}\right)\Big/\partial\chi\right)\nabla\Big|_{\chi=0} \qquad (24)$$

является соответствующим генератором квазирегулярного представления группы G.

Поскольку предсталение (21) на подгруппе вращений является квазирегулярным, его генераторы имеют известную форму $\tau_{ij}=\tilde{\tau}_{ij}=-\left(r_i\nabla_j-r_j\nabla_i\right)$, где $\nabla_i=\partial/\partial r_i$, с перестановочными соотношениями

$$\left[\tau_{ij},\tau_{kl}\right]=\delta_{il}\tau_{kj}+\delta_{jl}\tau_{ik}-\delta_{ik}\tau_{lj}-\delta_{jk}\tau_{il}.$$

Их коммутаторы с генераторами трансляций τ_k должны иметь следующий вид

$$\left[\tau_k,\tau_{ij}\right]=\delta_{kj}\tau_i-\delta_{ki}\tau_j. \qquad (25)$$

Явный вид однопараметрических преобразований трансляций пространства $\mathbb{R}^3_{rel}$ неизвестен, но соответствующие генераторы представления (21) могут быть построены следующим образом.

Принимая во внимание, что согласно (24) все генераторы квазирегулярного представления группы G являются однородными линейными формами операторов ∇_j, наиболее общий вид соответствующих генераторов трансляций, коммутаторы которых с генераторами вращений $\tau_{ij}=\tilde{\tau}_{ij}$ имеют вид (25), может быть записан как

$$\tilde{\tau}_k = -\left(a(r)\delta_{kj} + b(r)r_k r_j\right)\nabla_j, \qquad (26)$$

где $a(r)$ и $b(r)$ некоторые действительные скалярные функции $r = |\vec{r}|$.

Используя (26) и (23), а также ротационную инвариантность функции $f(\vec{r})$, можно легко показать, что коммутаторы генераторов трансляций задаются формулой

$$\left[\tau_j, \tau_k\right] = \left(ab - \left(a'/r\right)\left(a + r^2 b\right)\right)\tau_{jk}. \qquad (27)$$

Здесь и далее в этом разделе статьи штрих над буквой обозначает производную по переменной r.

Так как по построению τ_j and τ_{jk} являются генераторами представления алгебры Ли группы транзитивности пространства $\mathbb{R}^3_{rel}$, то должно выполняться следующее уравнение:

$$ab - \left(a'/r\right)\left(a + r^2 b\right) = C, \qquad (28)$$

где, учитывая (23) и (26), C – действительная константа размерности обратного квадрата длины. Функции $a(r)$ и $b(r)$, удовлетворяющих этому уравнению, приводят к алгебрам Ли групп, изоморфных $E(3), SO(4)$ и $SO(3,1)$ для $C = 0$, $C > 0$ и $C < 0$ соответственно. Связь этой структурной константы с физическими величинами, имеющими размерность длины, будет установлен позже[1].

Введем теперь, полагая, что всюду в $\mathbb{R}^3_{rel}$ сумма $a(r) + r^2 b(r)$ не обращается внуль, новую переменную $\sigma = \sigma(r)$ размерности длины, производная которой по переменной r такова

$$\sigma' = \left(a + r^2 b\right)^{-1}. \qquad (29)$$

Тогда (28) может быть представлено как уравнение для функции $y = a\big/\left(r\sqrt{C}\right)$:

$$\frac{dy}{d\sigma} = -\sqrt{C}\left(1 + y^2\right).$$

Поскольку, согласно (29), переменная σ определена сточностью до аддитивной константы результат интегрирования этого уравнения без потери общности может быть

---

[1] **Подход, применяемый здесь к реализации пространства $\mathbb{R}^3_{rel}$ как однородного пространства группы не требует интерпретации константы C в духе неевклидовых геометрий как кривизны пространства или как метрической постоянной геометрии [14].**

записан в виде $\sigma = \left(1/\sqrt{C}\right) arcctg\, y$, и тогда

$$a(r) = \sqrt{C}\, r\, ctg \sqrt{C} \sigma(r). \qquad (30)$$

Подстановка (26) в (23) после простых преобразований дает

$$\tau_k = -\left(\left[a, \nabla_k\right]_+ + \left[b r_k r_j, \nabla_j\right]_+\right)\Big/2 + \left(\left(f'/rf\right)\left(a + r^2 b\right) + \left(a + r^2 b\right)' \Big/ 2r + b\right) r_k, \qquad (31)$$

где $[\ ,\ ]_+$ – знак антикоммутатора. Но так как представление (21) предполагается унитарным отнсительно скалярного произведения (19), операторы τ_k, определенные выражением (31) должны быть антиэрмитовыми отнсительно этого произведения . Тогда предположение, что функция $f(r)$ действительна , приводит к уравнению

$$\left(f'/rf\right)\left(a + r^2 b\right) + \left(a + r^2 b\right)' \Big/ 2r + b = 0, \qquad (32)$$

и генераторы трансляций принимают вид

$$\tau_k = -\left(\left[a, \nabla_k\right]_+ + \left[b r_k r_j, \nabla_j\right]_+\right)\Big/2. \qquad (33)$$

Используя теперь (29) и (30) и учитывая, что согласно (11) функция $f(r)$ определена с точностью до мультипликативной константы, можно легко показать, что решением уравнения (32) является функция

$$f(r) = \left(\sin\sqrt{C}\sigma(r)\Big/\sqrt{C}r\right)\sqrt{\sigma'(r)}. \qquad (34)$$

Поскольку функция $f(r)$ действительна, то выбор какой-либо монотонно возрастающей функции $\sigma(r)$ с размерностью длины[1] позволяет нам найти с помощью (30) и (29) явный вид генераторов (33), давая вместе с генераторами вращений $\tau_{ij} = -\left(r_i \nabla_j - r_j \nabla_i\right)$ конкретную реализацию алгебры Ли унитарного представления группы транзитивности G относительного пространства системы в декартовых координатах.

Простейшая реализация определяется выбором $\sigma(r) = r$ для *любого* значения $\operatorname{sgn} C$, и это, согласно определению (29), приводит к равенству

$$a(r) + r^2 b(r) = 1. \qquad (35)$$

---

[1]Если наделить пространство $\mathbb{R}^3_{rel}$ G– инвариантной метрикой, то функцию $\sigma(\vec{r})$ можно трактовать как длину радиус-вектора $\vec{r} \in \mathbb{R}^3_{rel}$ в соответствующем этой метрике смысле [15]. Но физически такая трактовка совершенно бесполезна так как для введения в пространстве $\mathbb{R}^3_{rel}$ G– инвариантной метрики нет никаких физических причин.

Функция $\sigma(\vec{r}) = r$ является единственной функцией, не содержащей константы C и имеющей для любой C значение, равное евклидову расстоянию между частицами. Более того при $C = 0$ группа транзитивности пространства $\mathbb{R}^3_{rel}$ просто совпадает с $E(3)$. Поэтому далее, чтобы сформулировать квантовую динамику системы мы будем использовать именно эту реализацию (хотя возможно развить описание, в котором сохранен произвол в выборе функции $\sigma(r)$ до самого конца [16]).

5. Динамические переменные и уравнение Шрёдингера

Как известно, инвариантным оператором группы G является

$$K_G = \tau_k \tau_k + C\tau_{jk}\tau_{jk}/2.$$

С использованием (30), (33) и (35) оператор K_G может быть представлен в виде

$$K_G = \nabla^2 + \left(C/\sin^2\sqrt{C}r - 1/r^2\right)\left(\vec{r}\times\nabla\right)^2 + C. \qquad (36)$$

Определим теперь оператор K_{rel} в выражении (18) как

$$K_{rel} = \left(K_G - C\right)/2\eta + i\Phi(r), \qquad (37)$$

где η – некоторый чисто мнимый параметр, причем $|\eta|$ имеет ту же размерность, что и $|\lambda|$ в (18), т.е. $\left[|\eta|\right] = \left[|\lambda|\right] = TL^{-2}$, и $\Phi(r)$ – некоторая действительная $SO(3)$ – инвариантная функция. Теперь, учитывая, что постоянная Планка имеет размерность $\left[\hbar\right] = ML^2T^{-1}$, положим $\lambda = im/\hbar$ и $\eta = i\mu/\hbar$, где m и μ – действительные параметры с размерностью массы. Тогда мы можем представить галилеево-инвариантное уравнение (20) как уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)}{\partial t} = \hat{H}\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right), \qquad (38)$$

где согласно (36) и (37)

$$\hat{H} = -i\hbar\left(\frac{\vec{D}^2}{2\lambda} + K_{rel}\right) = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2\mu} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{C}{\sin^2\sqrt{C}r} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\vec{r}\times\hat{\vec{p}}\right)^2 + U(r), \qquad (39)$$

Здесь $\hat{\vec{P}} = i\hbar\vec{D} = -i\hbar\,\partial/\partial\vec{R}$, $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$ и $U(r) = \hbar\Phi(r)$.

Далее, можно легко показать, используя (9), (14), (7), (8), (16) и (17), что для операторов $\hat{\vec{P}}$, $\hat{H}$, $\hat{\vec{x}}_1 = \hat{\vec{R}} - \alpha_2\hat{\vec{r}}$, $\hat{\vec{x}}_2 = \hat{\vec{R}} + \alpha_1\hat{\vec{r}}$, $\hat{\vec{p}}_1 = -\hat{\vec{p}} + \alpha_1\hat{\vec{P}} = -i\hbar\,\partial/\partial\vec{x}_1$ и $\hat{\vec{p}}_2 = \hat{\vec{p}} + \alpha_2\hat{\vec{P}} = -i\hbar\,\partial/\partial\vec{x}_2$, где операторы $\hat{\vec{R}}$ и $\hat{\vec{r}}$ определены обычными равенствами

$\hat{\vec{R}}\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)=\vec{R}\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)$ и $\hat{\vec{r}}\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)=\vec{r}\,\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)$, выполняются следующие пробразования подобия:

$$\hat{\vec{P}}'=\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)\hat{\vec{P}}\mathfrak{T}^{-1}\left(\mathfrak{g}\right)=\Re\left(-\vec{c}\right)\left(\hat{\vec{P}}-m\vec{V}\right), \qquad (40)$$

$$\hat{H}'=\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)\hat{H}\mathfrak{T}^{-1}\left(\mathfrak{g}\right)=\hat{H}-\vec{V}\hat{\vec{P}}+mV^2/2, \qquad (41)$$

$$\hat{\vec{x}}_k'=\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)\hat{\vec{x}}_k\mathfrak{T}^{-1}\left(\mathfrak{g}\right)=\Re\left(-\vec{c}\right)\left(\hat{\vec{x}}_k-\vec{V}\left(t-\tau\right)-\vec{a}\right), \qquad (42)$$

$$\hat{\vec{p}}_k'=\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)\hat{\vec{p}}_k\mathfrak{T}^{-1}\left(\mathfrak{g}\right)=\Re\left(-\vec{c}\right)\left(\hat{\vec{p}}_k-\alpha_k m\vec{V}\right), \quad \left(k=1,2\right). \qquad (43)$$

Из (40) – (43) очевидно следует, что при условии $\left(\Psi,\Psi\right)=1$ величины $\left\langle q\right\rangle=\left(\Psi,\hat{q}\Psi\right)$ и $\left\langle q'\right\rangle=\left(\Psi,\hat{q}'\Psi\right)=\left(\Psi,\mathfrak{T}\left(\mathfrak{g}\right)\hat{q}\mathfrak{T}^{-1}\left(\mathfrak{g}\right)\Psi\right)$ для каждого из введенных операторов связаны уравнениями

$$\left\langle\vec{x}_k'\right\rangle=\Re\left(-\vec{c}\right)\left(\left\langle\vec{x}_k\right\rangle-\vec{V}\left(t-\tau\right)-\vec{a}\right), \qquad (44)$$

$$\left\langle\vec{p}_k'\right\rangle=\Re\left(-\vec{c}\right)\left(\left\langle\vec{p}_k\right\rangle-\alpha_k m\vec{V}\right), \qquad (45)$$

$$\left\langle\vec{P}'\right\rangle=\Re\left(-\vec{c}\right)\left(\left\langle\vec{P}\right\rangle-m\vec{V}\right), \qquad (46)$$

$$\left\langle H'\right\rangle=\left\langle H\right\rangle-\vec{V}\left\langle\vec{P}\right\rangle+mV^2/2\,. \qquad (47)$$

Здесь нужно отметить, что на любом концептуальном уровне (классическом или квантовом) динамические переменные, описывающие нерелятивистское движение частицы, операционально определены измерительными процедурами, выполненными с помощью макроскопических устройств, к которым можно применить преобразования (3)[1]. Поэтому соотношения между средними значениями результатов измерений, полученных с помощью устройств, связанных такими преобразованиями, должны иметь одинаковый вид и для классических динамических переменных, и для их квантовых аналогов.

Тогда из (44) – (47) следует, что величины $\left\langle\vec{x}_k\right\rangle,\left\langle\vec{p}_k\right\rangle,\left\langle\vec{P}\right\rangle,\left\langle H\right\rangle$ нужно интерпретировать как средние значения результатов измерения динамических переменных положения и импульса частицы с массой $m_k=\alpha_k m$, полного импульса и механической энергии материальной системы с массой $m=-i\hbar\lambda$ в квантовом состоянии $\Psi\left(\vec{R},\vec{r},t\right)$, поставив им в соответствие эрмитовы операторы $\hat{\vec{x}}_k,\hat{\vec{p}}_k,\hat{\vec{P}},\hat{H}$. Тогда операторы

[1] Т.е. повороты и сдвиги приборов в пространстве, придание им поступательного движения с постоянной скоростью и сдвиг начала отсчета времени при установке часов.

$\hat{\vec{x}}_k, \hat{\vec{p}}_k, \hat{\vec{P}}, \hat{H}$ и $\hat{\vec{x}}'_k, \hat{\vec{p}}'_k, \hat{\vec{P}}', \hat{H}'$ будут представлять измерительные процедуры, выполненные посредством приборов, связанных преобразованиями (3).

Ясно, что оператор

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{R}} \times \hat{\vec{P}} + \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = \hat{\vec{x}}_1 \times \hat{\vec{p}}_1 + \hat{\vec{x}}_2 \times \hat{\vec{p}}_2 = i\hbar\vec{\tau},$$

где $\vec{\tau} = -\left(\vec{R} \times \partial/\partial\vec{R} + \vec{r} \times \partial/\partial\vec{r}\right)$ – генератор вращений в представлении (9), соответствует динамической переменной полного углового момента системы.

Таким образом, все квантовомеханические динамические переменные и уравнение движения системы могут быть определены на основе законов преобразования (15 – 17) и (40 – 43), обусловленных унитарным представлением группы Галилея (9).

Если теперь выбрать в (39) массовый параметр μ в виде $\mu = \alpha_1\alpha_2 m$, то $\hat{\vec{P}}^2 \big/ \left(2m\right) + \hat{\vec{p}}^2 \big/ \left(2\mu\right) = \hat{\vec{p}}_1^2 \big/ \left(2\alpha_1 m\right) + \hat{\vec{p}}_2^2 \big/ \left(2\alpha_2 m\right)$, и при $C \to 0$ этот оператор совпадет с уравнением Шрёдингера для системы двух частиц с массами $m_1 = \alpha_1 m$ и $m_2 = \alpha_2 m$ и потенциалом взаимодействия $U\left(r\right)$. Таким образом, мы можем рассматривать уравнение (38) как уравнение Шрёдингера для 2-частичной системы с взаимодействием, представленном в операторе (39) слагаемым

$$W\left(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}; C\right) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{C}{\sin^2\sqrt{C}r} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}\right)^2 + U\left(r\right). \qquad (48)$$

Стационарные состояния системы при любом значении константы C даются решениями уравнения (38) вида $\Psi\left(\vec{R}, \vec{r}, t\right)\Big|_{\vec{P}=\vec{0}} = \exp\left(-iEt/\hbar\right)\psi\left(\vec{r}\right)$, где E – энергия системы, а функция $\psi\left(\vec{r}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{C}{\sin^2\sqrt{C}r} - \frac{1}{r^2}\right)\hat{\vec{l}}^{\,2} + U\left(r\right)\right)\psi\left(\vec{r}\right) = E\psi\left(\vec{r}\right), \qquad (49)$$

где $\hat{\vec{l}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ является собственным угловым моментом системы.

В дальнейшем мы сохраним для функции $U\left(r\right)$ термин *потенциал* при любом значении константы C [1]. Знак константы C, отражая специфику неабелевых трансляций относительного пространства системы, является важнейшей характеристикой взаимодействия, описываемого функцией (48).

---

[1] **Подчеркнём условность этого термина, т.к. даже в классическом аналоге построенной квантовой динамики функция $U\left(r\right)$ при $C \neq 0$ не имеет смысла потенциальной энергии взаимодействия [16].**

Действительно, в случае $C<0$ пространство $\mathbb{R}^3_{rel}$ совпадает со всем бесконечным пространством $\mathbb{R}^3$, и так как $\hat{\vec{l}}^2$ не зависит от радиальной переменной r первый член в (48), определенный для всех значений r, исчезает при $r\to 0$ и $r\to\infty$. В этом случае возможны и финитное движение частиц системы и их инфинитное движение, свободное на больших относительных расстояниях между ними. Мы примем, что также как в случае $C=0$, последнее возможно, если для заданной функции $U(r)$ при $C<0$ существует решение уравнения (49), регулярное в начале координат и с асимптотическим поведением на относительных расстояниях $r>>1/\sqrt{|C|}$ следующего вида:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r})\simeq\frac{i}{2kr}\sum_{lm}(2l+1)\left((-1)^l e^{-ikr}-S_l(k)e^{ikr}\right)P_l\left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{k^2}\right),\qquad(50)$$

где $k=\sqrt{2\mu E}/\hbar$, $\vec{k}'=k\vec{r}/r$ и $\hbar\vec{k}$ – относительный импульс частиц.

Тогда аналитические свойства коэффициентов $S_l(k)$ в комплексной плоскости переменной k дадут информацию и о состояниях рессеяния, и о связанных состояниях системы .

При $C>0$ первый член в (48) орпеделен в $\mathbb{R}^3$ почти всюду, исключая сферы срадиусами $r_n=n\rho,\ n=1,2,3,\ldots,\ \rho=\pi/\sqrt{C}$. В этом случае физически значимые решения уравнения (50) должны удовлетворять граничным условиям $\psi(\vec{r})\big|_{r=r_n}=0$, приводящим к обращению в нуль на сферах $r=r_n$ радиальной составляющей вектора плотности потока вероятности $\vec{j}=\left(\left(Cr^2/\sin^2\sqrt{C}r\right)(1-P_{\vec{r}})+P_{\vec{r}}\right)\vec{j}_0$, где $P_{\vec{r}}=\vec{r}\cdot\vec{r}/r^2$ – проектор на радиальное направление ($\vec{r}\cdot\vec{r}$ – the dyad), а $\vec{j}_0=(\hbar/2\mu i)\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)$. Это дает возможность ограничить относительное движение частиц любой областью транзитивности группы, изоморфной $SO(4)$, определенной неравенствами $0\le r<\rho$ или $n\rho<r<(n+1)\rho$, $n=1,2,3\ldots$. В частности, если выбрать в качестве относительного пространства $\mathbb{R}^3_{rel}$ область $0\le r<\rho$, решение уравнения (49) должно быть конечным при $r=0$ и обращаться в нуль при всех значениях $r\ge\rho$:

$$\psi(\vec{r})\big|_{r=0}<\infty,\quad \psi(\vec{r})\big|_{r\ge\rho}=0.\qquad(51)$$

Это означает, что в этом случае возможно только финитное движение частиц системы в окрестности точки $\vec{R}$ на относительных расстояниях $\left|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\right|$, не превышающих ρ, т.е. их запирание (конфайнмент) в области физического пространства $\left|\vec{x} - \vec{R}\right| < \max\left(\alpha_i \rho\right),\ i = 1,2.$

Таким образом, в случае $C < 0$ константа C определяет радиус взаимодействия частиц $\rho = 1\big/\sqrt{|C|}$, а в случае $C > 0$ константа C определяет верхнюю границу возможных относительных расстояний между частицами $\rho = \pi\big/\sqrt{C}$ в обычном евклидовом смысле.

Решение уравнения (49) хорошо известной процедурой сводится к решению радиального уравнения

$$\frac{d^2 f_l\left(k,r\right)}{dr^2} - \left(\frac{Cl\left(l+1\right)}{\sin^2\sqrt{C}r} + \frac{2\mu}{\hbar^2}U\left(r\right) - k^2\right) f_l\left(k,r\right) = 0, \tag{52}$$

где $k^2 = 2\mu E\big/\hbar^2$.

Таким образом, выбор группы транзитивности относительного пространства системы и её реализация в соответствии с равенством (35) приводит в радиальном уравнении Шрёдингера только к модификации центробежного потенциала.

6. Динамическая симметрия оператора $\hat{H}$ и выбор функции $U\left(r\right)$

Поскольку требование галилеевой инвариантности ограничивает произвол в выборе функции $U\left(r\right)$ только условием ее ротационной инвариантности, дальнейшая конкретизация вида этой функции может быть основано только на динамической симметрии оператора (39).

Если $U\left(r\right) = 0$, то оператор $\hat{H}$, определенный формулой (39), очевидно коммутирует с эрмитовыми квадратичными комбинациями $\left[\tau_{kj}, \tau_j\right]_+\big/2$ и $\left[\tau_k, \tau_l\right]_+\big/2$ генераторов представления (21). Теперь, переходя к оператору $\hat{H}$ с $U\left(r\right) \neq 0$ и имея в виду условие динамической симметрии, мы потребуем его коммутирование или с операторами $A_k = -\left[\tau_{kj}, \tau_j\right]_+\big/2 + \varphi\left(r\right) r_k$ или с операторами $A_{kl} = -\left[\tau_k, \tau_l\right]_+\big/2 + \chi\left(r\right) r_k r_l$, где $\varphi\left(r\right)$ и $\chi\left(r\right)$ – некоторыеге действительные $SO\left(3\right)$ – инвариантные функции .

Требование $\left[A_k, \hat{H}_{rel}\right] = 0$ приводит к системе уравнений для функций $\varphi\left(r\right)$ и $U\left(r\right)$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dU}{dr}+\frac{\hbar^2}{\mu}\frac{Cr}{\sin^2\sqrt{C}r}\varphi=0\\&\frac{dU}{dr}-\frac{\hbar^2}{\mu}\left(\frac{d\varphi}{dr}-\left(\frac{Cr}{\sin^2\sqrt{C}r}-\frac{1}{r}\right)\varphi\right)=0\end{aligned}\right\}.$$

Их интегрирование дает $\varphi(r)=\alpha/r$ и

$$U(r)=\left(\alpha\hbar^2\sqrt{C}/\mu\right)ctg\sqrt{C}r+\beta\,, \tag{53}$$

где α и β – некоторы константы с размерностями обратной длины и энергии, соответственно. Видно, что при $C\to 0$ функция $U(r)$ совпадает с кулоновским потенциалом, а в случае $C<0$ для $\beta=-\alpha\hbar^2\sqrt{|C|}\big/\mu=-\alpha\hbar^2/\mu\rho$, где $\rho=\sqrt{1/|C|}$, принимает вид

$$U(r)=\frac{2\alpha\hbar^2}{\mu\rho}\frac{e^{-2r/\rho}}{1-e^{-2r/\rho}}\,. \tag{54}$$

В случае опрераторов A_{kl} то же самое требование приводит к системе уравнений для функций $\chi(r)$ и $U(r)$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dU}{dr}-\frac{\hbar^2}{\mu}r\left(\chi+\frac{r}{2}\frac{d\chi}{dr}\right)=0\\&\frac{dU}{dr}-\frac{\hbar^2\sqrt{C}}{\mu}\frac{r^2\chi}{\sin\sqrt{C}r\cos\sqrt{C}r}=0\end{aligned}\right\},$$

интегрирование которых дает $\chi(r)=\gamma tg^2\sqrt{C}r/Cr^2$ и

$$U(r)=\left(\gamma\hbar^2/2\mu C\right)tg^2\sqrt{C}r+\delta\,, \tag{55}$$

где γ и δ – некоторые действительные константы с размерностями обратной длины в четвертой степени и энергии, соответственно. Если $C\to 0$, функция (55) очевидно с потенциалом изотропного осциллятора. Выбирая $\delta=\gamma\hbar^2/2\mu C$, получаем

$$U(r)=\frac{\gamma\hbar^2}{2\mu C}\frac{1}{\cos^2\sqrt{C}r}\,. \tag{56}$$

Из (49) очевидно следует, что для s-состояний ψ-функции являются решениями обычного уравнения Шрёдингера с потенциалом $U(\vec{r})$ для любых значений константы C. В частности, функция (54) совпадает с потенциалом Хюльтена, а функция (56) – с одним из двух типов потенциала Пёшля-Теллера (в зависимости от знака константы C). Поэтому далее мы будем использовать те же названия для потенциалов (54) и (56). В то же самое время при $C>0$ и $\beta=0$ функция (53), впервые использованная в [2] для описания атома водорода в пространстве постоянной положительной кривизны, может быть названа потенциалом Шрёдингера[1].

Можно показать, что алгебраические свойства наборов операторов $\left\{A_k,\tau_{mn}\right\}$ и $\left\{A_{kl},\tau_{mn}\right\}$ выражаются следующими коммутационными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\left[A_k,A_l\right]&=\left(\left(2\mu/\hbar^2\right)\left(\hat{H}_{rel}-\beta\right)+C\tau_{mn}\tau_{mn}\right)\tau_{kl},\\ \left[A_k,\tau_{lm}\right]&=\left(\delta_{km}A_l-\delta_{kl}A_m\right).\end{aligned}\right\}, \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[A_{kl},A_{mn}\right]=&-\left(C/2\right)\left(\left[A_{km},\tau_{ln}\right]_+ +\left[A_{ln},\tau_{km}\right]_+ +\left[A_{kn},\tau_{lm}\right]_+ +\left[A_{lm},\tau_{kn}\right]_+\right)+\\ &+\left(C^2/4-\gamma\right)\left(\delta_{km}\tau_{ln}+\delta_{ln}\tau_{km}+\delta_{kn}\tau_{lm}+\delta_{lm}\tau_{kn}\right),\\ \left[A_{kl},\tau_{mn}\right]=&\,\delta_{kn}A_{ml}+\delta_{ln}A_{km}-\delta_{km}A_{nl}-\delta_{lm}A_{kn}.\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где $\hat{H}_{rel}=\hat{H}-\hat{\vec{P}}^2\big/\left(2m\right)$. Конечно, в обоих случаях

$$\left[\tau_{kl},\tau_{mn}\right]=\delta_{kn}\tau_{ml}+\delta_{ln}\tau_{km}-\delta_{km}\tau_{nl}-\delta_{lm}\tau_{kn}. \tag{59}$$

Так же как в геометрической трактовке однородных пространств групп, изоморфных $SO(3,1)$, $E(3)$ и $SO(4)$, три значения функции $\operatorname{sgn}C$ определяют различные типы геометрии (Лобачевского, Евклида и Римана), соотношения (57) – (59) могут рассматриваться как алгебраические структуры, определяющие различные типы динамической симметрии уравнения (49) в соответствии со значениями функции $\operatorname{sgn}C$[2].

7. Состояния рассеяния и связанные состояния в случае $C<0$

Обсудим теперь решения уравнения (49) с потенциалами (54) и (56), удовлетворяющие на относительных расстояниях $r>>\rho=1\big/\sqrt{|C|}$ асимптотическому требованию (50) при условии, что ось Z выбрана в направлении вектора $\vec{k}$.

С этой целью мы используем метод функций Йоста, предлагающий наиболее простой способ нахождения парциальных амплитуд рассеяния

$$S_l\left(k\right)=\left(-1\right)^l f_l\left(k\right)\big/f_l\left(-k\right), \tag{60}$$

---

[1] В нашем подходе к построению квантовой динамики нет никакого смысла трактовать при $C>0$ функцию (53) как кулоновский потенциал в пространстве постоянной положительной кривизны.

[2] Эти соотношения можно использовать для определения энергетических уровней и соответствующего набора собственных функций в обсуждаемых задачах [4-7].

где функции Йоста $f_l(k)$ определены формулой

$$f_l(k) = \lim_{r\to 0}(2l+1)r^l f_l(k,r), \tag{61}$$

а функции $f_l(k,r)$ являются решениями радиального уравнения (52) с $C = -1/\rho^2$:

$$\frac{d^2 f_l(k,r)}{dr^2} - \left(\frac{l(l+1)}{\rho^2 \operatorname{sh}^2(r/\rho)} + \frac{2\mu}{\hbar^2}U(r) - k^2\right) f_l(k,r) = 0 \tag{62}$$

удовлетворяющие асимптотическому условию

$$\lim_{r\to\infty} e^{ikr} f_l(k,r) = 1\,. \tag{63}$$

7.1. Потенциал Хюльтена

Рассмотрим уравнение (62) с потенциалом (54). Вводя новую переменную $z = e^{-2r/\rho}$ и подставляя $f_l(k,r) = \operatorname{sh}^\nu(r/\rho) F_\nu(z)$ в (62), мы получаем для $F_\nu(z)$ уравнение, родственное гипергеометрическому уравнению [17]:

$$z^2(z-1)F_\nu'' + \left(\nu - 1 + (\nu+1)z\right)zF_\nu' + \left[\left(\frac{\rho^2 k^2 + \nu^2}{4} + \tilde{\alpha}\right)z - \frac{\rho^2 k^2 + \nu^2}{4}\right]F_\nu = 0, \tag{64}$$

где штрихи обозначают производные по переменной z, $\tilde{\alpha} = \alpha\rho$ и параметр ν принимает значения $l+1$ или $-l$. Для нашей цели решение уравнения (64) удобно взять в виде $F_\nu(z) = c_\nu z^{a_2}\,{}_2F_1(a_1 + a_2, b_1 + a_2; a_2 - b_2 + 1; z)$ (см. [17]), где c_ν – некоторая константа и

$$a_1 = \frac{\nu + i\rho\sqrt{k^2 + 4\tilde{\alpha}/\rho^2}}{2},\; b_1 = \frac{\nu - i\rho\sqrt{k^2 + 4\tilde{\alpha}/\rho^2}}{2},\; a_2 = \frac{\nu + i\rho k}{2},\; b_2 = \frac{\nu - i\rho k}{2}\,.$$

Функция $F_\nu(z)$ не имеет особенности в точке $r = 0$ для $\nu = -l$. Поэтому, полагая $\nu = -l$ и выбирая c_ν так чтобы выполнялось асимптотическое условие (63) , мы приходим к решению радиального уравнения (62) с явно выделенной особенностью в точке $r = 0$:

$$f_l(k,r) = \left(\frac{1 - e^{-2r/\rho}}{2}\right)^{-l} e^{-ikr}\,{}_2F_1\left(-l + \frac{i\rho}{2}(k - \varkappa), -l + \frac{i\rho}{2}(k + \varkappa); 1 + i\rho k; e^{-2r/\rho}\right), \tag{65}$$

где

$$\varkappa = \sqrt{k^2 + 4\tilde{\alpha}/\rho^2}\,. \tag{66}$$

В таком виде функция $f_l(k,r)$ наиболее удобна для вычисления функция Йоста $f_l(k)$. Используя (61) и (60), находим

$$f_l(k) = \frac{\rho^l(2l+1)}{2^l} \frac{\Gamma(1+i\rho k)}{\Gamma\left(1+l+\frac{i\rho}{2}(k-\varkappa)\right)\Gamma\left(1+l+\frac{i\rho}{2}(k+\varkappa)\right)}, \tag{67}$$

$$S_l(k) = (-1)^l \frac{\Gamma(1+i\rho k)\Gamma\left(1+l-\frac{i\rho}{2}(k-\varkappa)\right)\Gamma\left(1+l-\frac{i\rho}{2}(k+\varkappa)\right)}{\Gamma(1-i\rho k)\Gamma\left(1+l+\frac{i\rho}{2}(k-\varkappa)\right)\Gamma\left(1+l+\frac{i\rho}{2}(k+\varkappa)\right)}. \tag{68}$$

Связанные состояния соответствуют нулям $S_l(k)$ на мнимой отрицательной полуоси в плоскости комплексной переменной k, т. е. в точках, удовлетворяющих уравнению[1]

$$1+l+i\rho(k-\varkappa)/2 = -n_r, \qquad n_r = 0,1,2,... \tag{69}$$

Тогда, вводя $n = n_r + l + 1$ и принимая во внимание (66), из (69) мы получаем $k = \sqrt{2mE}/\hbar = i(n^2+\tilde{\alpha})/n\rho$. Поэтому связанные состояния возможны, если $n^2+\tilde{\alpha}<0$, т.е. для $\tilde{\alpha} = \alpha\rho < 0$ и $|\alpha|\rho > 1$. Таким образом, число связанных состояний ограничено, а их энергетический спектр определяется формулой

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{n}{\rho}+\frac{\alpha}{n}\right)^2, \quad n = 1,2,...,\left[\sqrt{|\alpha|\rho}\right], \tag{70}$$

где символ $[\,x\,]$ означает целую часть числа x. Легко видеть, что при $\rho\to\infty$ число связанных состояний становится бесконечным, а энергетический спектр совпадает с кулоновским. Кроме того, из (68) следует, что $\lim\limits_{\rho\to\infty} S_l(k) = \Gamma(1+l+i(\alpha/k))/\Gamma(1+l-i(\alpha/k))$ в полном соответствии с известным выражением для парциальных амплитуд рассеяния в кулоновском поле. Однако, необходимо подчеркнуть, что в рамках представленной здесь динамики предельныый переход $\rho\to\infty$ является совершенно формальным и не диктуется какими-либо физическими соображениями. Он имеет только тестовое значение.

Используя (65), (66), и (67) с $k = i(n^2+\tilde{\alpha})/n\rho$, а также формулы преобразований гипергеометрических функций, всюду конечные радиальные функции связанных состояний могут быть представлены как

---

[1] Полюса функции $\Gamma(1-i\rho k)$ дают лишние нули, потому что они являются полюсами функций Йоста $f_l(-k)$.

$$f_l(n,r)=c_{nl}\left(1-e^{-\frac{2r}{\rho}}\right)^{l+1}e^{r\left(\frac{n}{\rho}+\frac{\alpha}{n}\right)}{}_2F_1\left(1+l-\frac{\alpha\rho}{n},1+l-n,1-n-\frac{\alpha\rho}{n};e^{-\frac{2r}{\rho}}\right),$$

где c_{nl} – нормировочный множитель, явный вид которого для данной работы несуществен.

7.2. Потенциал Пёшля-Теллера (первый тип)

Теперь мы рассмотрим уравнение (62) с потенциалом (56) при $C<0$. Вводя новую переменную $z=\mathrm{ch}^{-2}(r/\rho)$, где $\rho=1\big/\sqrt{|C|}$, и подставляя $f_l(k,r)=\mathrm{sh}^{\nu}(r/\rho)F_\nu(z)$ в (62), мы срова приходим к уравнению, родственному гипергеометрическому уравнению:

$$z^2(z-1)F_\nu''+\left(\nu-1+\frac{3}{2}z\right)zF_\nu'+\left[-\frac{\tilde{\gamma}^2}{4}z-\left(\frac{\rho^2k^2}{4}+\frac{\nu^2}{4}\right)\right]F_\nu=0\ , \qquad (71)$$

где $\tilde{\gamma}=\gamma\rho^4$, а параметр ν tпринимает значения $l+1$ от $-l$. Повторяя действия предыдущего раздела, как решение уравнения (62) в этом случае выбираем функцию

$$f_l(k,r)=\frac{\mathrm{th}^{-l}(r/\rho)}{\left(1+e^{-2r/\rho}\right)^{ik\rho}}e^{-ikr}{}_2F_1\left(\frac{ik\rho+\Omega_l^+}{2},\frac{ik\rho+\Omega_l^-}{2};1+ik\rho;\mathrm{ch}^{-2}\frac{r}{\rho}\right), \qquad (72)$$

$$\Omega_l^\pm=-l+\left(1\pm\sqrt{1+4\tilde{\gamma}}\right)\Big/2\ . \qquad (73)$$

Тогда, иьпользуя (72), (61) и (60) для парциальных амплитуд рассеяния получаем

$$S_l(k)=(-1)^l\frac{\Gamma(1+ik\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(2-ik\rho-\Omega_l^+\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(2-ik\rho-\Omega_l^-\right)\right)}{\Gamma(1-ik\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(2+ik\rho-\Omega_l^+\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(2+ik\rho-\Omega_l^-\right)\right)}. \qquad (74)$$

Существование связанных состояний, так же как в рассмотренном выше случае, зависит от значения константы взаимодействия $\gamma=\tilde{\gamma}/\rho^4$. Из выражения (74) следует, что нули парциальной амплитуды $S_l(k)$ находятся в точках

$$k=-\frac{i}{\rho}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4\tilde{\gamma}}-\left(2n_r+l+\frac{3}{2}\right)\right),\quad n_r=0,1,2,... \qquad (75)$$

Как следует из (75), если $\tilde{\gamma}<0$, то связанные состояния невозможны, а при условии $\tilde{\gamma}>2$ имеется конечное число связанных состояний с энергетическим спектром, задаваемым формулой

$$E_n=-\frac{\hbar^2}{2\mu\rho^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4\gamma\rho^4}-\left(n+\frac{3}{2}\right)\right)^2,\ n=2n_r+l=0,1,2,...,\left[\frac{\sqrt{1+4\gamma\rho^4}-3}{2}\right].$$

Также как в предыдущей задаче число связанных состояний увеличивается с ростом ρ, но предельный переход $\rho \to \infty$ здесь невозможен[1].

Регулярные радиальные функции сязанных состояний могут быть представлены в следующем виде:

$$f_l(n,r) = c_{nl}\, \mathrm{th}^{l+1}(r/\rho) \frac{e^{\left(n+2-\left(1+\sqrt{1+4\gamma\rho^4}\right)/2\right) r/\rho}}{\left(1+e^{-2r/\rho}\right)^{-\left(n+2-\left(1+\sqrt{1+4\gamma\rho^4}\right)/2\right)}} \Phi_{nl}(r),$$

где c_{nl} – нормировочный множитель и

$$\Phi_{nl}(r) = {}_2F_1\left(\frac{1+\sqrt{1+4\gamma\rho^4}}{2} + \frac{l-n-1}{2},\ \frac{l-n}{2};\ \frac{1+\sqrt{1+4\gamma\rho^4}}{2} - n - 1;\ \mathrm{ch}^{-2}\frac{r}{\rho}\right).$$

8. Системы запертых частиц

Рассмтрим уравнение (49) с потенциалами, заданными формулами (53) и (56), в случае $C > 0$ с граничными условиями $\psi(\vec{r})\big|_{r=0} < \infty$, $\psi(\vec{r})\big|_{r=\rho} = 0$.

8.1. Потенциал Шрёдингера

Сначала мы найдем энергетический спектр и ψ – функции соответствующих ему состояний в случае потенциала (53), полагая $\beta = 0$ и $\sqrt{C} = \pi/\rho$. В этом случае уравнение (49) может быть записано в следующем виде:

$$\nabla^2\psi - \left(\left(\frac{\pi^2}{\rho^2 \sin^2(\pi r/\rho)} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{l}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{2\pi\alpha}{\rho} ctg\frac{\pi r}{\rho} - k^2\right)\psi = 0, \qquad (76)$$

где $k^2 = 2\mu E/\hbar^2$. Подстановка $\psi(\vec{r}) = \left(\sin^{\nu}(\pi r/\rho)/r\right) F_\nu(z)\,\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$, где $z = e^{-2i\pi r/\rho}$, опять приводит к уранению, родственному гипергеометрическому

$$z^2(z-1)F_\nu'' + \left(\nu - 1 + (\nu+1)z\right) z F_\nu' + \left[\left(\frac{\nu^2 - \tilde{\rho}^2\varkappa^2}{4}\right)^* z - \left(\frac{\nu^2 - \tilde{\rho}^2\varkappa^2}{4}\right)\right] F_\nu = 0, \qquad (77)$$

где $\varkappa = \sqrt{k^2 - 4i\tilde{\alpha}/\tilde{\rho}^2}$, $\tilde{\rho} = \rho/\pi$, $\tilde{\alpha} = \alpha\rho/2\pi$, а параметр ν принимает значения $l+1$ от $-l$.

[1]Если в (55) вместо $\delta = \gamma\hbar^2/2\mu C = -\gamma\hbar^2\rho^2/2\mu$ взять $\delta = 0$, то спектр энергии будет задан формулой $E_n = -\left(\hbar^2/2\mu\rho^2\right)\left(1/4 - \sqrt{1+4\gamma\rho^4}\left(n+3/2\right) + \left(n+3/2\right)^2\right)$ и при $\rho \to \infty$ совпадёт, как и должно быть, с эквидистантным спектром изотропного осциллятора $E_n = \hbar\omega\left(n+3/2\right)$, где $\omega = \hbar\sqrt{\gamma}/\mu$.

Следуя пути использованному в предыдущих разделах, в качестве решения уравнения (77) удобно взять функцию

$$F_\nu = c_\nu z^{a_2} {}_2F_1\left(a_1+a_2, b_1+a_2; a_2-b_2+1; z\right) , \tag{78}$$

где $a_1 = \left(\nu + \tilde{\rho}\varkappa^*\right)/2$, $a_2 = \left(\nu + \tilde{\rho}\varkappa\right)/2$, $b_1 = \left(\nu - \tilde{\rho}\varkappa^*\right)/2$, $b_2 = \left(\nu - \tilde{\rho}\varkappa\right)/2$.

Требование сходимости гипергеометрического ряда во всем единичном круге, включая точку $z=1$ (т.е. $r=0$), принимает вид $\mathrm{Re}\left(a_1+a_2+b_1+b_2-1\right)=2\nu-1<0$ и очевидно не выполняется при $\nu = l+1$. Но при $\nu = l+1$ решения уравнения (77) обращаются в нуль в начале координат. Таким образом, оба граничных условия (51) могут быть удовлетворены одновременно, когда гипергеометрическая функция в (78) является полиномом, т.е. когда $a_1 + a_2 = l+1+\tilde{\rho}\,\mathrm{Re}\,\varkappa = -n_r$, $n_r = 0, 1, 2\ldots$. Это приводит к следующей формуле для энергетического спектра системы:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\pi^2 n^2}{\rho^2} - \frac{\alpha^2}{n^2}\right), \qquad n = n_r + l + 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{79}$$

Как видно из (79), $E_n \to \infty$ при неограниченном росте n. Это означает, что нет никакой конечной порции энергии, достаточной для разделения рассматриваемой системы на ее компоненты в полном согласии с установленным ранее фактом, что функция (48) описывает при $C>0$ взаимодействие частиц, обеспечивающих их конфайнмент в ограниченной области физического пространства.

Таким образом, требуемые решения уравнения (76) имеют следующий вид:

$$\psi_{nlm}\left(\vec{r}\right) = \begin{cases} \dfrac{c_{nl}}{r}\sin^{l+1}\left(\dfrac{\pi r}{\rho}\right)\Phi_{nl}\left(r\right)\mathrm{Y}_{lm}\left(\theta,\varphi\right), & 0 \le r \le \rho, \\ 0, & r \ge \rho, \end{cases}$$

где c_{nl} – нормировочный множитель , а

$$\Phi_{nl}\left(r\right) = e^{\frac{i\pi(n-l-1)r}{\rho}} e^{\frac{\alpha r}{n}} {}_2F_1\left(l+1-n, l+1+\frac{i\alpha\rho}{\pi n}; 1-n+\frac{i\alpha\rho}{\pi n}; e^{-\frac{2i\pi r}{\rho}}\right).$$

8.2. Потенциал Пёшля-Теллера (второй тип)

Теперь мы найдем решения уравнения (49) с потенциалом (56) при $\sqrt{C} = \pi/\rho$:

$$\nabla^2\psi - \left(\left(\frac{\pi^2}{\rho^2\sin^2\left(\pi r/\rho\right)} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{l}^{\,2}}{\hbar^2} + \frac{\gamma\rho^2}{\pi^2}\frac{1}{\cos^2\left(\pi r/\rho\right)} - k^2\right)\psi = 0 .$$

Снова с помощью подстановки $\psi(\vec{r})=\left(\sin^{\nu}(\pi r/\rho)/r\right)F_{\nu}(z)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$, где $z=\cos^2\pi r/\rho$, получим для $F_{\nu}(z)$ уравнение, родственное гипергеометрическому

$$z^2(z-1)F_{\nu}''+\left(-\frac{1}{2}+(\nu+1)z\right)zF_{\nu}'+\left[\left(\frac{\nu^2-\tilde{\rho}^2k^2}{4}\right)z+\frac{\tilde{\rho}^2\tilde{\gamma}^2}{4}\right]F_{\nu}=0\,,$$

где $\tilde{\rho}=\rho/\pi$, $\tilde{\gamma}=\gamma\tilde{\rho}$, а параметр ν принимает значения $l+1$ от $-l$.

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, найдем энергетический спектр и набор ψ – функций системы, описывающих конфайнмент ее частиц в этом случае:

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu\rho^2}\left(n+\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\gamma\rho^4}{\pi^4}}\right)^2,\quad n=2n_r+l=0,1,2...,\tag{80}$$

$$\psi_{nlm}(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{c_{nl}}{r}\sin^{l+1}\left(\dfrac{\pi r}{\rho}\right)\Phi_{nl}(r)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi), & 0\le r\le\rho,\\ 0, & r\ge\rho,\end{cases}$$

где c_{nl} – нормировочный множитель, а

$$\Phi_{nl}(r)=\cos^{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\lambda\rho^4}{\pi^4}}}(\pi r/\rho)\,{}_2F_1\left(\frac{n+l+3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\lambda\rho^4}{\pi^4}},\frac{l-n}{2};1+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\lambda\rho^4}{\pi^4}};\cos^2(\pi r/\rho)\right).$$

9. Заключительные замечания

Итак, если с самого начала использовать для формулировки квантовой динамики 2-частичной системы вместо одночастичных переменных $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ переменные $\vec{R}$ и $\vec{r}$, которые определены отображением $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\to(\vec{R},\vec{r})$, подчиненным трансформационному условию (5), мы получаем свободу в выборе группы транзитивности для относительного пространства этой системы. Тогда галилеево-инвариантное динамическое уравнение, которое допускает такую свободу, может быть представлено в следующем виде

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{R},\vec{r},t)}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial\vec{R}^2}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^2}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{C}{\sin^2\sqrt{C}r}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\vec{r}\times\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)^2+U(r)\right)\Psi(\vec{R},\vec{r},t).\tag{81}$$

Отметим, что при $C\neq0$ в соответствии с полученными выше результатами это уравнение имеет точные решения для задач с потенциалами Хюльтена и Пёшля-Теллера для всех значений квантового числа l в отличие от обычной теории ($C=0$), дающей точные решения уравнения Шрёдингера с теми же потенциалами только для s-состояний. Принимая также во внимание, что в этих задачах имеется только конечное число связанных состояний при $C<0$ и отсутствие состояний рассеяния при $C>0$, можно предположить, что в этих случаях уравнение (81) является более подходящим, чем при $C=0$ для описания связанных систем с межчастичными взаимодействиями посредством короткодействующих и запирающих сил, соответственно. В частности, полученные здесь результаты могут быть применены для построения моделей дейтрона и кваркония. Но для их более адекватного описания как двухфермионных систем необходимо сформулировать динамическое уравнение, используя подходящие спинорные представления групп $SO(3,1)$ и $SO(4)$, соответственно. Мы намереваемся обсудить эту задачу в следующей статье.

Возможное обобщение этого формализма для случая $N-$частичнй системы с $N>2$ может быть сделано по той же самой схеме переходом с самого начала к переменным $\{\vec{R},\vec{r}_j\}, 1\le j\le N-1$, с помощью отображения

$$\vec{R}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\vec{x}_i\,,\quad \vec{r}_j=\left(\alpha_{j+1}\left(\prod_{i=1}^{N}\alpha_i\right)^{-\frac{1}{N-1}}\mathrm{A}_j\mathrm{A}_{j+1}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{A}_j^{-1}\sum_{i=1}^{j}\alpha_i\vec{x}_i-\vec{x}_{j+1}\right), \tag{81}$$

где $\vec{x}_i$ – радиус-вектор *i*-ой частицы в физическом пространстве, $\alpha_i>0$ для всех i, $\mathrm{A}_j=\sum_{i=1}^{j}\alpha_i$, $1\le j\le N$, and $\mathrm{A}_N=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1$. Состояния системы описываются в линейном пространстве $\mathfrak{L}$ комплексно-значных функций $\Psi=\Psi(\vec{R},\vec{r},t)$ со скалярным произведением (19), где $\vec{r}=(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_{N-1})\in\mathbb{R}^{3N-3}_{rel}=\underbrace{\mathbb{R}^3\times\ldots\times\mathbb{R}^3}_{N-1}$ и $d^3r\equiv d^3r_1\ldots d^3r_{N-1}$, в котором реализовано унитарное представление группы Галилея с операторным множителем (9). Реализуя G как группу пребразований координат $\{r_J\}$, изоморфную любой из трех $(3N-2)(3N-3)/2-$ параметрических групп $E(3N-3)$, $SO(3N-2)$, $SO(3N-3,1)$, где $J=s+3(j-1)$ $(1\le J\le 3N-3)$ с j как номером вектора $\vec{r}_j$, и s как номером его декартовой проекции в пространстве $\mathbb{R}^3$ (i.e. $1\le j\le N-1$ and $s=1,2,3$), и используя далее соображения симметрии, уравнение Шрёдингера может быть записано в виде

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{R},\vec{r},t)}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial\vec{R}^2}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^{\,2}}+\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{C}{\sin^2\sqrt{C}r}-\frac{1}{r^2}\right)\left(q(q+1)+\frac{L^2}{\hbar^2}\right)+U(\vec{r})\right)\Psi(\vec{R},\vec{r},t),$$

где

$$r=\left(\sum_{J=1}^{3N-3}r_J^2\right)^{1/2},\quad \frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^{\,2}}=\sum_{J=1}^{3N-3}\frac{\partial^2}{\partial r_J^2},\quad L^2=\frac{1}{2}L_{KJ}L_{KJ},\quad L_{KJ}=-i\hbar\left(r_K\frac{\partial}{\partial r_J}-r_J\frac{\partial}{\partial r_K}\right),\quad q=\frac{3N-6}{2}\quad,\ \text{а}$$

$U(\vec{r})$ – некоторая скалярная функция $\vec{r}$, инвариантная по крайней мере относительно подгруппы $\underbrace{SO(3)\times\ldots\times SO(3)}_{N-1}\subset SO(3N-3)$, C – действительная константа размерности обратного квадрата длины, M и μ – действительные параметры размерности массы.

Если взаимодействие допускает асимптотическую свободу частиц на больших или малых относительных расстояниях, то коэффициенты α_k в (81) должны быть определены формулой $\alpha_k = m_k/M$, где m_k – масса k-ой частицы, $M=\sum_{k=1}^{N} m_k$ и $\mu=\left(M^{-1}\prod_{k=1}^{N} m_k\right)^{\frac{1}{N-1}}$ (в этом случае переменные $\{\vec{R},\vec{r}_j\}, 1\le j\le N-1$, совпадают с рационализованными координатами Якоби [18]).

Благодарность

Я выражаю мою благодарность В.В. Кудряшову за критическое прочтение рукописи.

Литература

[1] Schrödinger E. Proc. Roy. Irish. Acad. A **46,** 1940. – P.9

[2] Infeld L. and Schild A. Phys. Rev. **67,** 1945. – P.121

[3] Lakshmanan M. and Eswaran K. J. Phys. A **8,** 1975. – P. 1658

[4] Higgs P. W. J. Phys. A **12,** 1979. – P. 309

[5] Курочкин Ю.А. , Отчик В.С. Докл. АН БССР **23,** 1979. – С. 987

[6] Богуш А.А., Курочкин Ю.А. , Отчик В.С. Докл. АН БССР **24,** 1980. – С. 19

[7] Отчик В.С. , Редьков В.М. Минск, Ин-т физики АН БССР , Препринт N298, 1983

[8] Barut O.A., Inomata A. and Junker G.J. Phys. A **20,** 1987. – P. 6271

[9] Barut O.A., Inomata A. and Junker G.J. Phys. A **23,** 1990. – P. 1179

[10] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1968. – 588 С.

[11] Барут А.О., Рончка Р. Теория представлений групп и её приложения. М.: Мир, 1980, т.1. – 455 С.

[12] Фёдоров Ф.И. Группа Лоренца. М.: Наука, 1976. – 384 С.

[13] Voisin J. J. Math. Phys. **6,** 1965. – P.1519

[14] Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.-Л.: ОНТИ, НКТП СССР, 1936. – 365 С.

[15] Мурзов В.И., Кудряшов В.В., Томильчик Л.М. Минск, Ин-т физики, Препринт N466, 1987

[16] Мурзов В.И., Кудряшов В.В., Томильчик Л.М. Минск, Ин-т физики, Препринт N497, 1988

[17] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравненим. М.: Наука, 1976. – 576 С.

[18] Smith F.T. Phys. Rev. **120**, 1960. – P. 1058