

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники

УДК 004.032.6

Качинский  
Виктор Михайлович

Целочисленное быстрое преобразование Фурье

**АВТОРЕФЕРАТ**

на соискание степени магистра технических наук  
по специальности 1-40 80 01 «Элементы и устройства вычислительной  
техники и систем управления»

---

Научный руководитель  
Станкевич Андрей Владимирович  
кандидат технических наук, доцент

---

Минск 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Преобразование Фурье занимает важное место во многих сферах человеческой деятельности и является мощным инструментом, применяемым в различных научных областях. Например, его можно использовать как средство решения сложных уравнений, описывающих динамические процессы, возникающие под воздействием электрической, тепловой или световой энергии или для выделения регулярных составляющих сложных колебательных сигналов, что помогает правильно интерпретировать различные экспериментальные наблюдения. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из наиболее важных инструментов в цифровой обработке сигналов. ДПФ может вычислять частотный спектр сигнала и определить частотную характеристику системы по импульсной характеристике. ДПФ лежит в основе множества алгоритмов, применяющихся для обработки и сжатия изображений, аудио и видео данных, а также для шумоподавления.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) - это метод для вычисления ДПФ, который обеспечивает эффективное получение ДПФ, при уменьшении временных и аппаратных затрат в сотни раз по сравнению с обычным методом. Именно благодаря алгоритму БПФ, преобразование Фурье так широко распространено в современном мире и может использоваться для обработки сигналов в режиме реального времени.

Как правило, для аппаратной реализации алгоритма БПФ, коэффициенты преобразования представляются в формате с фиксированной запятой. Все коэффициенты и входные сигналы представляются в двоичном формате конечным числом бит, в зависимости от требуемой точности. Это позволяет упростить вычисления и сократить аппаратные затраты, но имеет следующий недостаток: нарушается обратимость преобразования. Каждое умножение вносит ошибку в вычисления из-за операции округления (ошибка квантования). Целочисленное БПФ является новым методом вычисления БПФ, который позволяет сохранять свойство обратимости преобразования, а также точность вычисления. Сферой применения алгоритма могут быть аппаратные платформы с низкой производительностью и имеющие низкое энергопотребление, но выполняющие задачи требующие вычисления ДПФ.

# **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

## **Цели и задачи исследования**

Целью данной работы является разработка эффективной реализации алгоритма вычисления быстрого преобразования Фурье (БПФ) с использованием целочисленной арифметики. Достижение поставленной цели связано с решением следующих задач:

- реализация комплексных умножений с помощью лестничных схем;
- исследование возможности сокращения количества выполняемых операций, необходимых для получения результата БПФ;
- реализовать алгоритм целочисленного БПФ на базе программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС) и исследовать характеристики полученной реализации.

Объект исследования – целочисленное быстрое преобразование Фурье;

Предмет исследования – алгоритм целочисленного БПФ, применение лестничных схем для реализации целочисленного БПФ, архитектурные решения реализации целочисленного БПФ.

## **Связь работы с приоритетными направлениями научных исследований**

Тема диссертации соответствует приоритетным направлениям научных исследований в Республике Беларусь на 2015 – 2020 годы, в соответствии с Указом Президента Республики Беларусь от 22 апреля 2015 г. №166 «О приоритетных направлениях научно-технической деятельности в Республике Беларусь на 2016 – 2020 годы» п.7.6: «Технологии развития информационного общества».

## **Личный вклад магистранта**

Результаты диссертационного исследования получены автором самостоятельно. Научный руководитель принимал участие в постановке целей

и задач исследования, их предварительном анализе, обсуждении промежуточных результатов.

## Апробация результатов диссертации

Основные положения и результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на 53-й научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов БГИУР, секция «Встраиваемые системы реального времени».

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В общей характеристике работы описаны цели и задачи исследования, связь работы с приоритетными направлениями научных исследований. Приведены сведения о личном вкладе магистранта, а также об апробации результатов диссертационного исследования.

Во **введении** рассмотрены общая характеристика и сферы применения алгоритмов ДПФ и БПФ, а также отличительные особенности алгоритма целочисленного БПФ. Дана оценка актуальности выбранной темы научного исследования.

В **первой главе** производится обзор существующих алгоритмов БПФ, рассматриваются варианты реализации самых трудоемких операций алгоритма – комплексных умножений. В качестве алгоритма для реализации целочисленного БПФ выбран алгоритм по расщепленному основанию, так как имеет наименьшую вычислительную сложность по сравнению с остальными рассматриваемыми алгоритмами и хорошо подходит для практической реализации алгоритма целочисленного БПФ. Выражения для расчета БПФ имеют следующий вид:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x(n + N/2)] W_{N/2}^{kn}, k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (1)$$

$$X(4k + 1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left[ x(n) - jx\left(n + \frac{N}{4}\right) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) + jx\left(n + \frac{3N}{4}\right) \right] W_N^n W_{\frac{N}{4}}^{kn}, \quad (2)$$
$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

$$X(4k + 3) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left[ x(n) + jx\left(n + \frac{N}{4}\right) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) - jx\left(n + \frac{3N}{4}\right) \right] W_N^{3n} W_N^{kn}, \quad (3)$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

Схема алгоритма по расщеплённому основанию приведена на рисунке 1.

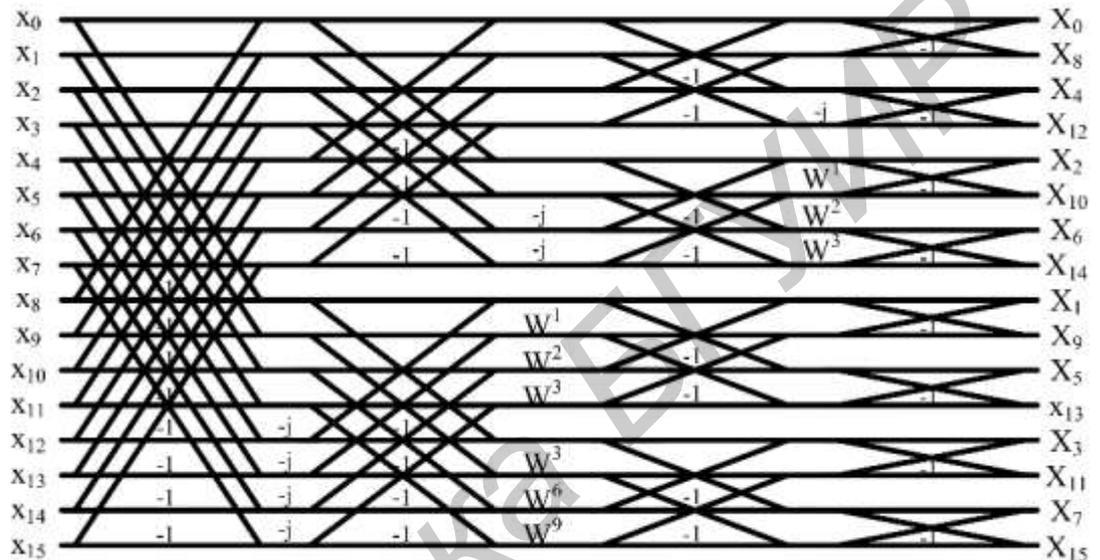


Рисунок 1 – БПФ по расщепленному основанию

Лестничные схемы были выбраны для реализации комплексных умножителей. Реализация комплексных умножителей с помощью лестничных схем позволяет сократить количество арифметических операций, необходимых для вычисления БПФ, а также обеспечивает свойство восстановления без потерь алгоритма целочисленного БПФ. Основной идеей для применения лестничных схем при реализации комплексных умножений БПФ является декомпозиция комплексных умножений на 3 шага лестничной схемы. Матрица коэффициентов разбивается на 3 части следующим образом:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

где  $\theta$  – угол поворачивающего множителя.  
Лестничная схема изображена на рисунке 2.

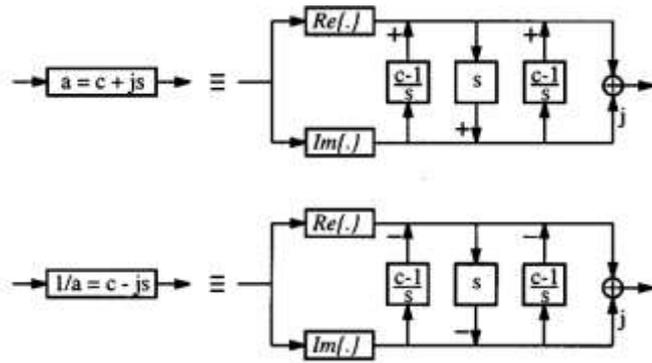


Рисунок 2 – Лестничная схема для реализации комплексного умножения

Во **второй** главе дано теоретическое описание алгоритма целочисленного БПФ, подробно рассматривается применение лестничных схем для реализации комплексных умножений. Проведено исследование характеристик алгоритма целочисленного БПФ.

Сравнение проводилось с стандартной функцией Matlab `fft()`, выполняющей БПФ в арифметике с плавающей запятой. Целочисленное БПФ имело следующие параметры: длина преобразования  $N = 256$  точек, разрядности коэффициентов 16 бит и разрядности выходных данных 24 бит. Результаты моделирования приведены на рисунке 3.

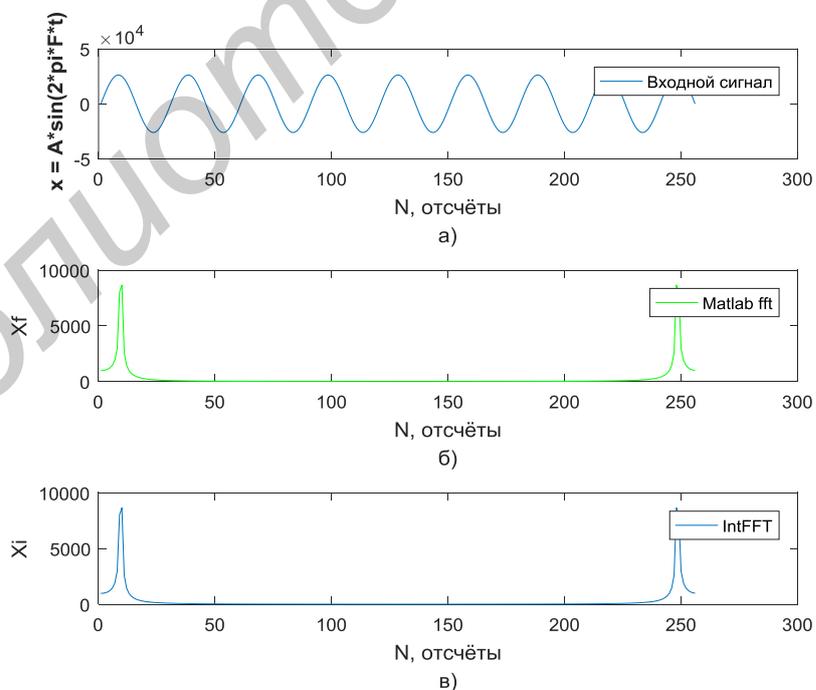


Рисунок 3 – Результаты моделирования для  $N = 256$ : а) Входной сигнал б) встроенная функция Matlab `fft()` в) функция целочисленного БПФ

Для того, чтобы оценить точность полученного алгоритма, была вычислена абсолютная ошибка по сравнению со стандартной функцией Matlab `fft()` по формуле:

$$\Delta X = |X_f - X_i| \quad (5)$$

где  $X_f$  - БПФ, вычисленное стандартной функцией Matlab  
 $X_i$  - БПФ, вычисленное функцией целочисленного БПФ

Для графического отображения была выбрана логарифмическая шкала, данные были нормированы по максимальному значению:

$$\Delta X_{log} = 10 \log_{10} \frac{\Delta X}{\Delta X_{max}} \quad (6)$$

где  $\Delta X_{max}$  – максимальное значение абсолютной ошибки

График абсолютной ошибки стандартно функции Matlab от разработанной функции целочисленного БПФ приведен на рисунке 4.

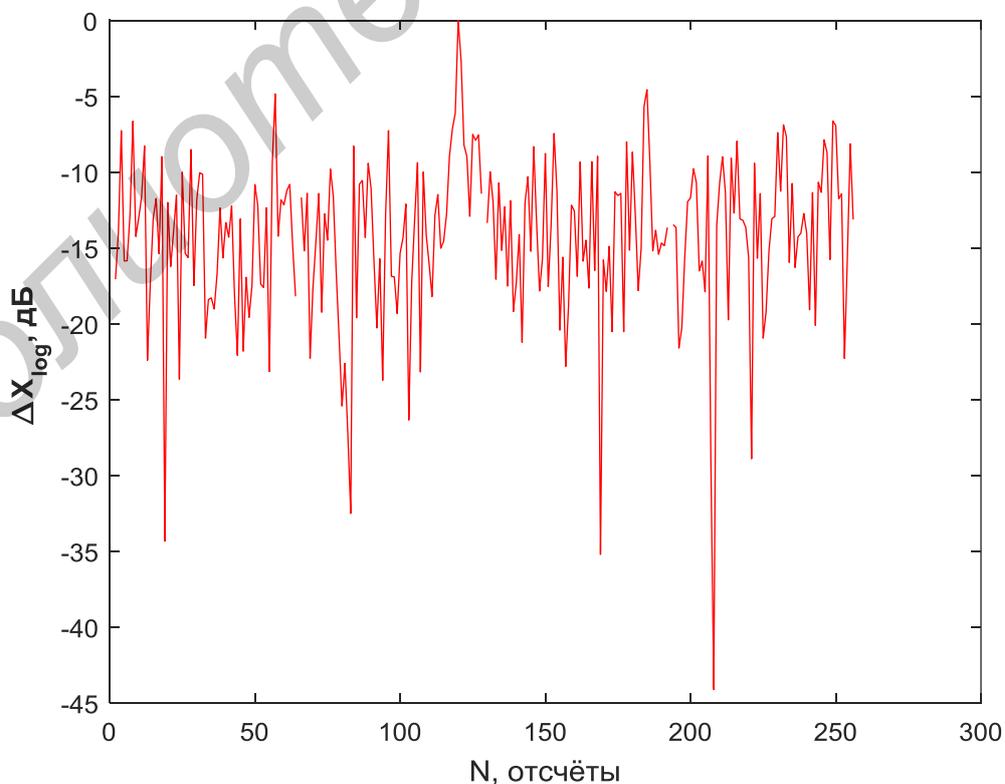


Рисунок 4 – Ошибка преобразования

Восстановление исходного сигнала без потерь является одним из основных свойств целочисленного БПФ. Для проверки этого свойства было взято прямое целочисленное БПФ от некоторого сигнала, а затем от его результата взять обратное целочисленное БПФ. Абсолютная ошибка исходного сигнала от восстановленного вычислялась по формуле:

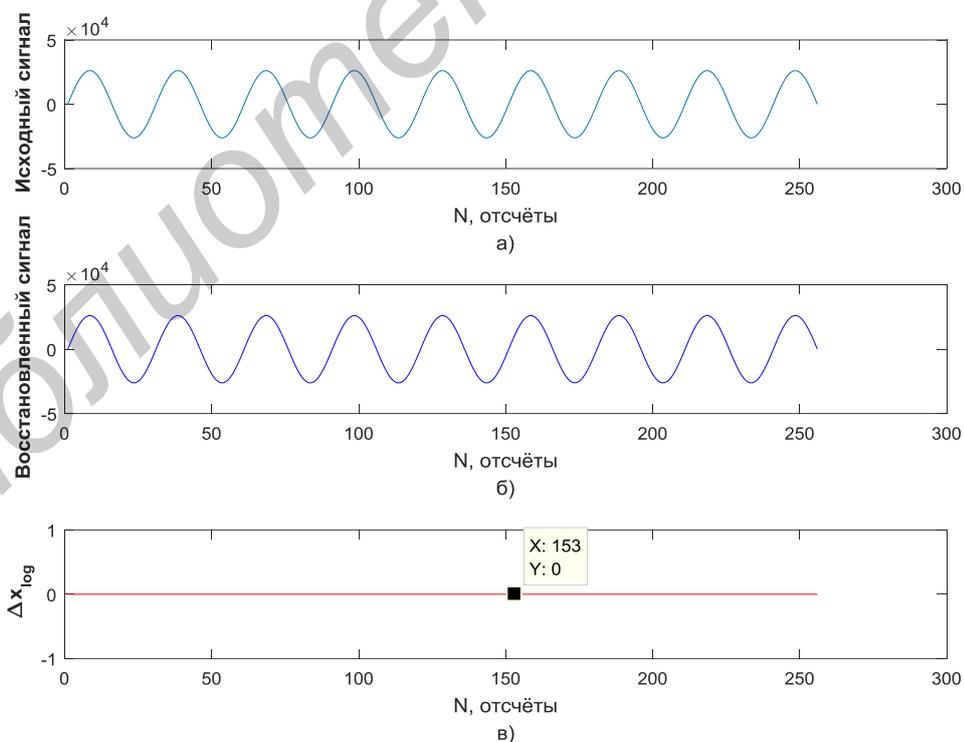
$$\Delta x = |x_i - x_r| \quad (7)$$

где  $x_i$  – исходный сигнал;  
 $x_r$  – восстановленный сигнал.

Для графического отображения была выбрана логарифмическая шкала, данные были нормированы по максимальному значению:

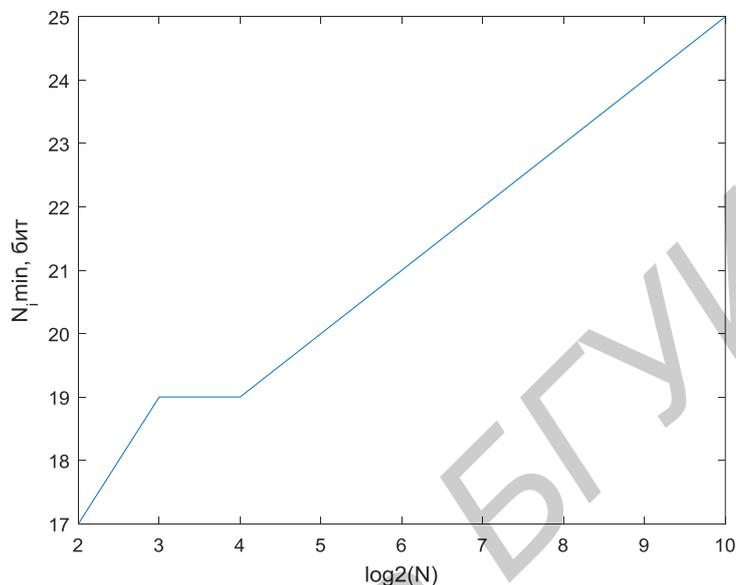
$$\Delta x_{log} = 10 \log_{10} \frac{\Delta x}{\Delta x_{max}} \quad (8)$$

где  $\Delta x_{max}$  – максимальное значение абсолютной ошибки.  
 Результаты моделирования приведены на рисунке 5.



**Рисунок 5 – Результаты моделирования: а) исходный сигнал; б) восстановленный сигнал в) ошибка восстановления**

Для каждого преобразования размера  $N$  существует такое минимальное значение  $N_i^{min}$  разрядность внутренних узлов и выходных данных, которое позволяет обеспечивать обратимость преобразования. Зависимость разрядности внутренних узлов  $N_i^{min}$  от длины преобразования приведена на рисунке 6:



**Рисунок 6 – Зависимость разрядности внутренних узлов  $N_i^{min}$  от длины преобразования**

Точность преобразования напрямую зависит от количества бит  $N_c$  к которому квантованы лестничные коэффициенты. Для того, чтобы оценить зависимость точности преобразования от разрядности лестничных коэффициентов, была вычислена средняя абсолютная ошибка целочисленного БПФ по сравнению со стандартной функцией Matlab по формуле:

$$\Delta X_{cp} = \frac{\sum_{n=0}^N |X_f(n) - X_i(n)|}{N} \quad (9)$$

Для графического отображения была выбрана логарифмическая шкала, данные были нормированы по максимальному значению:

$$\Delta X_{cp}^{log} = 10 \log_{10} \frac{\Delta X_{cp}}{\Delta X_{cp}^{max}} \quad (10)$$

где  $\Delta X_{cp}^{max}$  – максимальное значение абсолютной ошибки

Зависимость величины ошибки преобразования от разрядности коэффициентов при разрядности входных данных равной 16 бит, выходных – 23 бита, длине преобразования  $N = 256$  приведена на рисунке 7.

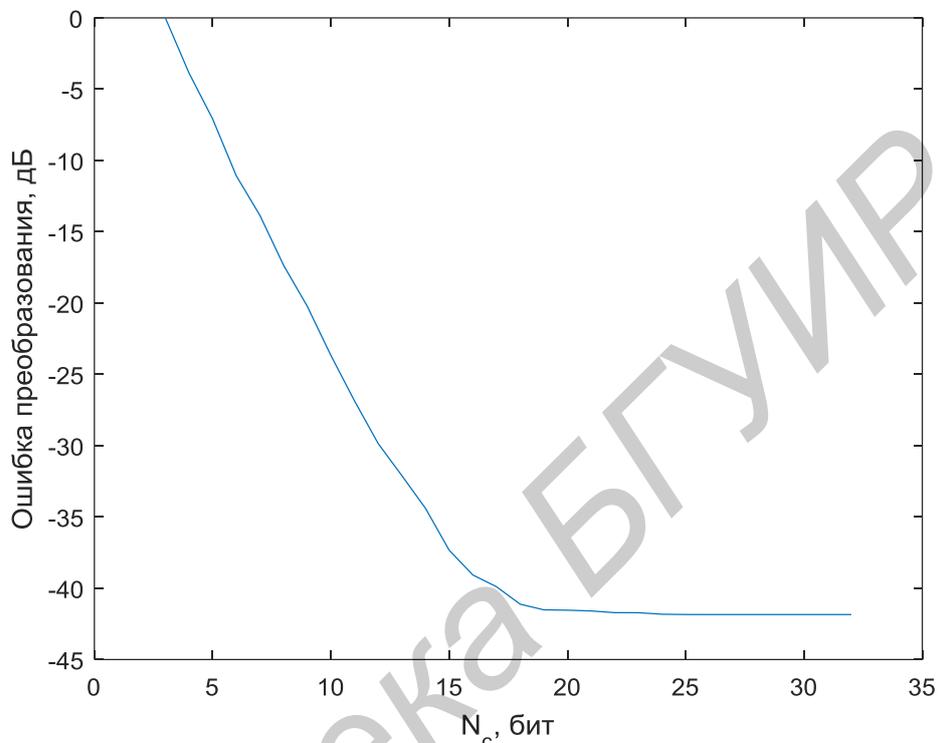


Рисунок 7 – Зависимость ошибки преобразования от  $N_c$

В третьей главе рассматривается аппаратная реализация 8-точечного алгоритма целочисленного БПФ. Приведены результаты моделирования работы полученного устройства, а также его характеристики после размещения на кристалле ПЛИС. Для проверки работоспособности алгоритма целочисленного БПФ было разработано описание на языке VHDL для преобразования длины  $N = 8$ . Были составлены описания элементарных блоков, из которых состоит БПФ: двух типов операций «бабочка» и лестничной схемы.

Функциональная схема устройства приведена на рисунке 8.

Отчёт о занимаемых ресурсах кристалла xc7z020clg484-1 после синтеза HDL-описания устройства приведён на рисунке 9

В **заключении** перечислены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационного исследования.

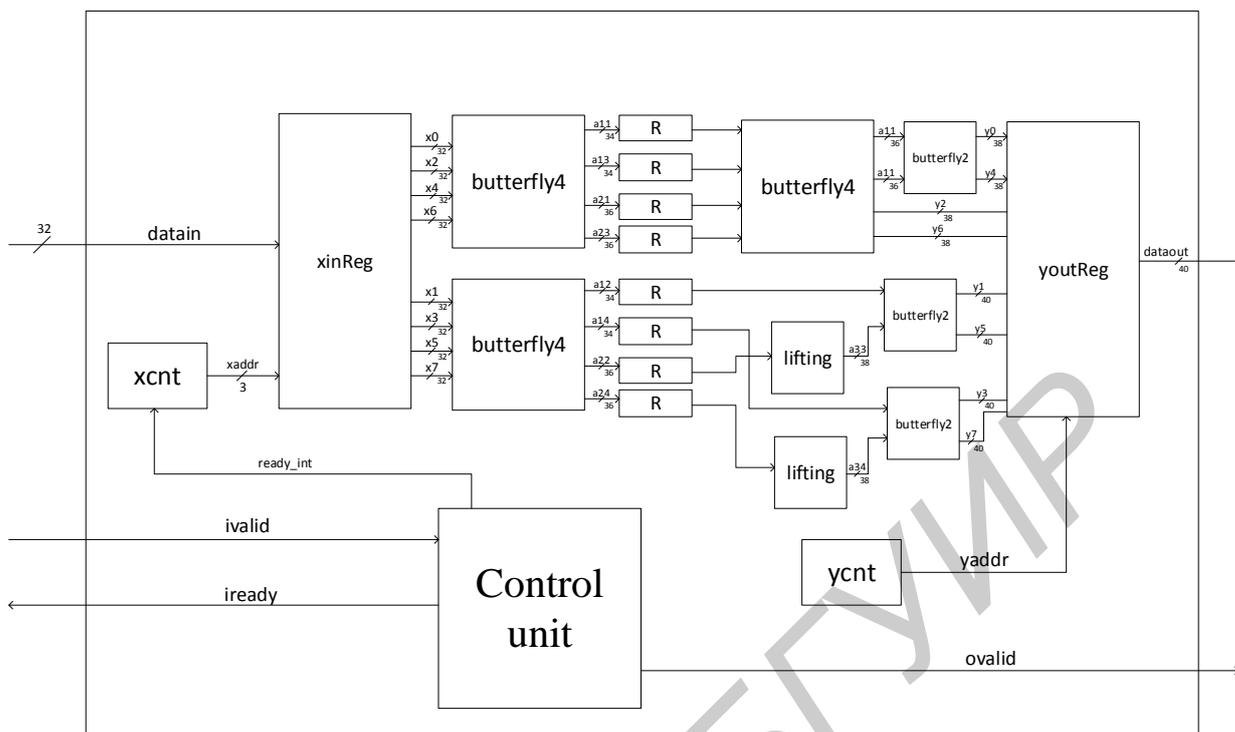


Рисунок 8 – Функциональная схема устройства

Name	Slice LUTs (53200)	Slice Registers (106400)	F7 Muxes (26600)	DSPs (220)	Bonded IOB (200)	BUFGCTRL (32)
fft8	1188	894	40	6	77	1
B1_out (butterfly2_param...)	2	0	0	0	0	0
B1H (butterfly4)	196	0	0	0	0	0
HB (butterfly2_2)	32	0	0	0	0	0
LB (butterfly2_3)	128	0	0	0	0	0
LBj (butterfly2j_4)	36	0	0	0	0	0
B1L (butterfly4_0)	194	0	0	0	0	0
HB (butterfly2)	32	0	0	0	0	0
LB (butterfly2_1)	128	0	0	0	0	0
LBj (butterfly2j)	34	0	0	0	0	0
B2 (butterfly4_parameteri...)	278	0	0	0	0	0
HB (butterfly2_param...	32	0	0	0	0	0
LB (butterfly2_paramet...	212	0	0	0	0	0
LBj (butterfly2j_param...	34	0	0	0	0	0
B2_out (butterfly2_param...	2	0	0	0	0	0
B3_out (butterfly2_param...	2	0	0	0	0	0
LS1 (lifting)	188	0	0	3	0	0
LS2 (lifting_parameterized1)	226	0	0	3	0	0

Рисунок 9 – Отчет о занимаемых ресурсах ПЛИС

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной магистерской диссертации была разработка эффективной реализации алгоритма вычисления БПФ с использованием целочисленной арифметики.

Для достижения поставленной цели были проработаны следующие задачи:

- исследование возможности сокращения количества выполняемых операций, необходимых для получения БПФ;
- реализация комплексных умножений с помощью лестничных схем;
- реализация алгоритма целочисленного БПФ на базе (ПЛИС) и исследование характеристик полученной реализации.

В результате работы был исследован алгоритм вычисления БПФ, позволяющий снизить аппаратные затраты на получение результата БПФ. Проведённая реализация комплексных умножений с помощью лестничных схем и факторизация коэффициентов преобразования позволила обеспечить свойство восстановления исходного сигнала без потерь. Исследование характеристик полученного преобразования, а также их сравнение со стандартной реализацией в арифметики с плавающей запятой показало, что полученный алгоритм имеет достаточную точность для его применения наряду со стандартными реализациями.

Таким образом, полученный алгоритм целочисленного БПФ позволяет снизить аппаратные затраты на вычисление БПФ и может эффективно применяться на платформах с малой и средней производительностью.

Для иллюстрации практической реализации алгоритма целочисленного БПФ разработана и реализована на базе системы на кристалле Zynq 8-точечное БПФ. Исследованы аппаратные затраты и производительность полученной реализации.

## **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**

- 1 Качинский, В. М. Применение отладочной платы Zedboard для реализации 8-точечного БПФ на основе лестничной схемы / В. М. Качинский // Компьютерные системы и сети: материалы 53-й научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов (Минск, 2 – 6 мая 2017 г.). – Минск: БГУИР, 2017. – С. 230 – 231.