УДК 517.977

МЕТОДЫ МНОГОЗНАЧНОГО АНАЛИЗА В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Л.И. МИНЧЕНКО, А.Н. ТАРАКАНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 9 января 2004

В статье рассматриваются задачи управления дифференциальными включениями с запаздыванием. Задачи такого типа покрывают широкий диапазон задач динамической оптимизации с временным запаздыванием, в частности, стандартные и нестандартные модели оптимального управления открытого и замкнутого типа.

Ключевые слова: многозначный анализ, негладкая оптимизация.

1. Введение. Необходимые конструкции многозначного и негладкого анализа и вспомогательные результаты

Основным направлением в изучении проблем оптимального управления дифференциальными включениями является вывод необходимых условий оптимальности. Трудности на этом пути хорошо иллюстрируются многочисленными неудачными попытками распространения принципа максимума Понтрягина [1] в его классической форме уже на задачи оптимального управления гладкими динамическими системами с множеством управлений, зависящим от фазового состояния. Первые необходимые условия оптимальности типа принципа максимума для задач управления дифференциальными включениями были предложены В.Г. Болтянским [2] в контексте общего распространения теории оптимального управления динамическими системами, основных общих результатов этой теории и принципа максимума Понтрягина, в частности, на более сложные динамические объекты управления. Эти условия основывались на достаточно жестких дополнительных предположениях о структуре дифференциального включения (требования существования так называемых локальных сечений). Поэтому за работами В.Г. Болтянского последовала серия публикаций, стремившихся к ослаблению требований к структуре дифференциального включения. Так, В.И. Благодатских доказал необходимые условия в форме опорного принципа [3] при условии дифференцируемости опорной функции. Стремление исключить жесткие дополнительные предположения при получении результатов привело к необходимости выхода за рамки классического анализа и само по себе стимулировало развитие методов негладкого и многозначного анализа, нашедших в последствии самое широкое применение в теории экстремальных задач.

Первые эффективные необходимые условия оптимальности для задачи управления дифференциальными включениями без запаздывания были установлены Кларком [4, 5] и базировались на построенном им обобщенном дифференциальном исчислении негладких функций. Результаты, отличные от [4, 5], были получены в работах [6–14], среди которых особое значение имеют результаты Половинкина и Смирнова [8, 9], положившие начало применению теории дифференцирования многозначных отображений для изучения дифференциальных включений.

Многочисленные приложения задач с наличием эффекта запаздывания стимулировали изучение задач оптимального управления дифференциальными и дискретными включениями с запаздыванием. Необходимые условия для задачи оптимального управления дифференциальными включениями с запаздыванием были впервые получены Кларком и Уоткинсом [15]. Они расширяют условия Кларка [4] на дифференциальные включения с запаздыванием. Результат [15] выражен в терминах конструкций Кларка для негладкого анализа и позволяет исследовать не только негладкие задачи, не решаемые стандартными методами, но также дает информацию об устойчивости системы относительно возмущений параметров и ведет к новому подходу к управляемости. Хотя необходимые условия [15] имеют ряд преимуществ, они не покрывают многие важные ситуации. В частности, эти условия были доказаны только при предположении выпуклости вектограмы системы. В то же время хорошо известно, что предположения выпуклости весьма стеснительны в некоторых важных ситуациях и имеет смысл избегать их сколько возможно. Кроме того, необходимые условия [15] в форме гамильтоновых включений не сводятся к принципу максимума [1] в случае гладких систем управления и, следовательно, оказываются недостаточно сильными в некоторых ситуациях.

Более сильные необходимые условия получены с помощью других методов в работах [12, 16–18].

Важное значение наряду с необходимыми условиями оптимальности имеют также условия управляемости. Для исследований в области управляемости дифференциальными включениями характерно стремление к построению теории столь же полной, как и в случае гладких динамических систем. Вместе с тем, несмотря на многочисленные результаты, полученные различными методами, в теории управляемости имеется ряд вопросов, исследованных недостаточно полно. Управляемость дифференциальными включениями без запаздывания была исследована Кларком [4], Мордуховичем [11], Половинкиным и Смирновым [8], Франковской [10]. С другой стороны известно, что эффект запаздывания существенно осложняет проблему управляемости. Выводу достаточных условий локальной управляемости для дифференциальных включений с запаздыванием и их дискретных аппроксимаций посвящены работы [19–23].

Важнейшей характеристикой математических моделей является их адекватность реальным системам. На адекватность модели, в свою очередь, существенным образом влияет ее способность учитывать и отражать такие свойства реальной системы, как наличие неопределенности. Источником этой неопределенности, которую удобно представлять как некий возмущающий фактор, могут быть инструментальные погрешности измерений, флуктуации исходного состояния, случайные внешние влияния, погрешности аппроксимации реальных зависимостей математическими конструкциями и т.д. Полностью устранить факторы, искажающие идеальную картину, практически невозможно. Поэтому одной из значимых задач является решение проблемы устойчивости задачи оптимального управления относительно возмущений, впервые поставленной Кларком [4] и заключающейся в получении оценок обобщенных градиентов Кларка для функции оптимального значения задачи [24–26].

Данная статья представляет основные результаты, полученные в области исследования дифференциальных включений с запаздыванием [16–23, 27–29] и основанные на применении в первую очередь обобщенной линеаризации и дифференцирования многозначных отображений.

Примем стандартные обозначения $\mathrm{cl}\,C$, $\mathrm{int}\,C$, $\mathrm{co}\,C$ для замыкания, внутренности и выпуклой оболочки произвольного непустого множества C. Обозначим через B единичный замкнутый шар и через $|\cdot|$ норму соответствующего евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $AC^n[a,b]$ пространство абсолютно непрерывных функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть C — непустое множество банахова пространства E и $x \in \mathrm{cl}\,C$. Введем касательный конус к множеству C в точке $x \in C$ как

$$\hat{T}(x\,|\,C) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}(C - x) = \{\, \overline{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists o(\varepsilon): x + \varepsilon\overline{x} + o(\varepsilon) \in C \ \forall \varepsilon \geq 0 \,\}.$$

Пусть G — многозначное отображение, определенное на банаховом пространстве X со значениями $G(x)$ в банаховом пространстве Y. Используя касательный конус к графику

$$\operatorname{Gr} G = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in G(x), x \in X\}$$

многозначного отображения, можно определить (см. [7,30]) производную многозначного отображения в точке $(x, y) \in \operatorname{Gr} G$ по направлению $v \in X$:

$$DG(x, y; v) = \left\{ w \in Y \mid (v, w) \in \hat{T}(x, y \mid \operatorname{Gr} G) \right\}.$$

Введенная производная является обобщением понятия обычной производной функции по направлению и позволяет линеаризировать математическую модель в условиях отсутствия классической дифференцируемости.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $K^+ := \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, \overline{x} \rangle \geq 0, \forall x \in K\}$ сопряженный конус к K.

Пусть F — многозначное отображение на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ с непустыми компактными значениями $F(t, x, y) \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим дифференциальное включение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), x(t - \Delta)), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $t \in [a, b]$; $\Delta = \text{const}$; $0 < \Delta < b - a$.

Траекторией дифференциального включения с запаздыванием (1.1) будем называть абсолютно непрерывную на $[a, b]$ и L^∞ на $[a - \Delta, a)$ функцию $x(\cdot)$ такую, что $\dot{x}(t) \in F(t, x(t), x(t - \Delta))$ п.в. на $[a, b]$.

Пусть $x^0(\cdot)$ — траектория для (1.1). Примем стандартные предположения, при которых принято рассматривать задачи управления дифференциальными включениями. Другими словами будем предполагать, что

1) многозначное отображение F *липшицево измеримо* в окрестности траектории $x^0(\cdot)$, т.е.

(i) для каждого (x, y) в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, многозначное отображение $t \to F(t, x, y)$ измеримо на $[a, b]$ по Лебегу,

(ii) для каждого $t \in [a, b]$ многозначное отображение $(x, y) \to F(t, x, y)$ липшицево в окрестности $x^0(\cdot)$, т.е. существует интегрируемая функция $l(t)$ на $[a, b]$ и число $\delta_0 > 0$ такое, что $F(t, x, y) \subset F(t, \overline{x}, \overline{y}) + l(t)[|x - \overline{x}| + |y - \overline{y}|] B$ для всех $(x, y), (\overline{x}, \overline{y}) \in D(t), t \in [a, b]$, где $D(t) = \{(x, y) : |x - x^0(t)| < \delta_0, |y - x^0(t - \Delta)| < \delta_0\}$;

2) многозначное отображение F является локально *интегрально ограниченным* в окрестности траектории $x^0(\cdot)$, если существует интегрируемая функция $m(t)$ на $[a, b]$ такая, что $|v| \leq m(t)$ для всех $v \in F(t, x, y)$ всех $(x, y) \in D(t)$, $t \in [a, b]$.

Пусть $\|\cdot\|$ — норма пространства $C[a, b]$. Наряду с (1.1) рассмотрим овыпукленное дифференциальное включение с запаздыванием, полученное из (1.1) заменой $F(t, x, y)$ его выпуклой оболочкой $\operatorname{co} F(t, x, y)$. Траектория овыпукленного дифференциального включения с запаздыванием, полученного из (1.1), называется релаксационной траекторией для дифференциального включения (1.1).

Утверждение, приведенное ниже, представляет собой модификацию теоремы 1 [15].

Утверждение 1.1. Пусть $z(\cdot)$ — любая релаксационная траектория к (1.1) такая, что $(z(t), z(t - \Delta)) \in D(t)$ для всех $t \in [a, b]$. Тогда для любого числа $\delta > 0$ существует траектория

$x(\cdot)$ дифференциального включения (1.1) такая, что $z(t)=x(t)$ для всех $t\in[a-\Delta,a]$ и $\|x(\cdot)-z(\cdot)\|<\delta$.

Таким образом, любая релаксационная траектория может равномерно аппроксимироваться траекториями.

Положим $w^0(t)=(x^0(t),x^0(t-\Delta),\dot{x}^0(t))$ и для любого фиксированного $t\in[a,b]$ рассмотрим график многозначного отображения $F(t,\cdot):(x,y)\to F(t,x,y)$, т.е. множество

$$\operatorname{Gr}F(t,\cdot):=\left\{w=(x,y,v):v\in F(t,x,y),x,y\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

Мы, очевидно, имеем $w^0(t)\in\operatorname{Gr}F(t,\cdot)$ для всех $t\in[a,b]$. Следуя [16–18], можем определить производную

$$DF(t,w^0(t);\delta x,\delta y):=\left\{\delta v\in\mathbb{R}^n:\left(\delta x,\delta y,\delta v\right)\in\hat{T}(w^0(t)\,|\operatorname{Gr}F(t,\cdot))\right\}$$

многозначного отображения $F(t,\cdot)$ в точке $w^0(t)$ по направлению $(\delta x,\delta y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Используя определенную выше производную, можно ввести линеаризованное дифференциальное включение с запаздыванием

$$\delta\dot{x}(t)\in DF(t,w^0(t);\delta x(t),\delta x(t-\Delta))\ \ t\in[a,b], \tag{1.2}$$

которое по аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть дифференциальным включением в вариациях.

Следующее утверждение, полученное в [16, 17], расширяет соответствующие результаты [8, 9] на дифференциальные включения с запаздыванием и является основополагающим для анализа свойств их траекторий.

Теорема 1.1. *Пусть $r(\cdot)$ функция из $[0,\infty)$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\varepsilon^{-1}r(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\downarrow 0$. Тогда для каждой траектории $\delta x(\cdot)$ дифференциального включения в вариациях (1.2) существуют число $\varepsilon_0>0$ и траектория $x_\varepsilon(\cdot)$ к включению (1.1), определенная для всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ и такая, что*

$$x_\varepsilon(t)=x^0(t)+\varepsilon\delta x(t)\ \text{ для всех }\ t\in[a-\Delta,a),$$

$$x_\varepsilon(a)=x^0(t)+\varepsilon\delta x(a)+r(\varepsilon),$$

$$x_\varepsilon(t)=x^0(t)+\varepsilon\delta x(t)+\lambda_\varepsilon(t),\ t\in[a,b],$$

где $\lambda_\varepsilon(\cdot)$ — абсолютно непрерывная функция и $\varepsilon^{-1}\|\lambda_\varepsilon(\cdot)\|\to 0$, $\varepsilon^{-1}\int_b^a|\lambda_\varepsilon(t)|dt\to 0$ при $\varepsilon\downarrow 0$.

Замечание. Теорема 1.1 является прямым обобщением теоремы о дифференцируемости решений обыкновенного дифференциального уравнения по начальным данным и показывает, что множество всех траекторий дифференциального включения в вариациях входит в касательный конус к множеству всех траекторий дифференциального включения (1.1) в пространстве Соболева $W^{1,1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ абсолютно непрерывных функций на $[a,b]$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_W=|x(a)|+\int_a^b|\dot{x}(t)|\,dt.$$

2. Локальная относительная управляемость

Пусть F — многозначное отображение из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ с непустыми компактными значениями $F(t,x,y)\subset\mathbb{R}^n$. Пусть $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in[a,b]$, $0<\Delta<b-a$. Рассмотрим дифференциальное включение с запаздыванием

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t),x(t-\Delta)) \tag{2.1}$$

с начальным условием $x(t)=x^0(t)$ для всех t из $[a-\Delta,a]$.

Определение 2.1. Дифференциальное включение (2.1) будем называть локально относительно b-управляемым вдоль траектории $x^0(\cdot)$, если $x^0(b)\in\operatorname{int}R(b)$,

где $R(b)$ — множество достижимости дифференциального включения (2.1) с начальным условием

$x(t)=x^0(t)$ для всех t из $[a-\Delta,a]$, т.е.

$$R(b)=\{X(b)\,|\,x(\cdot)\in AC^n[a,b],\dot{x}(t)\in F(t,x(t),x(t-\Delta))\ \textit{п.в. на}\,[a,b],x(t)=x^0(t)\ \textit{при}\ t\in[a-\Delta,a]\}.$$

Отметим, что данное определение является естественным обобщением на дифференциальные включения с запаздыванием понятия локальной относительной управляемости систем управления с запаздыванием [31].

Для любого фиксированного $t\in[a,b]$ обозначим

$$E(t)=\operatorname{Gr}\operatorname{co}F(t,\cdot):=\{(x,y,v):x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^n,v\in\operatorname{co}F(t,x,y)\}.$$

Пусть $w^0(t)=(x^0(t),x^0(t-\Delta),\dot{x}^0(t))$ и $A(t)$ — произвольный выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, измеримо зависящий от t при $t\in[a,b]$ и лежащий в $T(w^0(t)\,|\,E(t))$.

Рассмотрим линеаризованное дифференциальное включение

$$\delta\dot{x}(t)\in A(t,\delta x(t),\delta x(t-\Delta))\ \textit{п.в.}\ t\in[a,b],\delta x(t)=0\ \textit{при}\ t\in[a-\Delta,a], \tag{2.2}$$

где $A(t,\delta x,\delta y)=\{\delta v\in\mathbb{R}^n\,|\,(\delta x,\delta y,\delta v)\in A(t)\}$,

и обозначим $R_A(b)$ его множество достижимости, т.е.

$$R_A(b)=\{\delta x(b)\,|\,\delta x(\cdot)\in AC^n[a,b],(\delta x(t),\delta x(t-\Delta),\delta\dot{x}(t))\in A(t)\ \textit{п.в. на}\,[a,b],$$
$$\delta x(t)=0\ \textit{при}\ t\in[a-\Delta,a]\}$$

Теорема 2.1. Прямое достаточное условие локальной управляемости. *Пусть при некотором допустимом выборе конуса* $A(t)$ *имеет место равенство* $R_A(b)=\mathbb{R}^n$. *Тогда дифференциальное включение (2.1) локально относительно* b*-управляемо вдоль траектории* $x^0(\cdot)$.

Легко видеть, что данная теорема является обобщением известных достаточных условий локальной управляемости динамической системы по линейному приближению[31]. Именно: для локальной относительной b-управляемости дифференциального включения (2.1) вдоль траектории $x^0(\cdot)$ достаточно, чтобы линеаризованное дифференциальное включение (2.2) было вполне относительно управляемым.

Введем множество

$$Q(A(t))=\{\eta\in\mathbb{R}^n\,|\,\exists p(\cdot),q(\cdot)\ \textit{такие, что}\ q(\cdot)\in AC^n[a-\Delta,a],\ p(\cdot)\in AC^n[a,b]\ \textit{и}\ p(\cdot)\in L_\infty[a-\Delta,a],$$
$$q(t)=0\ \textit{при}\ t\in[b-\Delta,b],\ p(b)=-\eta,-(\dot{p}(t),\dot{q}(t-\Delta),p(t)+q(t))\in A^+(t)\ \textit{п.в. на}\,[a,b]\}.$$

Теорема 2.2. Двойственное достаточное условие локальной управляемости. *Пусть при некотором допустимом выборе конуса* $A(t)$ *выполняется условие* $Q(A(t))=\{0\}$. *Тогда дифференциальное включение (2.1) локально относительно* b*-управляемо вдоль траектории* $x^0(\cdot)$.

Отметим, что теорема 2.2 в случае гладкой системы управления сводится к хорошо известным в литературе достаточным условиям локальной управляемости [32]. В частности, в случае линейной стационарной системы управления из нее получается критерий относительной управляемости Габасова-Кирилловой, выраженный через определяющие уравнения системы [31].

3. Принцип максимума

Пусть F — многозначное отображение из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ с непустыми компактными значениями $F(t,x,y)\subset\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in[a,b]$, $0<\Delta<b-a$. Рассмотрим дифференциальное включение с запаздыванием

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t),x(t-\Delta)) \tag{3.1}$$

и следующую задачу динамической оптимизации: требуется минимизировать функционал

$$J=g(x(b)) \tag{3.2}$$

по всем траекториям $x(\cdot)$ дифференциального включения с запаздыванием (3.2), подчиненным ограничениям

$$x(t)=c(t)\ \ t\in[a-\Delta,a),\ x(a)\in C_0,\ x(b)\in C_1, \tag{3.3}$$

где C_0 и C_1 — заданные замкнутые подмножества в $\mathbb{R}^n$; $c(\cdot)$ — заданная L^∞-функция на $[a-\Delta,a)$; $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — локально липшицевая функция.

Траектория $x(\cdot)$ называется допустимой, если удовлетворяет ограничениям (3.3). Полагаем, что существуют допустимые траектории в рассматриваемой задаче. Пусть $x^0(\cdot)$ одна из них.

Пусть функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\vee\{\pm\infty\}$ конечна в $x\in\mathbb{R}^n$. Обозначим $f^{\oplus}(x;\overline{x})$ любую полунепрерывную снизу сублинейную функцию от $\overline{x}$, удовлетворяющую для всех $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ неравенству

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}[f(x+\varepsilon\overline{x})-f(x)]\le f^{\oplus}(x;\overline{x}).$$

Субдифференциал [6, 33] выпуклой функции $f^{\oplus}(x;\cdot)$ в точке $\overline{x}=0$ будем обозначать $\partial f^{\oplus}(x;0)$. Таким образом, $\partial f^{\oplus}(x;0)=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\langle\xi,\overline{x}\rangle\le f^{\oplus}(x;\overline{x}),\overline{x}\in\mathbb{R}^n\}$.

В случае локально липшицевой функции f мажоранту $f^{\oplus}(x;\cdot)$ всегда можно выбрать ограниченной, следовательно, она будет локально липшицевой [33].

Представим некоторые конструкции, в терминах которых будем формулировать необходимые условия. Так как функция g липшицева на $D(b)$, рассмотрим мажоранту $g^{\oplus}(x;\overline{x})$ такую, что $g^{\oplus}(x;\overline{x})\le l|\overline{x}|$ для всех $x\in D(b)$ всех $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$, где $l=\mathrm{const}>0$ — постоянная Липшица для функции g. Такая мажоранта, очевидно, локально ограничена и, следовательно, локально липшицева относительно $\overline{x}$.

Наряду с касательным конусом к множеству C в точке x нам понадобится также внутренний касательный конус к C в x:

$I(x\,|\,C) := \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \exists\delta > 0, \textit{такое что}\; x + \varepsilon\overline{x} + \varepsilon\delta B \subset C, \forall\varepsilon \in [0,\delta]\}$.

Пусть K_0 — произвольный выпуклый замкнутый конус, лежащий в $\hat{T}(x^0(a)\,|\,C_0)$ и пусть $A(t)$ — произвольный выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, измеримо зависящий от t при $t \in [a,b]$ и лежащий в $\hat{T}(w^0(t)\,|\,E(t))$. Наконец, пусть K_1 — произвольный выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$, лежащий в $\operatorname{cl} I(x^0(b)\,|\,C_1)$ (мы принимаем здесь, что $I(x^0(b)\,|\,C_1) \neq \varnothing$).

Теорема 3.1. *Пусть траектория $x^0(\cdot)$ — решение задачи (3.1)–(3.3). Существуют число $\lambda \geq 0$ и абсолютно непрерывные функции $p:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ и $q:[a-\Delta,b] \to \mathbb{R}^n$ такие, что*

(i) $-(\dot{p}(t), \dot{q}(t-\Delta).p(t)+q(t)) \in A^+(t)$ п.в. на $[a,b]$,

(ii) $q(t) \equiv 0$ на $[b-\Delta;b]$,

(iii) $p(a)+q(a) \in -K_0^+$,

(iv) $p(b) \in -\lambda\partial g^{\oplus}(x^0(b)) + K_1^+$,

(v) $\lambda + |p(b)| > 0$,

где $A^+(t)$, K_0^+ и K_1^+ — конусы, сопряженные соответственно к $A(t)$, K_0 и K_1.

Замечание. Для задачи без запаздывания теорема 3.1 приводит к необходимым начальным условиям [7, 9].

Покажем, что принцип максимума Понтрягина — частный случай теоремы 3.1.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, U — компактное множество в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\Delta), u(t)),\quad u(t) \in U, \tag{3.4}$$

где $u(t) \in L_\infty^m[a,b]$ $t \in [a,b]$ функция f непрерывна вместе с ее частными производными $\nabla_x f(t,x,y,u)$ и $\nabla_y f(t,x,y,u)$.

Рассмотрим задачу (3.4), (3.2), (3.3). Пусть $\{u^0(\cdot), x^0(\cdot)\}$ — оптимальный процесс в рассматриваемой задаче. Положим для краткости

$$\nabla_x f(t) = \nabla_x f(t, x^0(t), x^0(t-\Delta), u^0(t)),\ \nabla_y f(t) = \nabla_y f(t, x^0(t), x^0(t-\Delta), u^0(t)).$$

По лемме Филиппова [34] сформулированная задача эквивалентна задаче (3.1)-(3.3) с многозначным отображением $F(t,x,y) = f(t,x,y,U)$. Нетрудно проверить, что

$$\nabla_x f(t)\delta x + \nabla_y f(t)\delta y \in DF(t, w^0(t); \delta x, \delta y).$$

Кроме того, в силу леммы 2.8 [9] следует

$$DF(t, w^0(t); \delta x, \delta y) + K(t) \subset DF(t, w^0(t); \delta x, \delta y),$$

где $K(t) := \hat{T}(\dot{x}^0(t)\,|\,\operatorname{co} F(t, x^0(t), x^0(t-\Delta)))$.

Следовательно, в качестве конуса $A(t)$ можно принять конус

$$A(t) = \{(\delta x, \delta y, \delta v) : \delta v \in \nabla_x f(t)\delta x + \nabla_y f(t)\delta y + K(t),\ \delta x, \delta y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Тогда

$$A^{+}(t)=\Big\{(x^*,y^*,v^*):\left\langle x^*,\delta x\right\rangle+\left\langle y^*,\delta y\right\rangle+\left\langle v^*,\nabla_x f(t)\delta x+\nabla_y f(t)\delta y+\xi\right\rangle\geq 0,$$

$$\delta x,\delta y\in\mathbb{R}^n,\xi\in K(t)\Big\}=$$

$$=\Big\{(x^*,y^*,v^*):x^*=-\left[\nabla_x f(t)\right]^*v^*,y^*=-\left[\nabla_y f(t)\right]^*v^*,v^*\in K^{+}(t)\Big\},$$

где $\left[\nabla_x f(t)\right]^*$ и $\left[\nabla_y f(t)\right]^*$ — сопряженные матрицы к $\nabla_x f(t)$, $\nabla_y f(t)$. Применяя теорему 3.1 к рассматриваемой задаче, мы получаем, что существуют число $\lambda\geq 0$, функции $p(\cdot)\in AC^n[a,b]$ и $q(\cdot)\in AC^n[a,b]$ такие, что

(a) $\dot p(t)=-\left[\nabla_x f(t)\right]^*\left[p(t)+q(t)\right]$,

$\dot q(t-\Delta)=-\left[\nabla_y f(t)\right]^*\left[p(t)+q(t)\right]$,

$\left\langle p(t)+q(t),v-\dot x^0(t)\right\rangle\leq 0$

для всех $v\in F(t,x^0(t),x^0(t-\Delta))$ и всех $t\in[a,b]$;

(b) $q(t)\equiv 0$ на $[b-\Delta;b]$, $p(a)+q(a)\in -K_0^{+}$;

(c) $p(b)\in -\lambda\partial g^{\oplus}(x^0(b))+K_1^{+}$, $\lambda+\left|p(b)\right|>0$.

Обозначив $\psi(t)=p(t)+q(t)$, условия (a)–(c) можно переписать в более традиционной форме:

$$\dot\psi(t)=-\left[\nabla_x f(t)\right]^*\psi(t)-\left[\nabla_y f(t+\Delta)\right]^*\psi(t+\Delta),$$

$$\max_{u\in U}\left\langle\psi(t),f(t,x^0(t),x^0(t-\Delta),u)\right\rangle=\left\langle\psi(t),f(t,x^0(t),x^0(t-\Delta),u^0(t))\right\rangle\quad t\in[a,b],$$

где

$\psi(t)\equiv 0$ при $t>b$, $\psi(t_1)\in -\lambda\partial g^{\oplus}(x^0(b);0)+K_1^{+}$; $\psi(a)\in K_0^{+}$.

Таким образом, в случае гладкой системы управления с запаздыванием теорема 3.1 сводится к обычному принципу максимума [35]. Это означает, что теорема 3.1 является непосредственным обобщением принципа максимума для динамических систем управления с запаздыванием. Следует отметить, что широко известные необходимые условия оптимальности Кларка-Уоткинса не являются подобным обобщением, не говоря уже об их неприменимости для дифференциальных включений с невыпуклой вектограммой.

4. Оценки обобщенных градиентов функции оптимального значения и необходимые условия оптимальности

Пусть $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$ — многозначное отображение с непустыми компактными значениями $F(t,x,y)\subset\mathbb{R}^n$. Рассмотрим дифференциальное включение с запаздыванием

$$\dot x(t)\in F(t,x(t),x(t-\Delta))\quad t\in[a,b],\tag{4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, Δ — число, удовлетворяющее условию $0 < \Delta < b - a$.

Пусть $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицева функция на множестве $D(b)$ и пусть C_0, C_1 — замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим возмущенную задачу динамической оптимизации:

$$(P_u)\quad \begin{cases} \textit{минимизировать} & \{J = g(x(b))\} \\ \quad\textit{по} & x \in AC^n[a,b] \\ & \dot{x}(t) \in F(t, x(t), x(t-\Delta))\ \textit{п.в. на}\ t \in [a,b], \\ & x(t) = c(t) \quad t \in [a-\Delta, a), \\ & x(a) \in C_0, x(b) \in C_1 + u. \end{cases}$$

Очевидно, при $u = 0$ задача P_u эквивалентна задаче (3.1)–(3.3). Введем функцию оптимального значения

$$V(u) = \inf\{g(x(b)) : x(\cdot) \in AC^n[a,b],\ \dot{x}(t) \in F(t, x(t), x(t-\Delta))\ \text{п.в. на}\ [a,b],$$

$$x(t) = c(t)\ \ t \in [a-\Delta, a),\ x(a) \in C_0,\ x(b) \in C_1 + u\ \}.$$

В общем случае функция оптимального значения $V(u)$ не является полунепрерывной снизу в точке 0, но можно показать, что она будет полунепрерывной снизу при условии выпуклости правой части дифференциального включения, т.е. при выпуклых множествах $F(t, x, y)$.

Наряду с касательным конусом к множеству C в точке x определим также касательный конус Кларка $T(x \mid C)$ к множеству C в точке x:

$$T(x \mid C) = \{\overline{x} \in E \mid \forall \{t_k\} \downarrow 0, \forall \{x_k\} \xrightarrow{C} x, \exists \{\overline{x}_k\} \to \overline{x} : x_k + t_k \overline{x}_k \in C\ \textit{для}\ k = 1, 2, \ldots\},$$

где $x_k \xrightarrow{C} x$ означает, что $x_k \in C$ для всех k и $x_k \to x$.

Нормальный конус Кларка к множеству C в точке x определяется как $N(x \mid C) = -[T(x \mid C)]^+$.

Нам понадобится также обобщенный градиент Кларка функции f в точке x, т.е. множество

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid (\xi, -1) \in N(x, f(x) \mid \text{epi } f)\}$$

и асимптотический обобщенный градиент функции f в x-множество

$$\partial^\infty f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid (\xi, 0) \in N(x, f(x) \mid \text{epi } f)\},$$

где epi $f = \{(x, a\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid a \geq f(x)\}$.

Заметим, что $\partial f(x)$ и $\partial^\infty f(x)$ являются выпуклыми замкнутыми множествами. Более того, $\partial f(x) \cup [\partial^\infty f(x) \setminus \{0\}] \neq \varnothing$, если функция f является полунепрерывной снизу в окрестности точки x.

Для любой траектории $x(\cdot)$ включения (4.1) введем множество

$$\begin{aligned} Q(A(t), K_0) = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid \exists p(\cdot) \in AC^n[a,b]\ \textit{и}\ q(\cdot) \in AC^n[a-\Delta, b] \\ \textit{такие}\quad \textit{что}\quad p(b) = -\eta, q(t) = 0\ \textit{на}\ [b-\Delta, b], p(a) + q(a) \in -K_0^+, \\ -(p(t), q(t-\Delta), p(t) + q(t)) \in A^+(t)\ \textit{п.в. на}[a,b]\} \end{aligned}$$

где $A(t)$, K_0 и K_1 — соответственно касательные конусы Кларка $T((x(t),x(t-h),\dot{x}(t))\,|\,\mathrm{gr}\,F(t,\cdot))$, $T(x(a)\,|\,C_0)$ и $T(x(b)\,|\,C_1)$.

Теорема 4.1. *Пусть* X *— множество всех оптимальных траекторий в задаче* (P_u). *Тогда*

1) $\partial V(0)\subset \mathrm{cl}\,\mathrm{co}\left\{K_1^+\cap\left[-Q(A(t),K_0)+\partial g(x(b))\right]\right\}$ при $\partial V(0)\neq\varnothing$;

2) $\partial^\infty V(0)\subset \mathrm{cl}\,\mathrm{co}\left\{K_1^+\cap\left[-Q(A(t),K_0)\right]\right\}$.

Полученные оценки обобщенного градиента функции оптимального значения V выполняют роль меры устойчивости задачи оптимального управления относительно возмущений, характеризуя ее чувствительность к изменению параметров. Оценки обобщенного градиента и асимптотического обобщенного градиента для функции оптимального значения V, найденные в теореме 4.1, позволяют также получить необходимые условия оптимальности для задачи (P_u).

Теорема 4.2. *Пусть множества* $F(t,x,y)$ *выпуклы и* $x(\cdot)$ *— решение задачи* (P_u). *Тогда существуют число* $\lambda\geq 0$, *вектор* $\xi\in\partial g(x(b))$ *и функции* $p(\cdot)\in AC^n[a,b]$, $q(\cdot)\in AC^n[a-\Delta,b]$ *такие, что*

(i) $(p(t),q(t-\Delta),p(t)+q(t))\in N((x(t),x(t-\Delta),\dot{x}(t))\,|\,\mathrm{Gr}\,F(t,\cdot))$ *п.в. на* $[a,b]$,

(ii) $q(t)=0$ на $[b-\Delta;b]$,

(iii) $p(a)+q(a)\in N(x(a)\,|\,C_0)$,

(iv) $p(b)+\lambda\xi\in -N(x(b)\,|\,C_1)$,

(v) $\lambda+\left|p(b)\right|>0$,

при этом если $\partial V(0)\neq\varnothing$, *то* $\lambda=1$ *и* $p(b)+\xi\in\partial V(0)$.

Отметим, что полученные в теореме 4.2 необходимые условия оптимальности обобщают результат [13] на дифференциальные включения с запаздыванием.

METHODS OF MULTI-VALUED ANALYSIS IN INVESTIGATION OF CONTROL PROBLEMS TO DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH DELAY

L.I. MINCHENKO, A.N. TARAKANOV

Abstract

In the article we investigate control problems for differential inclusions with delay. Problems of this type cover a wide range of dynamic optimization problems with delay, such as standard and non-standard models of optimal control of open and closed type.

Литература

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
2. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М., 1969.
3. *Благодатских В.И.* Принцип максимума для дифференциальных включений. // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 166. С.23-43.
4. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988.
5. *Clarke F.H.* Optimal solutions to differential inclusions // J. Optim. Theory Applic. 1976. Vol.19. P.469-478.
6. *Пшеничный В.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., 1980.
7. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* Подход к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности для дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 1986. № 22. С.944-954.
8. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* О задаче быстродействия для дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 1986. № 22. С.1351-1365.
9. *Frankowska H.* The maximum principle for an optimal solution to a differential inclusion with end points constraints // SIAM J. Control Optim. 1987. Vol.25. P.145-157.
10. *Frankowska H.* Local controllability and infinitesimal generators of semigroups of set-valued maps // SIAM J. Control and Optimiz. 1987. Vol.25. P.412-432.
11. *Mordukhovich B.* Discrete approximations and refined euler-lagrange conditions for nonconvex differential inclusions // SIAM J. Control Optim. 1995. Vol.33. P.882-915.
12. *Mordukhovich B. and Trubnik R.* Stability of discrete approximations and necessary optimality conditions for delay-differential inclusions // Annals of Operations Research. 2001. Vol.101. P.149-170.
13. *Loewen P.D., Rockafellar R.T.* Optimal control of unbounded differential inclusions // SIAM J. Control Optim. 1994. Vol.32. P. 442-470.
14. *Минченко Л.И.* О необходимых условиях оптимальности для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1991. №2. С.45-52.
15. *Clarke F.H., Watkins G.G.* Necessary conditions, controllability and the value function for differential-difference inclusions // Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. 1986. Vol. 10. P. 1155-1179.
16. *Минченко Л.И.* Оптимальные траектории дифференциальных включений в задаче с ограничениями на концах траекторий // Дифференциальные уравнения. 1990. №26. С.1119-1126.
17. *Минченко Л.И., Борисенко О.Ф.* Дифференциальные свойства маргинальных функций и их приложения к задачам оптимизации. Мн., 1993.
18. *Minchenko L.* Necessary optimality conditions to differential-difference inclusions // Nonlinear Analysis. 1999. Vol. 35. P. 231-246.
19. *Minchenko L.I., Tesluk V.N.* On controllability of convex processes with delay // J. Optim. Theory Applic. 1995. Vol. 86. P. 191-197.
20. *Минченко Л.И., Теслюк В.Н.* Достаточные условия локальной управляемости для дифференциальных включений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1997. №11.
21. *Minchenko L., Sirotko S.* Controllabilitry of Nonsmooth Discrete Systems with Delay // Optimization. 2002. Vol. 51, No1. P. 161-174.
22. *Minchenko L., Sirotko S.* Local Controllabilitry for Differential Inclusions with Delay // J. Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. Vol.5, N1. P. 44-50.
23. *Минченко Л.И., Сиротко С.И.* К условиям локальной управляемости для дискретных включений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2002. Т.38, №7. С.992-993.
24. *Luderer B., Minchenko L., Satsura T.* Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London, 2002, 228 p.
25. *Минченко Л.И., Борисенко О.Ф., Грицай С.П.* Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Мн., 1993.
26. *Minchenko L.I.* // J. of Mathematical Sciences. 2003. Vol.116, No3. P. 3266-3302.
27. *Minchenko L.I., Volosevich A.A.* Quasistable Control Problems for Differential Inclusions with Delay // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2003. Vol. 6, № 2. P. 646-653.
28. *Minchenko L.I., Volosevich A.A.* Value Function and Necessary Conditions in Optimal Control Problems for Differential-Difference Inclusions // Nonlinear Analysis. 2003. Vol.53. P. 407-424.
29. *Minchenko L.I., Volosevich A.A.* Quasicalm Control Problems with Delay // Publ. of IFAC workshop on Time-Delay Systems. Rocquencourt. 2003. P. 310-317.
30. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-Valued Analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461p.
31. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.
32. *Гороховик В.В., Гороховик С.Я.* Достаточные условия локальной управляемости первого и второго порядка // Актуальные задачи теории динамических систем управления. Мн.: Наука и техника, 1989. С.72-86.
33. *Rockafellar R.T.* Convex analysis. Prinston University Press, Prinston, New Jersey, 1970. 469 p.
34. *Filippov A.F.* Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side // SIAM J. Control Optim. 1967. Vol.5. P. 609-621.
35. *Харатишвили Г.Л.* Принцип максимума в теории оптимальных процессов с временным запаздыванием // Докл. АН СССР. 1961. №136. С.39-42.