Применение техники кодирования алгебраическими числами для построения схем быстрого вычисления дискретного косинусного преобразования

Вашкевич М.И.; Петровский А.А.
Кафедра электронных вычислительных средств
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь
e-mail: {vashkevich, palex}@bsuir.by

***Аннотация*—В работе представлен подход к получению схем быстрого вычисления дискретного косинусного преобразования (ДКП), использующего технику кодирования алгебраическими целыми числами. Идея подхода заключается в представление данных внутри схемы вычисления ДКП в виде полиномов с целочисленными коэффициентами. Данная особенность позволяет выполнять умножение на иррациональные множители, присуствующие в схеме, как умножение полиномов.**

Ключевые слова: быстрый алгоритм; алгебраические числа; ДКП

I. Введение

Дискретное косинусное преобразование (ДКП) является ключевой операцией для многих алгоритмов сжатия видео и изображений. Причиной популярности ДКП является свойство, называемое «уплотнение энергии», а также его близость к преобразованию Карунена-Лоэва для сигналов порожденных процессом Гаусса-Маркова первого порядка [1].

Наибольшее распространение в настоящее время получило 8-точечное ДКП второго типа (ДКП-2), применяемое в таких стандартах кодирования видео и изображений как H.261, JPEG и MPEG-2, поскольку обрабатываемый в них блок пикселей имеет размерность 8x8 [2]. Тем не менее, появляющиеся новые стандарты такие, как VC-1, AVS и HEVC, используют различные преобразования, размер которых варьируется от 4 до 64. Предполагается, что с увеличением разрешения видеопотока возможно применение преобразований ещё большего размера [3]. Поэтому разработка общих подходов к получению быстрых алгоритмов ДКП, а также методов их реализации является актуальной научной задачей, имеющей практическое применение.

В данной работе предлагается общий подход к реализации быстрого алгоритма ДКП-2, основанный на использовании техники кодирования алгебраическими целыми числами [4]. Предполагается, что размер преобразования равен степени числа два.

II. Быстрый алгоритм ДКП-2

Большое количество различных быстрых алгоритмов вычисления ДКП разработано в последние несколько десятков лет [5–6]. Большинство из них получено путем многочисленных алгебраических действий с элементами матрицы преобразования, направленных на уменьшение общего количества операций. Однако существует и другой подход к построению быстрых алгоритмов ДКП, основанный на применении понятия полиномиальной алгебры, который представлен в работах [7–8]. В настоящей работе, используется рекурсивный быстрый алгоритм ДКП-2, полученный в результате развития подхода на основе полиномиальной алгебры [9–10]. Восьмиточечная версия данного алгоритма показана на рис. 1.

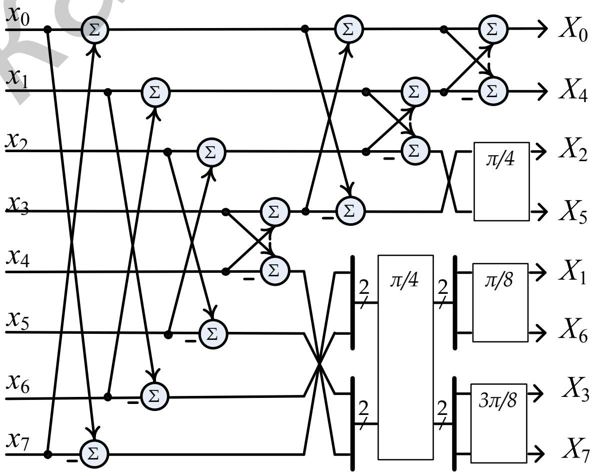

Рис. 1. Схема быстрого алгоритма 8-точечного ДКП-2

Базовую операцию алгоритма выполняет схема, показанная на рис. 2. Входами и выходами схемы служат m-компонентные векторы. Умножение на $2\cos(a)$ выполняется поэлементно, J_m – матрица перестановки, содержащая единицы на побочной диагонали.

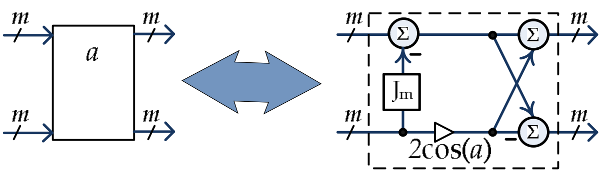

Рис. 2. Базовая операция быстрого алгоритма ДКП-2

III. Применение алгебраических чисел для реализации быстрого алгоритма ДКП-2

A. *Алгебраические целые числа*

Алгебраическими целыми числами называют комплексные (и в частности вещественные) корни многочленов с целыми коэффициентами, у которых старший коэффициент равен единице. Например, число $x = 2\cos(\pi/8) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, являющееся корнем полинома $p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, представляет собой алгебраическое целое число. Если x присоединить к кольцу целых чисел Z, то получится кольцо целых алгебраических чисел $Z[x]$, которое состоит из полиномов от x с целочисленными коэффициентами и степенью не превышающей трех. Умножение в $Z[x]$ производится с последующим приведением по модулю полинома $p(x)$.

B. *Кодирование множителей ДКП алгебраическими целыми числами*

Для того чтобы определить схему кодировнаия алгебраическими числами необходимо указать подходящее алгебраическое целое число x, а также полином $p(x)$ по модулю которого выполняется операция умножения в кольце $Z[x]$. В используемом быстром рекурсивном алгоритме ДКП-2 [10] все множители имеют вид $\cos(k\pi/n), 0 < k < n/2$, где n – размер преобразования. В связи с этим предлагается определить $x = 2\cos(\pi/n)$, тогда полином $p(x)$ и все множители $\cos(k\pi/n)$ можно выразить как:

$$p(x) = 2T_{n/2}(\tfrac{x}{2}),\ 2\cos(\tfrac{k\pi}{n}) = 2T_k(\tfrac{x}{2}), \qquad (1)$$

где $T_n(x)$ – полином Чебышева первого рода n-го порядка. Используя (1) все множители быстрого алгоритма ДКП-2 представляются в виде полиномов с целыми коэффициентами. Для 8-точечного ДКП-2 (рис. 1) имеем

$$\begin{aligned} &x = 2\cos(\pi/8), \\ &p(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \\ &2\cos(\pi/4) = x^2 - 2, \\ &2\cos(3\pi/8) = x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Следует заметить, что при использовании алгебраических целых чисел не возникает вопрос погрешности представления множителей ДКП, поскольку такое представление имеет абсолютную точность.

В результате замены множителей ДКП соответсвующими полиномами все данные в схеме быстрого алгоритма (рис. 1), в том числе и результаты имеют полиномиальный вид:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i. \qquad (2)$$

Для получения численного значения результата к $f(x)$ применяют схему Горнера, после чего выполняют вычисление. При вычислениях используют аппроксимацию алгебраического целого числа x. Схема преобразования из полиномиальной формы представления к численному виду показана на рис. 3.

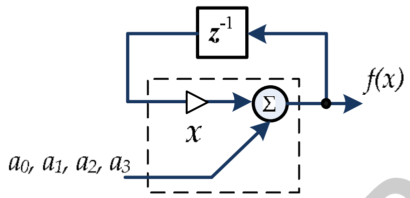

Рис. 3. Преобразование из полиномиальной формы представления к численной

C. *Выводы*

Предложен способ реализации быстрого алгоритма дискретного косинусного преобразования второго типа с использованием техники кодирования алгебраическими целыми числами. Представленный способ отличается абсолютной точностью представления данных на всех ступенях быстрого алгоритма ДКП. Ошибка вносится лишь на последнем шаге – во время преобразования результата из полиномиальной формы в численную. Проведенные эксперименты показывают, что данный способ реализации ДКП обладает меньшей погрешностью, чем методы, в которых выполняется квантование результата каждого умножения.

[1] А. Оппенгейм, Р. Шафер, Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006, с. 856.

[2] Д. Сэломон, Сжатие данных, изображений и звука. М.: Техносфера, 2006, с. 368.

[3] R. Joshi, Y. A. Reznik, and M. Karczewicz, “Efficient large size transforms for high-performance video coding,” in SPIE, vol. 7798, 2010.

[4] V. Dimitrov and K. Wahid, “Multiplierless DCT algorithm for image compression applications,” International Journal: Information Theories and Applications, vol. 11, no. 2, pp. 162–169, 2004.

[5] K. Rao and P. Yip, Discrete cosine transform: algorithms, advantages, applications. Academic Press, 1990.

[6] V. Britanak, P. Yip, and K. Rao, Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations. Academic Press, 2007.

[7] M. Puschel and J. M. F. Moura, “The algebraic approach to the discrete cosine and sine transforms and their fast algorithms,” SIAM Journal on Computing, vol. 32, no. 5, pp. 1280–1316, 2003.

[8] M. Puschel and J. M. F. Moura, “Algebraic signal processing theory: Cooley-Tukey type algorithms for DCTs and DSTs,” IEEE Transactions on Signal Processing,vol. 56, no. 4, pp. 1502–1521, 2008.

[9] Вашкевич М.И., Петровский А.А. Применение полиномиальной алгебры и теории Галуа для синтеза быстрых алгоритмов дискртеных косинусных преобразований. Цифровая обработка сигналов. – 2011. – №3. – С. 2–10.

[10] M. Vashkevich, A. Petrovsky, “A low multiplicative complexity fast recursive DCT-2 algorithm,” Computing Research Repository [Electronic resource]. — 2012. — Mode of access : http://arxiv.org/pdf/1203.3442v2.pdf. — Date of access : 07.10.2012.