УДК 517.97.56:519.245

К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ СИНТЕЗА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

И.В. АРИКО, А.В. БОРЗЕНКОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 апреля 2004

Исследована применимость стохастического метода Монте-Карло для численного интегрирования в задаче оптимального управления типа обратной связи параболической системой. Проведен численный эксперимент. Исследованный подход обеспечивает синтез оптимального управления для задач средней размерности в режиме реального времени.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, оптимизация, синтез оптимального управления.

Введение

Рассматривалась следующая параболическая система с управлением по границе $u(t)$, $t \in T$, и неопределенной функцией возмущения $\omega(t)$, $t \in T = [t_0, t^*]$, без вероятностной информации:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = L_x \varphi(t,x) + \omega(t), \ \ x \in (x_0, x^*), \ t \in (t_0, t^*); \varphi(t_0, x) = 0; \quad x \in [x_0, x^*]; \\ A \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x^*) = \varphi(t, x_0) = u(t); \quad t \in (t_0, t^*]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $L_x \varphi(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(A \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + B \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + C\varphi$, $x \in (x_0, x^*)$. Состояние прямой системы $\varphi(t,x)$, управление $u(t)$, $t \in T$, и функция возмущения $\omega(t)$, $t \in T$, – являются ограниченными:

$$b_* \le \varphi(t, x^*) \le b^*; (t,x) \in \Omega = [x_0, x^*] \times [t_0, t^*]; \ d_* \le u(t) \le d^*; \ t \in T;$$
$$\omega_* \le \omega(t) \le \omega^*; \ t \in T; \tag{2}$$

Исследовалась задача построения оптимального управления типа обратной связи *(P)*:

(P) максимизировать $J(u) = \int_{t_0}^{t^*} \big(u(\varphi(t, x^*))\big) dt = \int_{t_0}^{t^*} u(t)\, dt$ при ограничениях (1), (2).

Вместе с прямой системой (1) будем рассматривать сопряженную дифференциальную систему

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = L_x^* \psi(t,x),\ x\in(x_0,x^*),\ t\in(t_0,t^*);\ \psi(t^*,x)=0;\ x\in[x_0,x^*]; \\
A\dfrac{\partial\psi(t,x^*)}{\partial x} - B\psi(t,x^*) = f(t);\quad A\dfrac{\partial\psi(t,x_0)}{\partial x} - B\,\psi(t,x_0)=0;\ t\in(t_0,t^*].
\end{cases}
\tag{3}
$$

Здесь $L_x^*\psi(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial x}(A\dfrac{\partial\psi}{\partial x}) - B\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + C\psi$, $x\in(x_0,x^*)$. Решения прямой и сопряженной систем понимаются в обобщенном смысле элементов пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, соответствующих измеримым неоднородностям $u(t)$, $f(t)$. В терминах сопряженной системы (3) задача *(P)* переписывается в виде бесконечномерной задачи линейного программирования *(L)*:

(L) максимизировать $J(u)=\int_{t_0}^{t^*} u(t)dt$ при $g_*(x)\le\int_{t_0}^{t^*}\psi(t,x^*)\,u(t)dt\le g^*(x)$, $d_*\le u(t)\le d^*$.

Для решения *(L)* применялся двойственный метод при дискретизации процесса по времени [1]. Численные эксперименты [2] показали, что основной ресурс тратится на интегрирование (метод сеток, конечных элементов) уравнений в частных производных — УЧП. Это делало невозможным синтез оптимального управления в режиме реального времени. Поэтому внимание было сосредоточено на изучении стохастического подхода Монте-Карло, который был специально модифицирован для задачи *(P)*. Метод программировался на языке пакета MatLab 6.0. Вычисления проводились в среде AMD Duron 950, 128 Mb DDR, Microsoft Windows 2000 Professional, MatLab 6 Release 12. Для интегрирования УЧП применялось два подхода. Классический метод сеток (сгенерированная диагональная СЛАУ решалась MatLab) и метод Монте-Карло. Результаты эксперимента представлены в таблице. Использованы следующие обозначения: h — шаг дискретизации по времени, dim — размерность СЛАУ, k — количество ограничений на состояние системы, n — количество переменных, T_{max} — максимальное время синтеза оптимального управления на одном временном шаге, Int – среднее количество интегрирований сопряженной системы на одном временном шаге, T_{int} — общее время интегрирования сопряженной системы (в % от общего времени решения задачи оптимизации)

Построение оптимального управления типа обратной связи.

h	dim	k	n	Классический подход к решению УЧП			Подход Монте-Карло к решению УЧП	
				T_{max}	Int	T_{int}, %	T_{max}	T_{int}, %
0.5	560	3	20	0.31	3.5	86	0.014	83.9
0.2	2000	3	50	7.1	7.3	85	0.11	46.8
0.05	10000	3	200	85.4	21.1	86	0.95	30

Таким образом, для задач средней размерности (N=200) время построения оптимального управления типа обратной связи составляет 0,95 с на каждом временном шаге. Это дает основание говорить о синтезе оптимального управления в режиме реального времени.

Отдельно отметим следующее. Задачи типа (P) возникают в комплексной проблеме защиты окружающей среды от загрязнения, моделирования и прогнозирования процессов переноса в атмосфере, мировых океанах. Отличительной особенностью является высокая и очень высокая размерность задач. Методы типа Монте-Карло очень перспективны для данного типа задач, поскольку допускают распараллеливание численного процесса в контексте использования компьютера с многопроцессорной архитектурой. Сложность заключается в том, что разработчик программы должен не только хорошо владеть математическим аппаратом и технологиями программирования, но и разбираться в реализации многопроцессорной архитектуры для адаптации метода на суперкомпьютере.

TO USE OF STOCHASTIC APPROACH FOR PARABOLIC DIFFERENTIAL SYSTEMS SYNTHESIS IN REAL TIMES MODE

I.V. ARIKO, A.V. BORZENKOV

Abstract

Applicability of Monte Carlo stochastic method is investigated for numerical integration in a problem of construction feedback optimal control to parabolic system. Numerical experiment is carried out. The investigated approach provides optimal controls synthesis in real times mode for middle dimensions problems.

Литература

1. *Borzenkov A.V., Konovalov O.L.* // Proceedings of MS'99. Spain. 1999. P. 90–100.
2. *Borzenkov A.V., Konovalov O.L.* // Proceedings of PRIP III. Belarus. 2003. P. 31–36.