УДК 621.391

МНОГОФАЗНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ИДЕАЛЬНЫМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

В.Д. ДВОРНИКОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 15 января 2003

Классические бинарные кодовые последовательности имеют ненулевой уровень боковых лепестков автокорреляционных функций. В ряде приложений этот недостаток является критическим. В работе рассматриваются комплексные последовательности с идеальными периодическими корреляционными функциями. Их корреляционные свойства не зависят от длины. Проанализированы способы аналитического описания и требуемое число фаз последовательностей. Для нечетной длины последовательности предложено выражение, позволяющее уменьшить требуемое число фаз. Приводятся выражения для описания последовательностей Фрэнка — комплексных последовательностей, длина которых является квадратом любого целого числа. Для случая, когда длина равна степени двойки, рассмотрено устройство формирования последовательности Фрэнка. Вычислено общее число существующих последовательностей Фрэнка и определено их количество, которое можно сформировать при помощи предложенного устройства.

Ключевые слова: комплексные последовательности, последовательности Фрэнка.

В настоящее время наибольшее практическое применение для формирования широкополосных сигналов находят двоичные М-последовательности, ГМВ-последовательности, последовательности Голда, Касами. Их корреляционные функции имеют ненулевой уровень боковых лепестков, что ухудшает качественные показатели систем, использующих широкополосные сигналы. Например, уменьшается точность измерения параметров канала связи, в локации затрудняется обнаружение отраженного сигнала на фоне подстилающей поверхности. Многофазные последовательности [1-3] лишены этого недостатка.

Пусть $\{a_i\} = \{w^{l_i}\}$ — комплексная последовательность длиной n символов, $w = \exp(j\frac{2\pi}{n})$, i=0,…n–1, n — любое целое число. Ее корреляционная функция определяется следующим образом:

$$R(j) = \sum_{0}^{n-1} a_i a_{i+j}^{*},$$

где j — величина задержки, j=0,…n–1, a_{i+j}^{*} — символ, комплексно-сопряженный с a_{i+j}.

Последовательность $\{ a_i \}$ будет иметь идеальную периодическую автокорреляционную функцию (ПАКФ), если

$$R(j) = \begin{cases} n, & j = 0, \\ 0, & j \neq 0. \end{cases}$$

Метод построения комплексных последовательностей с идеальными ПАКФ был предложен в работе [1].

Если n — четное, то

$$l_i = i^2 ,\ w = \exp(j\frac{\pi}{n}).$$

Если n нечетное, то для вычисления l_i используется другая формула:

$$l_i = i(i+1).$$

Оба метода позволяют построить комплексные последовательности любой длины с идеальными ПАКФ. При этом количество различных символов a_i зависит от длины последовательности, поэтому сигнал, передаваемый в канал, будет иметь конечное количество дискретных фаз, равное $2n$.

Для нечетного n число различных фаз может быть уменьшено в два раза. Определим значение символа последовательности следующим образом

$$a_i = w^{i^2} ,$$

где $w = \exp(j\frac{2\pi}{n})$, i=0,…n–1

Из выражения для w следует, что число различных фаз равно n.

Докажем что последовательность, построенная таким образом имеет идеальную ПАКФ. Для этого вычислим значения периодической автокорреляционной функции:

$$r_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_i^* ,\ r_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{i+j}^* ,\ j=0,\ldots n-1.$$

Тогда получаем:

$$r_j = \sum_{i=0}^{n-1} w^{i^2} w^{-(i+j)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} w^{i^2-(i+j)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} w^{-2ij-j^2} = \sum_{i=0}^{n-1} w^{-2ij} w^{-j^2} .$$

Суммирование производится по i, поэтому множитель w^{-j^2} можно вынести за знак суммы

$$r_j = w^{-j^2} \sum_{i=0}^{n-1} w^{-2ij} .$$

Поскольку n — нечетное, $(2, n)$=1, то при фиксированном j и изменении i от 0 до $n-1$, произведение $-2ij$ по модулю n пробегает все значения от 0 до $n-1$. Следовательно, можно записать

$$r_j = w^{-j^2} \sum_{i=0}^{n-1} w^{i} .$$

Из свойства $\sum_{i=0}^{n-1} w^i = 0$ следует равенство

$$r_j = 0 .$$

Общим недостатком рассмотренных выше комплексных последовательностей является большое число требуемых фаз. Это затрудняет формирование подобных последовательностей. При обработке это приводит к увеличению потерь за счет неточности представления фаз сигналов. Если $n = n_1^2$, то требуется только n_1 различных фаз. Эти последовательности называются последовательностями Фрэнка [2] и для их формирования используются матрицы преобразования Фурье размерности $n_1 \times n_1$.

Для задания последовательности Фрэнка удобно использовать следующее выражение:

$$\{ a_i \} = \{ w^{sk} \} = \{ w^l \} ,$$

где s и k являются младшей и старшей частью i, для двоичного случая ($n_1 = 2^t$) они связаны соотношением $i = s + 2^t k$, $w = \exp(-j\frac{2\pi}{2^t})$.

На рис. 1 приведена структурная схема устройства формирования последовательности Фрэнка длиной 2^{2t}. Устройство содержит двоичный $2t$-разрядный счетчик, перемножитель t-разрядных чисел и постоянное запоминающее устройство, в котором хранятся комплексные отсчеты экспоненты w^l, в виде квадратурных компонент $\mathrm{Re}w^l = \cos(\frac{2\pi l}{2^t})$ и $\mathrm{Im}w^l = \sin(\frac{2\pi l}{2^t})$, $l = 0,...,2^t - 1$.

В произведении l используются только t младших разрядов, поэтому оно должно вычисляться по модулю 2^t. Для этого можно применять обычный матричный перемножитель. При микроэлектронной реализации его схему необходимо минимизировать. Произведение l для конкретного значения t вычисляется в следующем виде

$$l = (i_0 + 2i_1 + ... + 2^{t-1} i_{t-1})(i_t + 2i_{t+1} + ... + 2^{t-1} i_{2t-1}) = (\sum_{s=0}^{t-1} 2^s i_s)(\sum_{r=t}^{2t-1} 2^{r-t} i_r).$$

В итоговом выражении исключаются компоненты, формирующие все разряды числа l, номер которых превышает $t-1$. Так для $t = 3$ получим

$l_0 = i_0 i_3$,

$l_1 = i_0 i_4 \oplus i_1 i_3$, $p_1 = i_0 i_1 i_3 i_4$,

$l_2 = i_0 i_5 \oplus i_1 i_4 \oplus i_2 i_3 \oplus p_1$.

На рис. 2 показана схема перемножителя по модулю 8, структура которого соответствует полученным формулам.

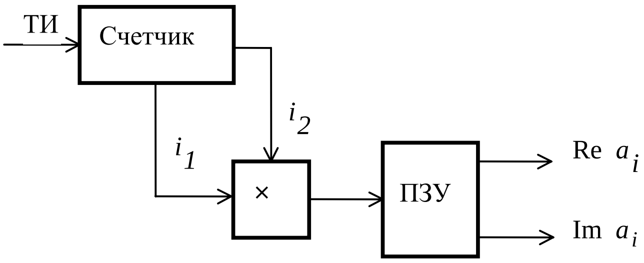

Рис. 1. Устройство формирования последовательностей Фрэнка

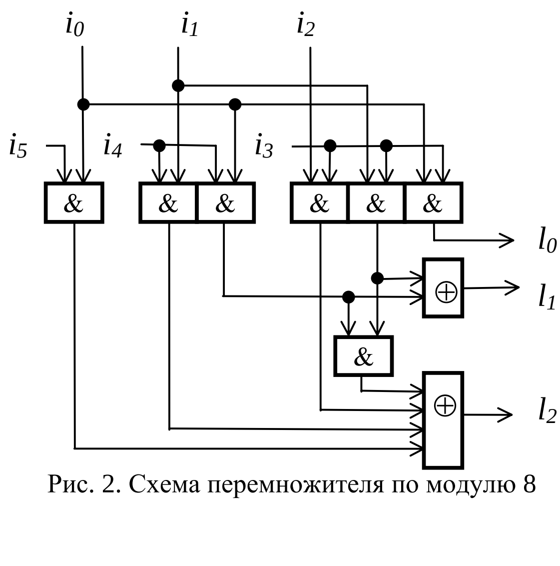

Рис. 2. Схема перемножителя по модулю 8

Всего существует $2^t!(2^{t(2^t-1)})$ различных комплексных последовательностей длиной 2^{2t} с идеальными корреляционными свойствами. Устройство, схема которого изображена на рис. 1. позволяет сформировать только одну последовательность Фрэнка. Перестановкой символов из нее можно получить $\varphi(2^{2t})$ других последовательностей. Здесь $\varphi(2^{2t})$ — функция Эйлера числа 2^{2t}. Для сравнения в таблице приведено число формируемых последовательностей различных длин.

Число формируемых последовательностей различных длин

Длина	t	Общее число комплексных последовательностей с идеальными ПАКФ	Число формируемых последовательностей
16	2	$1{,}5 \cdot 10^{3}$	8
64	3	$8{,}4 \cdot 10^{10}$	32
256	4	$2{,}4 \cdot 10^{31}$	128
1024	5	$1{,}2 \cdot 10^{82}$	512

Предложен метод формирования последовательностей Фрэнка длиной 2^{2t}. Устройство легко реализуется с использованием элементной базы ПЛИС и памяти типа Flash. Большое общее число комплексных последовательностей с идеальными ПАКФ позволяет образовывать ансамбли для использования в синхронных мобильных сетях связи с кодовым разделением каналов.

MULTIPHASE SEQUENCES WITH IDEAL CORRELATION PROPERTIES

V.D. DVORNIKOV

Abstract

Classical binary code sequences have a nonzero level of lateral petals of autocorrelation functions. In a number of appendices this lack is critical. Complex sequences with ideal periodic correlation functions are described. Their correlation properties do not depend on length. Ways of the analytical description and required number of phases of sequences are analysed. For odd length of a sequence the expression, allowing reducing required number of phases is offered.

Литература

1. *Heimler R.C.* // IRE Trans. Inform. Theory. 1961. Vol. IT–7. Oct. P. 254–257.
2. *Frank R.I., Zadoff S.A.* // IRE Trans. Inform. Theory. 1962. Vol. IT–8. Oct. P. 381–382.
3. *David C. Chu.* // IEEE Trans. Inform. Theory. 1972. Vol. IT–18, № 3. P. 531–532.