УДК 519.2

СЛУЧАЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ

В.С. МУХА, К.С. КОРЧИЦ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 2 октября 2004

В практических приложениях часто приходилось иметь дело с совокупностями случайных дискретных величин (вектором, матрицей, многомерной матрицей). Вместе с тем в литературе такие совокупности рассмотрены в недостаточной степени. Общий подход к теории случайных дискретных векторов, которого, однако, не достаточно для практического применения, изложен в работе [1]. Вопросы теории случайных дискретных матриц и тем более случайных дискретных многомерных матриц в литературе не рассматривались. В данной работе упомянутые вопросы решаются с позиции многомерно-матричного подхода, что обеспечивает возможность компьютерного использования полученных результатов.

Ключевые слова: случайная дискретная величина, случайный дискретный вектор, случайная дискретная матрица.

Случайный дискретный двухмерный вектор

Пусть $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ — случайный дискретный двухмерный вектор. Такой вектор удобно описывать вероятностями возможных значений. Если обозначить x_{1,i_1}, $i_1 = \overline{1,k_1}$, возможные значения компоненты ξ_1 и x_{2,i_2}, $i_2 = \overline{1,k_2}$, возможные значения компоненты ξ_2, то распределение вероятностей случайного вектора $\overline{\xi}$ будет полностью определяться вероятностями $p_{i_1,i_2} = P(\xi_1 = x_{1,i_1}, \xi_2 = x_{2,i_2}) = P(x_{1,i_1}, x_{2,i_2})$. Эти вероятности образуют двухмерную матрицу вероятностей $P_{\overline{\xi}} = (p_{i_1,i_2})$, $i_1 = \overline{1,k_1}$, $i_2 = \overline{1,k_2}$, со свойством нормировки $\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2} p_{i_1,i_2} = 1$ [2]. Маргинальные распределения могут быть получены по формулам

$$P_{\xi_1} = (P(\xi_1 = x_{1,i_1})) = (P(x_{1,i_1})) = \sum_{i_2=1}^{k_2} p_{i_1,i_2},$$

$$P_{\xi_2} = (P(\xi_2 = x_{2,i_2})) = (P(x_{2,i_2})) = \sum_{i_1=1}^{k_1} p_{i_1,i_2}.$$

Индексированные векторы $\overline{y}_{i_1,i_2}=(x_{1,i_1},x_{2,i_2})$, $i_1=\overline{1,k_1}$, $i_2=\overline{1,k_2}$, при различных комбинациях значений индексов i_1 и i_2 являются возможными значениями случайного вектора $\overline{\xi}$. Начальный момент m-го порядка случайного вектора $\overline{\xi}$ определяется формулой

$$\nu_{\overline{\xi}}^{(m)}=E(\overline{\xi}^m)=\sum_{i_1=1}^{k_1}\sum_{i_2=1}^{k_2}\overline{y}_{i_1,i_2}^m p_{i_1,i_2},\ m=0,1,2,...$$

При определении начального момента мы воспользовались многомерно-матричными обозначениями и определили m-ю степень вектора как (0,0)-свернутую: $\overline{\xi}^m={}^{0,0}\overline{\xi}^m$, $\overline{y}_{i_1,i_2}^m={}^{0,0}\overline{y}_{i_1,i_2}^m$ [3, 4].

Случайный дискретный многомерный вектор

Обобщим полученные результаты на дискретный случайный n-мерный вектор $\overline{\xi}=(\xi_\nu)$, $\nu=\overline{1,n}$. Пусть каждая ν-я компонента ξ_ν этого вектора может принимать значения x_{ν,i_ν}, $\nu=\overline{1,n}$, $i_\nu=\overline{1,k_\nu}$. Множество возможных значений компонент вектора $\overline{\xi}$ представляет собой двухмерную матрицу $\overline{x}=(x_{\nu,i_\nu})$, имеющую n строк различной длины. Отдельная строка матрицы $\overline{x}$ соответствует отдельной компоненте вектора $\overline{\xi}$ и содержит возможные значения этой компоненты. В компьютерных расчетах матрицу $\overline{x}$ удобно определять как $(n\times k_{\max})$ — матрицу, $k_{\max}=\max\limits_{\nu}(k_\nu)$, заполняя ее не используемые элементы нулями. Зафиксировав в матрице $\overline{x}=(x_{\nu,i_\nu})$ номер строки $\nu=\dot{\nu}$, мы получим $\dot{\nu}$-ю строку этой матрицы $\overline{x}_{\dot{\nu}}=(x_{\dot{\nu},i_\nu})$ (сечение ориентации $\dot{\nu}$). Пусть $Y=\times\prod\limits_{\nu=1}^{n}\overline{x}_\nu=\times\prod\limits_{\nu=1}^{n}(x_{\nu,i_\nu})$ — декартово произведение всех строк (сечений ориентации ν) матрицы $\overline{x}=(x_{\nu,i_\nu})$. Элементами множества Y являются индексированные векторы $\overline{y}_{i_1,i_2,...,i_n}=(x_{1,i_1},x_{2,i_2},...,x_{n,i_n})$, $i_1=\overline{1,k_1}$,..., $i_n=\overline{1,k_n}$, которые представляют собой возможные значения вектора $\overline{\xi}$. Распределение вероятностей случайного вектора $\overline{\xi}$ определяется вероятностями его возможных значений

$$p_{i_1,i_2,...,i_n}=P(\overline{\xi}=\overline{y}_{i_1,i_2,...,i_n})=P(\xi_1=x_{1,i_1},\xi_2=x_{2,i_2},...,\xi_n=x_{n,i_n})=P(x_{1,i_1},x_{2,i_2},...,x_{n,i_n}).$$

Эти вероятности образуют n-мерную матрицу вероятностей $P_{\overline{\xi}}=(p_{i_1,i_2,...,i_n})$, $i_1=\overline{1,k_1}$, …, $i_n=\overline{1,k_n}$, со свойствами нормировки $\sum\limits_{i_1=1}^{k_1}...\sum\limits_{i_n=1}^{k_n}p_{i_1,i_2,...,i_n}=1$. Начальный момент m-го порядка случайного вектора $\overline{\xi}$ определяется формулой

$$\nu_{\overline{\xi}}^{(m)}=E(\overline{\xi}^m)=\sum_{i_1=1}^{k_1}...\sum_{i_n=1}^{k_n}\overline{y}_{i_1,i_2,...,i_n}^m p_{i_1,i_2,...,i_n}\quad m=0,1,2,...$$

С использованием векторного индекса (мультииндекса) $i=(i_1,i_2,...,i_n)=(i_\nu)$, $\nu=\overline{1,n}$, обозначения упрощаются:

$$p_{i_1,i_2,...,i_n}=p_i=P(\overline{\xi}=\overline{y}_i)=P(\overline{y}_i),\ \sum_i P(\overline{y}_i)=1,$$

$$\nu_{\overline{\xi}}^{(m)} = E(\overline{\xi}^m) = \sum_i \overline{y}_i^m p_i \,. \quad (1)$$

Центральный момент второго порядка (ковариационная матрица) случайного вектора $\overline{\xi}$ определяется выражением

$$\mu_{\overline{\xi}}^{(2)} = E((\overline{\xi} - E(\overline{\xi}))^2) = \nu_{\overline{\xi}}^{(2)} - \nu_{\overline{\xi}}^{(1)}\nu_{\overline{\xi}}^{(1)} \,. \quad (2)$$

Случайная дискретная многомерная матрица

Рассмотрим еще более общий случай, когда $\overline{\xi} = (\xi_{v_1, v_2, \dots, v_q})$, $v_1 = \overline{1, n_1}$, …, $v_q = \overline{1, n_q}$, — дискретная случайная q-мерная матрица. Каждый элемент $\xi_{v_1, v_2, \dots, v_q}$ матрицы $\overline{\xi}$ может принимать значения $x_{v_1, v_2, \dots, v_q, i_{v_1, v_2, \dots, v_q}}$, так что множество возможных значений элементов матрицы $\overline{\xi}$ представляет собой $(q+1)$-мерную матрицу $\overline{x} = (x_{v_1, v_2, \dots, v_q, i_{v_1, v_2, \dots, v_q}})$, $v_1 = \overline{1, n_1}$, …, $v_q = \overline{1, n_q}$, $i_{v_1, v_2, \dots, v_q} = \overline{1, k_{v_1, v_2, \dots, v_q}}$, сечение ориентации $(v_1, v_2, \dots, v_q)$ которой содержит $k_{v_1, v_2, \dots, v_q}$ элементов. В компьютерных расчетах матрицу $\overline{x}$ удобно определить как $(n_1 \times n_2 \times \dots \times n_q \times k_{max})$-матрицу, $k_{\max} = \max\limits_{v_1, v_2, \dots, v_q} (k_{v_1, v_2, \dots, v_q})$, заполняя ее неиспользуемые элементы нулями. Введя q-мультииндекс $\nu = (v_1, v_2, \dots, v_q) = (v_\lambda)$, $\lambda = \overline{1, q}$, и индекс $i_\nu = i_{\nu_1, \dots, \nu_q}$, мы можем записать случайную q-мерную матрицу $\overline{\xi}$ в виде $\overline{\xi} = (\xi_\nu)$, $\nu \in \overline{1, n_1} \times \dots \times \overline{1, n_q}$, а множество возможных значений элементов матрицы $\overline{\xi}$ — в виде $\overline{x} = (x_{\nu, i_\nu})$, $\nu \in \overline{1, n_1} \times \dots \times \overline{1, n_q}$, $i_\nu = \overline{1, k_\nu}$. Числа k_ν образуют q-мерную матрицу (k_ν) предельных значений индексов i_ν. Матрицу начальных значений индексов i_ν, состоящую из единиц, обозначим (1_ν) и для q-мерной матрицы (i_ν) будем писать, что $(i_\nu) = \overline{(1_\nu), (k_\nu)}$. Зафиксировав в матрице $\overline{x} = (x_{\nu, i_\nu})$ значение $\nu = \dot{\nu}$, мы получим сечение ориентации $\dot{\nu}$ $\overline{x}_{\dot{\nu}} = (x_{\dot{\nu}, i_\nu})$. Пусть $Y = \times\prod\limits_\nu \overline{x}_\nu = \times\prod\limits_\nu (x_{\nu, i_\nu})$ — декартово произведение всех сечений ориентации ν матрицы $\overline{x} = (x_{\nu, i_\nu})$. Элементами множества Y являются индексированные векторы

$$\overline{y}_{(i_\nu)} = \times\prod_\nu x_{\nu, i_\nu} \,, \quad (3)$$

которые представляют собой возможные значения дискретной случайной q-мерной матрицы $\overline{\xi}$. Распределение вероятностей случайной матрицы $\overline{\xi}$ определяется вероятностями ее возможных значений

$$p_{(i_\nu)} = P(\overline{\xi} = \overline{y}_{(i_\nu)})$$

со свойством нормировки

$$\sum_{(i_\nu)=(1_\nu)}^{(k_\nu)} p_{(i_\nu)} = 1 \,.$$

Вероятности $p_{(i_\nu)}$ можно интерпретировать как элементы $(n = n_1 n_2 \cdots n_q)$-мерной матрицы размером $(k_{1,\ldots,1} \times \cdots \times k_{n_1,n_2,\ldots,n_q})$. Если обозначить $(i_\nu) = i$, $(1_\nu) = 1$, $(k_\nu) = k$, то мы увидим, что в многомерно-матричном случае сохраняются обозначения векторного случая, так что будут справедливы формулы для моментов (1), (2).

Пример

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим случайную дискретную двухмерную матрицу $\overline{\xi} = (\xi_{\nu_1,\nu_2})$, $\nu_1 = \overline{1,2}$, $\nu_2 = \overline{1,2}$:

$$\overline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} \end{pmatrix}.$$

В данном случае мы имеем $q = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$. Зададим матрицу предельных значений индексов в виде

$$k = (k_{\nu_1,\nu_2}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что элементы $\xi_{1,1}$, $\xi_{1,2}$, $\xi_{2,1}$, $\xi_{2,2}$ могут принимать 3, 1, 2 и 2 возможные значения соответственно. Матрица возможных значений элементов случайной матрицы $\overline{\xi}$ представляет собой трехмерную матрицу $\overline{x} = (x_{\nu_1,\nu_2,i_{\nu_1,\nu_2}})$, у которой $i_{1,1} = \overline{1,3}$, $i_{1,2} = 1$, $i_{2,1} = \overline{1,2}$, $i_{2,2} = \overline{1,2}$. Поскольку максимальное число возможных значений элементов $k_{max} = 3$, то примем, что $i_{\nu_1,\nu_2} = \overline{1,3}$ $\forall \nu_1, \nu_2$. Пусть

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overset{(1,1,1)}{0} & \overset{(1,2,1)}{-1} & \overset{(1,1,2)}{1} & \overset{(1,2,2)}{-} & \overset{(1,1,3)}{2} & \overset{(1,2,3)}{-} \\ \overset{(2,1,1)}{-1} & \overset{(2,2,1)}{0} & \overset{(2,1,2)}{1} & \overset{(2,2,2)}{2} & \overset{(2,1,3)}{-} & \overset{(2,2,3)}{-} \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже над элементами матрицы в скобках указаны значения индексов. Знак "–" означает, что значение может быть любым, так как оно не будет участвовать в обработке. Для задания распределения вероятностей рассматриваемой случайной матрицы $\overline{\xi}$ необходимо определить четырехмерную $(3 \times 1 \times 2 \times 2)$-матрицу вероятностей $P(\overline{\xi} = \overline{y}_{i_{1,1},i_{1,2},i_{2,1},i_{2,2}}) =$ $= P(\overline{y}_{i_{1,1},i_{1,2},i_{2,1},i_{2,2}})$ со свойством нормировки $\sum_{i_{1,1}=1}^{3} \sum_{i_{1,2}=1}^{1} \sum_{i_{2,1}=1}^{2} \sum_{i_{2,2}=1}^{2} P(\overline{y}_{i_{1,1},i_{1,2},i_{2,1},i_{2,2}}) = 1$. Определим ее в виде

$$P = \begin{pmatrix} \overset{(1,1,1,1)}{0.10} & \overset{(1,1,2,1)}{0.07} & \overset{(1,1,1,2)}{0.08} & \overset{(1,1,2,2)}{0.09} \\ \overset{(2,1,1,1)}{0.08} & \overset{(2,1,2,1)}{0.06} & \overset{(2,1,1,2)}{0.07} & \overset{(2,1,2,2)}{0.05} \\ \overset{(3,1,1,1)}{0.08} & \overset{(3,1,2,1)}{0.10} & \overset{(3,1,1,2)}{0.12} & \overset{(3,1,2,2)}{0.10} \end{pmatrix}.$$

Каждому элементу этой матрицы соответствует возможное значение $\overline{y}$ матрицы $\overline{\xi}$. Например,

$$p_{3,1,2,1} = P(\xi_{1,1} = x_{1,1,3}, \xi_{1,2} = x_{1,2,1}, \xi_{2,1} = x_{2,1,2}, \xi_{2,2} = x_{2,2,1}) = P\left(\overline{\xi} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Все возможные значения матрицы $\overline{\xi}$ можно получить программным путем на основе формулы (3). В результате компьютерных расчетов по формулам (1), (2) были получены следующие значения моментов случайной матрицы $\overline{\xi}$:

$$v_{\overline{\xi}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.06 & -1.00 \\ -0.06 & 1.02 \end{pmatrix},$$

$$v_{\overline{\xi}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \overset{(1,1,1,1)}{1.1236} & \overset{(1,1,2,1)}{-0.0636} & \overset{(1,1,1,2)}{-1.0600} & \overset{(1,1,2,2)}{1.0812} \\ \overset{(2,1,1,1)}{-0.0636} & \overset{(2,1,2,1)}{0.0036} & \overset{(2,1,1,2)}{0.0600} & \overset{(2,1,2,2)}{-0.0612} \\ \overset{(1,2,1,1)}{-1.0600} & \overset{(1,2,2,1)}{0.0600} & \overset{(1,2,1,2)}{1.0000} & \overset{(1,2,2,2)}{-1.0200} \\ \overset{(2,2,1,1)}{1.0812} & \overset{(2,2,2,1)}{-0.0612} & \overset{(2,2,1,2)}{-1.0200} & \overset{(2,2,2,2)}{1.0400} \end{pmatrix},$$

$$\mu_{\overline{\xi}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \overset{(1,1,1,1)}{0.7364} & \overset{(1,1,2,1)}{0.0236} & \overset{(1,1,1,2)}{0} & \overset{(1,1,2,2)}{0.0388} \\ \overset{(2,1,1,1)}{0.0236} & \overset{(2,1,2,1)}{0.9964} & \overset{(2,1,1,2)}{0} & \overset{(2,1,2,2)}{0.0012} \\ \overset{(1,2,1,1)}{0} & \overset{(1,2,2,1)}{0} & \overset{(1,2,1,2)}{0} & \overset{(1,2,2,2)}{0} \\ \overset{(2,2,1,1)}{0.0388} & \overset{(2,2,2,1)}{0.0012} & \overset{(2,2,1,2)}{0} & \overset{(2,2,2,2)}{0.9996} \end{pmatrix}.$$

Правильность полученных результатов подтверждается ручными расчетами.

RANDOM DISCRETE MULTIDIMENSIONAL MATRIXES

V.S. MUKHA, K.S. KORCHYTS

Abstract

The theory of the random discrete multidimensional matrixes, providing an opportunity of computer use of received results, is developed.

Литература

1. *Уилкс С.* Математическая статистика. М., 1967.
2. *Муха В.С.* Теория вероятностей: Учебное пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений. Мн., 2001.
3. *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. Киев, 1972.
4. *Муха В.С.* Анализ многомерных данных: проблемы, состояние, перспективы // Докл. БГУИР. 2004. № 1. С. 38–49.