

УДК 621.35.6

## ОБРАТИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СТРУКТУР С ЗАМКНУТЫМИ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ ГРАНИЦАМИ

А.А. КУРАЕВ, Т.Л. ПОПКОВА, А.К. СИНИЦЫН, С.И. ЯРОМЕНОК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 2 января 2005

Теоретически доказано и подтверждено на основе вычислительного эксперимента фундаментальное свойство обратимости (в отношении характеристик прямого и обратного распространения и преобразования волн) линейных изотропных электродинамических структур с идеально проводящими границами.

*Ключевые слова:* лемма Лоренца, теорема обратимости, свойство обратимости, периодическая система, нерегулярный волновод.

### Введение

Общие свойства электродинамических структур дают весьма ценную информацию как для исходной постановки задач анализа и синтеза, так и для решения конкретных вопросов по их использованию в тех или иных устройствах СВЧ. Поэтому установление и доказательство некоторых классов таких фундаментальных свойств является одной из важнейших задач электродинамики СВЧ. Ниже доказано одно из весьма общих свойств линейных изотропных электродинамических структур с идеально проводящей границей — их обратимость (независимо от конфигурации) в отношении прямого и обратного распространения и преобразования волн в этих структурах.

### Теорема обратимости

Рассмотрим произвольную конфигурацию электродинамической структуры (рис. 1,а). Здесь  $V$  — внутренний объем структуры, ограниченный проводящей замкнутой поверхностью  $S_{\Sigma} = S_1 + S_2 + \dots + S_i + \dots + S_m$ ; нормаль  $\vec{n}$  к  $S_{\Sigma}$  — внешняя. Дополнительно указаны объемы  $V_1 \in V$  и  $V_2 \in V$ , в которых расположены источники поля: в  $V_1$  система источников  $\dot{\delta}_1^e, \dot{\delta}_1^m$ , в  $V_2$  соответственно  $\dot{\delta}_2^e, \dot{\delta}_2^m$ .

Будем полагать, что источники гармонические и имеют одну и ту же угловую частоту  $\omega$ . Поэтому плотности электрических токов источников и магнитных токов соответственно  $\dot{\delta}_{1,2}^m$  записаны в комплексной форме. Будем считать, что среда, заполняющая  $V$ , линейна и изотропна. Среда может быть поглощающей, но потери в ней также линейны и изотропны. Положим, что  $S_{\Sigma}$  — идеально проводящая. Тогда имеет место граничное условие вида

$$\left[ \vec{n}, \vec{E} \right]_{S_\Sigma} = 0. \quad (1)$$

Будем считать, что источники  $\dot{\delta}_1^e, \dot{\delta}_1^m$  в отсутствие источников  $\dot{\delta}_2^e, \dot{\delta}_2^m$  возбуждают в  $V$  с границей  $S_\Sigma$  поле  $\dot{E}_1, \dot{H}_1$ , а источники  $\dot{\delta}_2^e, \dot{\delta}_2^m$  в отсутствие  $\dot{\delta}_1^e, \dot{\delta}_1^m$  возбуждают поле  $\dot{E}_2, \dot{H}_2$ . В рассматриваемом случае (линейная и изотропная среда в  $V$ ) перечисленные поля и источники связаны леммой Лоренца в следующей формулировке [1]:

$$\oint_{S_\Sigma} \{ [\dot{E}_1, \dot{H}_2] - [\dot{E}_2, \dot{H}_1] \} = \int_V \{ (\dot{\delta}_1^e \dot{E}_2 - \dot{\delta}_2^e \dot{E}_1) - (\dot{\delta}_1^m \dot{H}_2 - \dot{\delta}_2^m \dot{H}_1) \} dV. \quad (2)$$

Учитывая (1) в (2), а также принадлежность источников к  $V_1$  и  $V_2$ , из (2) получаем:

$$\int_{V_1} (\dot{\delta}_1^e \dot{E}_2 - \dot{\delta}_1^m \dot{H}_2) dV_1 = \int_{V_2} (\dot{\delta}_2^e \dot{E}_1 - \dot{\delta}_2^m \dot{H}_1) dV_2 \quad (3)$$

Специализируем (3) к случаю, который иллюстрирует рис. 1,б: источники заданы на идентичных сечениях  $S_{1\perp} = S_\perp$  и  $S_{2\perp} = S_\perp$  в виде поверхностных токов  $\dot{\delta}_S^e$  и  $\dot{\delta}_S^m$ . Положим также, что  $\dot{\delta}_{S1}^e = \dot{\delta}_{S2}^e = \dot{\delta}_S^e$ ,  $\dot{\delta}_{S1}^m = \dot{\delta}_{S2}^m = \dot{\delta}_S^m$ . Тогда из (3) следует

$$\int_{S_\perp} (\dot{E}_2 - \dot{E}_1) \dot{\delta}_S^e dS_\perp - \int_{S_\perp} (\dot{H}_2 - \dot{H}_1) \dot{\delta}_S^m dS_\perp = 0. \quad (4)$$

На компоненты  $\dot{\delta}_S^e, \dot{\delta}_S^m$  никаких ограничений не наложено; эти компоненты можно считать произвольными непрерывными функциями на  $S_\perp$ . Тогда можно использовать основную лемму вариационного исчисления [2], используя которую последовательно при всех компонентах  $\dot{\delta}_i^{e,m}$ , кроме одной, равных нулю, из (4) получаем:

$$\dot{E}_2 - \dot{E}_1 = 0, \quad \dot{H}_2 - \dot{H}_1 = 0. \quad (5)$$

Результат (5) имеет следующий смысл: любые источники  $\dot{\delta}_S^e, \dot{\delta}_S^m$  в сечении  $S_{\perp 2}$  возбуждают в сечении  $S_{\perp 1}$  поле  $\dot{E}_1, \dot{H}_1$  точно такое же, как поле  $\dot{E}_2, \dot{H}_2$ , которое те же источники, помещенные в сечение  $S_{\perp 1}$ , возбуждают в сечении  $S_{\perp 2}$ . Иначе говоря, характеристики рассматриваемой структуры при распространении волн от сечения  $S_{\perp 2}$  к сечению  $S_{\perp 1}$  (справа налево) и от сечения  $S_{\perp 1}$  к сечению  $S_{\perp 2}$  (слева направо) идентичны.

Перейдем к обобщению результата (5). Рассмотрим общий случай, когда  $S_{\perp 1} \neq S_{\perp 2}$ . Это может быть, например, волноводный преобразователь мод. Построим зеркально отображенную относительно  $S_{\perp 2}$  конфигурацию исходной структуры (рис. 1,в). Общая структура теперь отвечает условиям получения (5): входное и выходное сечения однотипны. Более того, структура симметрична относительно  $S_{\perp 2}$  и представляет собой встречно включенные отрезки нерегулярных волноводов одинаковой конфигурации. Поскольку результат (5) для объединенной структуры справедлив, мы приходим к заключению, что и в общем случае имеет место свойство обратимости электродинамических структур произвольной конфигурации при оговоренных выше условиях линейности и изотропности заполняющей структуры среды. Это и есть содержание теоремы обратимости.

Иллюстрации (и подтверждение) теоремы обратимости на основе вычислительного эксперимента приведены ниже.

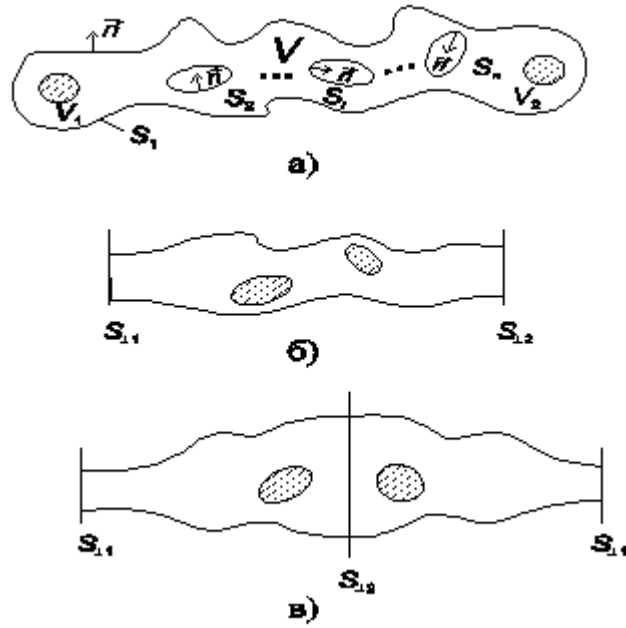


Рис. 1. Конфигурация рассматриваемых областей: *a* — общая произвольная конфигурация рассматриваемой области; *б* — специальная конфигурация с источниками в сечениях  $S_{\perp 1}$  и  $S_{\perp 2}$ ; *в* — симметричная конфигурация

### Продольно-несимметричный периодический волновод с круговым сечением на $H_{0i}$ -модах

Исследование проводилось на основе моделей и методик расчета, развитых в [3]. На рис. 2,*a* — профиль волноводной секции ( $b = b(T)/b_{кр1}$ ,  $b_{кр1}$  — критический для  $H_{01}$ -волны радиус,  $T = z\omega/c$ ,  $\omega$  — угловая частота поля,  $c = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ ); на рис. 2,*б* — распространение волн слева направо:  $P_i = P_i^+ - P_i^-$  — безразмерная разностная мощность, переносимая в положительном направлении  $z$  для  $H_{0i}$  моды,  $P_i^+$ ,  $P_i^-$  — соответственно безразмерные мощности попутной и встречной волн; на рис. 2,*в* — распространение волн справа налево,  $P_i$  имеет тот же смысл. Как следует из сравнения данных на рис. 2,*б,в*, в пределах точности вычислений приведенный отрезок несимметричного периодического волновода обладает свойством обратимости.

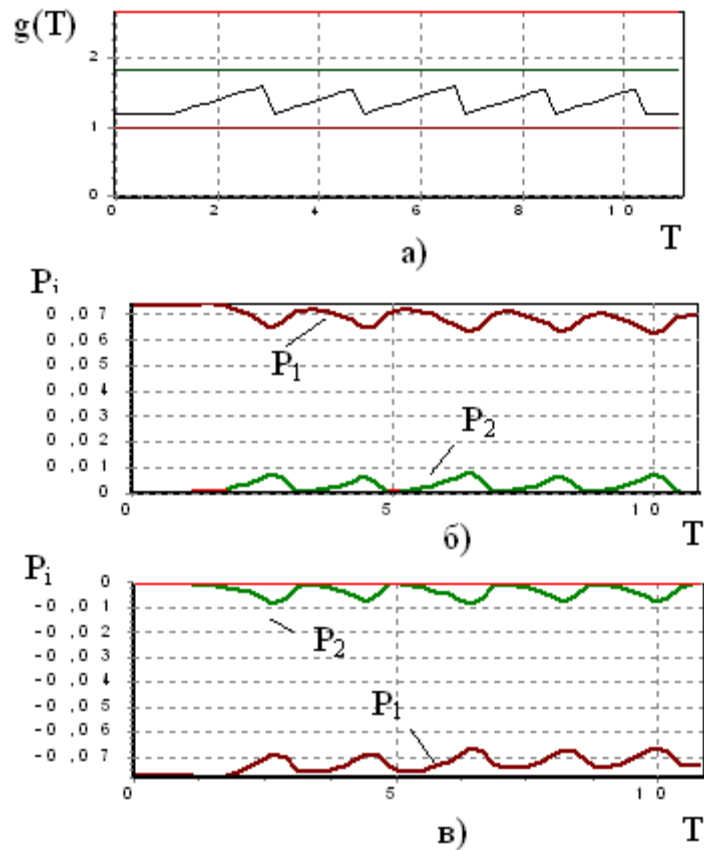


Рис. 2. Характеристики продольно-несимметричного периодического волновода: *a* — профиль волновода; *б* — случай распространения волн слева направо;  $P_i$  — разностные потоки мощности в  $+z$ -направлении соответственно для  $i=1, 2$ ; *в* — случай обратного распространения волн

### Отрезок нерегулярного волновода с круговым сечением на модах $H_{0i}$

Профиль волновода изображен на рис. 3,а. Нормированные разностные мощности  $P_i(z)$  для мод  $H_{01}$  ( $i = 1$ ) и  $H_{02}$  ( $i = 2$ ) при распространении слева направо ( $P_i > 0$ ) приведены на рис. 3,б, при обратном распространении ( $P_i < 0$ ) — на рис. 3,в. Сравнение данных рис. 3,б и рис. 3,в указывает на полную обратимость отрезка нерегулярного волновода.

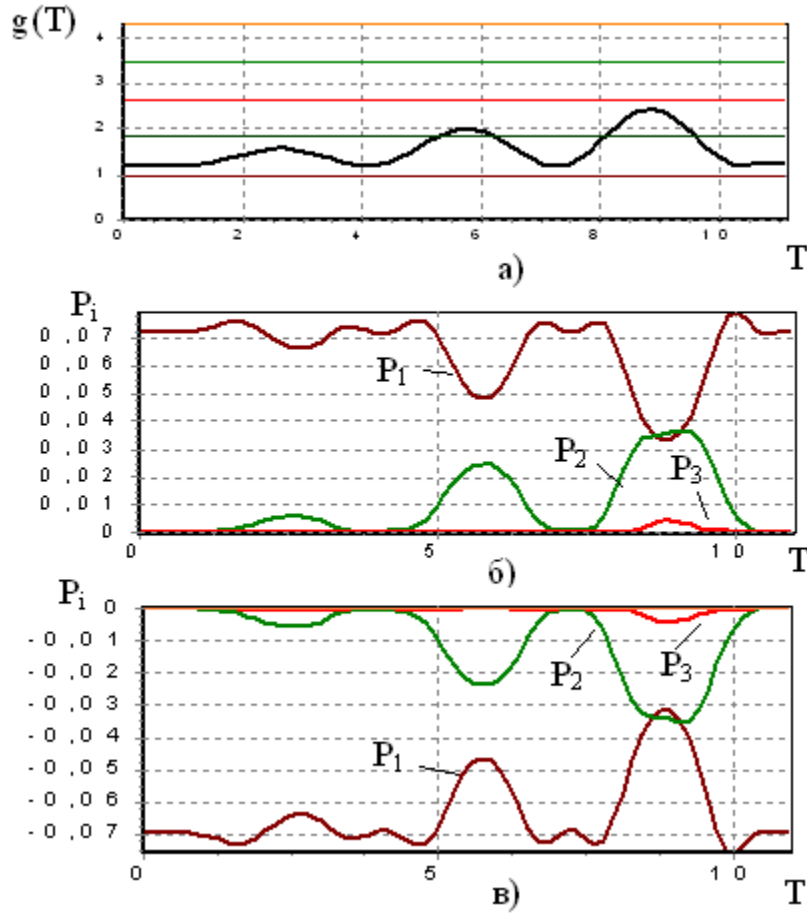


Рис. 3. Характеристики отрезка нерегулярного волновода: *a* — профиль волновода; *б* — случай распространения волн слева направо:  $P_i$  — разностные потоки мощности в  $+z$ -направлении соответственно для  $i=1,2,3$ ; *в* — случай обратного распространения волн

### Трансформатор моды $H_{01}$ в $H_{02}$ на нерегулярном волноводе

В предыдущих случаях входное и выходное сечения были идентичны, равно как и тип волны на входе и на выходе. Теперь ситуация иная: входное сечение существенно меньше выходного (входное — закритическое для  $H_{02}$ -волн, выходное — нет.); на вход подается волна  $H_{01}$ , на выходе трансформатора — волна  $H_{02}$ . На рис. 4,а изображен профиль трансформатора. На рис. 4,б показан прямой режим трансформатора: на входе —  $P_1$  падающей  $H_{01}$ -волны, на выходе —  $P_2$  проходящей  $H_{02}$ -волны. На рис. 4,в изображен обратный режим трансформатора: справа падает волна  $H_{02}$  ( $P_2 < 0$ ), слева в  $-z$ -направлении выходит волна  $H_{01}$  ( $P_2 > 0$ ). Сравнение данных рис. 4,б и рис. 4,в указывает на то, что и для трансформатора мод теорема обратимости выполняется.

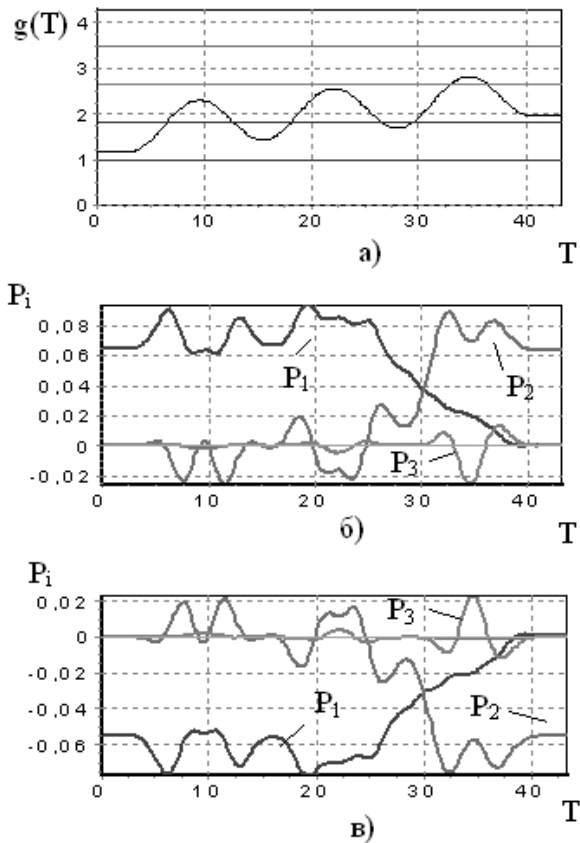


Рис. 4. Характеристики трансформатора моды  $H_{01}$  в  $H_{02}$ : *a* — профиль волновода; *б* — случай распространения волн слева направо:  $P_i$  — разностные потоки мощности в  $+z$ -направлении соответственно для  $i=1,2$ ; *в* — случай обратного распространения волн

### Заключение

Доказанная теорема, численные примеры обосновывают фундаментальное свойство произвольно-нерегулярных электродинамических систем с линейным и изотропным заполнением и идеально проводящими границами – обратимость характеристик при прямом и обратном распространении волн.

## THE RETURNABILITY OF LINEAR ISOTROPIC ELECTRODYNAMIC SYSTEM WITH CLOSED (CONFINED) IDEAL CONDUCTING BOUNDARY

A.A. KURAYEV, T.L. POPKOVA, A.K. SINITSYN, S.I. YAROMENOK

### Abstract

The fundamental property of returnability of linear isotropic electrodynamic system with ideal conducting boundary is theoretically proved and is validated (corrrbrated) on the base of calculating experiment.

### Литература

1. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Синицын А.К. Электродинамика и распространение радиоволн. Мн., 2004.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969.
3. Кураев А.А., Луцицкая И.В., Попкова Т.Л., Яроменок С.И. // Докл. БГУИР. 2003. Т. 1, № 4. С. 49–52.