УДК 621.317.846

ТЕХНИКА ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА НЕКОМПАКТНОЙ ГРУППЕ: СЛУЧАЙ ЗАРЯЖЕННОГО ВЕКТОРНОГО БОЗОНА

Г.В. ГРУШЕВСКАЯ, Л.И. ГУРСКИЙ

Белорусский государственный университет
пр. Ф. Скорины, 4, Минск, 220050, Беларусь,

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 9 января 2003

Предложена техника проекционных операторов для решения релятивистского волнового уравнения на некомпактной группе. Данная техника применена для построения волнового уравнения, описывающего поведение заряженного векторного бозона в потенциале. Показано, что полученные уравнения приблизительно описывают водородоподобный атом и позволяют оценить такие релятивистские поправки, как тонкая структура линий водорода, с высокой точностью.

Ключевые слова: проекционный оператор, волновое уравнение, квантовая модель.

Введение

Геометрический подход играет важную роль при изучении квантовых моделей и релятивистских процессов [1–3]. В данной работе техника проекционных операторов использована для рассмотрения движения релятивистского векторного бозона на некомпактной группе симметрии SO(4,2). Данные уравнения движения могут быть использованы для описания водородоподобного атома, поскольку он как составная квантовая система имеет целый спин. В работе будет показано, что, используя эти уравнения, можно оценить релятивисткие поправки, описывающие тонкую структуру водородных линий, с высокой точностью.

Целью данной работы является развитие геометрического метода проекционных операторов и описание на этой основе движения заряженного векторного бозона в потенциале.

Техника проекционных операторов

Рассмотрим уравнение для релятивистской квантовой частицы в двумерном плоском пространстве с двумя комплексными координатами:

$$\left|\xi_s\right\rangle, \left|\xi_{\dot{s}}\right\rangle, \quad s(\dot{s}) = 1,2; \tag{1}$$

являющимися компонентами кет-биспинора.

Рассмотрим движение свободной частицы, в гамильтониан $\mathcal{H}$ которой входит только релятивистская кинетическая энергия T. Для сравнения напомним классический аналог

$T^2 = Z^2 + \vec{k}^2$ [8]. Здесь $\vec{k}$ — импульс, **Z** — "масса", скорость света c=1. Тогда релятивистское волновое уравнение запишем как

$$T|\psi\rangle = i\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}, \tag{2}$$

где $|\psi\rangle$ — волновая функция; t — время; i — мнимая единица. Уравнение (2) перепишем в квадратичной форме

$$\left(\mathcal{H}^{\dagger}\mathcal{H} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)|\psi\rangle = \left(-\frac{\partial^2}{\langle\partial\xi_{\dot{s}}|\partial\xi_s\rangle} - Z^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}|\xi_{\dot{s}}\rangle\langle\xi_s|\right)|\psi\rangle \equiv \left(H - Z^2\right)|\psi\rangle = 0. \tag{3}$$

Здесь под дважды встречающимися индексами подразумевается суммирование, и при этом учитывается, что $\left|\xi_{\dot{s}}\right\rangle\left\langle\xi_s\right| = \hat{I}$, где $\hat{I}$ — операторная единица; волновая функция $\langle\xi_s|\Psi\rangle$ берется в представлении (1). Из (3) следует, что квадрат Z можно рассматривать как собственные значения оператора H, равного $i\dfrac{\partial}{\partial t_1}$, где t_1 — временная координата, не зависящая от t. Следовательно, уравнение (3) задается на многообразии с четырьмя пространственноподобными и двумя времениподобными координатами.

Перейдем в представление $\{|\phi_i\rangle\}$, в котором операторное представление $\hat{\xi} \equiv T_{\xi}$ группы сдвигов $\{\xi\}$ имеет вид $\hat{\xi} \to i\dfrac{\partial}{\partial k_i}$, где k_i — импульс. Тогда, используя свойство проекционных операторов [4], уравнение (3) перепишем в этом представлении в виде

$$\left(-\frac{\partial^2}{\langle\partial\xi_{\dot{s}}|\partial\xi_s\rangle} - Z^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta_{ki}\left(|\phi\rangle\langle\phi_k|\xi_{\dot{s}}\rangle\langle\xi_s|\xi_{\dot{s}}\phi_i\rangle\langle\phi_r|\right)\right)|\psi_r\rangle = 0. \tag{4}$$

Компоненты волновой функции свободной частицы в этом представлении будут

$$\langle\phi_k|\psi\rangle = \exp\left\{i\left(k_s\xi_{si} + \varepsilon_{srq}k_s\frac{1}{|\xi|^2}\left[\xi_{ri},\xi_{qi}\right]\right)\right\}\exp(i\omega t), \tag{5}$$

$$\xi_{si} \equiv \langle\phi_i|\xi_s\rangle. \tag{6}$$

Здесь первый член описывает перенос в единицу группы; коммутатор, входящий во второе слагаемое, является элементом алгебры группы вращений; ω — частота, $|\xi|^2 = \sum_{\nu=1}^{4}\xi_\nu^2$, ξ_{si} — компоненты биспинора в представлении $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^{N}$, N=1,2, …, являющиеся c-числами; ε_{srq} — тензор Леви–Чевита.

Используя определение проектора, после дифференцирования по t, $\vec{k}$ преобразуем уравнение (4) к виду

$$\left(-\frac{\partial^2}{\langle\partial\xi_{\dot{s}}|\partial\xi_s\rangle} - Z^2 + \omega^2\left(\xi_{\dot{s}i} + \varepsilon_{\dot{s}\dot{r}\dot{q}}\frac{1}{|\xi|^2}\left[\xi_{\dot{r}i},\xi_{\dot{q}i}\right]\right)\left(\xi_{si} + \varepsilon_{skq}\frac{1}{|\xi|^2}\left[\xi_{ki},\xi_{qi}\right]\right)|\phi_i\rangle\langle\phi_r|\right)|\psi_r\rangle = 0 \tag{7}$$

Предположив выполнение условия ортогональности базиса $\{\xi_{si}\}$, уравнение (7) окончательно записываем в сокращенном виде:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\langle\partial\xi_{\dot{s}}|\partial\xi_s\rangle}-Z^2+\omega^2\left(\vec{\xi}_{\dot{s}}\vec{\xi}_s+\varepsilon_{\dot{s}\dot{r}\dot{q}}\frac{1}{|\xi|^4}\left[\vec{\xi}_{\dot{r}},\vec{\xi}_{\dot{q}}\right]\varepsilon_{srq}\left[\vec{\xi}_r,\vec{\xi}_q\right]\right)|\Phi\rangle\langle\Phi|\right)|\psi\rangle=0, \quad (8)$$

где $\vec{\xi}_s \overset{def}{=} \{\xi_{si}\}_i$ — компоненты биспинора в базисе $\Phi \overset{def}{=} \{|\phi_i\rangle\}$.

Для получения реального уравнения движения рассмотрим движение частицы в трехмерном пространстве. Как известно [5], отображение трехмерной сферы $S^3 \in \mathbb{R}^4$ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ двузначно. Следовательно, набор из четырех чисел, характеризующих положение частицы в четырехмерном пространстве, заменяется набором также из четырех чисел $\{x_\lambda, S\}$, $\lambda=1,2,3$, но одно из них (S) — дискретная величина. S принимает два значения $S=\pm1$ в зависимости от того, проецируется сфера с выколотым северным или южным полюсом. Физическая интерпретация S — это спиральность частицы в результате проекции P на трехмерное подпространство. Для частицы $\left|x_\lambda^{R(L)}\right\rangle$ с определенной спиральностью индексы R,L обозначают соответственно право- и левоспиральные частицы. Тогда можем записать тождество

$$\begin{aligned}&\sum_\mu|\xi_\mu\rangle\langle\xi_\mu|\psi\rangle+\frac{1}{2}\sum_\lambda\left[|\xi_\kappa\rangle\left(\sigma_\lambda^+\right)_{\kappa\nu}\langle\xi_\nu|\psi\rangle+|\xi_\kappa\rangle\left(\sigma_\lambda^-\right)_{\kappa\nu}\langle\xi_\nu|\psi\rangle\right]\equiv\\&\equiv\sum_\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\left|x_\lambda^L\right\rangle\left\langle x_\lambda^L\right|+\left|x_\lambda^R\right\rangle\left\langle x_\lambda^R\right|\right)\psi\rangle+\frac{1}{2}\left(\left|x_\lambda^L\right\rangle\left\langle x_\lambda^L\right|+\left|x_\lambda^R\right\rangle\left\langle x_\lambda^R\right|\right)\psi\rangle\right],\end{aligned} \quad (9)$$

где матрицы $\sigma_\lambda^\pm$ определяются выражениями:

$$\sigma_\lambda^+=\varepsilon_{\lambda ij}\sigma_{ij},\quad \sigma_\lambda^-=\varepsilon_{\lambda ji}\sigma_{ij};\quad \lambda,i,j=1,2,3; \quad (10)$$

индексы κ,μ,ν пробегают значения $s,\dot{s}$; $\sigma_{ij}=\frac{1}{2}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]$, γ_μ — матрицы Дирака [6]. В дальнейшем знак $\pm$ будем опускать. Так как в σ_λ входит кососимметричный тензор $\varepsilon_{\lambda ij}$, то обобщенные матрицы Паули σ_λ являются псевдовекторами. Поэтому право- и левоспиральные частицы различаются.

Из разложения (9) волновой функции $|\psi\rangle$ в ряд следует, что проекция P, определяемая выражением:

$$P|\psi\rangle=\frac{1}{2}\left(\left|x_\lambda^R\right\rangle\left\langle x_\lambda^R\right|+\left|x_\lambda^L\right\rangle\left\langle x_\lambda^L\right|\right)\psi\rangle, \quad (11)$$

может быть представлена в виде

$$P|\psi\rangle=\frac{1}{2}\left\{\sum_\mu|\xi_\mu\rangle\langle\xi_\mu|\psi\rangle+\sum_\lambda|\xi_\kappa\rangle\left(\sigma_\lambda\right)_{\kappa\nu}\langle\xi_\nu|\psi\rangle\right\}. \quad (12)$$

Докажем, что проектор (12) отбирает состояния с заданной ориентацией. Правая часть выражения (12) в представлении $\{|\xi_i\rangle\}_i$ записывается как

$$P\langle\xi_\lambda|\psi\rangle=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_\lambda\langle\xi_\lambda|\xi_\kappa\rangle\left(\sigma_\lambda\right)_{\kappa\nu}\right\}\langle\xi_\nu|\psi\rangle. \quad (13)$$

Введем 4-вектор $s^{\lambda} = \langle \xi_{\lambda} | \xi_{\kappa} \rangle$, описывающий спин системы. Справа в (13) стоит свертка вектора спина s^{λ} с матрицами σ_{λ}. Отсюда следует, что *P=P(s)* определяется в *s*-представлении выражением

$$P(s) = \frac{1}{2}\left(1 + s^{\mu}\gamma_{\mu}\right), \quad s^{\mu} = \left\{0, s^{\lambda}\right\}. \tag{14}$$

Формула (14) — это известное выражение для проекционного оператора, отбирающего спиноры с заданной ориентацией в неподвижной системе координат [6]. Следовательно, можно представить проектор *P* в виде (12). Равенство (12) в матричной форме (6) для представления $\Phi = X = X^{R} = X^{L\dagger}$ после умножения слева на $\left\langle x_{\lambda}^{R} \right|$ с учетом условия ортонорированности базиса $\left\langle x_{\lambda}^{R} \middle| x_{\lambda}^{R} \right\rangle = 1$ примет вид

$$\left\langle x_{\lambda}^{R} \middle| x_{\lambda}^{L} \right\rangle \left\langle x_{\lambda}^{L} \middle| \psi \right\rangle = \left\langle x_{\lambda}^{R} \middle| \xi_{\kappa} \right\rangle \left(\sigma_{\lambda}\right)_{\kappa\nu} \left\langle \xi_{\nu} \middle| x_{\lambda}^{L} \right\rangle \left\langle x_{\lambda}^{L} \middle| \psi \right\rangle. \tag{15}$$

Введем обозначения

$$x_{\lambda} = \left\langle x_{\lambda}^{R} \middle| x_{\lambda}^{L} \right\rangle; \quad \xi_{\kappa} = \left\langle x_{\lambda}^{R} \middle| \xi_{\kappa} \right\rangle. \tag{16}$$

После несложных преобразований с учетом (16) выражение (15) запишется в виде

$$x_{\lambda} = \xi_{\kappa} \left(\sigma_{\lambda}\right)_{\kappa\nu} \xi_{\nu}. \tag{17}$$

Из изложенного выше следует, что для осуществления проектирования необходимо заменить координаты, согласно (17), в уравнении движения (8) и в качестве волновой функции ψ выбрать волновую функцию, проекция *P* которой имеет вид

$$\left|\psi\right\rangle = P\left|\psi\right\rangle \tag{18}$$

Выберем такую полярную систему координат $\{\rho_i, \chi_i\}\big|_{i=1}^{2}$, которая удовлетворяет условию $\rho_i = \sqrt{\xi_i^2 + \xi_{i+1}^2},\ i = 1,2.$ При этом χ_i — полярный угол в плоскости $\{\rho_i, \chi_i\}$, i=1,2. Тогда условие (18) примет вид

$$\langle \rho_1, \rho_2, \chi_1, \chi_2 | \psi \rangle = \langle \rho_1, \rho_2, \chi_1, \chi_2 | P\,\psi \rangle = \langle \rho_1, \rho_2, \chi_2 = f(\chi_1) | \psi \rangle, \tag{19}$$

где $f(\chi_1)$ — функция от полярного угла χ_1. Вышеприведенное позволяет записать уравнение (8) в трехмерном физическом пространстве.

Рассмотрим случай частиц с целым спином в покоящейся системе отсчета.

Уравнение движения частицы с целым спином

Для релятивистской частицы с целым спином в покоящейся системе отсчета вектор спина s^{μ} имеет вид [6]:

$$s^{\mu} = \{0, s_1, s_2, s_3\}. \tag{20}$$

Тогда $\vec{\xi}_s$ в уравнении (8) определен на обычном *c*-числовом пространстве, т.е. пространстве с коммутационными соотношениями. Так как компоненты вектора $\vec{\xi}_s$ — обычные *c*-числа, то коммутаторы в последнем слагаемом равны нулю. Следовательно, имеем

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\xi_{\dot s}\partial\xi_s} - Z^2 + \omega^2\left(\overline{\xi}_{\dot s}\xi_s\right)|\Phi\rangle\langle\Phi|\right)|\psi\rangle = 0. \tag{21}$$

Здесь $\overline{\xi}_{\dot s}$ — транспонированный спинор, сопряженный к спинору ξ_s. Полученное уравнение (21) является уравнением для изотропного гармонического квантового осциллятора с массой $m = \frac{1}{2}$ в двумерном пространстве с комплексными координатами $\xi_s \overset{def}{=} \langle\Phi = X|\xi_s\rangle \equiv \vec{\xi}_s$, $s = 1,2$; являющимися компонентами биспинора в представлении $\Phi = X$, определенном на обычном *c*-числовом пространстве.

В следующем параграфе получим волновое уравнение для заряженного векторного бозона на некомпактной группе.

Построение волнового уравнения для заряженного векторного бозона на некомпактной группе

Используя предложенную в предыдущем параграфе технику (подробности см. в [7]), получаем, что уравнение движения (21) в сферической системе координат можно представить в виде

$$\left[-\nabla^2 - \left(E_1 + \frac{\alpha}{R}\right)^2 + \left(m_1 - \frac{\alpha}{R}\right)^2\right]\psi = 0, \tag{22}$$

которое, в принципе, является, как и должно быть, уравнением Клейна—Гордона со скалярным потенциалом $\varphi(R) = -i\,\alpha/R$ и векторным потенциалом $A(R) = -i\,\alpha/R$, где *A(R)* — приращение *R*-й компоненты градиента $\vec{\nabla}$. Это следует из вида лапласиана в сферических координатах и из того, что имеем $\psi \equiv \{\psi_i\}_{i=1}^3 \overset{def}{=} \vec{\psi}$ и сферическая симметрия задачи дает $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}_R\psi \equiv \vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}_R \times \vec{\psi}\right) = 0$; $\vec{\nabla}_R$ — радиальная компонента градиента. Поэтому окончательно можем переписать уравнение (22) в виде

$$\left[\hat{P}^2 - \left(E_1 + \frac{\alpha}{R}\right)^2 + m_1^2\right]\psi^* = 0,\ \ \hat{P} = \tau_3\left(P_R + i\frac{\mathcal{M}}{R}\right),\ \ \mathcal{M} = -\frac{\tau_1}{\sin\theta}p_{\hat{o}} + \tau_2 p_\theta\,, \tag{23}$$

где ψ^* — волновая функция частицы с целым спином, которая определяется через обобщенные сферические функции с целым спином и получается в результате преобразования исходной волновой функции, аналогичного [8] как для фермионов; волновая функция ψ^* является собственной функцией оператора $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}\psi = m_1\psi$; $\psi = \psi^*/R$; τ_i, *i*=1, 2, 3 — генераторы группы вращений SO(3) в матричном виде, которые являются аналогом обобщенных матриц Паули для сферически симметричного уравнения Дирака; $\hat{P}$ — оператор количества движения, получаемый добавлением сферических компонент вектор-потенциала поля $\vec{A} = \{A(R), 0, 0\}$ к обычным операторам импульса, имеющим вид производных (касательных векторов): $P_R = p_R + A(R)$, $p_R = -i\hbar\frac{\partial}{\partial R}$, $p_\theta = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}$, $p_\phi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$. Кроме того, при выводе формулы (22) из формулы (23) учли, что в представлении, где $\psi = \psi^*/R$, выполняется равенство: $\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(RA_R\right)\right]\frac{\psi^*}{R} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{1}{R}\right)\right]\frac{\psi^*}{R} = 0$.

Более того, замечаем, что если учесть в явном виде выражение для собственных значений Z^2 гамильтониана двумерного гармонического осциллятора (21) с массой $m = \frac{1}{2}$ и собственной частотой $\omega_0 = 2\omega$:

$$Z^2 = 2\omega(n_r + l + 1), \quad \hbar = 1, \tag{24}$$

уравнение (22) может быть переписано после элементарной подстановки $E_1^2 - m_1^2 \Rightarrow 4\omega^2$, $\alpha(E_1 + m_1) \Rightarrow Z^2$ в виде

$$-\Delta\psi - \frac{2Z^2}{R}\psi = E_n\psi, \tag{25}$$

где

$$E_n = -\frac{Z^4}{(n_r + l + 1)^2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad \hbar = 1, \tag{26}$$

n_r, l — квантовые числа гармонического осциллятора. Положим $2Z^2 \Rightarrow e^2$. Тогда, если принять, что *e* — заряд электрона, уравнение (25) является уравнением на собственные функции для собственных значений E_n водородопобного атома.

Асимптотическое решение

Очевидно, что для релятивистского бозона (22) можно записать $(E_1^2 - m_1^2)n^2 = \alpha^2(E_1 + m_1)^2$ и $\frac{Z^2}{n^2} = \frac{E_1 - m_1}{\alpha}$. Очевидно, релятивистский бозон (22) имеет спектр $E_1 = m_1\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^{*2}}\right)/\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^{*2}}\right)$ со спектром масс $m_1 = \frac{\tilde{Z}^2}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)$, где $n = n_r + l + 1$, $n^* = n_r^* + l^* + 1$, $\tilde{Z}^2 = \frac{Z^2}{\alpha}$. Следовательно, уравнение (22) описывает составную физическую систему. Выберем $\alpha = i\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, что дает кулоновский потенциал. Тогда уравнение (22) позволяет получить релятивистские поправки к спектру атома водорода в нерелятивистском пределе $n(n^*) \to \infty$. С учетом изложенного выше спектр в этом случае имеет вид

$$E_1 \approx \frac{\tilde{Z}^2}{2}\left(1 - \frac{\gamma^2}{n^{*2}}\right)\left(1 - \frac{\gamma^4}{4n^4}\right), \tag{27}$$

если положить, что спектр состоит из двух серий: нечетной $\{n^*\}$ и четной $\{n\} \to \{2n\}$ и серии близки: $\frac{\gamma^2}{n^{*2}} - \frac{\gamma^2}{4n^2} = \bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon} \ll 1$. Так как серии близки, то

$$n^{*2} \approx n^2 + \varepsilon, \quad |\varepsilon|/n^2 \ll 1. \tag{28}$$

Выберем ε в виде

$$\varepsilon = 2(n - |k|)\left(\sqrt{k^2 - \gamma^2} - |k|\right) \approx -(n - |k|)\frac{\gamma^2}{|k|}, \tag{29}$$

где *k*= *-l,l+1*. Введем обозначения: $\tilde{Z}^2 \Rightarrow m$, где *m* — масса частицы. Тогда, разлагая в ряд по $\frac{\gamma^2(n - |k|)}{|k|}$, получаем с точностью до членов порядка $m\gamma^8$

$$E_1 \approx \frac{m}{2} - \frac{m\gamma^2}{2n^2} - \frac{m\gamma^4}{8n^3}\left(\frac{4}{|k|} - \frac{3}{n}\right) - \frac{m\gamma^6}{8n^4}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{8}{n|k|} + \frac{4}{k^2}\right) + O(\gamma^8). \tag{30}$$

Из формулы (30) следует, что первый член дает релятивитскую энергию покоя рассматриваемой составной системы с приведенной массой *m/*2. Второй член дает формулу Ридберга. Третий член — релятивистская поправка, которая описывает тонкую структуру водородных линий с постоянной тонкой структуры γ в системе единиц *e=1*, $\hbar = 1$, *c=1*. Четвертый член – это релятивистская поправка, которую дает используемый метод расчета.

Симметрия уравнений движения частицы с целым спином

Найдем группы симметрии уравнений движений (22) и (25). Определим на биспиноре $(\xi_s, \xi_{\dot{s}})^T$ операторы рождения $\hat{a}^+$ и уничтожения $\hat{a}$:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_s \\ a_{\dot{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega}\left(\xi_s + \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \xi_{\dot{s}}}\right) \\ \sqrt{\omega}\left(\xi_{\dot{s}} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \xi_s}\right) \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^+ = \begin{pmatrix} a_s^+ \\ a_{\dot{s}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega}\left(\xi_{\dot{s}} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \xi_s}\right) \\ \sqrt{\omega}\left(\xi_s - \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial \xi_{\dot{s}}}\right) \end{pmatrix}^T \tag{31}$$

где знак *T* означает транспонирование. Определим с точностью до знака операторы, коммутирующие с гамильтонианом $\mathcal{H}$ уравнения (21):

$$\begin{aligned} &M_\lambda = (\sigma_\lambda)_{\dot{s}t}\, a_t a_{\dot{s}}, && M_\lambda^+ = (\sigma_\lambda)_{\dot{s}t}\, a_s^+ a_{\dot{t}}^+, \\ &N_\lambda^a = (\sigma_\lambda)_{st}\, a_s^+ a_t, && N_\lambda^b = (\sigma_\lambda)_{\dot{s}\dot{t}}\, a_{\dot{t}}^+ a_{\dot{s}}, \\ &P = a_s a_{\dot{s}}, && P^+ = a_s^+ a_{\dot{s}}^+, \\ &H = 2 + a_s^+ a_s + a_{\dot{s}}^+ a_{\dot{s}}. && \end{aligned} \tag{32}$$

Используя перестановочные соотношения для операторов уничтожения и рождения (31), можно показать, что пятнадцать операторов (32) образуют базисный набор генераторов алгебры группы симметрии, схожей с алгеброй Ли группы SO(4,2) или SO(6). Группа Ли SO(4,2) — некомпактна, группа Ли SO(6) — компактная группа. Согласно "no-go"-теореме [6], имеющей место для бозонных степеней свободы, не существует конечноразмерного унитарного представления некомпактной группы Ли, из чего следует, что любое нетривиальное объединение групп Пуанкаре и внутренней симметрии имеет единичную *S*-матрицу. Уравнение (22) ((23)) описывает частицу, волновая функция которой преобразуется по бесконечномерному представлению некомпактной группы Ли. Отсюда и из "no-go"-теоремы [6] следует, что полученное релятивистское уравнение (23) обладает симметрией SO(4,2) и приемлемо для описания в произвольной системе отсчета.

Заключение

Уравнение (25) является уравнением Шредингера для водородоподобного атома. Уравнение (25) также должно описывать локально физическую систему, имеющую симметрию, схожую с некомпактной группой симметрии SO(4,2). Это впервые было замечено Фоком [9], который указал на инвариантность уравнения Шредингера для водородоподобного атома относительно четырехмерных вращений. Но уравнение (25) не противоречит "no-go"-теореме только в том случае, если оно описывает частицу, волновая функция которой преобразуется по представлению компактной группы, схожей с группой SO(4,2). Группа SO(4,2) подобна группе SO(6). Генераторы этих групп отличаются знаками метрических множителей [11]. Отсюда делаем вывод, что уравнение (25) описывает частицу, волновая функция которой преобразуется по представлению компактной группы SO(6).

Это описание приемлемо для покоящейся системы отсчета, когда можно пренебречь бустовыми преобразованиями группы SO(4,2).

Таким образом, в рамках метода проекционных операторов получены два уравнения движения векторного бозона, одно из которых является точным (уравнение (22)), а второе уравнение (уравнение (25)) описывает движение векторного бозона приближенно. Водородоподобный атом – это составная квантовая система с целым спином и в стационарном случае, не учитывающем бустовых преобразований, замена динамической группы симметрии SO(4,2) на SO(6) дает нерелятивистское уравнение Шредингера для водородоподобного атома. На этом основании приходим к заключению — найденные релятивистские поправки (30) описывают тонкую структуру водородных линий с точностью порядка γ^8. Бесконечнокомпонентные волновые уравнения применялись для описания водородоподобного атома в работе [12].

A PROJECTION OPERATOR TECHNIQUE FOR SOLUTION OF RELATIVISTIC WAVE EQUATION ON NON-COMPACT GROUP: THE CASE OF A CHARGED VECTOR-BOSON

H.V. GRUSHEVSKAYA, L.I. GURSKII

Summary

A projection operators' technique for solution of relativistic wave equation on non-compact group was proposed. This technique was applied to construction of wave equations for charged vector boson in a potential field. It was shown that these equations approximately describe a hydrogen-like atom and allow to estimate relativistic corrections such as a fine structure of hydrogen atom's lines with high accuracy.

Литература

1. *Волобуев И.П., Кубишин Ю.А.* Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их применения в теории поля. М., 1998.
2. *Gurskii L.I., Komarov L.I., Solodukhin A.M.* // Inter. J. of Quantum Chemistry. Vol. 72. P. 499–508.
3. *Feranchuk I.D., Gurskii L.I., Komarov L.I. et al.* // Acta Crystallographics. 2002. Section A. Vol. 58. P. 370–384.
4. *Barut A.O., Rączka R.* Theory of group representations and applications. Vol. 1, 2. Warszawa, 1977.
5. *Guillemin V., Sternberg S.* Geometric asymptotics. AMS, Providence, Rhode Island, 1977.
6. *Michio Kaku.* Quantum field theory. Oxford. 1993.
7. *Grushevskaya H.V., Gurskii L.I.* A projection operator technique for solution of relativistic wave equation on non-compact group: the case of a charged vector-boson // Эл.архив www.arXiv.org, quant-ph/0301176.
8. *Фок В.А.* Начала квантовой механики. М., 1976.
9. *Fock V.A.* // Z. Phys. 1935. Vol. 98. P. 145.
10. *Jost R.* // Helv.Phys.Acta. 1966. Vol. 39. P. 369.
11. *Аронсон Е.Б., Малкин И.А., Манко В.И.* // ЭЧАЯ. 1974. Vol. 5. P. 122.
12. *Nambu Y.* // Phys. Rev. 1961.Vol. 160. P. 1171.