УДК 621.372.3

РАДИОМЕХАНИКА КАК ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ В ЛИНЕЙНОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ СИГНАЛОВ

А.Г. ОНИЩУК

Военная академия Республики Беларусь
Гуртьева, 1, Минск, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 20 ноября 2003 г.

Рассматривается линейная система передачи сигналов (СПС). Множество сигналов представляется в виде линейных энергетических пространств сигналов (ЭПС), в которых метрика определяется квадратичными формами (КФ) действительных мощностей сигналов. Каждое ЭПС порождает инварианты и соответствующие им фундаментальные группы движений (трансформационных преобразований), сохраняющих метрику ЭПС. Определена область радиотехники — радиомеханика как теория инвариантов группы трансформационных преобразований. Основными инвариантами в ЭПС являются стационарные (экстремальные) значения энергетических характеристик (ЭХ), которые характеризуют потенциальные возможности СПС по передачи сигналов с минимальными потерями, искажениями и шумами и могут быть реализованы с помощью согласующих устройств (СУ). В радиомеханике задача нахождения инвариантов и параметров СУ решается как задача на собственные значения пучков КФ ЭПС. Методами структурного анализа определяются канонические структуры СПС в виде ядра, порождаемого собственными значениями, и оболочки, параметры которой определяются собственными векторами пучков КФ. Оптимизация ЭХ достигается с помощью СУ методами структурно-параметрического синтеза и связана с выбором оптимальных разрешенных траекторий движения сигналов в ЭПС.

Ключевые слова: инвариант, радиомеханика, система передачи сигналов, согласование, энергетическое пространство сигналов.

1. Введение

Среди ключевых проблем радиотехники особое место занимают проблемы передачи радиосигналов с минимальными потерями и искажениями. Особенность данных проблем определяется их усложнением и растущим многообразием, что обусловлено как применением все более сложных широкополосных сигналов и освоением новых диапазонов частот, так и внедрением многоканальных систем передачи сигналов (СПС) на интегральных микросхемах, имеющих сложную внутреннюю структуру. Решение данных проблем с традиционных позиций встречает все большие трудности в связи с ограниченными возможностями классических методов анализа, базирующихся на аналитическом представлении элементов СПС. Преодоление этих трудностей во многом зависит от выбора метода моделирования. Метод должен, с одной стороны, отражать высокий уровень абстрагирования, исключающий все не имеющие существенного значения детали. С другой стороны, он должен сохранять основные устойчивые свойства объекта. Поиск в этом направлении естественным образом ассоциируется с принципом экономии при введении понятий. Этот принцип наиболее четко просматривается в геометрических теориях, где в качестве основных объектов теории берутся лишь те, которые сохраняются при преобразованиях, принадлежащих определенной группе G. В математике преобразования, которые сохраняют основные свойства рассматриваемых объектов, относят к фундаментальным преобразованиям. В связи с этим, согласно Ф. Клейну [1], геометрию определяют как теорию инвариантов группы фундаментальных преобразований и геометрическими называют такие свойства фигур линейного пространства и такие связанные с ними величины, которые сохраняются относительно преобразований из группы G и которые, следовательно, одинаковы у всех эквивалентных фигур. Развитие классической теории механики связано с геометрической интерпретацией принципа относительности Галилея и базируется на глубокой аналогии между преобразованиями евклидова пространства и прямолинейным движением тел с постоянной скоростью v. Такое движение описывается преобразованиями Галилея [2]

$$t_2 = t_1 = t, x_2 = x_1 + v \cdot t_1 \tag{1.1а}$$

где x_1, x_2 — координаты точки до и после движения за время t.

Законы классической механики Ньютона сохраняются при преобразованиях Галилея. Это означает, что преобразование механической системы, состоящее в придании ей постоянной по величине и направлению скорости не изменяет ее механические свойства. По аналогии с геометрией классическая механика рассматривается как теория инвариантов группы преобразований Галилея.

Принцип относительности Галилея развенчал представление об "абсолютном пространстве", неподвижном по своей сути, и показал, что все движущиеся друг относительно друга тела равноправны. Однако при приближении скорости движения к скорости света его свойства изменяются. В этом случае, согласно специальной теории относительности Эйнштейна, преобразования Галилея следует заменить преобразованиями Лоренца [3]^

$$x_2 = \frac{x_1 + v \cdot t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \; t_2 = \frac{\frac{v}{c} \cdot x_1 + t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.1б}$$

Если $v \ll c$, то преобразования (1.1б) соответствуют преобразованиям Галилея.

Современные достижения квантовой механики также связаны с теорией групповых преобразований [4]. Ниже будет показано, что линейные энергетические пространства сигналов (ЭПС) являются физическими моделями пространств, в которых реализуются принципы относительности, подобные принципам относительности Галилея и Лоренца. Это обстоятельство позволяет рассматривать передачу сигналов в СПС без потерь как линейные преобразования в ЭПС, обладающие групповыми свойствами. Изучение таких процессов является предметом радиомеханики. Следуя Клейну и используя аналогии между механикой, геометрией и радиотехникой, назовем радиомеханическими свойствами такие свойства сигналов и цепей и связанные с ними характеристики и параметры, которые сохраняются при трансформационных (недиссипативных) преобразованиях сигналов в ЭПС. Введем следующее основное определение: **Радиомеханика — это теория инвариантов группы недиссипативных преобразований в линейном энергетическом пространстве сигналов.**

Основными инвариантами радиомеханики являются стационарные (экстремальные) значения энергетических характеристик, определяющие потенциальные возможности СПС по обеспечению передачи радиосигналов с минимальными потерями, искажениями и шумами. Они реализуются с помощью недиссипативных СУ, обладающих трансформационными свойствами.

2. Основные определения и понятия радиомеханики

1. Непустое множество M=[M, +,·], для элементов которого определены линейные операции сложения и умножения объединяют понятием линейного пространства, если оно удовлетворяет аксиомам сложения элементов и умножения на число [6]. Радиомеханика разворачивается в ЭПС С, которое удовлетворяет общим аксиомам линейных пространств. Под ЭПС С будем понимать множество радиосигналов (сигналов) с данными в нем линейными операциями обработки. Объекты ЭПС представляются в виде точек, прямых и плоскостей.

2. ЭПС можно рассматривать как векторное или как координатное пространство. Координатная система ЭПС означает, что каждому вектору поставлен в соответствие набор чисел-координат, удовлетворяющих требованию однозначного представления сигнала. Сигнал на заданной несущей частоте представляется в виде вектора с, длина (норма) и направление которого определяются соответственно модулем $c=|c|$ и фазой φ комплексной амплитуды сигнала.

ЭПС C_n имеет базис — систему независимых векторов, порождающую данное ЭПС $\{e_1, e_2 \ldots e_n\}$ и определяющее его размерность $n=\dim C_n$.

Основные положения теории радиомеханики, где это возможно, рассматриваются на примере двумерных действительных C_2 и комплексных C_2 ЭПС. Любой сигнальный вектор $x \in C_2$ с координатами x_i представляется единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов из C_2:

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 .$$

Координатами сигнального вектора могут быть амплитуды напряжения u_m и тока i_m или амплитуды падающей a_m и отраженной b_m волны.

Ниже рассматриваются координаты, нормированные относительно волнового сопротивления линии передачи ρ. В этом случае все координаты имеют одинаковую энергетическую размерность $(\text{Вт})^S$. ЭПС C_n включает подпространства (ЭППС) размерности 0,1,2 ...n. Каждое ЭППС C_o... C_{n-1} само является линейным пространством. В одномодовой одноканальной линии передачи ЭППС являются ЭПС напряжений U_2, токов I_2, падающих A_2 и отраженных B_2 волн. В однородном ЭПС система единичных независимых векторов $\{e_1, e_2\}$ образует нормальный (канонический) базис.

3. ЭПС являются метрическими пространствами, в которых расстояние между элементами вводится с помощью билинейной формы $f(x, y)$, которую можно принять в качестве скалярного произведения векторов (x, y), положив

$$f(x,y) = (x,y) = X^T \cdot G \cdot Y = \sum (e_i, e_k) \cdot x_i \cdot y_k \cdot \tag{2.1а}$$

В ЭПС C_2 билинейная форма в координатах по данному базису имеет вид

$$f(x,y) = (x,y) = X^T \cdot \begin{bmatrix} g_{11} \, g_{12} \\ g_{21} \, g_{22} \end{bmatrix} \cdot Y , \tag{2.1б}$$

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2, y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2) = \\ &= \sum x_i \cdot y_k \cdot f(e_i, e_k) = \\ &= x_1 \cdot (e_1, e_1) \cdot y_1 + x_2 \cdot (e_1, e_2) \cdot y_2 + \\ &+ x_2 \cdot (e_2, e_1) \cdot y_1 + x_2 \cdot (e_2, e_2) \cdot y_2 \end{aligned} \tag{2.1в}$$

где G — матрица Грама скалярных произведений базисных векторов;

$$G = e \cdot e^T = [g_{ik}]_1^2, g_{ik} = (e_i, e_k) \cdot \tag{2.2а}$$

Система координат ЛПС C_2 является нормальной евклидовой системой с ортонормированным базисом, если базисные векторы удовлетворяют условиям

$$(e_i, e_i) = 1, (e_i, e_k) = (e_k, e_i) = 0, G = E = \operatorname{diag}[1,1] . \tag{2.2б}$$

Функция $f(x, x)$ одного векторного аргумента x, отвечающая симметричной билинейной форме $f(x, y)$ (2.1) является квадратичной формой. Она может быть положительной, отрицательной или неопределенной. Квадратичные формы определяются своими билинейными формами и, в свою очередь, определяют их как полярные формы. В связи с этим ЭПС со скалярным произведением рассматривается как ЭПС с квадратичной метрикой.

4. ЭПС C=[C, +,·] со скалярным произведением является евклидовым, если (x, y) обладает свойствами [6]: дистрибутивности, коммутативности, однородности и положительной определенности $f(x, x)>0$ для всех $x \neq 0$.

Положительное число $|x|$ определяет норму (длину или модуль) вектора в C:

$$|x|^2 = (x,x) . \tag{2.3}$$

Вектор, у которого $|x|=1$ и $(x, x)=1$, является единичным. Нормальная квадратичная форма выражается через компоненты вектора. В ЭПС C_2 с ортонормированным базисом (2.2б)

$$P = f(x,x) = |x|^2 = X^T \cdot \begin{bmatrix} g_{11} g_{12} \\ g_{21} g_{22} \end{bmatrix} \cdot X = x_1^2 + x_2^2 \cdot \qquad (2.4)$$

В евклидовом ЭПС C_2 с произвольным базисом квадратичная форма имеет вид

$$P = x_1 \cdot (e_1, e_1) \cdot x_1 + x_1 \cdot (e_1, e_2) \cdot x_2 + \\ + x_2 \cdot (e_2, e_1) \cdot x_1 + x_2 \cdot (e_2, e_2) \cdot x_2 \qquad (2.4б)$$

$$P = X^T \cdot G \cdot X.$$

Физическими моделями евклидовых ЭПС являются ЭППС *A*, *B*, *U* и *I*.

5. Два ЭПС X_2 и $У_2$ являются изоморфными, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, при котором каждому вектору $x \in X_2$ соответствует вектор $y \in У_2$ и разные векторы из X_2 имеют разные образы из $У_2$. Комплексное евклидово ЭПС C_1 можно взаимно однозначно отобразить на действительное ЛПС C_2, поскольку оба ЛПС можно построить из одних и тех же векторов. Если в C_1 действует оператор поворота К=exp iφ, переводящий вектор a в вектор b (b = К a), то в C_2 оператору К отвечает матричный оператор Ф:

$$S = \Phi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \Phi \cdot \Phi^T = \Phi^T \cdot \Phi = E. \qquad (2.5)$$

6. ЭПС С со скалярным произведением $[c_a,c_b]$ является пространством с индефинитной J-метрикой (пространством Понтрягина), если $[c_a,c_b]=(Jc_a,c_b)$ обладает свойствами: дистрибутивности, коммутативности, однородности, а его метрическая квадратичная форма f [c, c] является неопределенной [5].

7. Система координат является нормальной системой с J-ортонормированным каноническим базисом, если базисные векторы удовлетворяют условиям:

$$(e_{i,} e_i)_1^n = 1, (e_{i,} e_i)_{n+1}^{2n} = -1, (e_{i,} e_k) = (e_{k,} e_i) = 0.$$

Энергетические свойства ДП характеризуются величиной действительной мощности, поглощаемой, отражаемой или излучаемой ДП, которая равна разности мощностей падающих и отраженных волн

$$P = a^2 - b^2.$$

Следовательно, волновое ЭПС $C_2 = (A_1 \oplus B_1)$ линейного ДП является физической моделью пространства Понтрягина с J-ортонормированным базисом. Координаты сигнала здесь определяются падающими a и отраженными b волнами

$$c = c_1 \cdot e_1 + c_1 \cdot e_2 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = \xi^T \cdot C.$$

В ЛПС C_2 с метрикой, порожденной квадратичной формой P,

$$(e_{1,} e_1) = 1, (e_{2,} e_2) = -1, (e_{1,} e_2) = (e_{2,} e_1) = 0, \qquad (2.6а)$$

где вектор e_1 является единичным, а вектор e_2 – мнимым единичным.

Матрица Грама базисных векторов в ЭПС C_2 имеет вид

$$C = \xi \cdot \xi^T = J = \mathrm{diag}[1, -1]. \qquad (2.6б)$$

В ЭПС C_2 с J-ортонормированным базисом квадрат абсолютного значения вектора выражается через его компоненты неопределенной квадратичной формой

$$P = f(c,c) = [c,c] = C^T \cdot J \cdot C = c_1^2 - c_2^2 = a^2 - b^2. \qquad (2.7а)$$

В комплексном ЛПС C_4 с J-ортонормированным базисом координаты сигнала являются комплексными, и

$$P == [c,c] = C^T \cdot J \cdot C = a \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2. \qquad (2.7б)$$

Данные квадратичные формы определят гиперболическую метрику в ЭПС C_2. При этом координаты сигнального вектора в ЭПС C_2 связаны между собой коэффициентом отражения Г, которому соответствует гиперболический угол, характеризующий угловое рассогласование ДП с сопротивлением R и линии передачи с волновым сопротивлением ρ

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \mathrm{th}(\gamma), \gamma = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{R}{\rho}\right) = \mathrm{arcth}(\Gamma). \qquad (2.8а)$$

В комплексном ЭПС C_2 коэффициент отражения также является комплексным:

$$\Gamma = \frac{b}{a} = e^{j \cdot \varphi} \cdot \mathrm{th}(\gamma). \qquad (2.8б)$$

Величина P>0 (Γ<1) соответствует пассивному, P=0 ($|\Gamma|$=1) – недиссипативному, а P < 0 (Γ > 1) — активному ДП.

Вектору с ЭПС C_1 можно поставить в соответствие псевдокомплексное число $\dot{c}$:

$$c = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 \Rightarrow \dot{c} = c \cdot \exp(k \cdot \gamma) = c \cdot (\mathrm{ch}(\gamma) + k \cdot \mathrm{sh}(\gamma)) = a + k \cdot b,$$

где k — псевдомнимая единица (двойное число Клиффорда):

$$k \cdot k = 1, k \cdot k^* = -1.$$

При a>b псевдокомплексное число $\dot{c}$ — число 1-го рода, а при a<b — 2-го рода.

Оператор

$$t = \exp(k \cdot \gamma) \quad (t^* = \exp(-k \cdot \gamma))$$

является псевдоунитарным оператором в ЭПС C_1, если $t \cdot t^* = 1$.

9. Два псевдокомплексных ЭПС $C_{\alpha 2}$ и $C_{\beta 2}$ являются изоморфными, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, при котором каждому вектору $c_1 \in C_\alpha$ соответствует вектор $c_2 \in C_\beta$ и разные векторы из C_α имеют разные образы из C_β.

Если

$$\dot{c}_2 = t \cdot \dot{c}_1, (c_1^2 = a_1^2 - b_1^2, c_2^2 = a_2^2 - b_2^2),$$

то

$$\dot{c}_2 = c_2 \cdot \exp(k \cdot \alpha) = \exp(k \cdot \gamma), \dot{c}_1 = c_1 \cdot \exp(k \cdot (\alpha + \gamma)).$$

В псевдокомплексном ЭПС C_2 с вещественными координатами

$$a_2 = a_1 \cdot \mathrm{ch}(\gamma) + b_1 \cdot \mathrm{sh}(\gamma), b_2 = a_1 \cdot \mathrm{sh}(\gamma) + b_1 \cdot \mathrm{ch}(\gamma)$$

оператору $t = \exp(k \cdot \gamma)$ ЭПС C_1 в ЭПС C_2 соответствует матричный оператор T, принадлежащий группе J- ортогональных операторов

$$T = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\gamma & \pm \mathrm{sh}\,\gamma \\ \pm \mathrm{sh}\,\gamma & \mathrm{ch}\,\gamma \end{bmatrix}, T^T \cdot J \cdot T = T \cdot J \cdot T^T = J. \qquad (2.9)$$

Унитарные преобразования переводят нормальные системы координат снова в нормальные системы и поэтому оставляют квадратичные формы (2.4), (2.7) инвариантными.

В псевдокомплексном ЛПС C_2 с комплексными координатами a и b

$$c = a \cdot e_1 + b \cdot e_2,$$

$$P = f(c, c) = [c, c] = C^T \cdot J \cdot C = c_1^2 - c_2^2 = a^2 - b^2, \qquad (2.10)$$

и J-ортогональные операторы трансформируются в J–унитарные

$$T^T \cdot J \cdot T = T \cdot J \cdot T^T = J. \qquad (2.11)$$

3. Структурный анализ матричных операторов в ЭПС

Основная задача структурного анализа состоит в определении канонической структуры линейной СПС, раскрывающей ее инвариантные стационарные энергетические свойства и условия их физической реализации с помощью СУ. В общем случае матричные представления определяются полной группой преобразований G(X, n) в ЭПС X, состоящей из всех обратимых матриц порядка n с $2n^2$ комплексными элементами [3]. В этой группе существует подгруппа изоморфных преобразований $G_o(X, n)$, сохраняющих метрику ЭПС. Такими подгруппами являются ортогональные G_oO и унитарные подгруппы G_oU, действующие в ЭПС с евклидовой и индефинитной метрикой. Области действия подгрупп определяются метрическими свойствами

ЭПС. Принципы структурного анализа удобно рассматривать на примере одноканальной СПС. В волновом ЭПС C_2 передача сигналов осуществляется линейными четырехполюсниками (ЧП), передаточные свойства которых описываются матрицей рассеяния S, устанавливающей связь между падающими a и отраженными b волнами:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = SA . \qquad (3.1)$$

Индефинитная метрика ЭПС определяется действительной мощностью P поглощаемой или излучаемой ЧП, которая равна разности мощностей падающих и отраженных волн. При ρ=1Ом для нормированных координат

$$P = P_a - P_b = A^+ \cdot A - B^+ \cdot B$$

или

$$P = A^+ \cdot (E - S \cdot S^+) \cdot A = S_p \cdot W_a \cdot (E - S \cdot S^+) , \qquad (3.2)$$

где Sp — след матрицы [9], $W_a = A \cdot A^+ \geq 0$ — энергетическая матрица спектральных плотностей сигналов (падающих волн).

Используя (3.2), определим структуру недиссипативных ЧП (НЧП), играющих важную роль при решении задач согласования СПС. Для НЧП P=0 и матрица рассеяния НЧП принадлежит подгруппе унитарных матриц G_oU, удовлетворяющих условиям

$$E = S^+ \cdot S = S \cdot S^+ . \qquad (3.3)$$

Согласно (3.3), между элементами матрицы S существуют зависимости:

$$s_{11}^2 + s_{12}^2 = 1, s_{21}^2 + s_{22}^2 = 1, s_{11} \cdot s_{21}^* + s_{12} \cdot s_{22}^* = 0,$$

$$s_{11}^2 + s_{21}^2 = 1, s_{12}^2 + s_{22}^2 = 1, s_{11}^* \cdot s_{12} + s_{21}^* \cdot s_{22} = 0 .$$

Как видно, зная коэффициенты отражения НЧП, можно определить структуру матрицы S с точностью до произвольного фазового множителя

$$S_r = \begin{pmatrix} s_{11} & e^{j\varphi}\sqrt{1-s_{11}^2} \\ e^{j\varphi}\sqrt{1-s_{11}^2} & -s_{11}^* \end{pmatrix}, \; S_l = \begin{pmatrix} -s_{22}^* & e^{j\varphi}\sqrt{1-s_{22}^2} \\ e^{j\varphi}\sqrt{1-s_{22}^2} & s_{22} \end{pmatrix}. \qquad (3.4а)$$

Используя координатные преобразования в ЭПС [8], можно показать, что матрицам (3.4а) соответствуют волновые матрицы передачи T, удовлетворяющие условиям J-унитарности (2.11):

$$T_r = \begin{pmatrix} e^{-j\varphi}\,ch(\gamma) & e^{j(\varphi-\alpha)}sh(\gamma) \\ e^{-j(\varphi-\alpha)}sh(\gamma) & e^{j\varphi}ch(\gamma) \end{pmatrix}, \; T_l = \begin{pmatrix} e^{-j\varphi}\,ch(\gamma) & -e^{-j(\varphi-\alpha)}sh(\gamma) \\ -e^{j(\varphi-\alpha)}sh(\gamma) & e^{j\varphi}ch(\gamma) \end{pmatrix}. \qquad (3.4б)$$

Матрицы (3.4б) допускают разложение на подгруппы матриц, обладающих определенными физическими свойствами: специальную унитарную подгруппу идеальных фазовращателей (ИФВ) и J-ортогональную подгруппу идеальных трансформаторов сопротивлений (ИТС), которым в ЭПС соответствуют разрешенные траектории движения, определяющие выбор структуры и параметров согласующих устройств системы передачи сигналов. Как видно из (3.4б), произвольный НЧП эквивалентен каскадному соединению трех НЧП [9]: ИФВ – ИТС – ИФВ. В частности, для НЧП с матрицей $T_r = T_{\varphi 1} \cdot T_\gamma \cdot T_{\varphi 2}$:

$$T_{\varphi 1} = \begin{pmatrix} \exp(-j\varphi_{11}) & 0 \\ 0 & \exp(j\varphi_{11}) \end{pmatrix}, \; T_\gamma = \begin{pmatrix} ch(\gamma) & sh(\gamma) \\ sh(\gamma) & ch(\gamma) \end{pmatrix}, \; T_{\varphi 1} = \begin{pmatrix} \exp(-j\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(j\varphi) \end{pmatrix} . \qquad (3.4в)$$

ИФВ с унитарными матрицами T_φ, $(T_\varphi^+ \cdot T_\varphi = T_\varphi \cdot T_\varphi^+ = E)$ выполняют в ЭПС операции, эквивалентные евклидову вращению комплексных координат сигнального вектора, а ИТС с J-ортогональной матрицей T_γ, $(T_\gamma^t \cdot J \cdot T_\gamma = T_\gamma \cdot J \cdot T_\gamma^t = J)$ — операции, эквивалентные гиперболическому повороту сигнального вектора.

Классические матрицы передачи произвольных НЧП удовлетворяют в общем случае условиям Q–унитарности [9]:

$$A^{+} \cdot Q \cdot A = A \cdot Q \cdot A^{+} = Q\,. \qquad (3.5)$$

Переходя от волновых координат к классическим [8], можно, согласно (3.4), по лучить следующее выражение для классической матрицы передачи НЧП A:

$$A_r = \begin{pmatrix} m \cdot \cos(\boldsymbol{\delta} - \varphi) & j \cdot m \cdot \sin(\boldsymbol{\delta} - \varphi) \\ j \cdot n \cdot \sin(\boldsymbol{\theta} - \varphi) & n \cdot \cos(\boldsymbol{\theta} - \varphi) \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, \qquad (3.6a)$$

где

$$n = \frac{|1 - s_{11}|}{\sqrt{1 - s_{11}^2}},\ m = \frac{|1 + s_{11}|}{\sqrt{1 - s_{11}^2}},\ \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{-s_{11}\sin\varphi_{11}}{1 - s_{11}\cos\varphi_{11}},\ \delta = \operatorname{arc\,tg}\frac{s_{11}\sin\varphi_{11}}{1 + s_{11}\cos\varphi_{11}},\ m \cdot n \cdot \cos(\delta - \theta) = 1\,.$$

Подгруппу Q –унитарных матриц можно разложить на подгруппы орисферических матриц, имеющих следующую структуру:

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & j \cdot x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j \cdot b & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.7)$$

где x — последовательно включенное реактивное сопротивление; b - параллельно включенная реактивная проводимость.

При этом НЧП можно представить в виде схем типа Т или П:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & j \cdot x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j \cdot b_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & j \cdot x_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j \cdot b_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & j \cdot x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j \cdot b_3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

НЧП с матрицами А (3.7) выполняют операции движения по орисферическим орбитам (преобразования Галилея), которые в классическом ЭПС определяют разрешенные траектории движения сигналов и возможные варианты СУ. При этом НЧП сохраняют метрику ЭПС.

Используя структуру НЧП, порождаемую матрицами (3.4), (3.7), можно решать задачи структурно-параметрического моделирования произвольных линейных ДП [10]. Так, линейный ДП с коэффициентом отражения Г может быть представлен в канонической форме в виде ядра, соответствующего ДП, согласованному с линией передачи, и оболочки, представляющей собой НЧП с унитарной матрицей рассеяния, параметры которой с точностью до произвольного фазового множителя определяются параметрами ДП. Для двухполюсных источника сигналов и нагрузки с коэффициентами отражения $\Gamma_с$, $\Gamma_н$ матрицы рассеяния оболочек $S_с$, $S_н$, согласно (3.4а), имеют вид:

$$S_c = \begin{pmatrix} -e^{j2\varphi} \cdot \Gamma_c^* & e^{j\varphi}\sqrt{1 - \Gamma_c^2} \\ e^{j\varphi}\sqrt{1 - \Gamma_c^2} & \Gamma_c \end{pmatrix},\ S_H = \begin{pmatrix} \Gamma_н & e^{j\psi}\sqrt{1 - \Gamma_н^2} \\ e^{j\psi}\sqrt{1 - \Gamma_н^2} & -e^{j2\psi} \cdot \Gamma_н^* \end{pmatrix}. \qquad (3.9)$$

Пассивному ДП можно поставить в соответствие согласованный ДП и соединение физически реализуемых НЧП с матрицами (3.7), параметры которых зависят от фазового множителя φ. Выбор φ дает возможность СУ с различной полосой частот согласования.

Представление ДП в канонической форме позволяет установить каноническую структуру линейного ЧП. Используя матрицы (3.5) можно найти матрицу рассеяния произвольно нагруженного ЧП S_Σ [11] как матрицу каскадного соединения трех ЧП с матрицами $S_с$, S и $S_н$:

$$S_\Sigma = S_c \otimes S \otimes S_H = \begin{pmatrix} s_{\Sigma 11} & s_{\Sigma 12} \\ s_{\Sigma 21} & s_{\Sigma 22} \end{pmatrix}, \qquad (3.10)$$

$$s_{\Sigma 11} = A \cdot \left[(s_{11} - \Gamma_C^*) \cdot (1 - s_{22} \cdot \Gamma_H) + s_{12} \cdot s_{21} \cdot \Gamma_H\right] \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \varphi) =$$

$$= (\Gamma_1 - \Gamma_C^*) \cdot (1 - \Gamma_1 \cdot \Gamma_C^*)^{-1} \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \varphi),$$

$$s_{\Sigma 12} = A \cdot \left[s_{12}\sqrt{(1 - \Gamma_C^2) \cdot (1 - \Gamma_H^2)}\right] \cdot \exp(j \cdot (\varphi + \psi),$$

$$s_{\Sigma 12} = A \cdot \left[s_{21}\sqrt{(1 - \Gamma_C^2) \cdot (1 - \Gamma_H^2)}\right] \cdot \exp(j \cdot (\varphi + \psi),$$

$$s_{\Sigma 22} = A \cdot \left[\left(s_{22} - \Gamma_H^*\right) \cdot \left(1 - s_{11} \cdot \Gamma_C\right) + s_{12} \cdot s_{21} \cdot \Gamma_C\right] \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \psi) =$$
$$= (\Gamma_2 - \Gamma_H^*) \cdot (1 - \Gamma_2 \cdot \Gamma_H^*)^{-1} \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \psi),$$
$$A = \left[\left(s_{11} - \Gamma_C^*\right) \cdot \left(1 - s_{22} \cdot \Gamma_H\right) + s_{12} \cdot s_{21} \cdot \Gamma_C \cdot \Gamma_H\right]^{-1},$$
где знак $\otimes$ обозначает бинарную операцию умножения матриц рассеяния, Γ_1, Γ_2 — входной и выходной коэффициенты отражения нагруженного ЧП:

$$\Gamma_1 = (s_{11} - \Delta\Gamma_C)/(1 - s_{22} \cdot \Delta\Gamma_C), \;\; \Gamma_2 = (s_{22} - \Delta\Gamma_H)/(1 - s_{11} \cdot \Delta\Gamma_C),$$
$$\Delta = s_{11} \cdot s_{22} - s_{12} \cdot s_{21}.$$

При выполнении условий согласования по входу и выходу устойчивого ЧП [14]

$$\Gamma_1 - \Gamma_C^* = 0, \;\; \Gamma_2 - \Gamma_H^* = 0$$

матрица S_Σ принимает вид матрицы ядра ЧП

$$S_{0\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & s_{o12} \\ s_{o21} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Параметры $S_{o\Sigma}$ определяют собственные (стационарные) значения функций передачи мощности ЧП [14]. В этом случае матрицу рассеяния ЧП S можно представить в канонической форме в виде ядра и оболочки. Такое представление соответствует каскадному соединению трех НЧП с матрицами рассеяния S_1, $S_{o\Sigma}$, S_2:

$$S = S_1 \otimes S_{0\Sigma} \otimes S_2,$$

где S_1, S_2 — унитарные матрицы рассеяния оболочки, характеризующие рассогласованность ЧП с линиями передачи:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & e^{-j\varphi}\sqrt{1-\Gamma_1^2} \\ e^{-j\varphi}\sqrt{1-\Gamma_1^2} & -e^{-j2\varphi} \cdot \Gamma_1^* \end{pmatrix}, \; S_2 = \begin{pmatrix} -e^{-j2\psi} \cdot \Gamma_c^* & e^{-j\psi}\sqrt{1-\Gamma_c^2} \\ e^{-j\psi}\sqrt{1-\Gamma_c^2} & \Gamma_c \end{pmatrix}. \qquad (3.12)$$

Представление ЧП в канонической форме позволяет определить с точностью до произвольных фазовых множителей φ, ψ структуру СУ.

4. Задачи на собственные значения в ЭПС

Геометрическим аналогом задачи на собственные значения в евклидовом пространстве является задача определения стационарных значений эллиптической квадратичной формы P_1 (2.1) на окружности единичного радиуса P_2 (2.4). Если в двумерном евклидовом ПС выражение для вектора записать в виде

$$z = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 = \xi^T Z,$$

то квадратичные формы в ЭПС с ортонормированным P_1 и произвольным P_2 базисами (2.2) определяются скалярно-матричными функционалами

$$P_1 = Z^T \cdot E \cdot Z, \;\; P_2 = Z^T \cdot G \cdot Z. \qquad (4.1)$$

Квадратичная форма P_1 представляет собой параболоид вращения, который в сечении плоскостью $P_1 = 1$ дает окружность единичного радиуса, а форма P_2 представляет собой эллиптический параболоид, который в сечении плоскостью $P_2 = 1$ дает эллипс. Для определения области изменения формы P_2 достаточно исследовать значения P_2 на окружности единичного радиуса. С этой целью можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа, который вводится с помощью отношения Релея [14]:

$$\lambda = \frac{Z^T \cdot G \cdot Z}{Z^T \cdot Z}, \; G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

Для стационарных значений λ $\frac{d\lambda}{dZ} = \frac{d\lambda}{dZ^T} = 0$. Отсюда следуют уравнения

$$Z^T \cdot (G - \lambda \cdot E) \cdot Z = 0, \quad S_p \cdot W_z \cdot (G - \lambda \cdot E) = 0, \tag{4.3}$$

где W_z — положительно-определенная матрица, S_p — след матрицы.

Данные уравнения имеют нетривиальные решения, если λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - \lambda \cdot (g_{11} + g_{22}) + (g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21}) = 0, \tag{4.4}$$

Корни уравнения определяют длину главных радиусов эллипса

$$\lambda_{1,2} = 0.5 \cdot \left\{(g_{11} + g_{22}) \pm \left[(g_{11} + g_{22})^2 - 4 \cdot (g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21})^{1/2}\right]\right\}. \tag{4.5}$$

При определении координат главных (собственных) векторов x_1, y_1 и x_2, y_2 можно использовать уравнение (4.3), согласно которому

$$(g_{11} - \lambda_1) \cdot x_1 + g_{12} \cdot y_1 = 0, \quad (g_{11} - \lambda_2) \cdot x_2 + g_{12} \cdot y_2 = 0,$$

$$(g_{22} - \lambda_1) \cdot y_1 + g_{21} \cdot x_1 = 0, \quad (g_{22} - \lambda_2) \cdot y_2 + g_{12} \cdot x_2 = 0.$$

Квадратичная форма P_2 путем вращения осей координат может быть приведена к каноническому виду

$$P = \lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2, \tag{4.6}$$

для которого главные оси эллипса совпадают с осями координат. Параметры матрицы преобразований Φ ($Z' = \Phi Z$) (2.5) определяется из уравнений (4.3):

$$\begin{aligned} &g_{12} \cdot (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) + (g_{11} - g_{22}) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = 0, \\ &\varphi = 0.5 \cdot \mathrm{arctg}\left(2 \cdot g_{12} / (g_{11} - g_{22})\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

В волновом ЭПС основная задача на собственные значения может быть связана с анализом стационарных значений функций передачи мощности K_p, определяемых отношением действительных мощностей сигналов на входе P_1 и входе P_2 ЧП.

Рассмотрим одноканальную систему передачи сигналов с волновой матрицей передачи T (линейный четырехполюсник), устанавливающей зависимости между сигналами на ее входе C_1 и выходе C_2:

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = T \cdot C_2, \tag{4.8}$$

где a, b — комплексные амплитуды падающих и отраженных волн.

Действительные мощности сигналов на входе P_1 и входе P_2 ЧП равны:

$$P_1 = a_1^* \cdot a_1 - b_1^* \cdot b_1, \quad P_2 = b_2^* \cdot b_2 - a_2^* \cdot a_2. \tag{4.9а}$$

Выражения (4.9а) описывают гиперболические параболоиды. Их можно записать в виде скалярно-матричных функционалов в ЛПС C с J-метрикой:

$$P_1 = C_1^+ \cdot J \cdot C_1, \quad P_2 = C_2^+ \cdot J \cdot C_2. \tag{4.9б}$$

При преобразовании сигналов в ЧП метрика J — ортонормированная метрика ЛПС C_2 трансформируется так, что формулы (4.9б) принимают вид

$$P_1 = C_2^+ \cdot R \cdot C_2, \quad P_2 = C_1^+ \cdot L^{-1} \cdot C_1. \tag{4.9в}$$

Единичные значения мощностей (4.9б) отображаются на плоскости в виде псевдоокружностей, а мощностей (4.9в) в виде псевдоэллипсов.

С учетом (4.8) функцию передачи K_p можно представить в виде отношений Релея квадратичных форм от однородных переменных C_1, C_2:

$$K_p = \frac{P_2}{P_1} = \frac{C_1^+ L^{-1} C_1}{C_1^+ J C_1} = \frac{C_2^+ J C_2}{C_2^+ R C_2}, \tag{4.10}$$

где L, R — левая и правая эрмитовы матрицы Грама базисных векторов ЭПС, трансформированные соответственно во входное C_1 и выходное C_2 ЭПС:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

$$l_{11} = t_{11}t_{11}^* - t_{12}t_{12}^*,\ \ l_{12} = l_{21}^* = t_{11}t_{21}^* - t_{12}t_{22}^*,\ \ l_{22} = t_{21}t_{21}^* - t_{22}t_{22}^*,$$

$$r_{11} = t_{11}t_{11}^* - t_{12}t_{12}^*,\ \ r_{12} = r_{21}^* = t_{12}t_{11}^* - t_{22}t_{21}^*,\ \ r_{22} = t_{12}t_{12}^* - t_{22}t_{22}^*.$$

Стационарные значения функций передачи определяются собственными значениями пучков квадратичных форм (4.9) от однородных переменных. Используя метод неопределенных множителей Лагранжа и учитывая, что проблема определения максимума на единичной псевдоокружности эквивалентна задаче определения минимума на единичном псевдоэллипсе, запишем отношения (4.10) в виде следующих уравнений:

$$C_1^+ \cdot (L - \lambda \cdot J) \cdot C_1 = 0,\ \ C_2^+ \cdot (R - \lambda \cdot J) \cdot C_2 = 0. \tag{4.12}$$

Данные уравнения имеют нетривиальные решения, если множитель λ удовлетворяет характеристическим уравнениям

$$|L - \lambda \cdot J| = 0,\ \ |R - \lambda \cdot J| = 0.$$

Корни уравнений

$$\lambda_{1,2} = 0.5 \cdot \left\{(l_{11} + l_{22}) \pm \left[(l_{11} + l_{22})^2 - 4 \cdot (l_{11} \cdot l_{22} - l_{12} \cdot l_{21})^{1/2}\right]\right\},$$

$$\lambda_{1,2} = 0.5 \cdot \left\{(r_{11} + r_{22}) \pm \left[(r_{11} + r_{22})^2 - 4 \cdot (r_{11} \cdot r_{22} - r_{12} \cdot r_{21})^{1/2}\right]\right\}$$

определяют стационарные значения функций передачи в прямом $K_{р\ макс}=1/\lambda_1$ и обратном $K_{об\ макс}= \lambda_2$ направлении, которые теоретически могут быть реализованы с помощью входного и выходного СУ с J-унитарными матрицами передачи, которые имеют структуру матриц (3.4). Используя уравнения (3.4), (4.12), получим систему уравнений относительно параметров матриц передачи СУ:

$$\begin{aligned}
&(l_{11} - \lambda_1) \cdot ch^2(\alpha) - 2 \cdot l_{12} \cdot sh(\alpha) \cdot ch(\alpha) \cdot \cos(\varphi_c - \varphi_{12}) + (l_{22} + \lambda_2) \cdot sh^2(\alpha) = 0,\\
&l_{12} ch^2(\alpha) + l_{21} \cdot sh^2(\alpha) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \varphi_c) - (l_{11} + l_{22}) \cdot sh(\alpha) \cdot ch(\alpha) \cdot \exp(j \cdot \varphi_c) = 0,\\
&(r_{11} - \lambda_1) \cdot ch^2(\beta) - 2 \cdot r_{12} \cdot sh(\beta) \cdot ch(\beta) \cdot \cos(\varphi_H - \varphi_{12}) + (r_{22} + \lambda_2) \cdot sh^2(\beta) = 0,\\
&r_{12} ch^2(\alpha) + r_{21} \cdot sh^2(\alpha) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \varphi_H) - (r_{11} + r_{22}) \cdot sh(\alpha) \cdot ch(\alpha) \cdot \exp(j \cdot \varphi_H) = 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Отсюда находим значения евклидовых φ и гиперболических α, β угловых координат, определяющих параметры коэффициентов отражения источника сигналов и нагрузки (2.8), при которых обеспечивается согласование СПС по максимуму функций передачи мощности:

$$\varphi_C - \varphi_{12} = 0,\ \ \varphi_H - \varphi_{21} = 0, \tag{4.14а}$$

$$2 \cdot \alpha = \mathrm{arcth}\left(\frac{2 \cdot l_{21}}{l_{11} + l_{22}}\right),\ \ 2 \cdot \beta = \mathrm{arcth}\left(\frac{2 \cdot r_{21}}{r_{11} + r_{22}}\right). \tag{4.14б}$$

Полученные результаты позволяют определить параметры матриц передачи СУ с точностью до произвольных фазовых множителей. Так, условия (4.14а) соответствуют условию резонанса, которые реализуются с помощью реактивных элементов СУ, компенсирующих собственные фазовые сдвиги в СПС. Условия (4.14б) определяют требования к параметрам согласующих трансформаторов, обеспечивающих уменьшение потерь на отражение.

Выбор фазовых множителей φ (3.4),(3.6) открывает возможности структурно-параметрического синтеза СУ, обеспечивающих передачу сигналов с минимальными потерями в различной полосе частот, соответствующей ширине спектра передаваемого сигнала.

RADIOMECHANICS AS AN INVARIANT THEORY IN THE LINEAR ENERGY SIGNAL SPACE

A.G. ONISCHUK

Abstract

Linear signal transmission system is presented. Signal set is introduced in form of linear energetic space of signals (ESS) where its metrics is determined using square forms (SF) of real power signals. Each ESS causes invariants and fundamental movement groups (lossless transformation), corresponding to them, metric-preserving ESS. The basic invariants are stationary (extreme) values of circuit power characteristics (PC) being the same as power transfer and reflection functions. EC have the characterized potentialities of the circuit transmission signals with minimum watt loss. Watt loss extension attain by means of matching circuits (MC). MC parameters depend on the selection of the optimal signal paths permitted in the LSS. The field of the Radio engineering – Radio Mechanics (RM) is defined as the theory of the group invariants of non-dissipative transformers. In the RM the problem of signal transfer characterized by the minimum watt loss is solved as a problem of the SF sheaf proper value in the LSS. At the same time the MC parameters take a shape of proper SF sheaf vectors.

Литература

1. *Клейн Ф.* Об основаниях геометрии (Эрлангенская программа). М., 1950.
2. *Седов Л.И.* Галилей и основы механики. М., 1964.
3. *Румер Ю.Б.* Теория унитарной симметрии. М., 1968
4. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М., 1986.
5. *Понтрягин Л.С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой // ИАН СССР с.м. 8, 1944.
6. *Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., 1978.
7. *Гузеев И. В.* // Радиотехника и электроника, 1973. Т. 18, № 2.
8. *Онищук А.Г.* // Радиоэлектроника. 1977. Т. 20, № 3.
9. *Онищук А.Г.* // Радиоэлектроника. 1979. Т. 22, № 9.
10. *Онищук А.Г.* // Радиоэлектроника. 1977. Т. 20, № 1.
11. *Онищук А.Г.* // Радиоэлектроника. 1978. Т. 21, № 8.
12. *Онищук А.Г.* // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 5.
13. *Онищук А.Г., Воропаев Ю.П.* // Измерительная техника. Т. 1. 1979.
14. *Онищук А.Г.* // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 6.
15. *Онищук А.Г.* // Радиоэлектроника. 1979. Т. 22, № 9.