УДК 511.36

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК В НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ ТРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

М.А. КАЛУГИНА

Минский государственный высший радиотехнический колледж
пр. Независимости, 62, Минск, 220005, Беларусь

Поступила в редакцию 18 мая 2005

В статье приведены результаты исследования свойств рациональных точек вблизи гиперболического параболоида. При доказательстве теоремы получены не только нижняя и верхняя оценки их числа, но и показано, что эти точки распределены равномерно, а значит, это дает возможность получить точную нижнюю оценку размерности Хаусдорфа совместно аппроксимируемых точек параболоида.

Ключевые слова: метрическая теория диофантовых приближений, геометрия чисел, теорема Минковского о линейных формах, повсеместные системы.

Введение

В последнее время из-за многочисленных приложений все больший интерес вызывают задачи, связанные с изучением свойств чисел. Многие классические результаты теории чисел нашли применение в теории кодирования, в оценках сложности алгоритмов, в вычислительной математике. Использования всевозможных математических подходов требуют и такие важные прикладные задачи, как сжатие данных, изображений с помощью фрактальных преобразований (кодирования) [1], как определение атомной структуры макромолекул и их комплексов по данным рассеяния рентгеновских лучей кристаллами этих молекул. "Желание увидеть атомные детали требует разработки "теоретического" микроскопа" [2, с 149], т.е. разработки соответствующих математических методов.

Важную роль в кристаллографии играют, например, трехмерные параллелоэдры. Это частный случай n-мерных выпуклых тел, для которых выполняется известное неравенство Минковского. Напомним его смысл. Пусть в n-мерном числовом пространстве задана целочисленная решетка, т.е. множество всех точек рассматриваемого пространства с целыми координатами. Тогда n-мерный объем выпуклого тела, которое симметрично относительно одной точки этой решетки, но не содержит внутри себя других ее точек, не превосходит 2^n.

Геометрические методы приобрели существенное значение в теории чисел. Теоремы о распределении рациональных точек вблизи кривых играют важную роль в получении оценок размерности Хаусдорфа множеств, определяемых диофантовыми неравенствами при совместных приближениях [3, 4]. К настоящему времени получены оценки сверху [5] и снизу [6] числа рациональных точек вблизи плоских кривых достаточно общего вида. В данной работе рассмотрена аналогичная задача в трехмерном евклидовом пространстве и получены как верхняя, так и нижняя оценки числа рациональных точек вблизи гиперболического параболоида.

Результаты и их обсуждение

Теорема. *Пусть* $\psi:\mathbf{N}\to\mathbf{R}_+$ *— монотонно убывающая функция, удовлетворяющая условию* $c_1Q^{-1/2}\le\psi(Q)\le c_2Q^{-1/3}$, $c_1,\ c_2>0$. *Кроме этого,* I_1 и I_2 *— конечные интервалы, для которых* $I_1\times I_2=I\subset\mathbf{R}^2$, $0<q\le Q$ и

$$A(Q,I)=\left\{\left(\frac{p_1}{q};\frac{p_2}{q};\frac{p_3}{q}\right)\in\mathbf{Q}^3:\frac{p_1}{q}\in I_1,\frac{p_2}{q}\in I_2,\left|\frac{p_1p_2}{q^2}-\frac{p_3}{q}\right|<\frac{2\psi(Q)}{Q}\right\}.$$

Тогда для достаточно больших Q *справедлива оценка*

$$\frac{\delta_0^3}{4}\psi(Q)Q^3|I|\le\#A(Q,I)\le16\psi(Q)Q^3|I|,$$

где $0<\delta_0<\delta<1$.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\begin{cases}|p_3-p_2x-p_1y+qxy|<\delta\psi(Q)\ ,\\ |qy-p_2|<(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2},\\ |qx-p_1|<(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}.\end{cases}\tag{1}$$

По теореме Минковского о линейных формах (1) имеет решение (p_1,p_2,p_3,q) в целых числах, зависящее от x и y, такое, что $0<q\le Q$.

Обозначим: $B(Q,\delta,I)=\{(x,y)\in I: \textit{существует решение } (1) \textit{ при условии } 0<q\le\delta Q\}$. Введем вспомогательную функцию $F(x,y)=p_3-p_2x-p_1y+qxy$, с помощью которой система (1) может быть переписана в виде

$$\begin{cases}|F(x,y)|<\delta\psi(Q),\\ \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right|<(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2},\\ \left|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|<(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}.\end{cases}$$

Оценим $F(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q})$, используя ее представление в виде формулы Тейлора в окрестности точки $(x,y)\in I$:

$$F(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q})=F(x,y)+\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\left(\frac{p_1}{q}-x\right)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\left(\frac{p_2}{q}-y\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)\left(\frac{p_1}{q}-x\right)\left(\frac{p_2}{q}-y\right).$$

Значит,

$$\left|F\left(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q}\right)\right|\le\delta\psi(Q)+(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}\frac{(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}}{q}+$$

$$+(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}\frac{(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}}{q}+q\frac{(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}}{q}\frac{(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}}{q}=$$

$$=\delta\psi(Q)+3\frac{(\delta\psi(Q)Q)^{-1}}{q}\le2\delta\psi(Q)=\lambda$$

при подходящем выборе c_2.

С другой стороны,

$$\left|F\left(\frac{p_1}{q};\frac{p_2}{q}\right)\right| = p_3 - p_2\frac{p_1}{q} - p_1\frac{p_2}{q} + q\frac{p_1}{q}\frac{p_2}{q} = p_3 - \frac{p_1 p_2}{q}$$

или

$$\left|\frac{p_3}{p_2} - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{\lambda}{p_2}. \qquad (2)$$

Используя технику, описанную в работе [3, с. 30-31], оценим число $N(p_2;q)$ пар целых чисел p_1, p_3, для которых при фиксированных p_2 и q выполняется условие (2), из которого следует $|p_3 q - p_1 p_2| \le \lambda q$.

Допустим, что при каком-либо $s \ne 0$ верно

$$p_3 q - p_1 p_2 = s \qquad (3)$$

Значит, $d = (p_2, q) \ne 1$ делит s, и тогда, полагая $p_2 = dp_2', q = dq', s = ds'$, имеем $p_3 q' - p_1 p_2' = s'$, где $(p_2', q') = 1$.

Пусть условию (3) удовлетворяют и числа p_3' и p_1', т.е. $p_3' q - p_1' p_2 = s$. Следовательно, $p_3 = p_3' + kp_2'$, $p_1 = p_1' + kq'$, $k \in Z$, а значит,

$$|p_1 - p_1'| = |k| q'.$$

Нас интересуют числа p_1 и p_1', удовлетворяющие условию $|qx - p_1| < (\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}$, что приводит к оценке $|p_1 - p_1'| < q|I_1| + 2(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}$.

Окончательно имеем: $|k| q' < q|I_1| + 2(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2} \Rightarrow |k| < d|I_1| + \frac{2}{q'}(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2} \le 2d|I_1|$.

Значит, число возможных p_1, удовлетворяющих (3) при данном значении *s*, не больше, чем $2 \cdot 2d|I_1| - 1$, такой же величиной оценивается число допустимых пар p_1, p_1'. Учитывая, что $0 \ne |s| < \lambda q$ и все *s*, что выбираются, должны делиться на *d*, получаем $N(p_2;q) \le 2\left[\frac{\lambda q}{d}\right] 4d|I_1| \le 8\lambda q|I_1| = 16\delta\psi(Q) q|I_1|$.

Оценим меру множества $B(Q,\delta,I)$: $|B(Q,\delta,I)| \le \sum_{p_2,q} \frac{\delta\psi(Q)Q^{-1}}{q^2} N(p_2;q) <$

$$< \sum_{q\le\delta Q}\left(q|I_2| + 2\delta\psi(Q)Q)^{-1/2}\right)16\delta\psi(Q)q|I_1|\frac{(\delta\psi(Q)Q)^{-1}}{q^2} = \sum_{q\le\delta Q}\left(q|I_2| + 2(\delta\psi(Q)Q)^{-1}\right)16|I_1|\frac{1}{qQ} \le 32\delta|I|.$$

Зафиксируем $\delta = \delta_0$ таким образом, чтобы мера множества $B(Q,\delta_0,I)$ удовлетворяла соотношению $|B(Q,\delta_0,I)| \le \frac{|I|}{2}$, и рассмотрим те точки (x, y) из I, которые этому множеству не принадлежат. Тогда, взяв решение $(p_1; p_2; p_3; q)$ системы (1) относительно этих точек, получим $q > \delta_0 Q$ и

$$\left|\frac{p_1p_2}{q^2}-\frac{p_3}{q}\right|<\frac{1}{q}2\delta_0\psi(Q)\le\frac{2\psi(Q)}{Q}.$$

Это значит, что точка $\left(\frac{p_1}{q},\frac{p_2}{q},\frac{p_3}{q}\right)$ с рациональными координатами находится от поверхности $z=xy$ на расстоянии, не превышающем $\frac{2\psi(Q)}{\delta Q}$, причем

$$\begin{cases}\left|x-\frac{p_1}{q}\right|<\left(\psi(Q)\delta_0^3Q^3\right)^{-1/2},\\ \left|y-\frac{p_2}{q}\right|<(\psi(Q)\delta_0^3Q^3)^{-1/2}.\end{cases}$$

Обозначим все полученные таким образом точки через $\widehat{A}(Q,\delta_0,I)$. Тогда, учитывая, что $I\setminus B(Q,\delta,I)\subset\bigcup\limits_{\widehat{A}(Q,\delta_0,I)}\left\{(x,y):\left|x-\frac{p_1}{q}\right|<(\psi(Q)\delta_0^3Q^3)^{-1/2},\ \left|y-\frac{p_2}{q}\right|<(\psi(Q)\delta_0^3Q^3)^{-1/2}\right\}$, получим, переходя к мере:

$$\frac{1}{2}|I|\le\left|I\setminus B(Q,\delta_0,I)\right|\le\#\widehat{A}(Q,\delta_0,I)\left(\psi(Q)\delta_0^3Q^3\right)^{-1}.$$

Следовательно, $\#\widehat{A}(Q,\delta_0,I)\ge\frac{\delta_0^{\ 3}}{2}\psi(Q)Q^3|I|$.

Так как $\#A(Q,I)\ge\#\widehat{A}(Q,\delta_0,I)$, получим искомую оценку.

Для вывода оценки сверху воспользуемся условием $\left|\frac{p_1p_2}{q^2}-\frac{p_3}{q}\right|<2\frac{\psi(Q)}{Q}$, из которого следует $\left|\frac{p_1p_2}{q}-p_3\right|<2q\frac{\psi(Q)}{Q}$ или $\left|\frac{p_1}{q}-\frac{p_3}{p_2}\right|<\frac{2q\psi(Q)}{\delta p_2Q}$.

Тогда $N(p_2,q)\le2\left[\frac{2q^2\psi(Q)}{Qd}\right]4d\,|I_1|\le\frac{16q^2\psi(Q)}{Q}|I_1|\le16Q\psi(Q)|I_1|$.

Для завершения доказательства осталось получить оценку

$$A(Q,\delta,I)\le\sum_{0<q\le Q}(q|I_2|+2(\delta\psi(Q)Q)^{-1/2})16Q\psi(Q)|I_1|\le$$

$$\le16Q^3\psi(Q)|I|+32|I_1|\psi^{1/2}(Q)Q^{\frac{3}{2}}\delta^{-1/2}\le16Q^3\psi(Q)|I|.$$

Заключение

Таким образом, при доказательстве теоремы получены не только оценки числа рациональных точек вблизи гиперболического параболоида, но и показано, что эти точки распределены равномерно. Полезным следствием данного результата является и то, что можно получить нижнюю оценку размерности Хаусдорфа совместно аппроксимируемых точек параболоида.

ON THE DISTRIBUTION OF RATIONAL POINTS IN CERTAIN DOMAINS OF 3-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

M. KALUGUINA

Abstract

The researches of properties of rational points near a hyperbolic paraboloid are given. The lower and upper bounds of their number are obtained. It follows to possibility to obtain lower bounds for the Hausdorff dimension of a set of points approximated by rational points.

Литература

1. Теория прикладного кодироваия: Учеб. пособие в 2-х т. / Под ред. проф. В.К. Конопелько. Мн., 2004.
2. *Уржумцев А.Г.* // Чебышевский сборник. 2004 г. Т. 5, вып. 2 (10). С. 149–166.
3. *Спринджук В.Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. М., 1977.
4. *Bernik V.I., Dodson M.M.* Metric Diophantine approximation on manifolds. CUP, 1999.
5. *Huxley M.* Area, lattice points and exponential sums. Oxford, 1996.
6. *Бересневич В.В.* // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, №1. С. 41–43.