КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.58

ОБОБЩЕННОЕ РАСШИРЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

А.А. КОРОЛЕВА

Белорусский государственный университет
пр. Независимости 4, Минск 220050, Беларусь

Поступила в редакцию 10 августа 2005

Рассматривается интегральное преобразование, содержащее в ядре расширенную функцию Миттаг-Леффлера в весовом пространстве суммируемых на действительной полуоси функций со степенным весом. Для этого преобразования получены условия действия оператора преобразования из одного пространства в другое, доказаны формула преобразования Меллина и аналог формулы интегрирования по частям, получены различные представления, дано описание образа оператора и доказаны формулы обращения.

Ключевые слова: интегральное преобразование, функция типа Миттаг–Леффлера, интеграл Меллина–Барнса, весовые пространство измеримых по Лебегу функций.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$\left(E_{\alpha,\beta}\, f\right)(x)=\int_0^\infty E_{\alpha,\beta}(-xt)\, f(t)dt \;\; (x>0), \tag{1}$$

содержащее в ядре специальную функцию $E_{\alpha,\beta}\left(z\right)$, определенную для вещественного $\alpha\in R$ и комплексных $\beta\in C$ и $z\neq 0$ интегралом Меллина-Барнса

$$\left(E_{\alpha,\beta}\, z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-5}ds \;(z\in C;\ \alpha\neq 0,\ z\neq 0) \tag{2}$$

Здесь $(-z)^{-s}=\exp[-s[\ln(z)+i\arg(-z)]]$, $-\pi\leq\arg(-z)<\pi$ $(z\neq 0)$ — произвольная однозначная ветвь многозначной функции $(-z)^{-s}$, L — специально выбранный замкнутый контур, оставляющий все полюсы гамма-функции $\Gamma(s)$ слева, а все полюсы гамма-функции $\Gamma(1-s)$ справа. В качестве L можно выбрать один из следующих контуров: $L=L_{-\infty}$ ($L=L_{+\infty}$) — левая (правая) петля, которая расположена в некоторой горизонтальной полосе, начинается в точке $-\infty+i\varphi_1$ $(+\infty+i\varphi_1)$ и заканчивается в точке $-\infty+i\varphi_2$ $(+\infty+i\varphi_2)$, $-\infty<\varphi_1<\varphi_2<\infty$.

Функция $E_{\alpha,\beta}\left(z\right)$ введена в работе авторов [2], где доказано ее существование в следующих случаях [2, Теорема 3–4]:

$$L=L_{-\infty},\ \mathrm{Re}(\alpha)>0; \tag{3}$$

$$L=L_{+\infty},\ \mathrm{Re}(\alpha)<0. \tag{4}$$

Кроме того, в [2, Теорема 5–6] установлены формулы разложения (2) в следующие степенные ряды:

$$E_{\alpha,\beta}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}z^{k}\ (L=L-\infty;\ \mathrm{Re}(\alpha)>0),\tag{5}$$

$$E_{\alpha,\beta}\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(-\alpha k+\beta-\alpha)}\frac{1}{z^{k+1}}\ (L=L+\infty;\ \mathrm{Re}(\alpha)<0),\tag{6}$$

Правая часть (5) известна, как классическая функция Миттаг-Леффлера; см. основные свойства и приложения в [3, § 18], [4, гл. 3].В частности, в терминах этой функции выражаются решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, возникающих в задачах диффузии [5, § 42.1].

Интегральное преобразование вида (1) с функцией Миттаг-Леффлера в ядре изучалось при $\alpha>0$ в работе [6] в весовых пространствах измеримых по Лебегу функций $f\in L_{\nu,r}$ ($1\le r<\infty$, $\nu\in R$), таких, что

$$\int_{0}^{\infty}|t^{\nu}f(t)|\frac{dt}{t}<\infty\ \ (1\le r<\infty,\ \nu\in R).\tag{7}$$

В [6] была построена $L_{\nu,r}$-теория преобразования (1), а именно: получены условия действия оператора $E_{\alpha,\beta}$ этого преобразования из одного пространства $L_{\nu,r}$ в другое $L_{1-\nu,s}$, доказаны формула преобразования Меллина и формула интегрирования по частям, получены различные представления, дано описание образа оператора и доказаны формулы обращения.

Настоящая работа посвящена построению $L_{\nu,r}$-теории интегрального преобразования (1) в случае $\alpha<0$.

Имеют место следующие утверждения, которые характеризуют свойства оператора $E_{\alpha,\beta}$ в $L_{\nu,r}$, различные в случаях: $\alpha=-2$, $\alpha=-1$, $-2<\alpha<-1$, $-1<\alpha<0$. Далее [X, Y] означает множество ограниченных линейных операторов, действующих из одного банахова пространства X в другое Y.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha=-2$, $\Delta<0$, $0<\nu<1$, $1<r<\infty$ и $2\nu-2\le\gamma(r)+\mathrm{Re}(\beta)$, *где* $\gamma(r)=\max\left[\frac{1}{r}\ \ \frac{1}{r'}\right]$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$.

а) Преобразование $E_{\alpha,\beta}$*, определенное на* $L_{\nu,2}$ *может быть распространено на* $L_{\nu,r}$ *как элемент* $[L_{\nu,r},L_{1-\nu,s}]$ *для всех s, таких что* $r\le s<\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, *где* $s'\ge[2\nu-2\le\gamma(r)+\mathrm{Re}(\beta)]^{-1}$.

в) Если $1<r\le2$, *то преобразование* $E_{\alpha,\beta}$ *взаимно однозначно на* $L_{\nu,r}$ *и выполняется равенство*

$$(ME_{\alpha,\beta}f)(z)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(Mf)(1-s)\ \text{при}\ \mathrm{Re}(s)=1-\nu\tag{8}$$

с) Если $s\ne\frac{\beta+k}{\alpha}$ ($\kappa\in N_0$, $N_0=N\bigcup\{0\}$), *то* $E_{\alpha,\beta}$ *взаимно однозначно на* $L_{\nu,r}$*. Если* $\eta=\frac{1}{2}+\beta$ *и* $\mathrm{Re}(\eta)=\frac{1}{2}+\mathrm{Re}(\beta)>-1$, $\mathrm{Re}(\beta)>-\frac{3}{2}$, *то*

$$E_{-2,\beta}\,(L_{\nu,r})=(M_{-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}}H_{-2,\frac{1}{2}+\beta})(L_{\nu-\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{Re}(\beta)}{2},r}).\tag{9}$$

Если $\exists\in N_0$*, такое, что* $s=\frac{\beta+k}{\alpha}$, то $E_{-2,\beta}$ ($L_{\nu,r}$) *— подмножество правой части* (9).

d) Если $f\in L_{v,r}$, $g\in L_{v,s}$, $1<s<\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1$ *и* $2v-2\leq -\max[\gamma(r),\gamma(s)]+\mathrm{Re}(\beta)$, *то*

$$\int_0^\infty f(x)(E_{\alpha,\beta}g)(x)dx=\int_0^\infty g(x)(E_{\alpha,\beta}f)(x)dx. \tag{10}$$

e) Если $f\in L_{v,r}$, $\lambda\in C$, $h>0$, $2v-2-\gamma(r)+\mathrm{Re}(\beta)$, *то*

$$(E_{-2,\beta}f)(x)=h\,x^{1-\frac{\lambda+1}{h}}\frac{d}{dx}x^{\frac{\lambda+1}{h}}\int_0^\infty H_{3,2}^{1,2}\left[xt\middle|\begin{matrix}(-\lambda,h) & (0,1) & (-2,\beta)\\ (0,1) & (-\lambda-1,h) & \end{matrix}\right]f(t)dt \tag{11}$$

$$(E_{-2,\beta}f)(x)==-h\,x^{1-\frac{\lambda+1}{h}}\frac{d}{dx}x^{\frac{\lambda+1}{h}}\int_0^\infty H_{3,2}^{2,1}\left[xt\middle|\begin{matrix}(0,1) & (\beta,2) & (-\lambda,h)\\ (-\lambda-1,h) & (0,1) & \end{matrix}\right]f(t)dt \tag{12}$$

для $\mathrm{Re}(\lambda)\geq(1-v)h-1$ и $\mathrm{Re}(\lambda)(1-v)h-1$ *соответственно.*

Если $2v-\mathrm{Re}(\beta)<\frac{3}{2}$, *то*

$$(E_{-2,\beta}f)(x)=\int_0^\infty H_{2,1}^{1,1}\left[xt\middle|\begin{matrix}(0,1) & (\beta,2)\\ (0,1) & \end{matrix}\right]f(t)dt. \tag{13}$$

Теорема 2. Пусть $0>\alpha>-2$, $0<v<1$, $1\leq r\leq s<\infty$.

a) Преобразование $E_{\alpha,\beta}(z)$, *определенное на* $L_{v,2}$ *может быть распространено на* $L_{v,r}$ *как элемент* $[L_{v,r}, L_{1-v,s}]$ *для всех s, таких что* $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, *где* $s'\geq[2v-2\leq\gamma(r)+\mathrm{Re}(\beta)]^{-1}$. *Если* $1<r\leq 2$, *то преобразование* $E_{\alpha,\beta}$ *взаимно однозначно из* $L_{v,r}$ *на* $L_{1-v,s}$.

b) Если $f\in L_{v,r}$, $g\in L_{v,s}$, $1<s<\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1$, *то*

$$\int_0^\infty f(x)(E_{\alpha,\ \beta}g)(x)dx=\int_0^\infty g(x)(E_{\alpha,\ \beta}f)(x)dx.$$

Теорема 3. *Пусть* $0>\alpha>-1$, $0<v<1$, $1<r<\infty$.

a) Если $\mathrm{Re}(\beta)\leq\frac{1}{2}$ *и* $s\neq\frac{\beta+k}{\alpha}$ ($\kappa\in N_0$), *то*

$$E_{\alpha,\beta}(L_{v,r})=(L_{1+\alpha,0}\ L_{1,\frac{1}{2}-\beta})(L_{v,r}). \tag{14}$$

Если $\exists\ \kappa\in N_0$, *такое, что* $s=\frac{\beta+k}{\alpha}$, *то* $E_{\alpha,\beta}$ $(L_{v,r})$ *— подмножество правой части* (14).

b) Если $\mathrm{Re}(\beta)>\frac{1}{2}$ *и* $s\neq\frac{\beta+k}{\alpha}$ ($\kappa\in N_0$), то

$$E_{\alpha,\beta}(L_{v,r})=(I^{\beta-\frac{1}{2}}_{-;\ \frac{1}{1+\alpha},\ 0}\ L_{1+\alpha,0}\ L_{1,0})(L_{v,r}). \tag{15}$$

Если $\exists\ \kappa\in N_0$, *такое, что* $s=\frac{\beta+k}{\alpha}$, то $E_{\alpha,\beta}$ $(L_{v,r})$ *— подмножество правой части* (15).

Теорема 4. *Пусть* $\alpha=-1$, $0<v<1$ и $1<r<\infty$.

a) Если $\mathrm{Re}(\beta)\le 0$ и $s \ne -\beta - k$ ($\kappa \in N_0$), то

$$E_{-1,\beta}(L_{\nu,r})=(L_{-1,1-\beta})(L_{1-\nu,r}). \tag{16}$$

Если $\exists\ \kappa \in N_0$, такое, что $s \ne -\beta - k$, то $E_{\alpha,\beta}$ $(L_{\nu,r})$ — *подмножество правой части* (16).

b) Если $\mathrm{Re}(\beta)>0$ *и* $s \ne -\beta - k$ ($\kappa \in N_0$), *то*

$$E_{-1,\beta}(L_{\nu,r})=(I^{\beta}_{0;1,0}\ L_{-1,1})(L_{\nu,r}). \tag{17}$$

Если $\exists\ \kappa \in N_0$, *такое, что* $s \ne -\beta - k$, то $E_{\alpha,\beta}$ $(L_{\nu,r})$ — *подмножество правой части* (17).

Теорема 5. *Пусть* $-2<\alpha<-1$, $0<\nu<1$ и $1<r<\infty$. Пусть $\omega,\ \varsigma,\ \eta \in C$ *такие числа, что*

$$\omega = \alpha(\eta-1)+2\eta-1+\beta,\ (2+\alpha)\mathrm{Re}(\eta) \ge \gamma(r)-2(1+\alpha)\nu+\alpha+\frac{1}{2}-\mathrm{Re}(\beta),\ \mathrm{Re}(\eta)>-\nu,\ \mathrm{Re}(\varsigma)<\nu.$$

Если $s \ne \dfrac{\beta+k}{\alpha}$ ($\kappa \in N_0$), то

$$E_{\alpha,\beta}(L_{\nu,r})=(M_{-\frac{1}{2}-\frac{\omega}{2(1+\alpha)}}\ H_{2+2\alpha,2(1+\alpha)\varsigma+\omega+1}\ L_{2+\alpha,\frac{1}{2}-\eta+\frac{\omega}{2(1+\alpha)}})(L_{\frac{1}{2}-\nu-\frac{\mathrm{Re}(\omega)}{2(1+\alpha)}\,r}). \tag{18}$$

Если $\exists\ \kappa \in N_0$, *такое, что* $s = \dfrac{\beta+k}{\alpha}$, *то* $E_{\alpha,\beta}(L_{\nu,r})$ — *подмножество правой части* (18).

Приведем формулу обращения преобразования (1) *при* $\alpha=-2$.

Теорема 6. *Пусть* $1<r<\infty$ и $\alpha=-2$, $\nu\in R$ *такие числа, что*

$0<\nu<1$, $2\nu-2\le\gamma(r)+\mathrm{Re}(\beta)$ и $\max[-\infty,\dfrac{\mathrm{Re}(\beta)}{2}+\dfrac{1}{2}]<\nu<1+\dfrac{\mathrm{Re}(\beta)}{2}$. Если $f\in L_{\nu,r}$, то

$$f(x)=\mathrm{h}x^{1-\frac{\lambda+1}{h}}\frac{d}{dx}x^{\frac{\lambda+1}{h}}\int_0^\infty H^{0,\ 1}_{3,\ 2}\left[xt\left|\begin{matrix}(-\lambda,\ h) & (-1-\beta,\ 2) & (0,\ 1)\\ (0,\ 1) & (-\lambda-1,\ h) & \end{matrix}\right.\right](E_{-2,\ \beta}f)(t)dt, \tag{19}$$

$$(f)(x)=-\mathrm{h}x^{1-\frac{\lambda+1}{h}}\frac{d}{dx}x^{\frac{\lambda+1}{h}}\int_0^\infty H^{1,\ 1}_{3,\ 2}\left[xt\left|\begin{matrix}(-1-\beta,\ 2) & (0,\ 1) & (-\lambda,\ h)\\ (-\lambda-1,\ h) & (0,\ 1) & \end{matrix}\right.\right](E_{-2,\ \beta}f)(t)dt \tag{20}$$

для $\mathrm{Re}(\lambda)>\nu h-1$ и $\mathrm{Re}(\lambda)<\nu h-1$ соответственно.

Доказательство теорем 1–6 основано на представлении интегрального преобразования (1) в виде более общего так называемого *H*-преобразования и использовании соответствующих результатов для этого преобразования [7].

EXTENDED GENERALIZED MITTAG-LEFFLER TRANSFORM

A.A. KOROLEVA

Abstract

The integral transform with the extended Mittag-Leffler function in the kernel is considered in the space of summable functions on the real half-axis with the power weight. The conditions for the boundedness of the operator of this transform from one space to the another are proved, the formula of

the Mellin transform and an analogue of integration by parts are established, various representations are obtained, the characterization of the image is given and the inversion relations are constructed

Литература

1. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. М., 1965.
2. *Килбас А.А., Королева А.А.* //Тр. Ин-та математики. 2005. Т. 13, № 1. С. 23–32.
3. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Т.3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., 1967.
4. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
5. *Kilbas A.A., Trujillo J.J.,*// Appl. Anal. 2002. Vol. 78, № 1–2. P. 153–192.
6. *Bonilla B., Rivero M., Rodriguez-Germa L. et al.* // Rev. Acad. Canar. Cienc. 2002. Vol. 14, № 1–2. P. 65–77.
7. *Kilbas A.A., Saigo M. H*-Transforms. Theory and Applications. Boca Raton. 2004.