ИНФОРМАТИКА

УДК 004.421.4, 621.317

КОМПЛЕКСНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.К. БИТУС, Е.В. СИНЬКЕВИЧ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 29 июля 2003

В работе сформирован единый подход к измерениям вероятностных характеристик случайных процессов и оценке их погрешностей. Предложено понятие обобщенного коэффициента вариации, позволяющее представить статистические погрешности измерений важнейших вероятностных характеристик в удобной для сопоставления форме. Приведены численные результаты анализа погрешностей для случайных процессов со следующими законами распределения вероятностей: нормальным, равномерным, релеевским, односторонним экспоненциальным, Симпсона и арксинуса.

Ключевые слова: статистические измерения, алгоритмы, погрешности.

Введение

В последние годы наблюдается неуклонный рост всевозможных применений вероятностно-статистических методов исследований для решения прикладных задач в различных областях науки и техники, например, в статистической радиотехнике, теории связи, радиолокации и гидроакустике, при диагностике в авиастроении, автомобилестроении и других родственных отраслях, медицине, неразрушающем контроле и виброиспытаниях промышленных изделий, при обнаружении причин возникновения шумов и паразитных колебаний в сложной радиоаппаратуре и аппаратуре связи, радиоастрономии и сейсмологии. Это подчеркивает актуальность не только теоретического, но и экспериментального анализа вероятностных характеристик.

На сегодня в области статистических измерений подлежат решению две основные задачи:

определение номенклатуры измеряемых вероятностных характеристик в соответствии с уровнем развития теоретических знаний и текущими возможностями технических средств статистического эксперимента;

разработка алгоритмов измерений с оценкой их метрологических показателей. Они должны обеспечивать, с одной стороны, по возможности минимальные погрешности измерений, а с другой стороны, быть непараметрическими и легко реализуемыми на практике. При этом следует иметь в виду, что не все выдвигаемые требования могут быть выполнены в одинаковой мере: нельзя получить больше того, что может дать выборка [1].

Теоретический анализ

В настоящее время продолжается интенсивный поиск новых классификационных признаков, а также разработка алгоритмов решения радиоэлектронными средствами задач на основе использования все более полных сведений о реальной помеховой обстановке. Для этого потребуется использование расширяющегося набора вероятностных характеристик. Поэтому представляет интерес нетрадиционный вариант выбора номенклатуры измеряемых характеристик на основе системного подхода: полный набор известных вероятностных характеристик [1] следует представить в виде абстрактного множества, элементами которого являются сформированные в соответствии с некоторыми правилами группы характеристик.

В работе [2] предложено выделить минимально необходимое количество наиболее важных групп характеристик, образующих достаточную номенклатуру характеристик (ДНХ). В каждой группе характеристики следует объединить по признакам их логического сходства, а также погрешностей анализа и требуемого объема выборки. Некоторые из требуемых характеристик должны быть получены в реальном масштабе соответствующих аргументов, другие полезнее измерять в измененном, нормированном масштабе.

В результате анализа [2, 3] в ДНХ были включены четыре группы характеристик: 1) одномерные законы распределения вероятностей; 2) одномерные моменты (до четвертого порядка включительно); 3) двумерные и условные законы распределения вероятностей; 4) корреляционные и спектральные функции.

В зависимости от степени априорной неопределенности фактических свойств сигналов и помех, а также характера решаемых задач могут потребоваться сведения о случайных процессах на различных иерархических уровнях — вероятностные характеристики различных групп. При необходимости ДНХ легко дополнить любыми вероятностными характеристиками из полного набора.

В современном контексте разработка рекомендаций по алгоритмическому обеспечению статистических измерений ориентирована на использование ЭВМ, в первую очередь персональных, в качестве технического средства. Исходя из технических возможностей ПЭВМ и сути статистических измерений, наиболее целесообразным вариантом организации эксперимента следует признать создание в качестве главного начального фактора файла измерительной информации в виде цифровых выборок анализируемого процесса с помощью АЦП. Совместно АЦП и ПЭВМ образуют в соответствии с современной терминологией компьютерную измерительную систему.

Известно, что оценка Q* любой вероятностной характеристики Q случайного процесса $X(t)$ представляет собой результат усреднения. Только в этом случае, как следует из предельных теорем теории вероятностей, множество случайных данных может быть охарактеризовано неслучайными величинами (или функциями) — вероятностными характеристиками. Это означает [4, 5], что всю последовательность преобразований исходного массива данных о мгновенных значениях изучаемого случайного процесса можно разбить на два этапа: преобразование $g_Q[X(t)]$, лежащее в основе определения вероятностной характеристики Q , и усреднение $M\{\cdot\}$. Для характеристик из ДНХ в случае анализа эргодических процессов это означает реализацию вычислений по правилу

$$Q^* = M\left\{g_Q\left[X(t)\right]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g_Q\left[x(k\Delta t)\right], \tag{1}$$

где Δt — шаг дискретизации; N — объем выборки.

Таким образом, процедура измерения любой характеристики из ДНХ с внешней точки зрения напоминает фильтрацию сигнала: из измерительного файла по определенным (фильтрующим) правилам в соответствии с оператором $g_Q[\cdot]$ для конкретной характеристики Q выбирается нужная информация. При этом в инженерных приложениях естественно полагать, что оценивание функциональных характеристик осуществляется по набору их точечных значений. Такая постановка вопроса позволяет назвать совокупность алгоритмов (1) для получения оценок любых характеристик из ДНХ единым обобщенным алгоритмом измерений [6]. Для оценки абсолютного большинства других одномерных или двумерных характеристик достаточно изменить вид оператора $g_Q[\cdot]$.

Поскольку финальным шагом единого алгоритма (1) является общая для оценок всех вероятностных характеристик из ДНХ операция усреднения, следует ожидать хотя бы некоторой общности метрологических показателей получаемых оценок. Для упрощения дальнейшего анализа будем полагать, как принято в классической модели математической статистики, что усреднение в (1) производится по статистически независимым выборкам (для нормальных процессов — по некоррелированным). С учетом сказанного относительная среднеквадратическая погрешность статистических оценок (1) находится из выражения

$$\delta_Q = \frac{\sqrt{D[Q^*]}}{Q} \cong \frac{\sqrt{\frac{1}{N} D\big[G_Q(t)\big]}}{M[G_Q(t)]} = \frac{\upsilon_Q}{\sqrt{N}} \quad , \quad G_Q(t) = g_Q\,[X(t)]\,, \tag{2}$$

где равенство $Q \cong M[Q^*] = M\,[G_Q(t)]$ обусловлено несмещенностью или хотя бы асимптотической несмещенностью этих оценок.

Коэффициент

$$\upsilon_Q = \frac{\sqrt{D\,[G_Q(t)]}}{M\,[G_Q(t)]} = \frac{\sigma_G}{m_G} \tag{3}$$

не зависит ни от объема выборки, ни от оцениваемой погрешности измерений, а определяется только типом случайного процесса $X(t)$, видом измеряемой характеристики Q и параметрами алгоритма ее измерения, например, количеством интервалов группирования при оценивании плотности вероятности в виде равноинтервальной гистограммы. Как видно из (3), υ_Q имеет смысл коэффициента вариации случайного процесса $G_Q(t) = g_Q\,[X(t)]$, и это позволяет назвать υ_Q коэффициентом вариации случайного процесса $X(t)$ по вероятностной характеристике Q или обобщенным коэффициентом вариации.

Следовательно, при одном и том же операторе усреднения в (1) имеет место одинаковая форма связи между объемом выборки и среднеквадратической погрешностью.

В практике статистических измерений к одному из наиболее актуальных относится вопрос о том, насколько целесообразно измерение той или иной вероятностной характеристики при заданном объеме выборки. Формализация решения этой задачи предполагает в простейшем случае представление решения в виде простой альтернативы (да/нет) и введение критерия качества.

Не менее часто задача ставится и в обратной формулировке, когда требуется найти такой объем выборки *N*, при котором измерения целесообразны в соответствии с заданным критерием *J*. Значение параметра, соответствующее скачкообразному изменению свойств исследуемого объекта, принято называть критическим. Поэтому минимальный объем выборки, при котором измерение определенной вероятностной характеристики целесообразно по заданному критерию, назовем критическим и обозначим N_0. Таким образом, задача в обратной формулировке сводится к нахождению N_0.

Назовем упомянутые задачи соответственно прямой и обратной задачами статистических измерений.

В рассмотренном случае (2) зависимость критического объема выборки от численного значения критерия качества, т.е. величины относительной погрешности δ, имеет вид дробно-рациональной функции с единственным параметром — обобщенным коэффициентом вариации υ_Q:

$$N_{0Q} = \upsilon_Q^2 \big/ \delta^2\,. \tag{4}$$

Отношение коэффициентов вариации случайного процесса $X(t)$ по вероятностным характеристикам Q_1 и Q_2 равно отношению погрешностей измерения этих характеристик при заданном объеме выборки (2); квадрат этого отношения показывает (4), во сколько раз больше измерительной информации содержится в характеристике Q_1 по сравнению с Q_2 при заданной погрешности δ.

Расчетная часть

Проиллюстрируем сказанное на примере измерения важнейших вероятностных характеристик из ДНХ. Расчетные формулы для оценки коэффициентов вариации сведены в табл. 1. Выражения для определения дисперсии оценок третьего и четвертого моментов, а также коэффициентов асимметрии и эксцесса приведены в [7]. Следует отметить, что для оценки погрешностей измерений может потребоваться информация о вероятностных характеристиках более сложных, чем измеренные (табл. 1).

Для анализа в рамках данной работы выбраны случайные процессы со следующими наиболее распространенными в вероятностно-статистических методах исследований законами распределения вероятностей: нормальным, релеевским, односторонним экспоненциальным, равномерным, Симпсона и арксинуса.

Результаты расчета коэффициентов вариации по формулам (табл. 1), округленные до трех значащих цифр, представлены в табл. 2.

Отметим, что анализ погрешностей измерения математического ожидания можно довести до конечного числового результата только в тех случаях, когда математическое ожидание и дисперсия взаимнооднозначно связаны между собой, как, например, для экспоненциального распределения, у которого $m_X = \sigma_X$, и, следовательно, $\upsilon = 1$. Коэффициент вариации для других исследуемых распределений (табл. 2) в определяющей мере зависит либо от параметра масштаба, как в случае закона арксинуса, либо от соотношения параметров масштаба и сдвига, например, для нормального и равномерного распределений.

Сделаем необходимые пояснения относительно анализа статистических погрешностей при измерении функциональных характеристик. В соответствии с традиционным для статистических измерений минимаксным критерием качества обобщенный коэффициент вариации оценки функциональной характеристики принят равным максимальному по множеству оцениваемых ординат его значению, что соответствует точке наихудшего приближения.

Формула для расчета коэффициента вариации относительно оценки корреляционной функции в точке τ (табл. 1) позволяет найти с учетом сказанного коэффициент вариации относительно корреляционной функции в целом:

$$\upsilon_R^2 = \max_{\tau}\{\upsilon_R^2(\tau)\} = \frac{1}{\min\limits_{\tau}\{\rho_X^2(\tau)\}} + 1 + \gamma_e = \frac{1}{\varepsilon^2} + 1 + \gamma_e \cong \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \rho_X(\tau_{max}). \tag{5}$$

Здесь $\tau_{\max}$ — максимальный интервал корреляции на уровне ε, в пределах которого нормируются метрологические характеристики оценки корреляционной функции $R_X^*(\tau)$.

Следует особо подчеркнуть тот факт, что в рассмотренном случае значение коэффициента вариации υ_R не зависит от вида корреляционной функции (5) и, кроме того, является асимптотически непараметрическим. Это отражено в табл. 2, где приведены значения квадрата коэффициента вариации по корреляционной функции для наиболее часто употребляемых уровней ε.

Заметное разнообразие принципиально отличающихся друг от друга алгоритмов и методов было предложено для оценивания одномерных законов распределения вероятностей. Метод оценивания плотности вероятности в виде равноинтервальной гистограммы был известен в математической статистике еще до появления соответствующей измерительной аппаратуры [9, 10].

Таблица 1. **Формулы для расчета коэффициентов вариации**

Вероятностная характеристика	Расчетная формула для коэффициента вариации	Источник	Характеристики, необходимые для оценки погрешности
Математическое ожидание m_X	$\upsilon_m^2 = \dfrac{D_X}{m_X^2} = \upsilon^2$	[4, с. 77]	Математическое ожидание m_X Дисперсия D_X
Дисперсия D_X	$\upsilon_D^2 = 2 + \gamma_e = \dfrac{\mu_4}{D_X^2} - 1$, γ_e – коэффициент эксцесса	[8, с. 150]	Дисперсия D_X Центральный момент 4-го порядка μ_4
Корреляционная функция $R_X(\tau) = D_X \rho_X(\tau)$	$\upsilon_R^2(\tau) = \dfrac{1}{\rho_X^2(\tau)} + 1 + \gamma_e = \dfrac{1}{\rho_X^2(\tau)} + \dfrac{\mu_4}{D_X^2} - 2$	[8, с. 151]	Корреляционная функция $R_X(\tau)$ Центральный момент 4-го порядка μ_4
Одномерная плотность вероятности $p(x)$ Оценка в виде гистограммы	$\upsilon_{p_i}^2 = \dfrac{1}{P_i} - 1$, $P_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx$	[4, с. 313]	Одномерная плотность вероятности $p(x)$
Двумерная плотность вероятности $p(x,y)$ Оценка в виде гистограммы	$\upsilon_{p_{ij}}^2 = \dfrac{1}{P_{ij}} - 1$, $P_{ij} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} p(x,y)dxdy$	—	Двумерная плотность вероятности $p(x,y)$

В работе [11] Парзен предложил обобщенную ядерную оценку плотности вероятности на некотором интервале значений аргумента [a, b] по независимой выборке $\{x_k\}$, k = 1, 2, …, N, в виде

$$p^*(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h(x - x_k), \tag{6}$$

где h(x) — четная весовая функция единичной площади с интегрируемым квадратом (ядро).

Асимптотически оптимальным неотрицательным, не зависящим от вида распределения и дающим наилучшее среднеквадратическое приближение эмпирической кривой к достаточно гладкой искомой плотности является ядро вида [1]

$$h_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4c}\left(1 - \dfrac{x^2}{c^2}\right), & |x| \le c; \\ 0, & |x| > c. \end{cases} \tag{7}$$

Таблица 2. **Погрешности оценивания вероятностных характеристик из ДНХ**

Одномерные моменты и их функции						
Закон распределения вероятностей	Наименование	Квадрат коэффициента вариации	Критический объем выборки при заданной погрешности измерений			
			1%	5%	10%	20%
Нормальный	Дисперсия	2	20 E+3	800	200	50
	4-й ц. момент	10,7	107 E+3	4,27 E+3	1,07 E+3	267
Релея	Мат. ожидание	0,273	2,73 E+3	110	28	7
	Дисперсия	2,25	22,5 E+3	899	225	57
	3-й ц. момент	27,4	274 E+3	11,0 E+3	2,74 E+3	686
	К. асимметрии	16,0	160 E+3	6,39 E+3	1,60 E+3	400
	4-й ц. момент	19,4	194 E+3	7,76 E+3	1,94 E+3	486
	К. эксцесса	1,31 E+3	13,1 E+6	525 E+3	131 E+3	32,8 E+3
Односторонний экспоненциальный	Мат. ожидание	1	10 E+3	400	100	25
	Дисперсия	8	80 E+3	3,2 E+3	800	200
	3-й ц. момент	54	540 E+3	2,16 E+3	5,4 E+3	1,35 E+3
	К. асимметрии	18	180 E+3	7,2 E+3	1,8 E+3	450
	4-й ц. момент	174	1,74 E+6	69,7 E+3	17,4 E+3	4,36 E+3
	К. эксцесса	224	2,24 E+6	89,6 E+3	22,4 E+3	5,6 E+3
Равномерный	Дисперсия	0,8	8 E+3	320	80	20
	4-й ц. момент	1,78	17,8 E+3	712	178	45
	К. эксцесса	0,914	9,14 E+3	366	92	23
Симпсона	Дисперсия	1,4	14 E+3	560	140	35
	4-й ц. момент	4	40 E+3	1,6 E+3	400	100
	К. эксцесса	11,9	119 E+3	4,76 E+3	1,19 E+3	298
Арксинуса	Дисперсия	0,5	5 E+3	200	50	13
	4-й ц. момент	0,944	9,45 E+3	378	95	24
	К. эксцесса	0,278	2,78 E+3	112	28	7

Корреляционная функция						
Закон распределения вероятностей	Уровень ε	Квадрат коэффициента вариации	Критический объем выборки при заданной погрешности измерений			
			1%	5%	10%	20%
Асимптотическое приближение	0,01	10 E+3	100 E+6	4 E+6	1 E+6	250 E+3
	0,05	400	4 E+6	160 E+3	40 E+3	10 E+3
Нормальный	0,1	101	1,01 E+6	40,4 E+3	10,1 E+3	2,53 E+3
	0,2	26	260 E+3	10,4 E+3	2,6 E+3	650
Релея	0,1	101	1,01 E+6	40,5 E+3	10,1 E+3	2,53 E+3
	0,2	26,2	262 E+3	10,5 E+3	2,62 E+3	657
Односторонний экспоненциальный	0,1	107	1,07 E+6	42,8 E+3	10,7 E+3	2,68 E+3
	0,2	32	320 E+3	12,8 E+3	3,2 E+3	800
Равномерный	0,1	99,8	998 E+3	39,9 E+3	9,98 E+3	2,50 E+3
	0,2	24,8	248 E+3	9,92 E+3	2,48 E+3	620
Симпсона	0,1	100	1,00 E+6	40,2 E+3	10,0 E+3	2,51 E+3
	0,2	25,4	254 E+3	10,2 E+3	2,54 E+3	635
Арксинуса	0,1	99,5	995 E+3	39,8 E+3	9,95 E+3	2,49 E+3
	0,2	24,5	245 E+3	9,8 E+3	2,45 E+3	613

Продолжение табл. 2.

Гистограммы одномерных законов распределения						
Закон распределения вероятностей	Количество интервалов группирования	Квадрат коэффициента вариации	Критический объем выборки при заданной погрешности измерений			
			1%	5%	10%	20%
Нормальный	16	334	3,34 E+6	134 E+3	33,4 E+3	8,36 E+3
	32	902	9,02 E+6	361 E+3	90,2 E+3	22,5 E+3
	64	2,09 E+3	20,9 E+6	835 E+3	209 E+3	52,2 E+3
Релея	16	353	3,53 E+6	141 E+3	35,3 E+3	8,82 E+3
	32	843	8,43 E+6	337 E+3	84,3 E+3	21,1 E+3
	64	1,84 E+3	18,4 E+6	736 E+3	184 E+3	46,0 E+3
Односторонний экспоненциальный	16	827	8,27 E+6	331 E+3	82,7 E+3	20,7 E+3
	32	1,82 E+3	18,2 E+6	729 E+3	182 E+3	45,6 E+3
	64	3,82 E+3	38,2 E+6	1,53 E+6	382 E+3	95,6 E+3
Равномерный	16	15	150 E+3	6 E+3	1,5 E+3	375
	32	31	310 E+3	12,4 E+3	3,1 E+3	775
	64	63	630 E+3	25,2 E+3	6,3 E+3	1,58 E+3
Симпсона	16	127	1,27 E+6	50,8 E+3	12,7 E+3	3,18 E+3
	32	511	5,11 E+6	204 E+3	51,1 E+3	12,8 E+3
	64	2,05 E+3	20,5 E+6	819 E+3	205 E+3	51,2 E+3
Арксинуса	16	24,1	241 E+3	9,63 E+3	2,41 E+3	602
	32	49,2	492 E+3	19,7 E+3	4,92 E+3	1,23 E+3
	64	99,5	995 E+3	39,8 E+3	9,95 E+3	2,49 E+3
Гистограмма двумерного нормального распределения						
Коэффициент корреляции	Количество интервалов группирования	Квадрат коэффициента вариации	Критический объем выборки при заданной погрешности измерений			
			1%	5%	10%	20%
0	16 x 16	4,02 E+3	40,2 E+6	1,61 E+6	402 E+3	101 E+3
	32 x 32	16,1 E+3	161 E+6	6,43 E+6	1,61 E+6	402 E+3
	64 x 64	64,4 E+3	644 E+6	25,7 E+6	6,44 E+6	1,61 E+6
0.4	16 x 16	3,69 E+3	36,9 E+6	1,47 E+6	369 E+3	92,1 E+3
	32 x 32	14,7 E+3	147 E+6	5,90 E+6	1,47 E+6	369 E+3
	64 x 64	59,0 E+3	590 E+6	23,6 E+6	5,90 E+6	1,47 E+6
0.8	16 x 16	2,41 E+3	24,1 E+6	965 E+3	241 E+3	60,3 E+3
	32 x 32	9,65 E+3	96,5 E+6	3,86 E+6	965 E+3	241 E+3
	64 x 64	38,6 E+3	386 E+6	15,4 E+6	3,86 E+6	965 E+3
0.9	16 x 16	1,75 E+3	17,5 E+6	701 E+3	175 E+3	43,8 E+3
	32 x 32	7,01 E+3	70,1 E+6	2,80 E+6	701 E+3	175 E+3
	64 x 64	28,0 E+3	280 E+6	11,2 E+6	2,80 E+6	701 E+3

Особенность ядерной оценки (6) состоит в том, что ее значения в различных точках x вычисляются независимо друг от друга, и при непрерывном изменении аргумента можно получить теоретически непрерывную кривую плотности вероятности. Однако ввиду естественных ограничений такую процедуру реализовать невозможно и приходится иметь дело с дискретным набором значений плотности. При этом практически предпочтительнее выбирать более простые ядра, в частности, в виде кусочно-постоянных функций. В этом случае появляется возможность предварительно группировать выборку $\{ x_k \}$ по аналогии с методом гистограмм. Известно [1], что по асимптотической относительной эффективности функция (7) только на 7 % лучше прямоугольного ядра вида

$$h_2(x) = 1/\Delta_2 , \quad |x| \le \Delta_2/2 \text{ (при этом } \Delta_2 = 1{,}789 \text{ с).} \tag{8}$$

В работе [12] впервые была показана равноценность по погрешностям измерений гистограммы и ортогонального разложения плотности вероятности по системе функций Хаара

[13, 14]. Отсюда был сделан важный для практики статистических измерений вывод: для получения гистограммы нет необходимости применять избыточную в целом процедуру определения коэффициентов ряда Фурье-Хаара; лучше воспользоваться, как и ранее, оценкой средних значений плотности вероятности на участках постоянства функций Хаара. Комбинированное использование оценок плотности вероятности гистограммного типа с аппроксимацией по системе функций Хаара и применением в качестве уточняющих знакопеременных парзеновских ядер предложено в [15, 16].

Следовательно, при всем многообразии методов оценивания плотности вероятности наибольшее значение для практики статистических измерений в качестве базовой имеет оценка в виде равноинтервальной гистограммы. Коэффициент вариации в этом случае

$$\upsilon_p^2 = \max_i \{ \upsilon_{p_i}^2 \} = \frac{1}{\min_i \{ P_i \}} - 1 = \frac{1}{P_{\min}} - 1 \qquad (9)$$

определяется минимальной по всем интервалам вероятностью пребывания случайного процесса $X(t)$ в интервале группирования, которая в свою очередь зависит от закона распределения вероятностей $p(x)$, диапазона анализа [a, b] и количества интервалов L.

При выборе диапазона анализа для расчета коэффициента вариации υ_p целесообразно воспользоваться следующими соображениями:

если плотность вероятности $p(x)$ отличается от нуля на конечном интервале [a, b] , то этот интервал и следует принять в качестве диапазона анализа;

если плотность вероятности $p(x)$ определена на всей числовой оси $(-\infty;\infty)$, то диапазон анализа $[a_0;b_0]$ выбирается по известному для нормального закона правилу "трех сигм", т.е. из условия $P\{a_0 \le x \le b_0\} = P_{\pm 3\sigma} \approx 0{,}9973$;

если плотность вероятности $p(x)$ определена на полубесконечном интервале $[a;\infty)$ или $(-\infty;b]$, то за диапазон анализа принимается интервал $[a;b_0]$ или $[a_0;b]$, вероятность попадания в который также равна $P_{\pm 3\sigma} \approx 0{,}9973$.

Здесь через $P_{\pm 3\sigma}$ обозначена вероятность пребывания нормального случайного процесса в интервале $[m_X - 3\sigma_X; m_X + 3\sigma_X]$. Результаты расчетов коэффициента вариации (9) и критического объема выборки (4) для 16, 32 и 64 интервалов группирования представлены в табл. 2.

Первая демонстрация практических результатов по сути двумерного анализа была предложена в работах [17, 18].

Практически при измерении двумерной плотности вероятности область, внутри которой необходимо нормировать метрологические характеристики статистической оценки, наиболее рационально ограничить линией постоянной плотности $p_0(x,y)$. В случае нормального распределения эта линия представляет собой эллипс с эксцентриситетом, зависящим от значения коэффициента корреляции. Вместе с тем вероятность попадания значений случайного процесса в двух временных сечениях в эллипс постоянной плотности, вписанный в квадрат так, что главная ось эллипса совпадает с диагональю квадрата, от коэффициента корреляции не зависит и для квадрата со стороной $d = 6\sigma_X$ принимает значение $P_e \approx 0{,}9889$.

Величина коэффициента вариации при выбранном количестве интервалов группирования $L \in \{16;32;64\}$ и различных значениях коэффициента корреляции $r \in \{0;0.4;0.8;0.9\}$ оценивалась по следующей приближенной формуле:

$$\upsilon^2_{p^{(2)}}(L,r) \approx \frac{1}{p_0(r,d)[\Delta x(L)]^2} - 1 = \left| \begin{array}{l} p_0(r,d) = \dfrac{\exp\left[-(0{,}5d)^2/2\right]}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \\ \Delta x(L) = d/L \quad ; \quad d = 6 \end{array} \right| =$$
$$= \frac{2\pi L^2\sqrt{1-r^2}}{d^2\exp(-d^2/8)} - 1 \approx 5{,}001\cdot\pi L^2\sqrt{1-r^2} - 1 \quad , \quad |r| < 1. \tag{10}$$

Как и следовало ожидать, количество измерительной информации (10) в совместном распределении уменьшается с ростом силы статистической связи между сечениями.

При практическом использовании значений критического объема выборки следует иметь в виду, что измерения двумерных характеристик предполагают в рассмотренном варианте усреднение по некоррелированным между собой парам выборок. Однако для сохранения информации о статистической взаимосвязи между сечениями принципиально необходимо, чтобы выборки внутри пары были коррелированными. Таким образом, объем выборки означает при измерении одномерных характеристик число некоррелированных отсчетов, а при измерении двумерных характеристик — число некоррелированных пар. Следовательно, при необходимости оценивать наряду с одномерными еще и двумерные характеристики количество отсчетов в измерительном файле будет в $l = \tau_{\max}/\Delta t$ раз больше приведенного в табл. 2 значения объема выборки (здесь l — число оцениваемых ординат корреляционной функции).

Выводы

Проведена современная научно-методическая комплексная систематизация процедуры экспериментального анализа случайных процессов, сводящаяся к трем концептуальным моментам: применению ПЭВМ, разработке ДНХ и созданию единого обобщенного алгоритма измерений с оценкой его метрологических показателей. Полученные результаты легко распространить на случай полей или редуцировать применительно к случайным величинам.

INTEGRATED EXPERIMENTAL ANALYSIS OF PROBABILISTIC CHARACTERICTICS OF STOCHASTIC PROCESSES

A.K. BITUS, E.V. SINKEVICH

Abstract

The common approach to measurements of the probability characteristics of stochastic processes and estimation of their errors is proposed. The concept of generalized coefficient of a variation is used, that allowed to present statistical errors of measurements of the major probability characteristics in convenient form for comparison. The numerical outcomes of an error analysis for stochastic processes with the six distribution laws of probabilities (normal, uniform, Rayleigh, one-sided exponential, Simpson and arcsine) are adduced.

Литература

1. *Губарев В.В.* Алгоритмы статистических измерений. М., 1985.
2. *Битус А.К.* // Исследование и разработка современных радиоэлектронных элементов и устройств: Тез. докл. Респ. НТК. Рига, 1989. С. 59–60.
3. *Битус А.К.* // Радиотехника и электроника. Мн., 1990. Вып. 19. С. 178–180.
4. *Мирский Г.Я.* Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., 1972.
5. *Цветков Э.И.* Основы теории статистических измерений. М., 1985.
6. *Битус А.К., Синькевич Е.В.* // Изв. Белорус. инж. акад. 2001. № 1/1. С. 32–34.
7. Крамер Г. Математические методы статистики: Пер. с англ. / Под ред. А.Н. Колмогорова. М., 1975.

8. *Мирский Г.Я.* Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М., 1982.
9. *Горбенко В.С.* Изв. вузов. Радиотехника, 1962. № 2.
10. *Маляревский Н.М.* Изв. вузов. Радиотехника, 1962. № 2.
11. *Parsen E.* // Ann. Math. Stat. 1962. Vol. 33, No. 3.
12. *Битус А.К.* // Тр. VII Всесоюз. симпозиума "Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей". Л. 1974. Т. 3. С. 120–123.
13. *Битус А.К., Овсяников В.А.* // Тр. V Всесоюз. симпозиума "Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей". Л., 1972. Т. 3. С. 126–131.
14. А.с. №377703 (СССР). Многоканальное устройство для измерения плотности вероятности случайных процессов / Битус А.К., Овсяников В.А. МРТИ. Заявл. 04.11.71, № 1712136/18–24.
15. А.с. №1332334 (СССР). Устройство для оценки плотности вероятности случайного сигнала / Битус А.К., Карлович А.В., Пахоменко А.В. МРТИ. Заявл. 16.04.86, № 4055403/24–24.
16. *Битус А.К., Карлович А.В., Пахоменко А.В.* // Радиотехника и электроника. Мн., 1990. Вып. 19. С. 85–88.
17. *Битус А.К., Синькевич Е.В.* Материалы 3-й Междунар. науч.-практ. конф. "Вузовская наука, промышленность, международное сотрудничество". В 2 ч. Ч. 1. Мн., 2000. С. 148–152.
18. *Битус А.К., Синькевич Е.В.* Материалы Междунар. науч.-метод. конф. "Дистанционное обучение — образовательная среда XXI века". 18–20 дек. 2001 г. Мн., 2001. С. 86–88.