ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2018, том 7, № 2, с. 133–137

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.925.7

ПЕНЛЕВЕ-АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ТРЕХМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

© 2018 г. В. В. Цегельник

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

e-mail: tsegvv@bsuir.by

Поступила в редакцию 27.12.2017 г.

В работе исследованы аналитические свойства решений одного класса (включающего 4 семейства) трехмерных динамических диссипативных систем с квадратичными нелинейностями. Общим (с качественной точки зрения) для всех систем данного класса является отсутствие у них хаотического поведения. В предположении, что независимая переменная является комплексной, проведен Пенлеве-анализ решений каждой из систем рассматриваемого класса.

Исследование характера подвижных особенностей решений систем проводилось по двум направлениям. Первый подход основан на сведении некоторых систем к эквивалентным им дифференциальным уравнениям второго или третьего порядка с полиномиальной (относительно искомой функции и ее производных) правой частью и последующем сравнении полученных уравнений с известными уравнениями Пенлеве-типа. Второй подход базировался на применении теста Пенлеве к остальным системам рассматриваемого класса.

Установлено, что все системы, (за исключением одной) не являются системами Пенлеве-типа. При этом среди них имеются системы, у которых одна из компонент решения вообще не имеет подвижных особых точек. Общее решение единственной системы, являющейся системой Пенлеве-типа, также не имеет подвижных особых точек. Выделены автономные уравнения третьего порядка, не являющиеся уравнениями Пенлеве-типа и не обладающие хаотическим поведением.

Ключевые слова: динамические системы, тест Пенлеве, свойство Пенлеве, подвижная особая точка

DOI: 10.1134/S2304487X18020086

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных событий в классической нелинейной физике середины XX века было осознание того факта, что нелинейные детерминированные уравнения (системы) могут иметь хаотические решения, которые проявляют чувствительную зависимость от начальных условий и долгосрочную непредсказуемость. Интересной и пока нерешенной проблемой является определение минимально необходимых условий для хаоса.

В работе [1] с помощью компьютерного моделирования получено 19 динамических систем третьего порядка со сложным хаотическим поведением, которые алгебраически проще, чем известные системы Лоренца и Рёсслера. Характерное отличие указанных систем Спротта состоит в том, что их правые части содержат 6 компонент с одной квадратичной нелинейностью либо 5 компонент с двумя квадратичными нелинейностями.

В работе [2] выделен класс (включающий четыре семейства) диссипативных нелинейных динамических систем третьего порядка без хаотического поведения

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{1.1}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = -z. \tag{1.2}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{1.3}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = -z. \tag{1.4}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = z - y, \quad \dot{z} = x. \tag{1.5}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x - z. \tag{1.6}$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = x - z. \tag{1.7}$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y - z. \tag{1.8}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = -z. \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = y^2 + z^2, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = -z. \tag{2.2}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = \varepsilon y. \tag{2.3}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = kz. \tag{2.4}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x. \tag{2.5}$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -z. \tag{2.6}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = -z. \tag{2.7}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -z. \tag{2.8}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = \varepsilon x. \tag{2.9}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y. \tag{2.10}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = kz. \tag{2.11}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = y. \tag{2.12}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = \varepsilon x. \tag{2.13}$$

$$\dot{x} = \varepsilon y - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = x^2. \tag{2.14}$$

$$\dot{x} = \varepsilon y - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \tag{2.15}$$

$$\dot{x} = y - x, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x^2. \tag{2.16}$$

$$\dot{x} = y - x, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = xy. \tag{2.17}$$

$$\dot{x} = x^2 + yz, \quad \dot{y} = -2xy, \quad \dot{z} = -z. \tag{3.1}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = -z. \tag{3.2}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = -z. \tag{3.3}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = -z. \tag{3.4}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -z. \tag{3.5}$$

$$\dot{x} = xy - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -yz. \tag{3.6}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = x^2. \tag{3.7}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \tag{3.8}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x^2. \tag{3.9}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = xy. \tag{3.10}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = \varepsilon xy. \tag{3.11}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y^2. \tag{3.12}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = y^2. \tag{3.13}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = x^2. \tag{3.14}$$

$$\dot{x} = \varepsilon + y^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -z. \tag{4.1}$$

$$\dot{x} = 1 + yz, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = -z. \tag{4.2}$$

$$\dot{x} = 1 - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \tag{4.3}$$

$$\dot{x} = y^2 - x, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = 1. \tag{4.4}$$

$$\dot{x} = yz - x, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = 1 \tag{4.5}$$

с неизвестными функциями x, y, z независимой переменной t, где k – параметр ($k < 1$) и $\varepsilon^2 = 1$.

Каждая из приведенных выше систем является, как уже отмечалось, диссипативной и содержит четыре компоненты в правой части. Правые части систем (1.1)–(1.8), (2.1)–(2.17), (3.1)–(3.14) содержат одну, две, три квадратичные нелинейности соответственно. Правые части систем (4.2)–(4.5) содержат одну константу и две квадратичные нелинейности.

Полагая независимую переменную t комплексной, выясним не имеет ли общие решения приведенных выше систем подвижных критических особых точек, т.е. выполняется ли для них так называемое свойство Пенлеве. Системы (уравнения) со свойством Пенлеве называют системами (уравнениями) Пенлеве-типа или P-типа.

1. Система (1.1) эквивалентна уравнению

$$\ddot{y} = y^2 - \dot{y}. \tag{1}$$

Система (1.2) эквивалентна уравнению

$$\ddot{y} = y^2 + Ce^t, \tag{2}$$

где C – произвольная постоянная.

Система (1.3) имеет первый интеграл $x + y - \frac{z^2}{2} = H$ (H – произвольная постоянная) и поэтому эквивалентна уравнению

$$\ddot{z} + \dot{z} - \frac{z^2}{2} = H. \tag{3}$$

Система (1.4) также эквивалентна уравнению (2). Каждая из систем (1.5), (1.6) эквивалентна уравнению (1). Система (1.8) эквивалентна уравнению

$$\dddot{z} + \ddot{z} - z \cdot \dot{z} - z^2 = 0. \tag{4}$$

Отметим, что уравнения (2), (3) не содержатся в списке [3] уравнений, общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек. Уравнение (4) не входит в список [4] уравнений $\dddot{u} = P(t, u, \dot{u}, \ddot{u})$ где P – многочлен относительно u, $\dot{u}$, $\ddot{u}$ с аналитическими по t коэффициентами, общие решения которых свободны от подвижных критических особых точек. В силу этого система (1.8) не является системой Пенлеве-типа.

Система (1.7) эквивалентна уравнению

$$y\dddot{y} + y\ddot{y} - \dot{y}\ddot{y} - y^2\dot{y} = 0. \tag{5}$$

Для выяснения вопроса о том, является ли система (1.7) системой Пенлеве-типа используем тест Пенлеве. Под формальным тестом Пенлеве понимается любой алгоритм, обеспечивающий проверку выполнения условий, необходимых для наличия у дифференциального уравнения (системы) свойства Пенлеве. Исследование системы (1.7) проводилось по той же схеме как в [5].

Теорема 1. Системы (1.2), (1.4) не являются системами P-типа. Вместе с тем компонента z данных систем вообще не имеет подвижных особых точек.

Теорема 2. Системы (1.1), (1.3), (1.5), (1.6), (1.8) не являются системами P-типа.

Теорема 3. Система (1.7) не является системой Пенлеве-типа.

Справедливость данного утверждения следует из того, что для системы (1.7) не выполняется условие 3-го шага теста Пенлеве, а именно: система для определения постоянных в формальных лорановских разложениях решений системы (1.7) не является совместной.

Следствие 1. Уравнение (5) не является уравнением P-типа.

2. Системы (2.1), (2.2), (2.4), (2.6)–(2.8), (2.11) в силу того, что неизвестная функция находится в явном виде (и вообще не имеет подвижных особых точек) сводятся к нелинейным неавтономным уравнениям второго порядка, решения которых согласно [3] не обладают свойством Пенлеве. Таким образом, справедлива

Теорема 4. Ни одна из систем (2.1), (2.2), (2.4), (2.6)–(2.8), (2.11) не является системой Пенлеве-типа. Вместе с тем компонента z данных систем вообще не имеет подвижных особых точек.

Теорема 5. Ни одна из систем (2.5), (2.10), (2.16), (2.17) не является системой P-типа. Доказательство данной теоремы следует из того, что для каждой из указанных систем не выполняется условие первого шага теста Пенлеве.

Системы (2.3), (2.9), (2.12), (2.15) эквивалентны уравнениям

$$z\dddot{z} = \dot{z}\ddot{z} - z\ddot{z} + \varepsilon\dot{z}^2 z^2, \tag{6}$$

$$z\dddot{z} = \dot{z}\ddot{z} - z\ddot{z} + \varepsilon\dot{z}^2 z^2 + \dot{z}^2, \tag{7}$$

$$z\dddot{z} = \dot{z}\ddot{z} - z\ddot{z} + \varepsilon\dot{z}z^3, \tag{8}$$

$$x\dddot{x} = \dot{x}\ddot{x} - x\ddot{x} + \varepsilon x^2(\dot{x} + x)^2 + \dot{x}^2. \tag{9}$$

Система (2.13) и система (2.14) эквивалентны уравнению

$$w\dddot{w} = \dot{w}\ddot{w} - w\ddot{w} + \dot{w}^2 + \varepsilon w^4 \tag{10}$$

по z и x соответственно.

Теорема 6. Ни одна из систем (2.3), (2.9), (2.12)–(2.15) не является системой Пенлеве-типа. Применение к системам (2.3), (2.9), (2.13)–(2.15) теста Пенлеве показывает, что для них не выполняется условие первого шага данного теста. Что касается системы (2.12), то для нее не выполняется условие третьего шага теста: система для определения постоянных в формальных лорановских разложениях решений системы (2.12) не является совместной.

Следствие 2. Ни одно из уравнений (6)–(10) не является уравнением P-типа.

3. Анализ систем (3.1), (3.3), (3.5) показывает, что каждая из них допускает понижение порядка и они редуцируются к нелинейным неавтономным уравнениям второго порядка, которые не входят в список [3] уравнений P-типа. Следовательно, справедлива

Теорема 7. Ни одна из систем (3.1), (3.3), (3.5) не является системой Пенлеве типа. Вместе с тем компонента z данных систем вообще не имеет подвижных особых точек.

Каждая из систем (3.2), (3.4), (3.14) допускает понижение порядка. При этом справедлива

Теорема 8. Ни одна из систем (3.2), (3.4), (3.14) не является системой Пенлеве-типа. Вместе с тем одна из компонент (z для (3.2), (3.4) и для (3.14)) вообще не имеет подвижных критических особых точек.

Теорема 9. Система (3.6) является системой Пенлеве-типа. Ее общее решение имеет вид

$$x = \frac{\dot{y}}{z}, \quad z = c_3 e^{-c_1 t + c_2 e^{-t}},$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-t},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Действительно, система (3.6) $\dot{x} = xy - x$, $\dot{y} = xz$, $\dot{z} = -yz$ имеет первый интеграл $xz + y = c$, позволяющий свести ее к линейному уравнению $\dot{y} + y = c$ и найти в явном виде y.

Для систем (3.7), (3.9), (3.10), (3.12) не выполняется условие второго шага теста Пенлеве: резонансные уравнения имеют два комплексно-сопряженных корня с положительной действительной частью.

Системы (3.8), (3.11), (3.13) не проходят третий шаг теста Пенлеве:

1. Система для определения формальных постоянных в лорановских разложениях решений системы (3.8) не является совместной.

2. Лорановские разложения решений системы (3.11) содержат 2 (вместо 3-х) произвольных постоянных. При этом резонансное уравнение имеет положительный корень кратности 2. Система (3.11) при этом имеет первый интеграл

$$\frac{x^2}{2} + \frac{\varepsilon z^2}{2} + y = K,$$

где K – произвольная постоянная.

3. Лорановские разложения решений системы (3.13) содержат 2 (вместо 3-х) произвольных

постоянных. Резонансное уравнение имеет такой же как и в случае системы (3.11) положительный корень кратности 2.

Теорема 10. Ни одна из систем (3.8), (3.11), (3.13) не является системой P-типа.

Системы (4.1)–(4.5) сводятся к двумерным неавтономным системам, каждая из которых не проходит тест Пенлеве. Таким образом, справедлива

Теорема 11. Ни одна из систем (4.1)–(4.5) не является системой Пенлеве-типа. Вместе с тем одна из компонент (z для (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) и x для (4.3)) вообще не имеет подвижных особых точек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье проведен сингулярный анализ решений класса трехмерных нелинейных динамических диссипативных систем без хаотического поведения с квадратичными нелинейностями. Общее число компонент в правых частях каждой из систем равно четырем. Установлено, что среди всех рассмотренных систем только одна система является системой Пенлеве-типа, несмотря на то, что условия формального теста Пенлеве (1 шаг) для нее не выполняются. Для некоторых систем из рассмотренного класса построены эквивалентные им нелинейные дифференциальные уравнения третьего порядка, не имеющие хаотического поведения и не являющиеся уравнениями Пенлеве-типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. 647–650.
2. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems // Nonlinearity. 1999. V. 10. P. 1289–1303.
3. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.
4. *Cosgrove C.M.* Higher-order Painleve' equation in the polynomial class. I // Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. № 1. P. 1–65.
5. *Цегельник В.В.* Аналитические свойства решений одного класса нелинейных динамических систем третьего и четвертого порядка с хаотическим поведением // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2015. Т. 4. № 2. С. 101–106.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2018, vol. 7, no. 2, pp. 133–137

Painlevé Analysis of Solutions for One Class of Three-Dimensional Nonlinear Dissipative Systems

V. V. Tsegel'nik

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220013 Belarus

e-mail: tsegvv@bsuir.by

Abstract—The analytical properties of solutions for one class (including four families) of three-dimensional dynamical dissipative systems with quadratic nonlinearities have been investigated. The absence of a chaotic behavior is a common qualitative property of all systems of this class. Under the assumption that the independent variable is complex, the Painlevé analysis of solutions for each of the systems of this class has been performed. The nature of the movable singularities for solutions of the systems has been studied within two approaches. The first approach is based on the reduction of some systems to equivalent differential equations of the second or third order with a polynomial (with respect to the unknown function and its derivatives) right-hand side and subsequent comparison of the obtained equations with the well-known Painlevé-type equations. The second approach is based on the application of the Painlevé test to the other systems of this class. It has been found that none of the systems (with one exception) is a Painlevé-type system. Moreover, these systems include systems in which one component of the solution has no movable singular points at all. The general solution of one system, which is a Painlevé-type system, has also no movable singular points. Autonomous third-order equations that neither belong to the Painlevé type nor show a chaotic behavior have been separated.

Keywords: dynamical systems, Painlevé test, Painlevé property, movable singular point

DOI: 10.1134/S2304487X18020086

REFERENCE

1. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows. *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50. P. 647–650.
2. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems. *Nonlinearity.* 1999. Vol. 10. P. 1289–1303.
3. *Ince E.L.* Obiknovennye differentsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations. Kharkov, GNTIU, 1939. 720 p.
4. *Cosgrove C.M.* Higher-order Painleve' equation in the polynomial class. I. *Stud. Appl. Math.* 2000. Vol. 104. № 1. P. 1–65.
5. *Tsegel'nik V.V.* Analiticheskie svoistva resheniy avtonomnykh system nelineinykh differentsial'nykh uravneniy tret'ego i chetvertogo poryadkov s chaoticheskim povedeniem [Analytical properties of solutions to autonomous systems of nonlinear third and fourth-order differential equations with chaotic behavior]. *Vestnik NIYaU MIFI.* 2015, vol. 4, no. 2. pp. 101–106 (in Russian).