УДК 517.514

ВЕКТОРНЫЕ ОДНОСВЯЗНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

К.С. КОРЧИЦ, В.С. МУХА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 19 сентября 2003

Математический аппарат цепей Маркова находит применение в различных областях знаний. Наибольшее развитие получили одномерные цепи Маркова, т.е. случай, когда исследуемая система характеризуется скалярной величиной. Анализ одномерной односвязной цепи Маркова осуществляется с помощью матрицы вероятностей перехода цепи. Анализ усложняется в случае многосвязной цепи Маркова. В связи с этим в работе [1] была предпринята попытка использовать для анализа многосвязных одномерных цепей Маркова аппарат многомерных матриц [2]. Этот же аппарат можно успешно применить для анализа векторных односвязных цепей Маркова, теория которых в настоящее время отсутствует в литературе. Данная работа посвящена решению этого вопроса.

Ключевые слова: цепи Маркова, уравнение Чэпмена–Колмогорова, случайная последовательность, матрицы вероятностей.

Скалярная односвязная цепь Маркова

Пусть $\xi(s)$, $s = 0,1,2,\ldots$, — дискретная скалярная случайная последовательность или, иначе, скалярный случайный процесс с дискретным множеством значений (состояний) $E = (e_i)$, $i = \overline{1,k}$, и дискретным временем $T = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_s, \ldots\}$. Как известно [3], такой процесс называется однородной цепью Маркова, если он полностью определяется матрицей вероятностей перехода за один шаг $P = (p_{i,j})$, $i, j = \overline{1,k}$, и вектором вероятностей состояний в начальный момент времени $A(0) = (a_i(0))$, $i = \overline{1,k}$, не зависящими от момента времени s. В дальнейшем будем рассматривать только однородные цепи Маркова. Для матрицы вероятностей перехода за n шагов $P(n) = (p_{i,j}(n))$, $i, j = \overline{1,k}$, справедливо уравнение Чэпмена–Колмогорова:

$$P(n) = P(m)P(n-m) = PP(n-1) = P^n, \tag{1}$$

а для вектора безусловных вероятностей в n-й момент времени (на n-м шаге) $A(n) = (a_i(n))$, $i = \overline{1,k}$, — уравнение

$$A(n) = A(0)P(n) = A(0)P^n. \tag{2}$$

Векторная односвязная цепь Маркова

Пусть теперь $\overline{\xi}(s)=(\xi_i(s))$, $i=\overline{1,q}$, $s=0,1,2,...$, — дискретная векторная случайная последовательность или, иначе, векторный случайный процесс с дискретным множеством значений (состояний) и дискретным временем. Каждая i-я компонента $\xi_i(s)$ этого вектора может принимать различное число значений, так что множество состояний описывается совокупностью

$E=(e_{i,j_i})$, $i=\overline{1,q}$, $j_i=\overline{1,k_i}$.

Это множество представляет собой матрицу из q строк, и строки имеют различное число элементов.

Вероятности возможных значений процесса на s-м шаге будем обозначать как

$$A(s)=P(\xi_1(s)=e_{1,i_1},\xi_2(s)=e_{2,i_2},...,\xi_q(s)=e_{q,i_q})=(a_{i_1,i_2,...,i_q}(s)),$$
$$i_1=\overline{1,k_1},\ i_2=\overline{1,k_2},\ ...,\ i_q=\overline{1,k_q}.$$

Это q-мерная гиперпрямоугольная матрица размером $k_1\times k_2\times\cdots\times k_q$. Для упрощения обозначений введем понятие мультииндекса $i=(i_1,i_2,...,i_q)$. Тогда матрицу безусловных вероятностей $A(s)$ можно обозначать аналогично скалярной односвязной цепи Маркова в виде

$$A(s)=(a_i(s)). \qquad (3)$$

Сумма элементов этой матрицы должна равняться единице, т.е.

$$\sum_i a_i(s)={}^qA(s)=1.$$

Здесь ${}^qA(s)$ обозначена q-свернутая матрица для $A(s)$ [2].

Вероятности перехода цепи за один шаг сведем в матрицу вероятностей перехода

$$P=P(\xi_1(s)=e_{1,j_1},...,\xi_q(s)=e_{q,j_q}/\xi_1(s-1)=e_{1,i_1},...,\xi_q(s-1)=e_{q,i_q})=$$
$$=(p_{i_1,i_2,...,i_q,j_1,j_2,...,j_q}),$$
$$i_1,j_1=\overline{1,k_1},\ i_2,j_2=\overline{1,k_2},\ ...,\ i_q,j_q=\overline{1,k_q}.$$

Это $2q$-мерная матрица размером $k_1\times k_2\times\cdots\times k_q\times k_1\times k_2\times\cdots\times k_q$. Если рассматривать q-мультииндексы $i=(i_1,i_2,...,i_q)$, $j=(j_1,j_2,...,j_q)$, то матрицу вероятностей перехода за один шаг также можно обозначить аналогично скалярной односвязной цепи Маркова в виде $P=(p_{i,j})$. Матрица перехода P обладает свойством

$$\sum_j p_{i,j}=1\ \forall i,$$

или в матричной форме

$$\left(\sum_j p_{i,j}\right)={}^qP=(1_i),$$

где (1_i) — q-мерная матрица размером $k_1\times k_2\times\cdots\times k_q$, все элементы которой равны 1, а ${}^qP$ обозначена q-свернутая матрица для P [2].

Аналогично матрице вероятностей перехода за один шаг определим матрицу вероятностей перехода за n шагов

$$P(n)=P(\xi_1(s)=e_{1,j_1},\dots,\xi_q(s)=e_{q,j_q}/\xi_1(s-n)=e_{1,i_1},\dots,\xi_q(s-n)=e_{q,i_q})=$$

$$=(p_{i_1,i_2,\dots,i_q,j_1,j_2,\dots,j_q}(n))=(p_{i,j}(n)),\ s>n,$$

$$i_1,j_1=\overline{1,k_1},\ i_2,j_2=\overline{1,k_2},\ \dots,\ i_q,j_q=\overline{1,k_q},$$

ясно, что $P(1)=P$ $i,\ j$ — q-мультииндексы. По определению примем, что

$$P(0)=E(0,q), \tag{4}$$

где $E(0,q)$ — $(0,q)$-единичная матрица [2], поскольку за 0 шагов система с вероятностью 1 останется в прежнем состоянии. Матрица вероятностей перехода за n шагов обладает теми же свойствами, что и матрица вероятностей перехода за один шаг. Кроме того, по формуле полной вероятности можно получить уравнение Чэпмена–Колмогорова

$$P(n)=(p_{i,j}(n))=(\sum_{\mu}p_{i,\mu}(m)p_{\mu,j}(n-m))={}^{0,q}(P(m)P(n-m))={}^{0,q}P^n,\ n\ge m.$$

В частности, при $m=1$ получаем

$$P(n)={}^{0,q}(P(1)P(n-1)). \tag{5}$$

С учетом свойства (4) это уравнение справедливо и при $n=1$, поскольку

$$P(1)={}^{0,q}(P(1)P(0))={}^{0,q}(P(1)E(0,q))=P(1).$$

Для матрицы безусловных вероятностей на n-м шаге получаем уравнение

$$A(n)=(a_i(n))=(\sum_{\mu}a_{\mu}(0)p_{\mu,i}(n))={}^{0,q}(A(0)P(n))={}^{0,q}(A(0)\,{}^{0,q}P^n), \tag{6}$$

где $A(0)$ — матрица безусловных вероятностей на нулевом шаге. Здесь используется понятие $(0,q)$-свернутого произведения двух многомерных матриц и $(0,q)$-свернутой n-й степени многомерной матрицы [2].

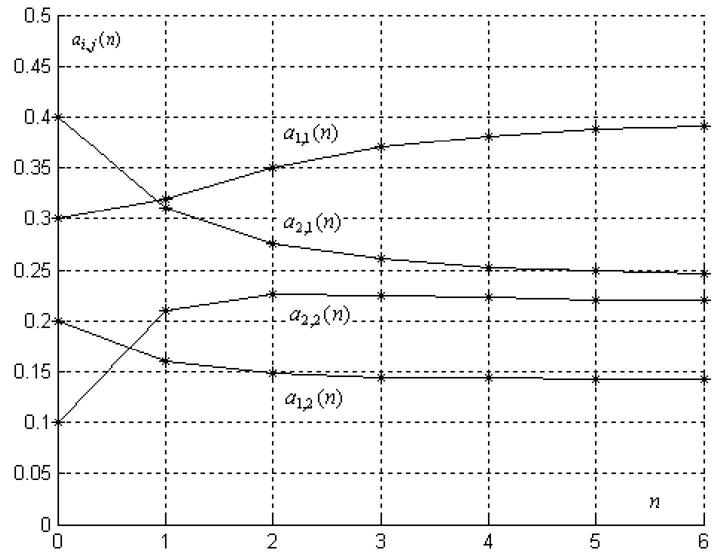
Таким образом, с помощью многомерно-матричного подхода мы получили простое обобщение соотношений (1), (2) для скалярных однородных цепей Маркова на случай векторных однородных цепей Маркова. Соотношения (1), (2) являются частным случаем соотношений (5), (6) при $q=1$.

П р и м е р. Изложенную теорию проиллюстрируем на примере цепи Маркова с параметрами $q=2, k_1=k_2=k=2$ и матрицами

$$A(0)=(a_{i,j}(0))=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}1\end{pmatrix},$$

$$P=P(1)=(p_{i,j,l,m})=\begin{pmatrix}\overset{(1,1,1,1)}{0{,}7} & \overset{(1,1,2,1)}{0{,}1} & \overset{(1,1,1,2)}{0{,}1} & \overset{(1,1,2,2)}{0{,}1}\\ \overset{(2,1,1,1)}{0{,}1} & \overset{(2,1,2,1)}{0{,}6} & \overset{(2,1,1,2)}{0{,}1} & \overset{(2,1,2,2)}{0{,}2}\\ \overset{(1,2,1,1)}{0{,}2} & \overset{(1,2,2,1)}{0{,}1} & \overset{(1,2,1,2)}{0{,}4} & \overset{(1,2,2,2)}{0{,}3}\\ \overset{(2,2,1,1)}{0{,}3} & \overset{(2,2,2,1)}{0{,}2} & \overset{(2,2,1,2)}{0{,}1} & \overset{(2,2,2,2)}{0{,}4}\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы P снабжены сверху в скобках значениями индексов. По формулам (5), (6) при $n=1,2,\dots,6$ были получены матрицы безусловных вероятностей $A(n)$. Для выполнения расчетов использовался интегрированный в Delphi пакет научных программ "Анализ многомерных данных"[4], позволяющий производить расчеты при любых q,k. На рисунке приведены графики безусловных вероятностей $a_{i,j}(n)$ рассмотренной цепи Маркова. Мы видим, что для данной векторной цепи Маркова существуют предельные (стационарные) вероятности.



Графики безусловных вероятностей $a_{i,j}(n)$

VECTORIAL 1-CONNECTED MARKOV CHAINS

K.S. KORCHITS, V.S. MUKHA

Abstract

On the basis of multidimension–matrix approach a theory of vector single related Markovian chains, not mentioned in the literature, is developed. An example of analysis of vector single related Markovian chain is considered.

Литература

1. *Яншин В.В.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1108–1112.
2. *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. Киев, 1972.
3. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М., 1988.
4. *Корчиц К.С., Муха В.С.* // Изв. Белорус. инж. акад.. 2002. № 1/2. С. 246–249.